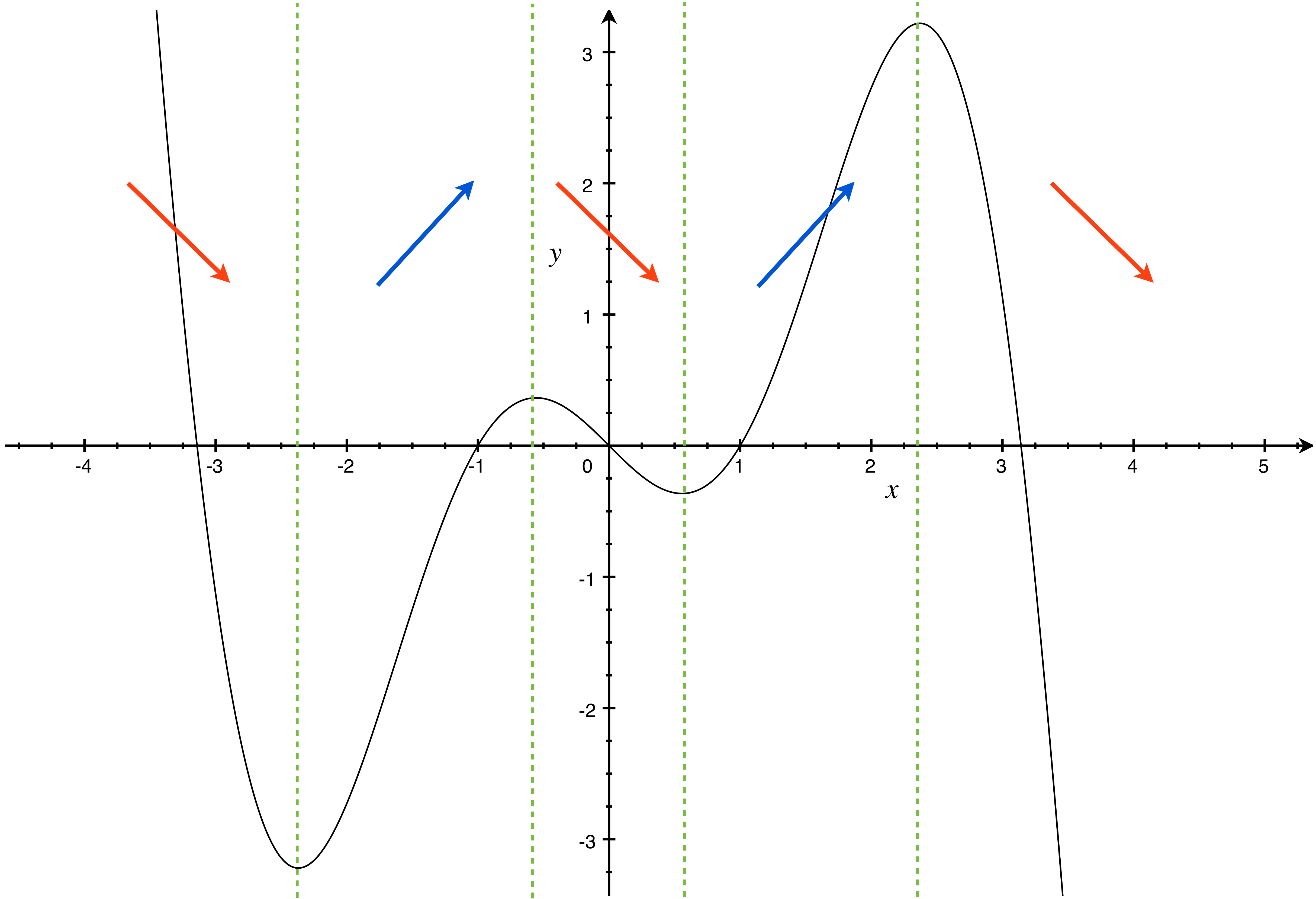
3.1 CROISSANCE D'UNE FONCTION

cours 15

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Croissance et décroissance
- ✓ Maximum et minimum relatif

Étant donné le graphique d'une fonction, il est assez simple de dire si elle croit ou décroit.



Mais comment faire, si l'on ne voit pas la fonction?

Il est souvent pratique, pour formaliser les choses en mathématiques, de bien les définir.

Définition

Une fonction $f(x)$ est croissante sur un intervalle $]a,b[$, si

$\forall\ x_1, x_2 \in\ ]a,b[$

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Une fonction $f(x)$ est décroissante sur un intervalle $]a,b[$, si

$\forall\ x_1, x_2 \in\ ]a,b[$

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

GeoGebra

Hum… c'est clair …

…mais pas trop facile à utiliser!

Comment peut-on être sûr pour chaque paire de points dans l'intervalle?

Regardons les taux de variation moyens d'une fonction dans un intervalle ou elle est croissante.

GeoGebra

Pour une fonction croissante

$$x_1 \leq x_2 \quad \begin{aligned} &\Longrightarrow 0 \leq x_2 - x_1 \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \begin{aligned} &\Longrightarrow 0 \leq f(x_2) - f(x_1) \\ &\Longrightarrow f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \end{aligned}$$

$$TVM_{[x_1, x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

Théorème Soit $f(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$

Si $\forall c \in \,]a,b[$

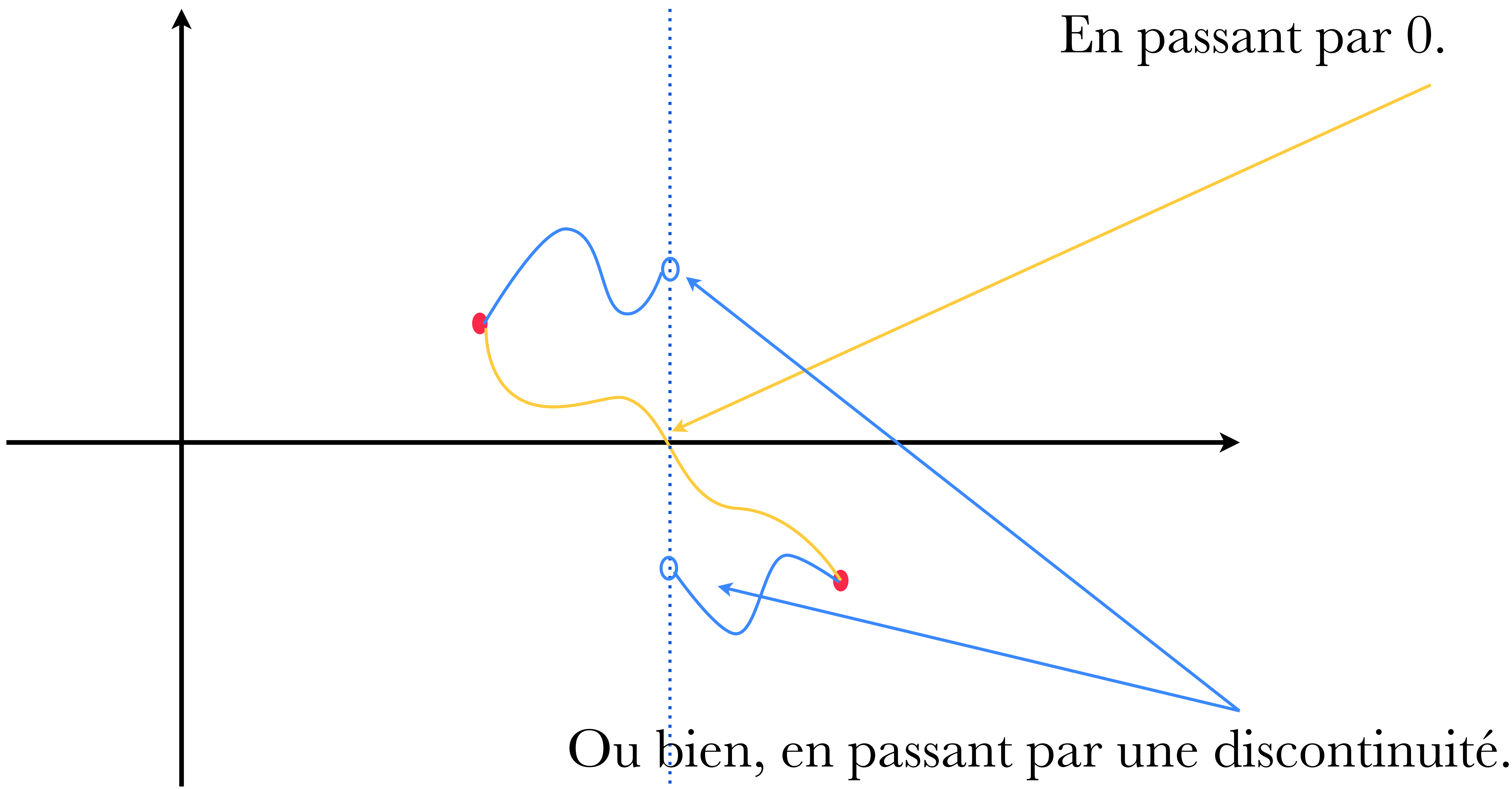
$$f'(c) \geq 0 \quad \text{alors } f(x) \text{ est croissante sur }]a,b[$$

Si $\forall c \in \,]a,b[$

$$f'(c) \leq 0 \quad \text{alors } f(x) \text{ est décroissante sur }]a,b[$$

Pour déterminer les intervalles où une fonction est croissante et où elle est décroissante, il suffit de déterminer les intervalles où sa dérivée est positive et où elle est négative.

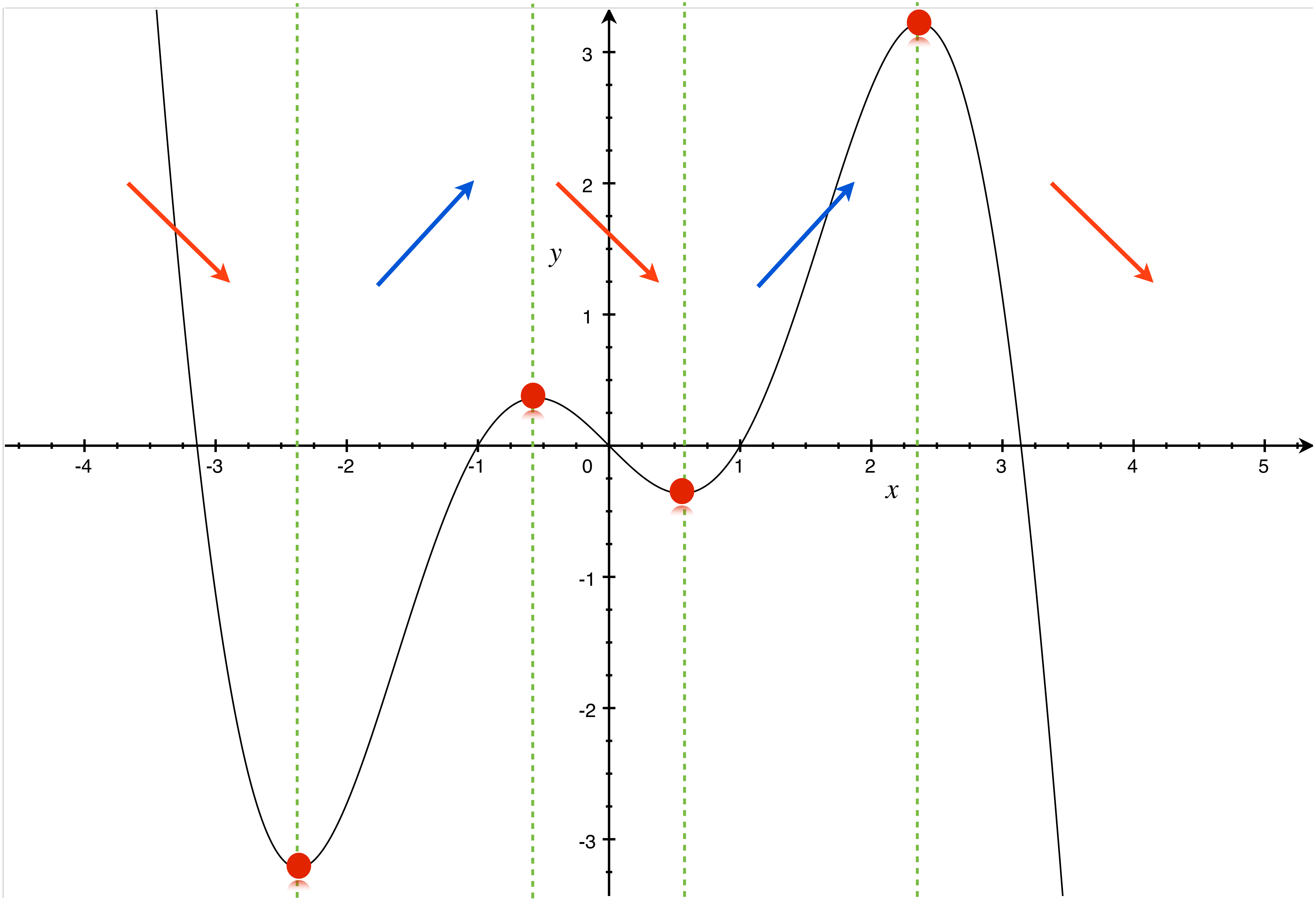
Comment une fonction peut passer de positive à négative, ou vice versa?



Faites les exercices suivants

Section 3.1. # 1 à 4

Que peut-on dire sur les endroits ou il y a un passage de croissance à décroissance ou vice versa?



Définition On dit qu'une fonction a un **maximum relatif** en

$$x = x_m$$

s'il existe un voisinage ouvert $]a,b[$

tel que pour toute valeur c, de x prise dans l'intervalle

$$f(c) \leq f(x_m)$$

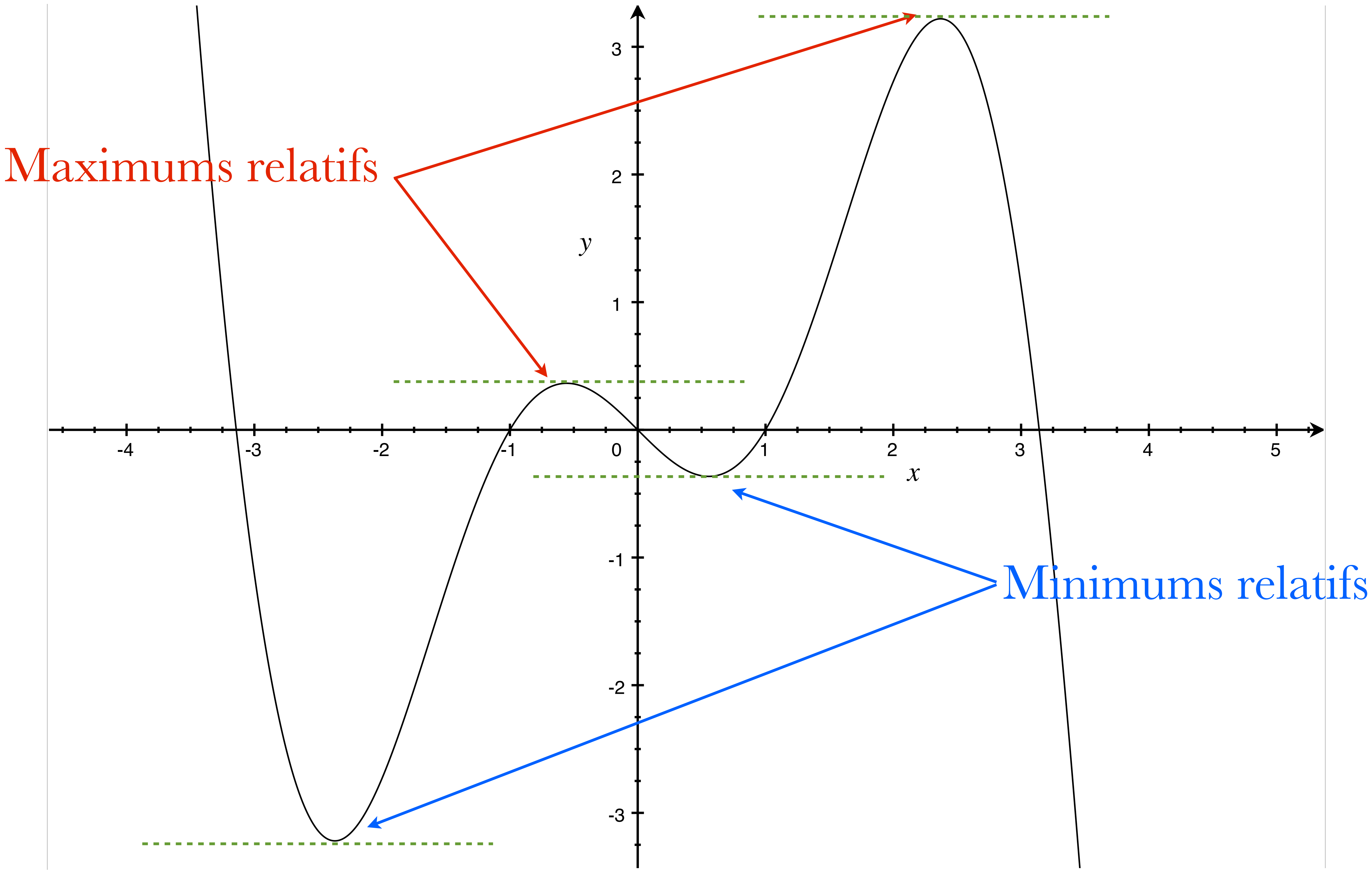
On définit similairement un **minimum relatif**.

Remarque:

On parle plutôt de maximum absolu ou minimum absolu si l'on peut prendre $\mathbb{R}$ comme intervalle.

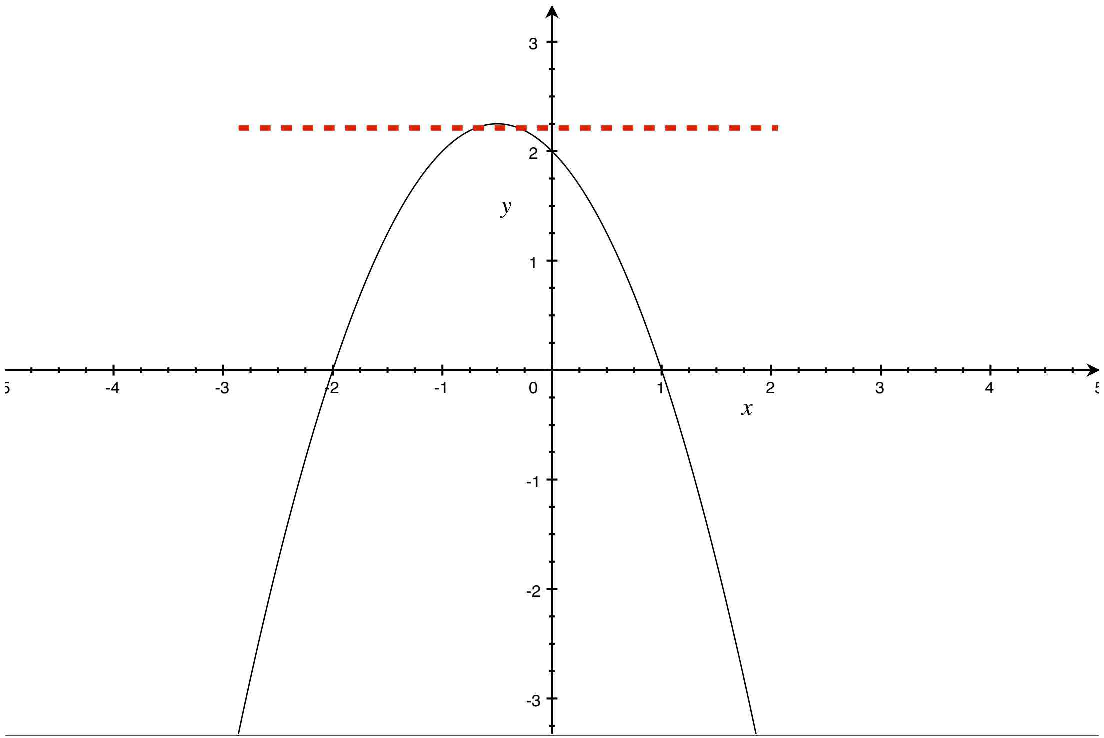
Qu’a de spécial la dérivée en un extrémum relatif?

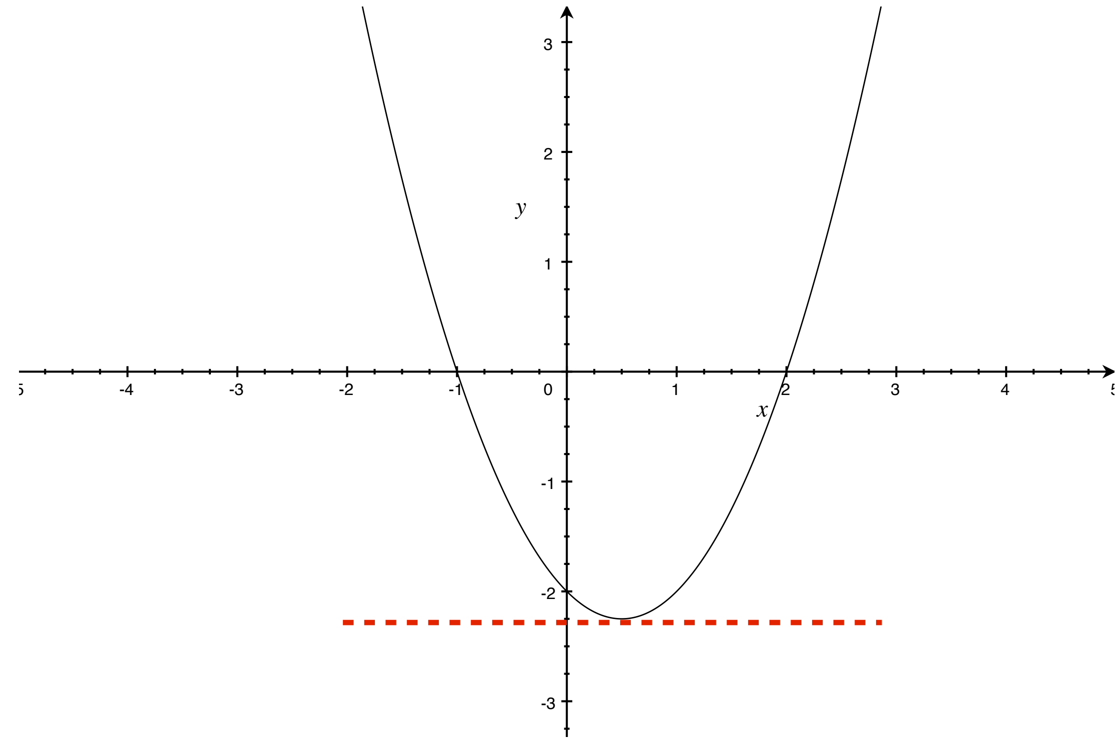
Elle est nulle!

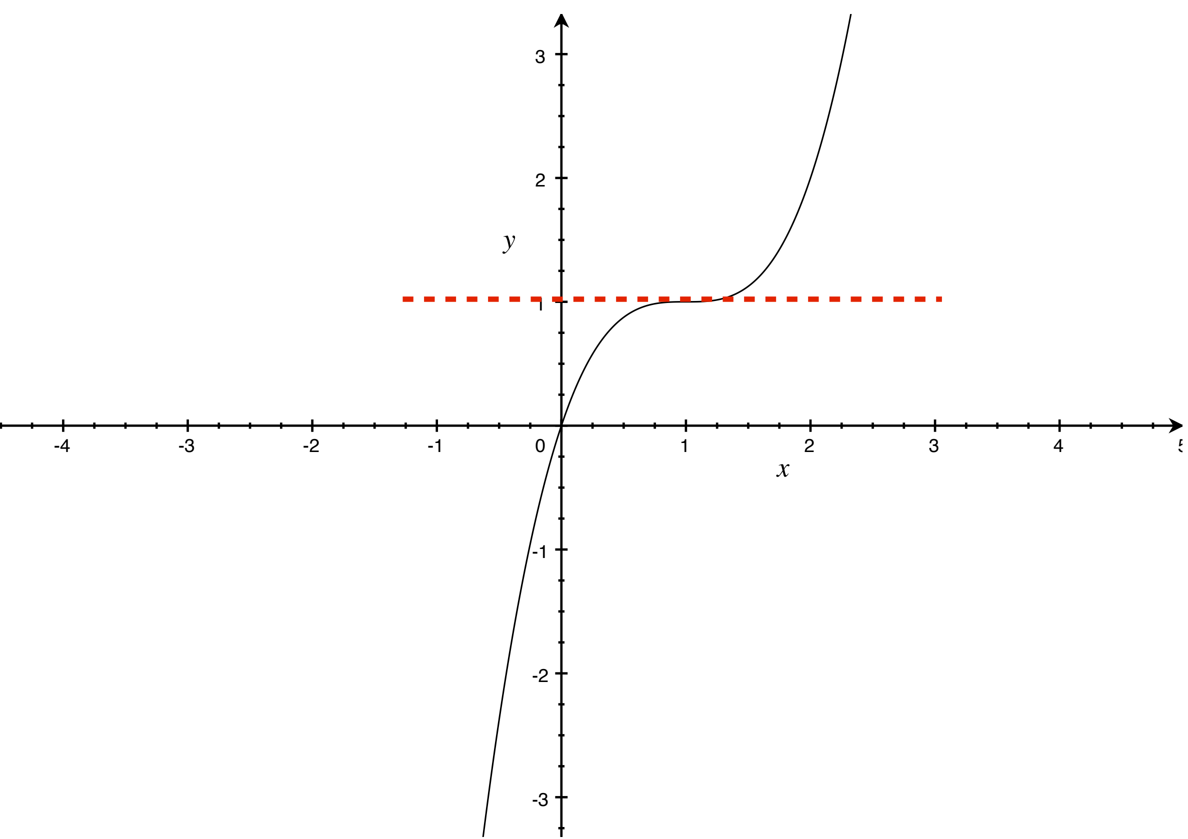


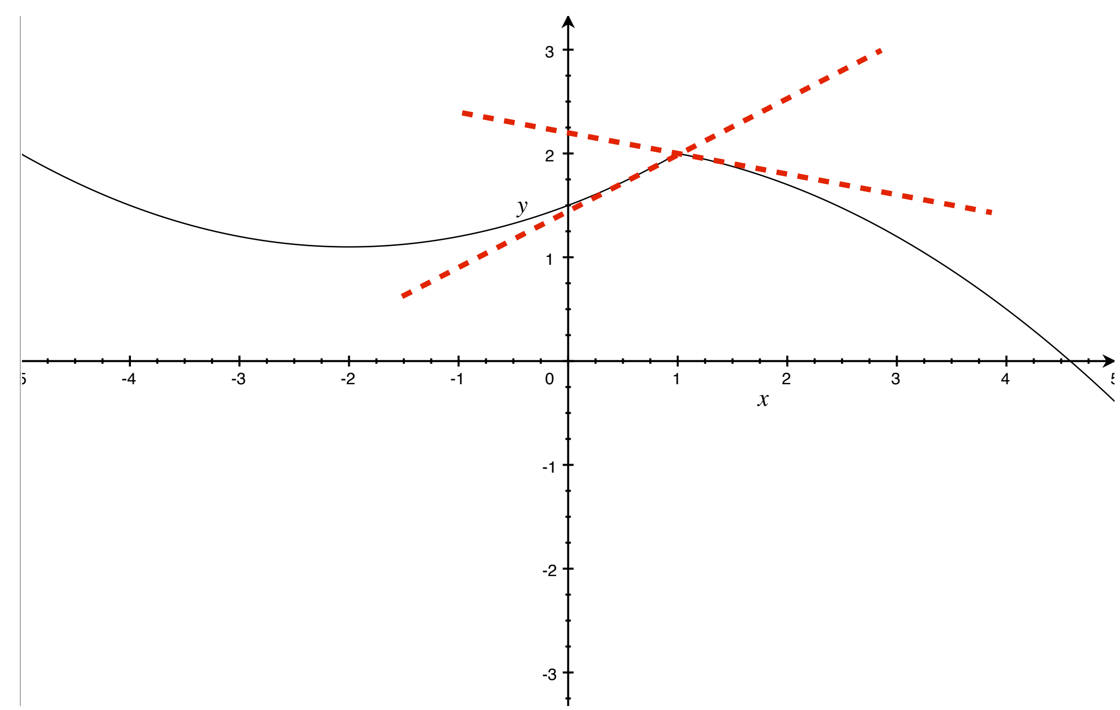
Est-ce qu'une dérivée nulle est synonyme d'extrémum relatif?

Non!









Par contre dans la recherche des extremums relatifs, les endroits où la dérivée est nulle et les endroits où la dérivée n'existe pas sont des bons endroits à examiner.

Définition

Les **points critiques** d'une fonction $f(x)$ sont les valeurs de x tel que

$$f'(a) = 0$$

ou

$$a \notin \mathrm{dom}(f'(x))$$

Exemple Trouver les intervalles de croissance, de décroissance et les extrémums de la fonction

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$$

Dans un premier temps, on dérive pour trouver les points critiques.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x - 36 \\ &= 6(x^2 + x - 6) = 6(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

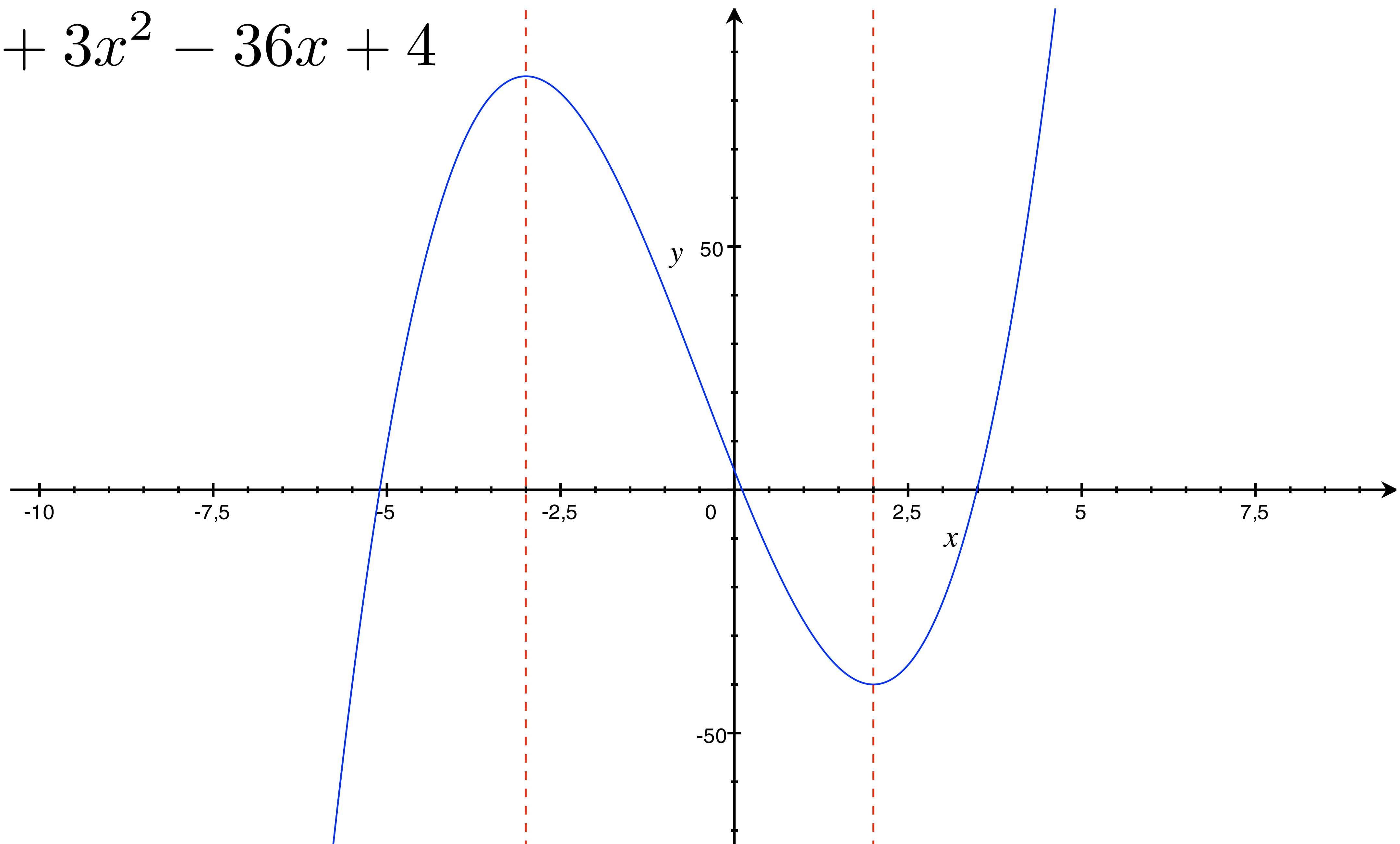
Les points critiques sont $x = -3$ et $x = 2$

Ensuite, on fait un tableau de variation

		-3		2	
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

		-3		2	
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$$



Exemple Trouver les intervalles de croissance, de décroissance et les extrémums de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 4}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + 2x + 1)'(x + 4) - (x^2 + 2x + 1)(x + 4)'}{(x + 4)^2} \\ &= \frac{(2x + 2)(x + 4) - (x^2 + 2x + 1)}{(x + 4)^2} \\ &= \frac{(2x^2 + 10x + 8) - (x^2 + 2x + 1)}{(x + 4)^2} \\ &= \frac{x^2 + 8x + 7}{(x + 4)^2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 4} \qquad f'(x) = \frac{x^2 + 8x + 7}{(x+4)^2}$$

$x^2 + 8x + 7 = 0$

ou

$(x+4)^2 = 0$

On a un point critique lorsque

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 7}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-8 \pm 6}{2} = -4 \pm 3$$

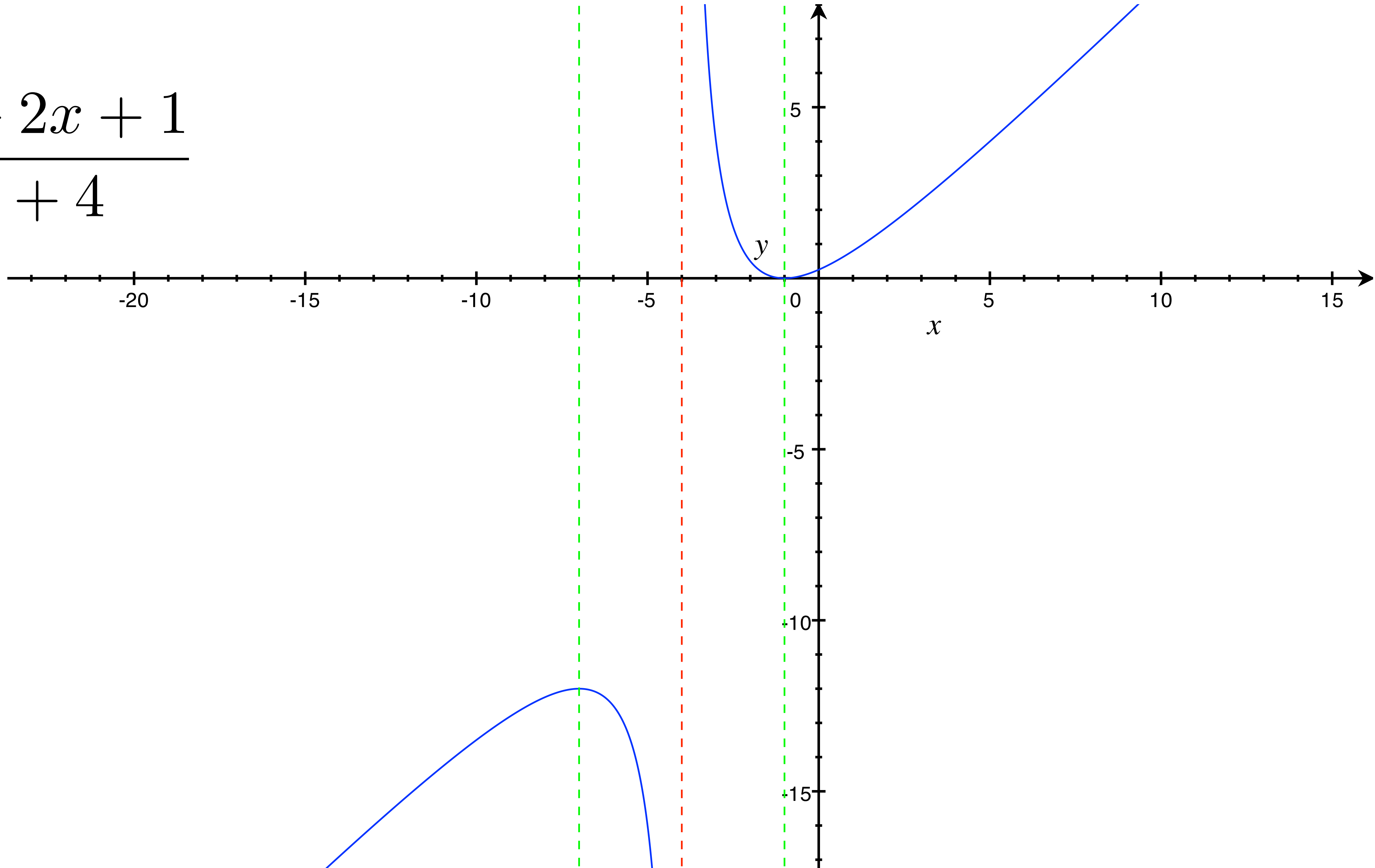
Les points critiques sont $x = -7$, $x = -1$ et $x = -4$

$$f'(x) = \frac{(x+7)(x+1)}{(x+4)^2}$$

		-7		-4		-1	
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+

		-7		-4		-1	
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 4}$$

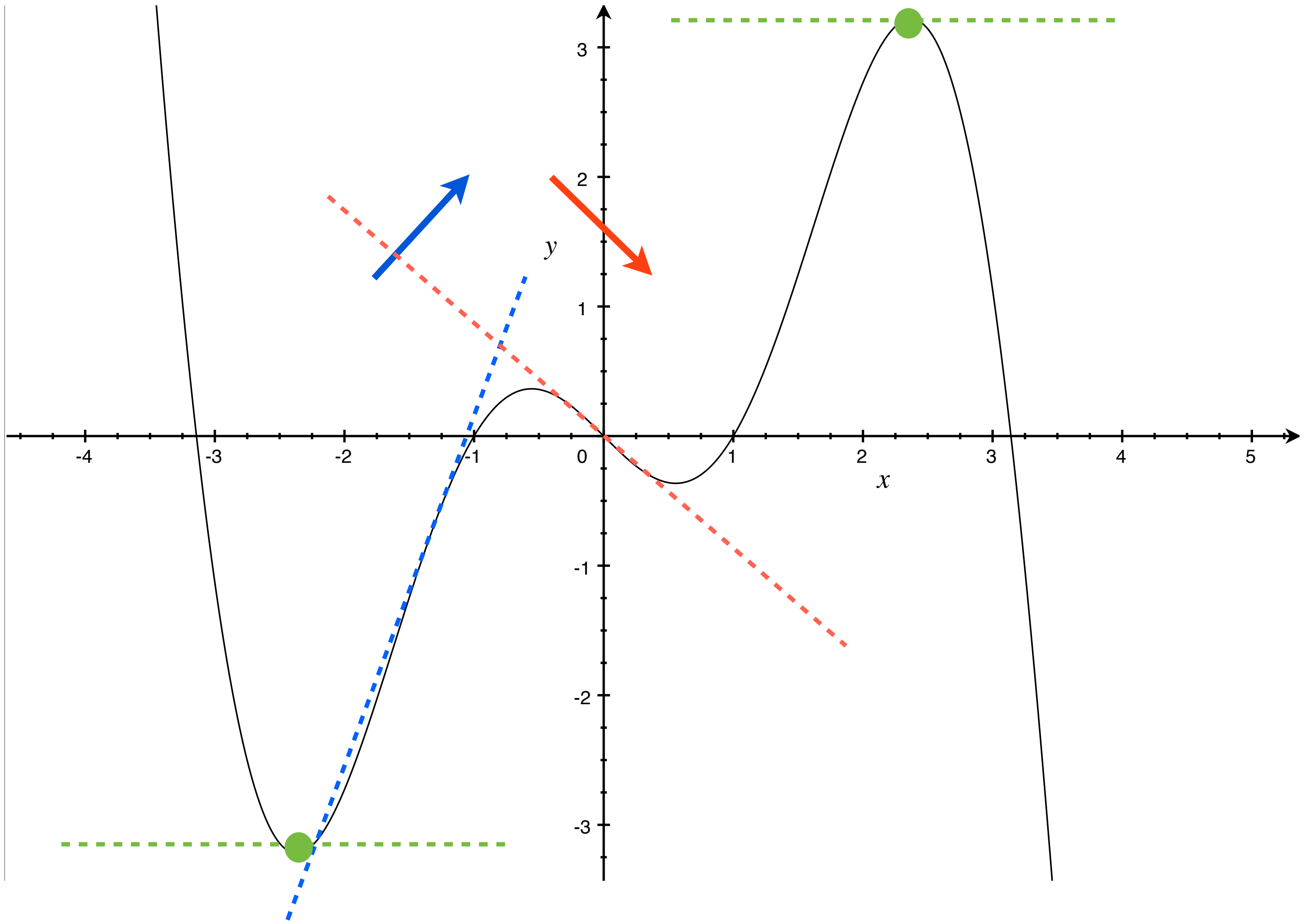


Faites les exercices suivants

Section 3.1. # 5

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Croissance et décroissance
- ✓ Maximum et minimum relatif



Devoir: Section 3.1