2.5 DÉRIVÉE IMPLICITE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR

cours 13

Au dernier cours, nous avons vu

f n'est pas continue en a $\implies$ f n'est pas dérivable en a.

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Équations implicite
- ✓ Dérivée implicite
- ✓ Dérivée d’ordre supérieur

Lors des derniers cours, on a vu comment trouver:

$$y = f(x)$$

$$y' = f'(x)$$

Un fonction

Une fonction qui donne la pente de la droite tangente à la fonction au point

$$(x, f(x))$$

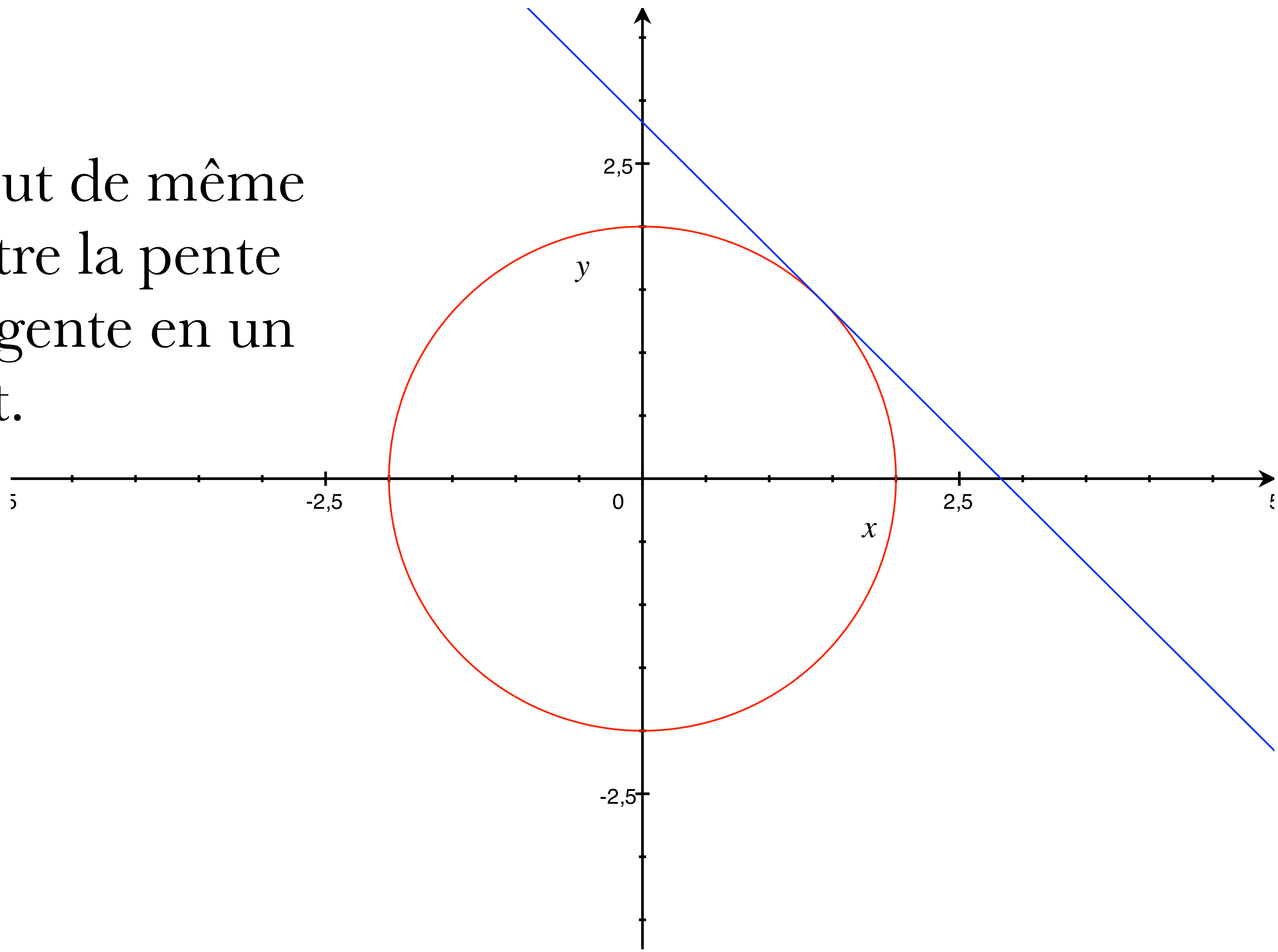
Mais il faut commencer par ça

Regardons l'équation $x^2 + y^2 = 4$

qui est l'équation d'un cercle de rayon 2.

Ce n'est pas une fonction.

Mais on peut tout de même vouloir connaître la pente de la droite tangente en un point.

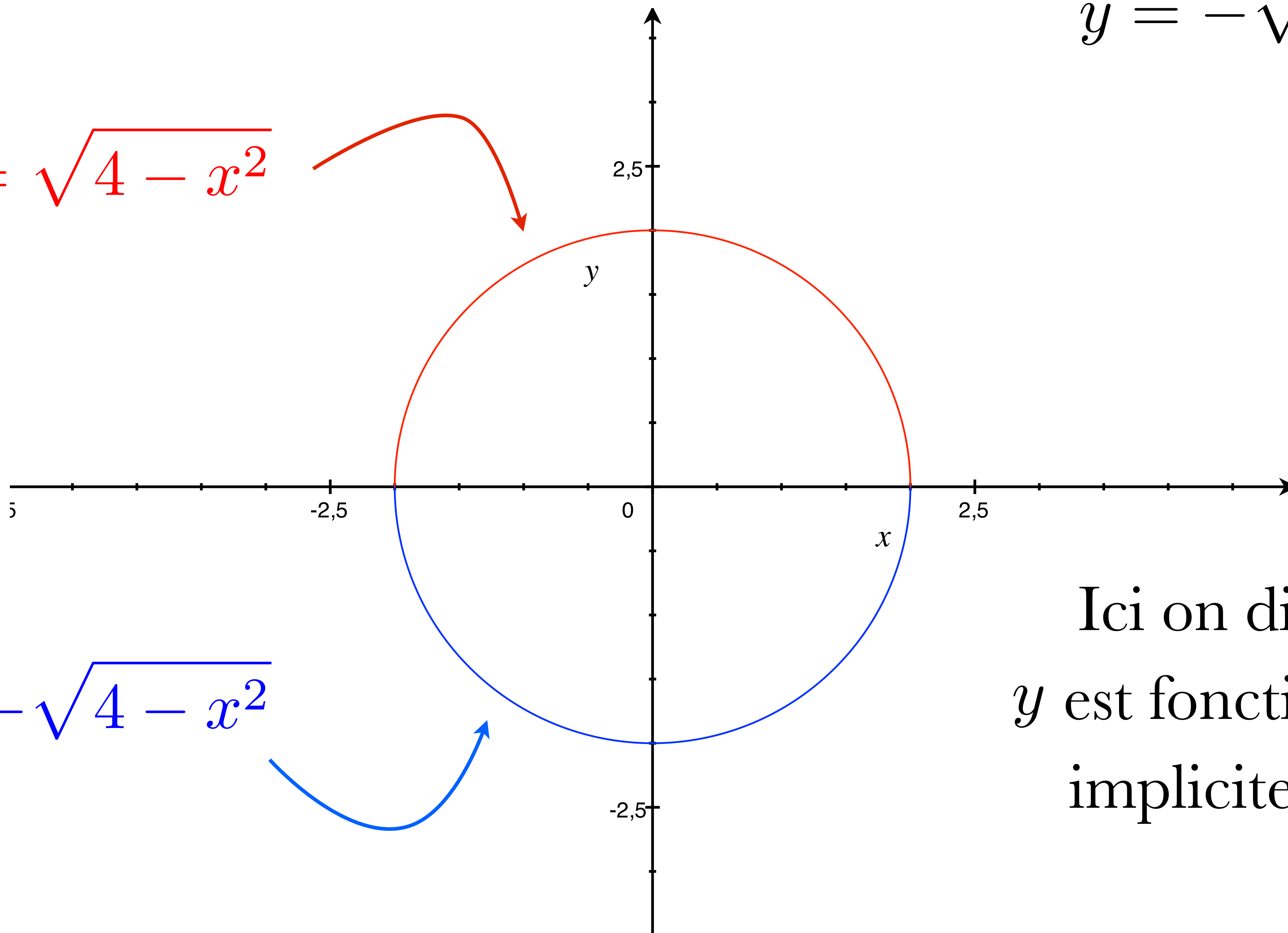


La raison pour laquelle ce n'est pas une fonction est qu'on ne peut pas isoler directement y

$$x^2 + y^2 = 4 \implies y^2 = 4 - x^2 \implies \begin{array}{c} y = \sqrt{4 - x^2} \\ \text{ou} \\ y = -\sqrt{4 - x^2} \end{array}$$

$y = \sqrt{4 - x^2}$

$y = -\sqrt{4 - x^2}$



Ici on dit que y est fonction de x implicitement.

Si l'on a une équation liant deux variables,

on peut dire qu'une des variables est fonction de l'autre.

Si une des variables est isolée alors on dira

qu'elle est fonction de l'autre explicitement.

Si une des variables n'est pas isolée alors on dira

qu'elle est fonction de l'autre implicitement.

Faites les exercices suivants

Section 2.5 # 34

Revenons à l'équation $x^2 + y^2 = 4$

où y est fonction de x implicitement.

Pourquoi le «implicite»?

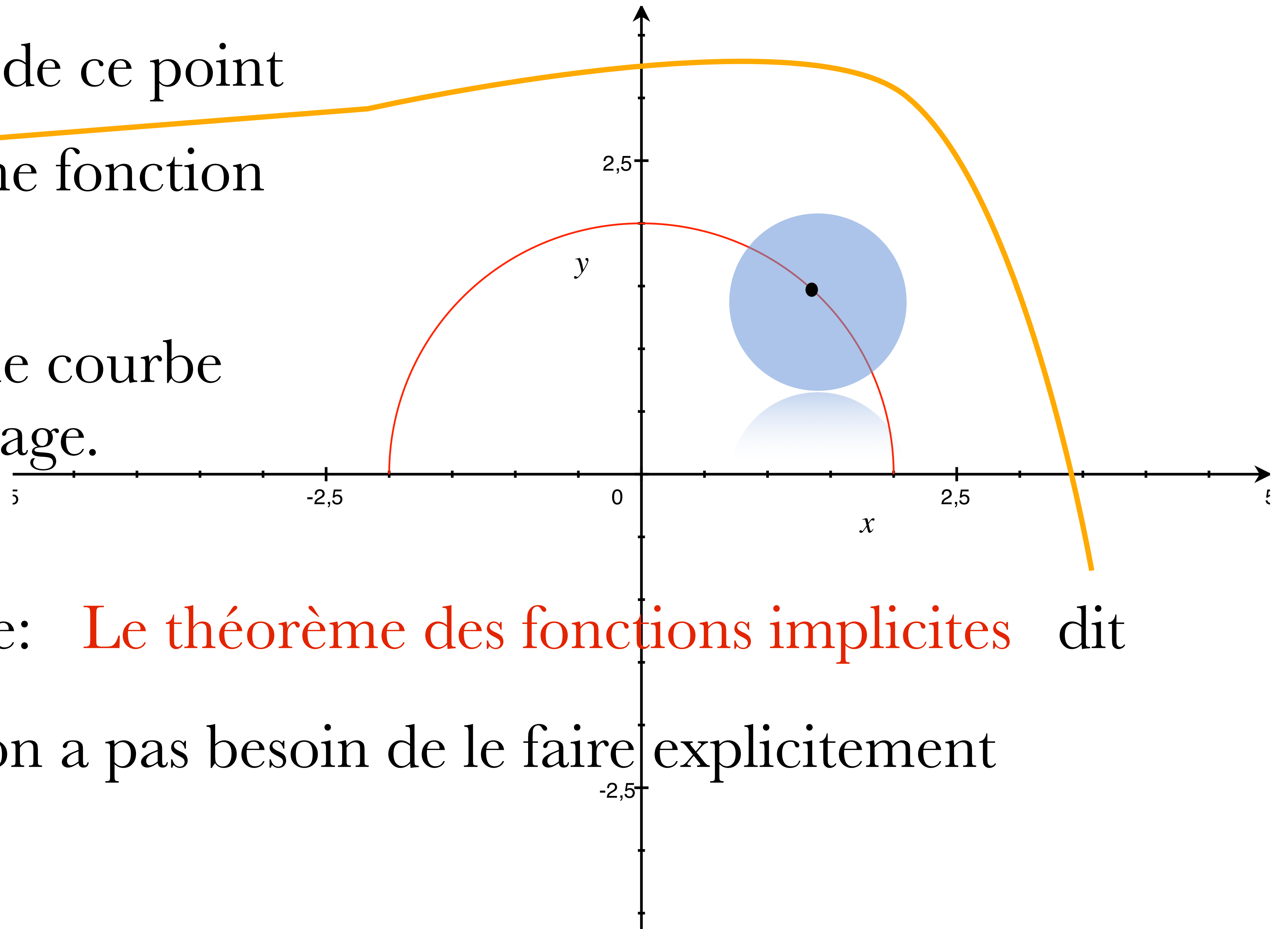
Si l'on prend un point sur la courbe qui satisfait l'équation

Pour un voisinage de ce point

on peut trouver une fonction

$$y = f(x)$$

qui donne la même courbe dans le voisinage.



Un grand théorème: Le théorème des fonctions implicites dit

Mais on a pas besoin de le faire explicitement

$$x^2 + y^2 = 4$$

On veut trouver $\dfrac{dy}{dx}$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

Mais y est implicitement fonction de x

$$\Longrightarrow \quad \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = 0$$

$''y = f(x)''$ localement

$$\Longrightarrow \quad 2x + \frac{d(y^2)}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

dérivée en chaine

$$\Longrightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

on isole

$$\Longrightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$x^2 + y^2 = 4$ On veut trouver $\dfrac{dy}{dx}$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 4} \implies \frac{dy}{dx} = \boxed{-\frac{x}{y}}$$

la dérivée fait intervenir x et y

Mais pas n'importe quel x et n'importe quel y

Les x et les y qui satisfont à

$$x = 1 \implies 1^2 + y^2 = 4 \qquad y^2 = 3 \qquad y = \pm\sqrt{3}$$

pour le point $(1, \sqrt{3})$ on a $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,\sqrt{3})} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

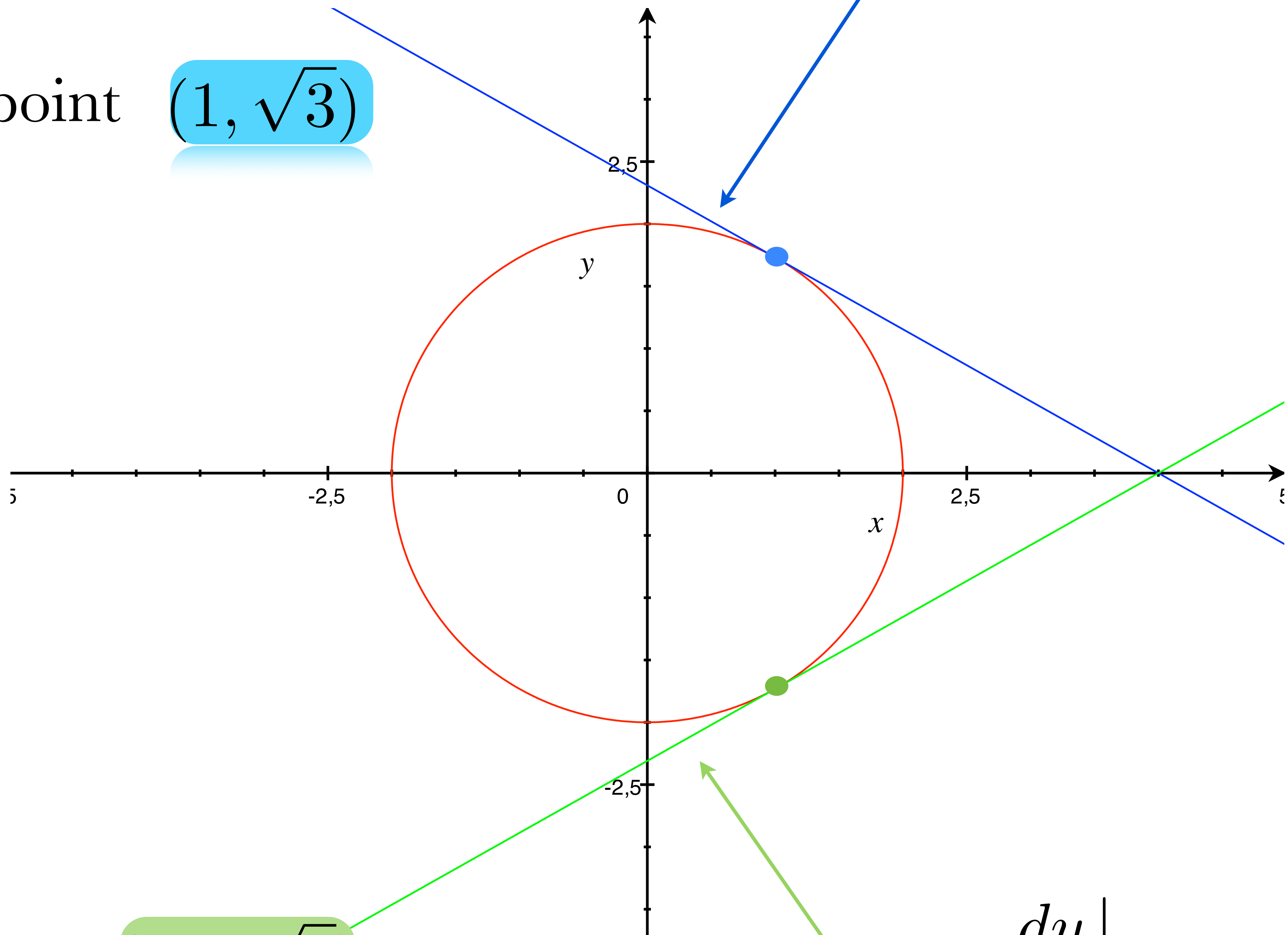
pour le point $(1, -\sqrt{3})$ on a $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,-\sqrt{3})} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$x^2 + y^2 = 4$$

pente de cette droite

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\sqrt{3})} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

pour le point $\boxed{(1, \sqrt{3})}$



pour le point $\boxed{(1, -\sqrt{3})}$

pente de cette droite

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-\sqrt{3})} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Exemple Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ pour $4xy - 2x^3 + 4 = y^2 + x^3\sqrt{y}$

$$\frac{d}{dx}(4xy - 2x^3 + 4) = \frac{d}{dx}(y^2 + x^3\sqrt{y})$$

$$\frac{d}{dx}(4xy) - \frac{d}{dx}(2x^3) + \frac{d}{dx}(4) = \frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(x^3\sqrt{y})$$

$$4\frac{d}{dx}(xy) - 6x^2 + 0 = \frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(x^3\sqrt{y})$$

$$4\left(\frac{dx}{dx}y + x\frac{dy}{dx}\right) - 6x^2 = \frac{d}{dx}(y^2) + \left(\frac{d(x^3)}{dx}\sqrt{y} + x^3\frac{d(\sqrt{y})}{dx}\right)$$

$$4\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) - 6x^2 = \frac{d}{dx}(y^2) + \left(3x^2\sqrt{y} + x^3\frac{d(\sqrt{y})}{dx}\right)$$

Exemple Trouver $\frac{dy}{dx}$ pour $4xy - 2x^3 + 4 = y^2 + x^3\sqrt{y}$

$$4\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) - 6x^2 = \frac{d}{dx}(y^2) + \left(3x^2\sqrt{y} + x^3\frac{d(\sqrt{y})}{dx}\right)$$

$$4\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) - 6x^2 = \frac{d(y^2)}{dy}\frac{dy}{dx} + \left(3x^2\sqrt{y} + x^3\frac{d(\sqrt{y})}{dy}\frac{dy}{dx}\right)$$

$$4y + 4x\frac{dy}{dx} - 6x^2 = 2y\frac{dy}{dx} + 3x^2\sqrt{y} + x^3\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}$$

$$4x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} - x^3\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = -4y + 6x^2 + 3x^2\sqrt{y}$$

Exemple Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ pour $4xy - 2x^3 + 4 = y^2 + x^3\sqrt{y}$

$$4x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} - x^3\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = -4y + 6x^2 + 3x^2\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(4x - 2y - x^3\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = -4y + 6x^2 + 3x^2\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4y + 6x^2 + 3x^2\sqrt{y}}{4x - 2y - \frac{x^3}{2\sqrt{y}}}$$

Faites les exercices suivants

Section 2.5 # 35 et 36

$$f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 15x^2 + 8x - 3$$

Mais ça, c'est une fonction

$$g(x) = 15x^2 + 8x - 3$$

$$g'(x) = 30x + 8$$

En fait, prendre la dérivée de la dérivée est ce qu'on appelle prendre la dérivée seconde

$$f''(x) = 30x + 8 \;=\; \frac{d^2(f(x))}{dx^2}$$

On peut même prendre la dérivée troisième ou plus.

$$f'''(x) = 30 \;=\; \frac{d^3(f(x))}{dx^3} \;=\; f^{(3)}(x)$$

Exemple

Calculer $f^{(3)}(x)$ $\quad f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(1-x^2)'(x^2+1)^2 - (1-x^2)\left((x^2+1)^2\right)'}{(x^2+1)^4}$$

Ouach!
il faut
dériver ça

$$= \boxed{\frac{(-2x)(x^2+1)^2 - (1-x^2)\left(2(x^2+1)(2x)\right)}{(x^2+1)^4}}$$

Ça ne serait pas
une mauvaise
chose
de simplifier

$$= \frac{\boxed{(x^2+1)}\left((-2x)(x^2+1) - (1-x^2)(4x)\right)}{(x^2+1)^4}$$

Exemple Calculer $f^{(3)}(x)$ $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)\left((-2x)(x^2+1) - (1-x^2)(4x)\right)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(-2x)(x^2+1) - (1-x^2)(4x)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Exemple Calculer $f^{(3)}(x)$ $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \left(\frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}\right)'$$

$$= \frac{(2x^3-6x)'(x^2+1)^3 - (2x^3-6x)\left((x^2+1)^3\right)'}{(x^2+1)^6}$$

$$= \frac{(6x^2-6)(x^2+1)^3 - (2x^3-6x)\left(3(x^2+1)^2(2x+1)\right)}{(x^2+1)^6}$$

$$= \frac{(6x^2-6)(x^2+1) - (2x^3-6x)3(2x+1)}{(x^2+1)^4}$$

Faites les exercices suivants

Section 2.5 # 39

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Dérivée implicite
- ✓ Dérivée d'ordre supérieur

Devoir: Section 2.5