

3.3 CONCAVITÉ

Cours 16

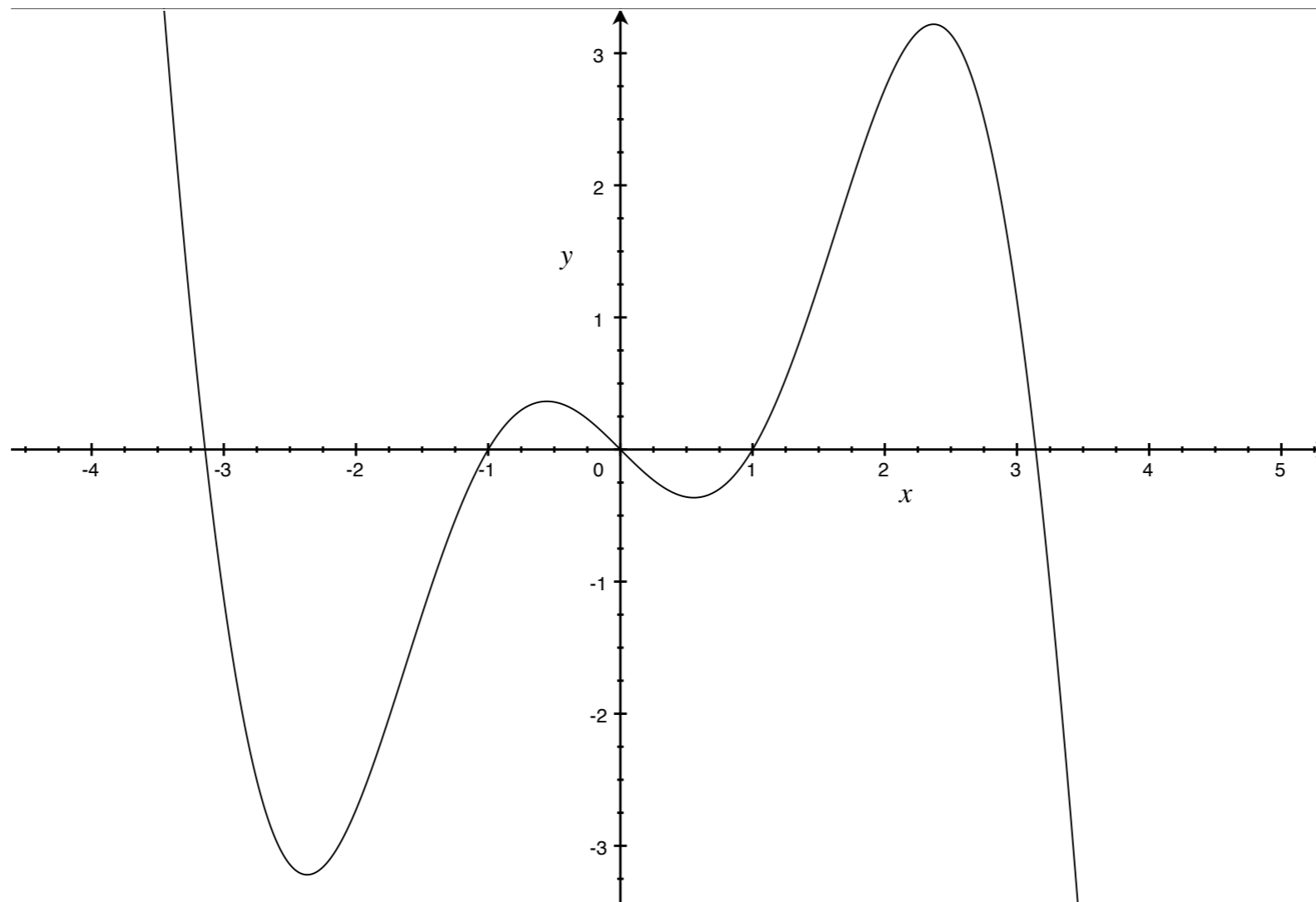
Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Croissance et décroissance

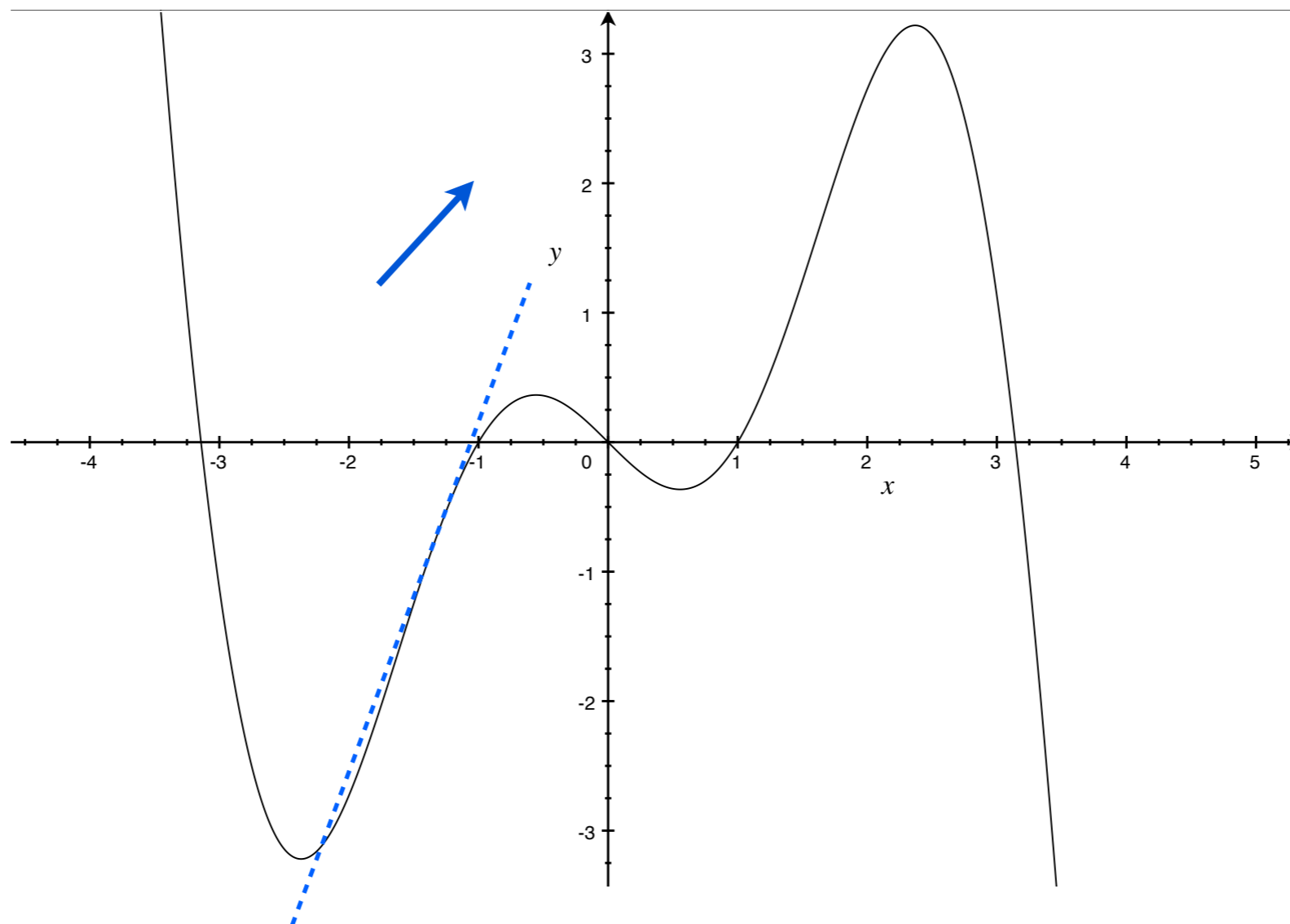
Au dernier cours, nous avons vu

✓ Croissance et décroissance



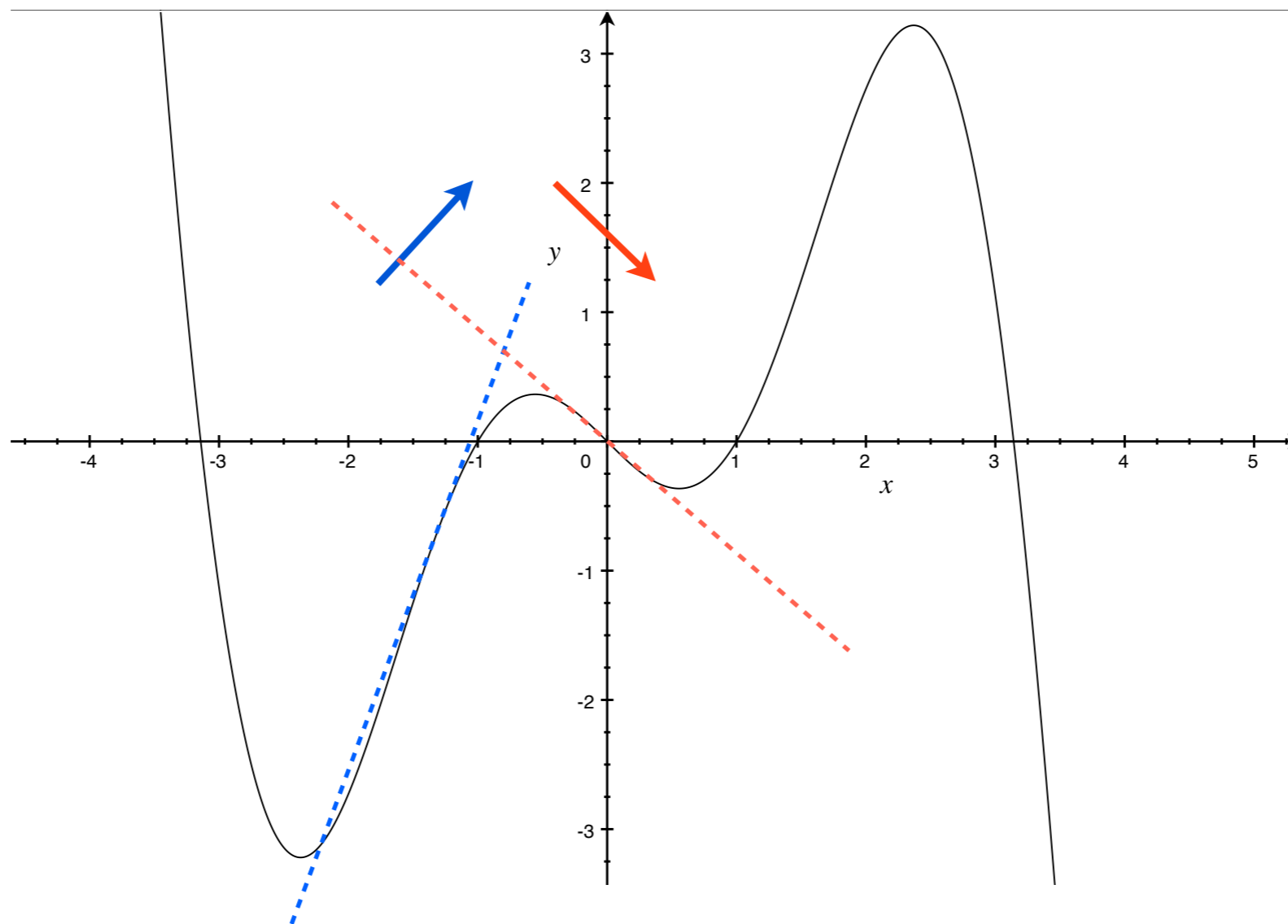
Au dernier cours, nous avons vu

✓ Croissance et décroissance



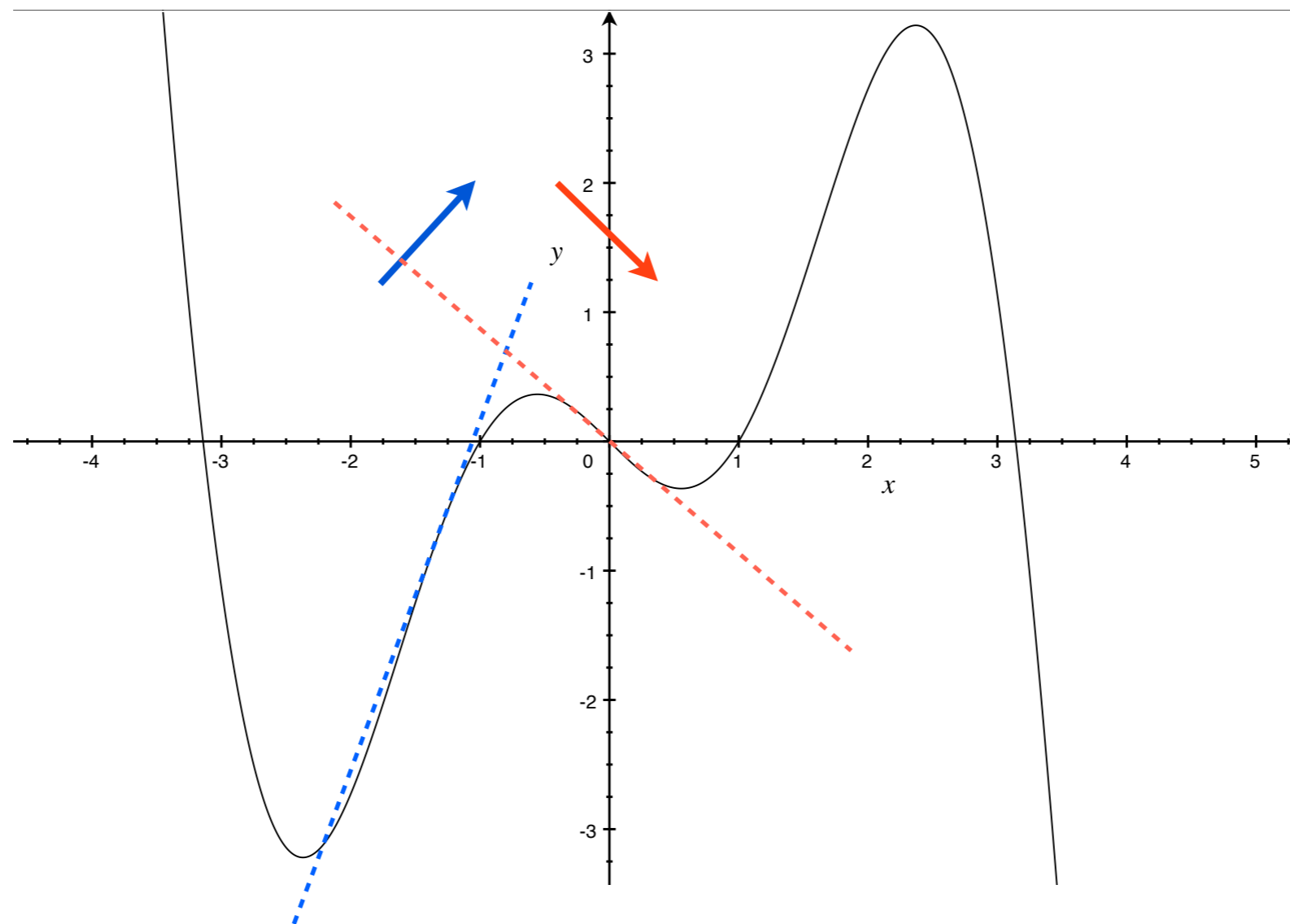
Au dernier cours, nous avons vu

✓ Croissance et décroissance



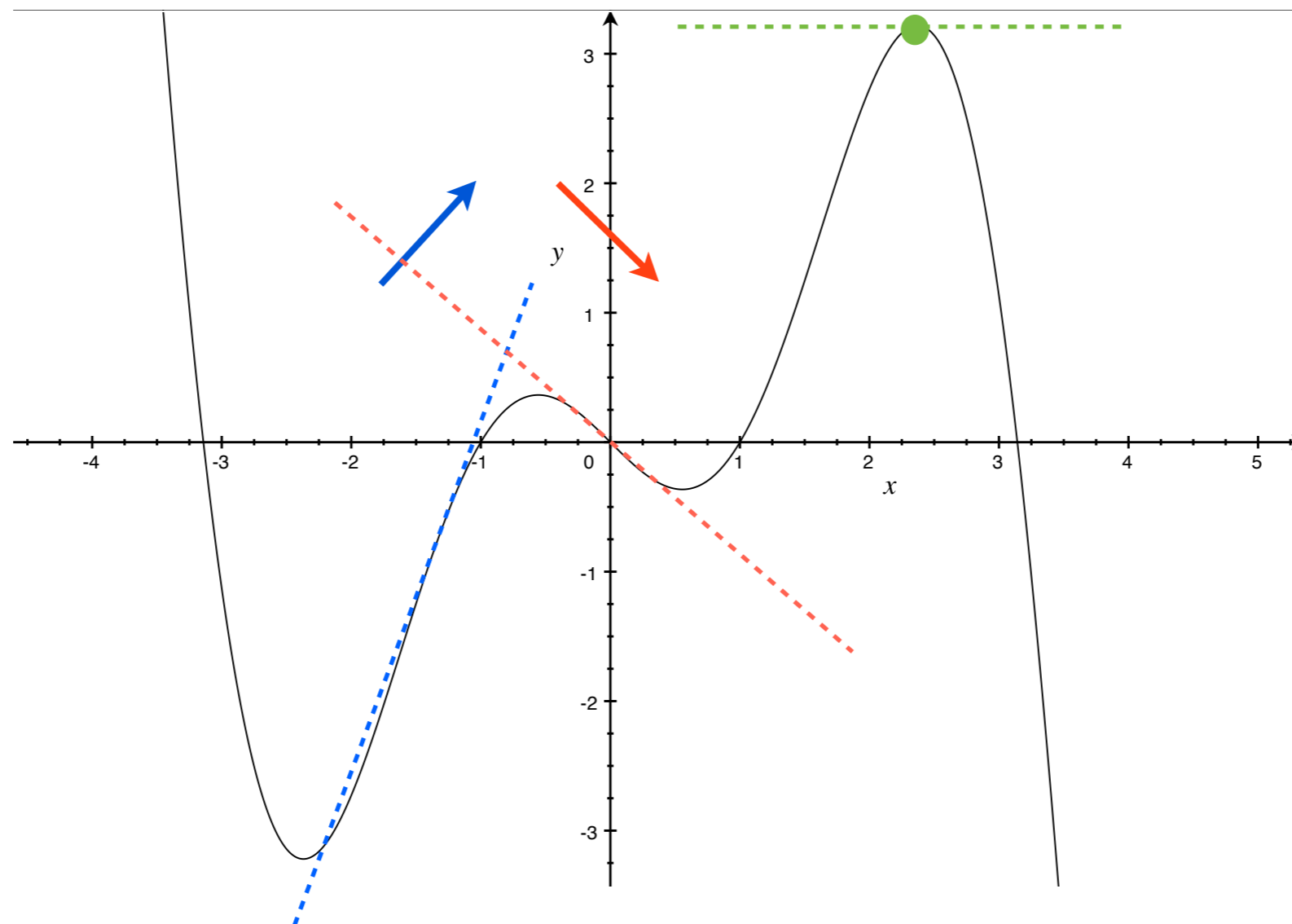
Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Croissance et décroissance
- ✓ Maximum et minimum relatif



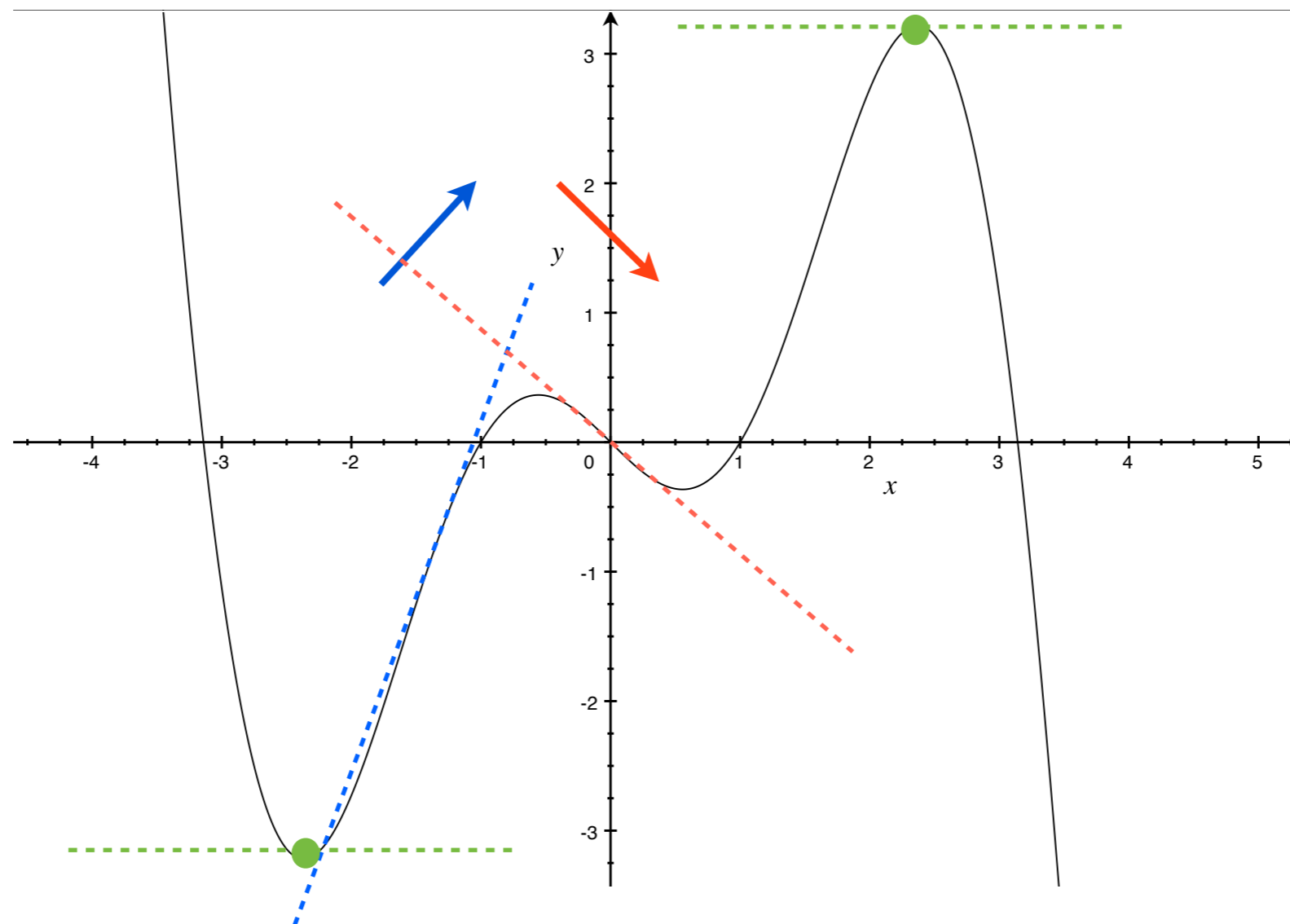
Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Croissance et décroissance
- ✓ Maximum et minimum relatif



Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Croissance et décroissance
- ✓ Maximum et minimum relatif



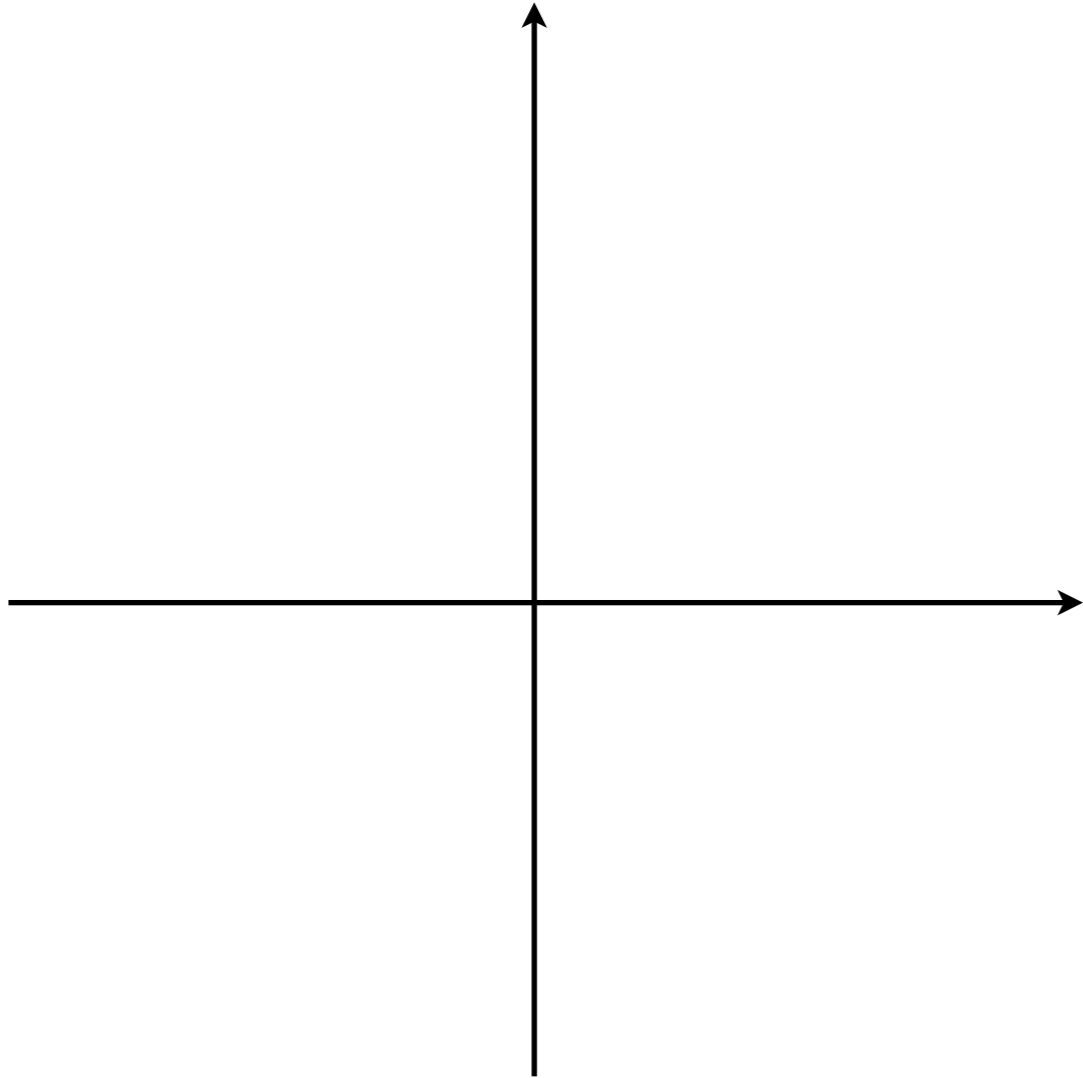
Aujourd'hui, nous allons voir

Aujourd'hui, nous allons voir

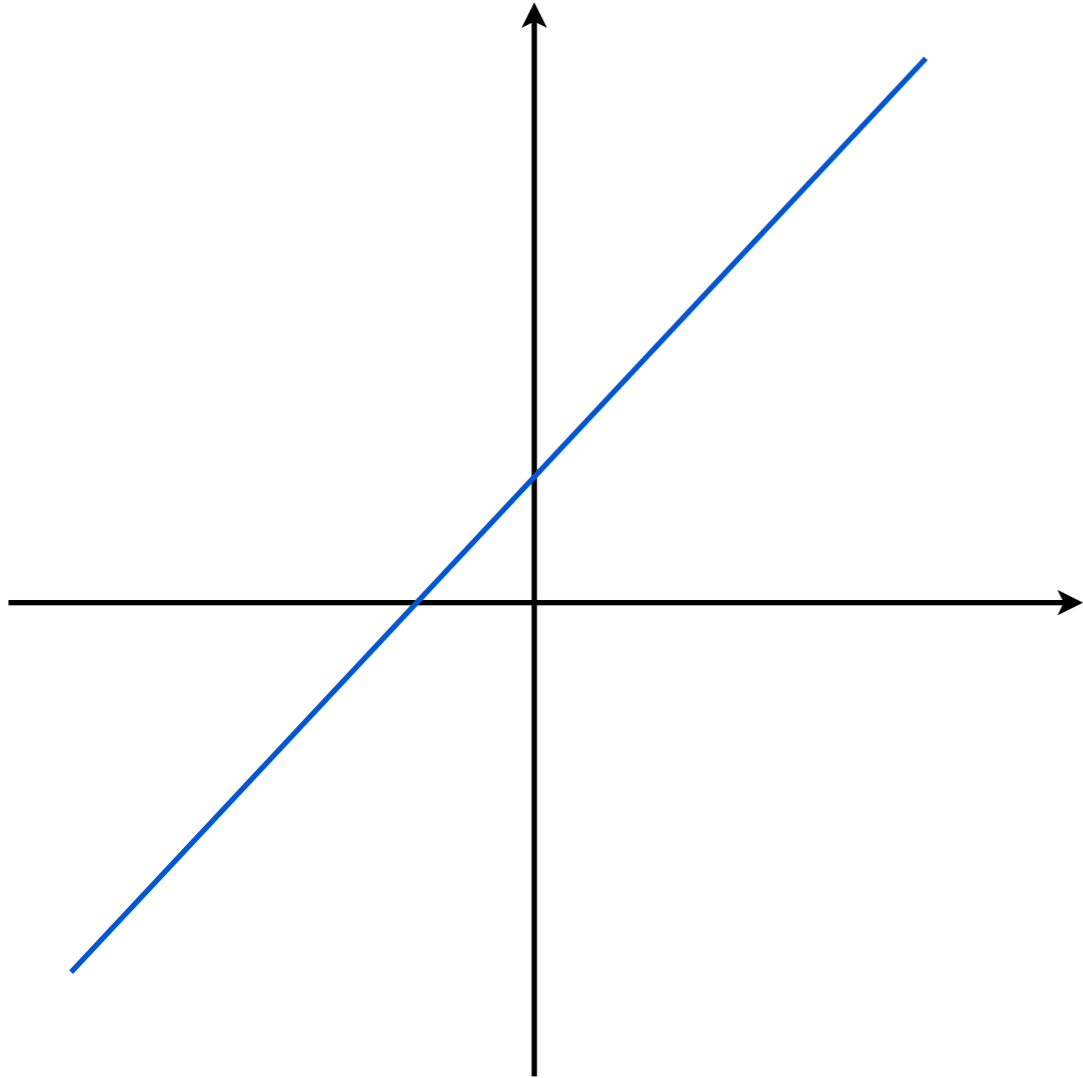
✓ Concavité

Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.

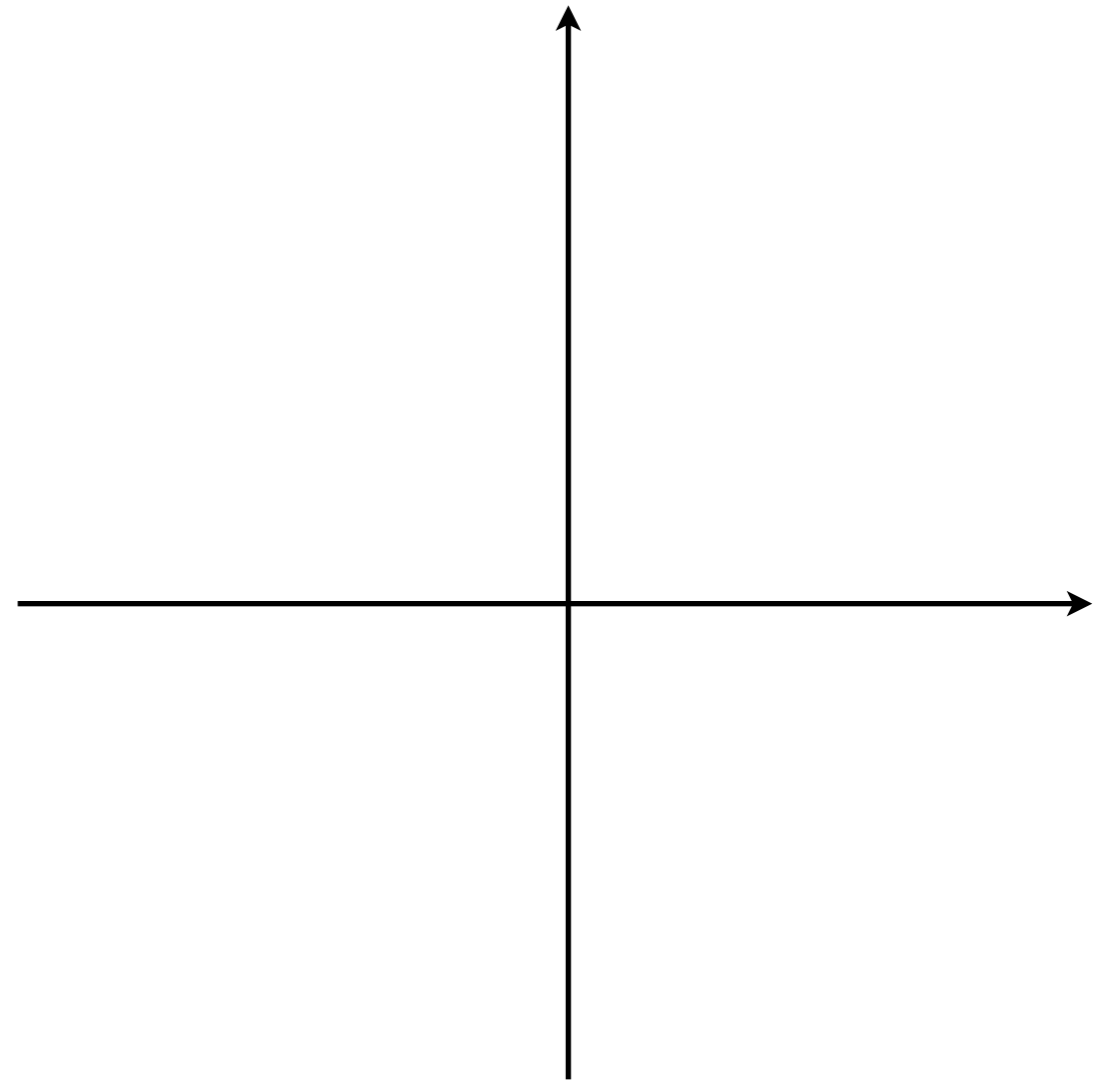
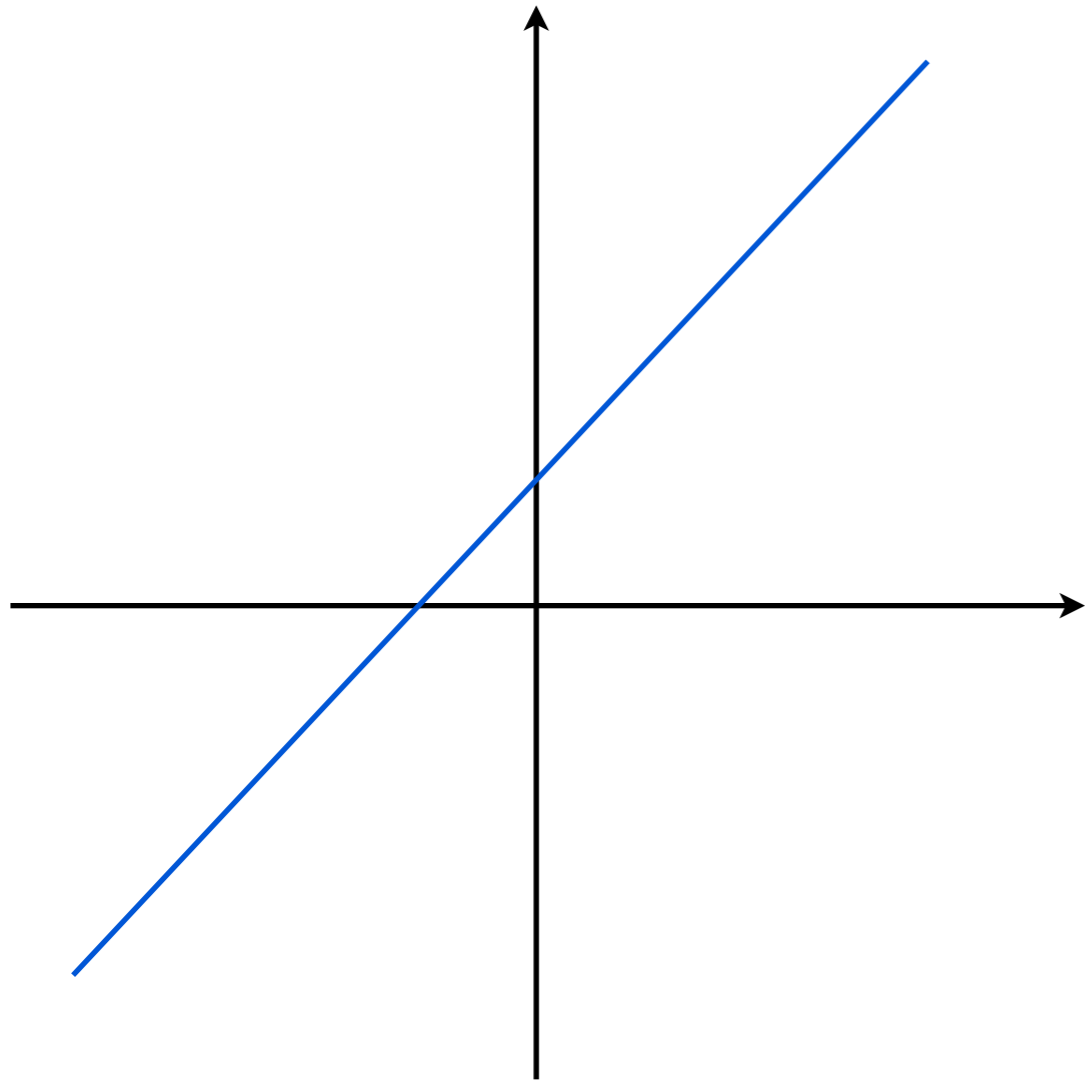
Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



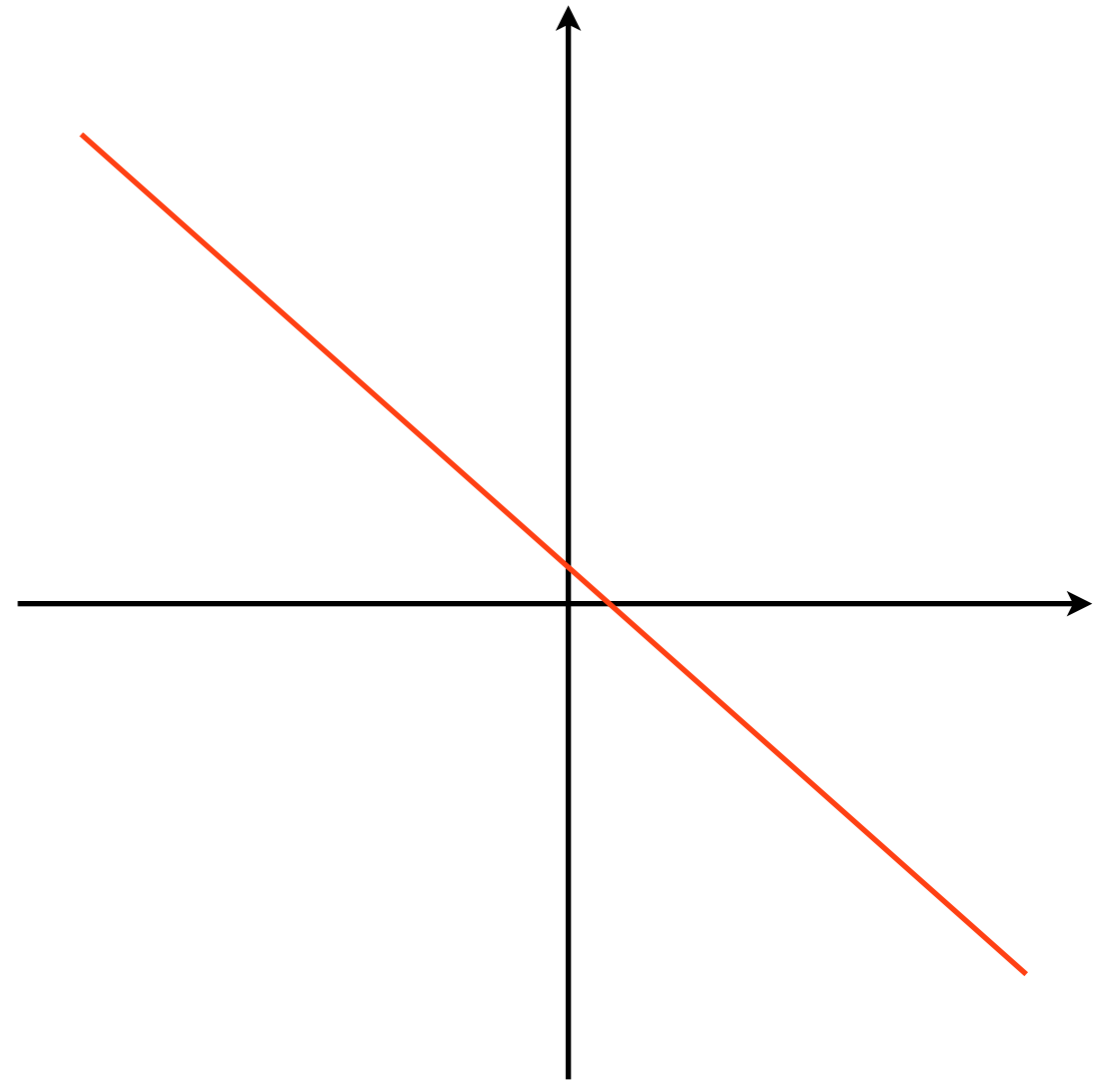
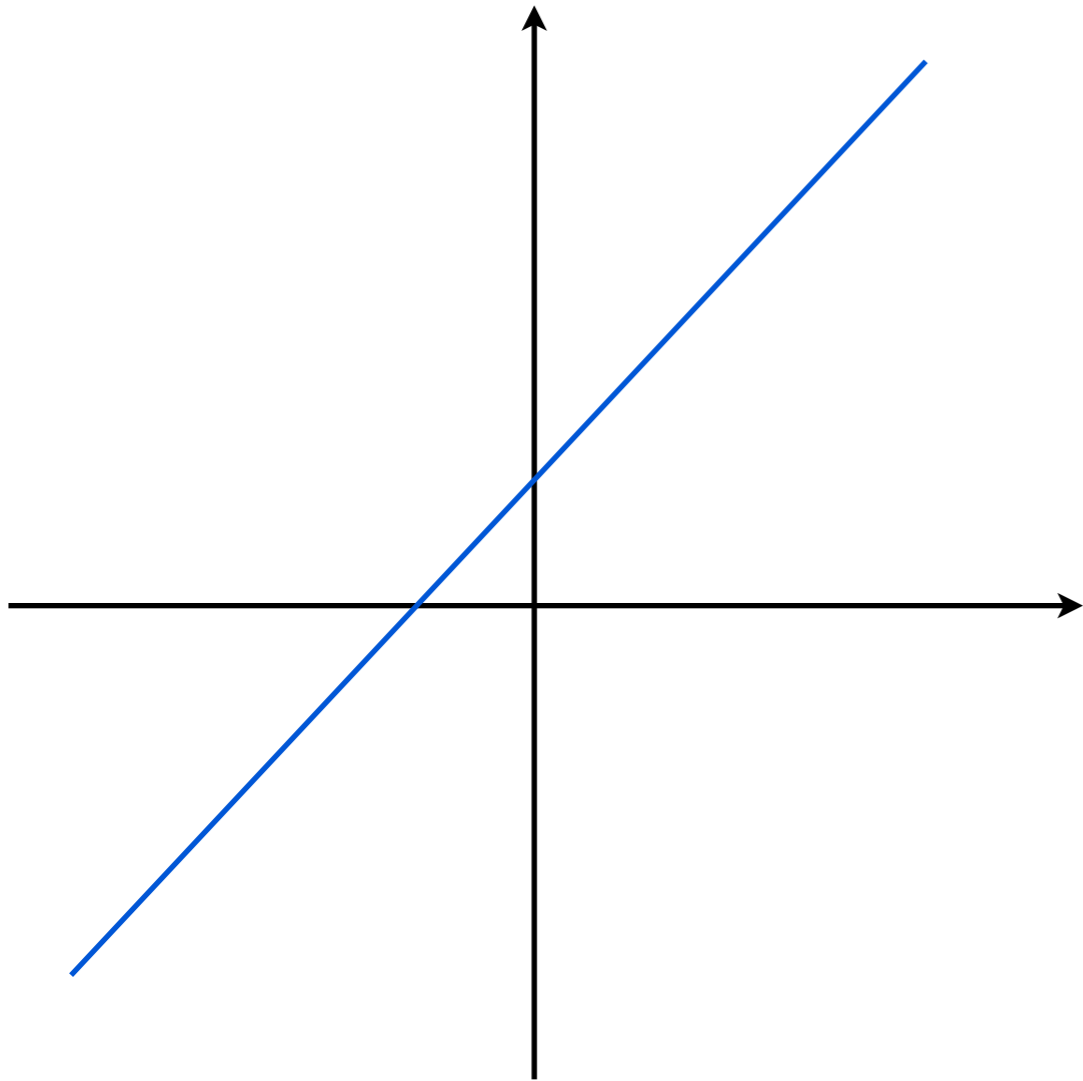
Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



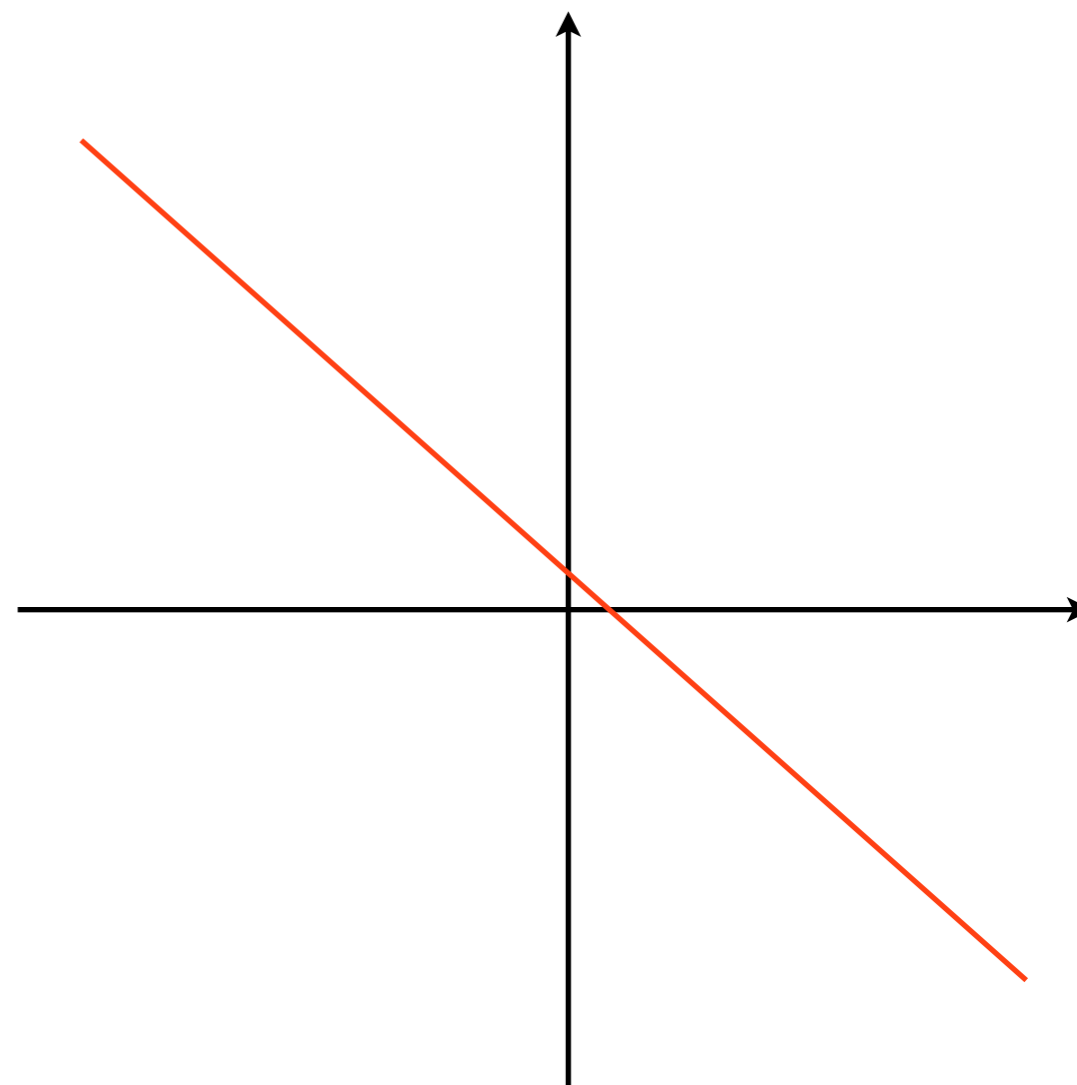
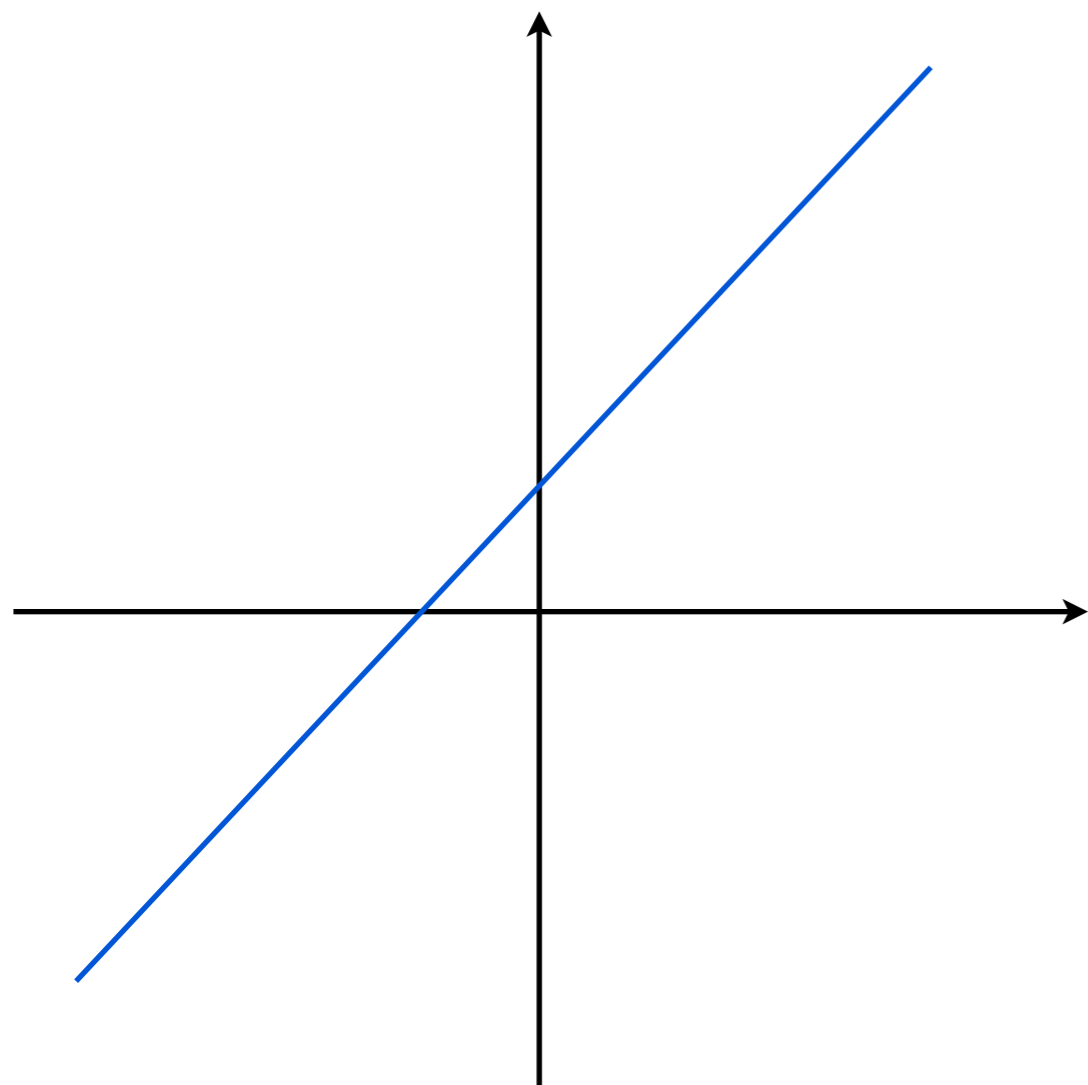
Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.

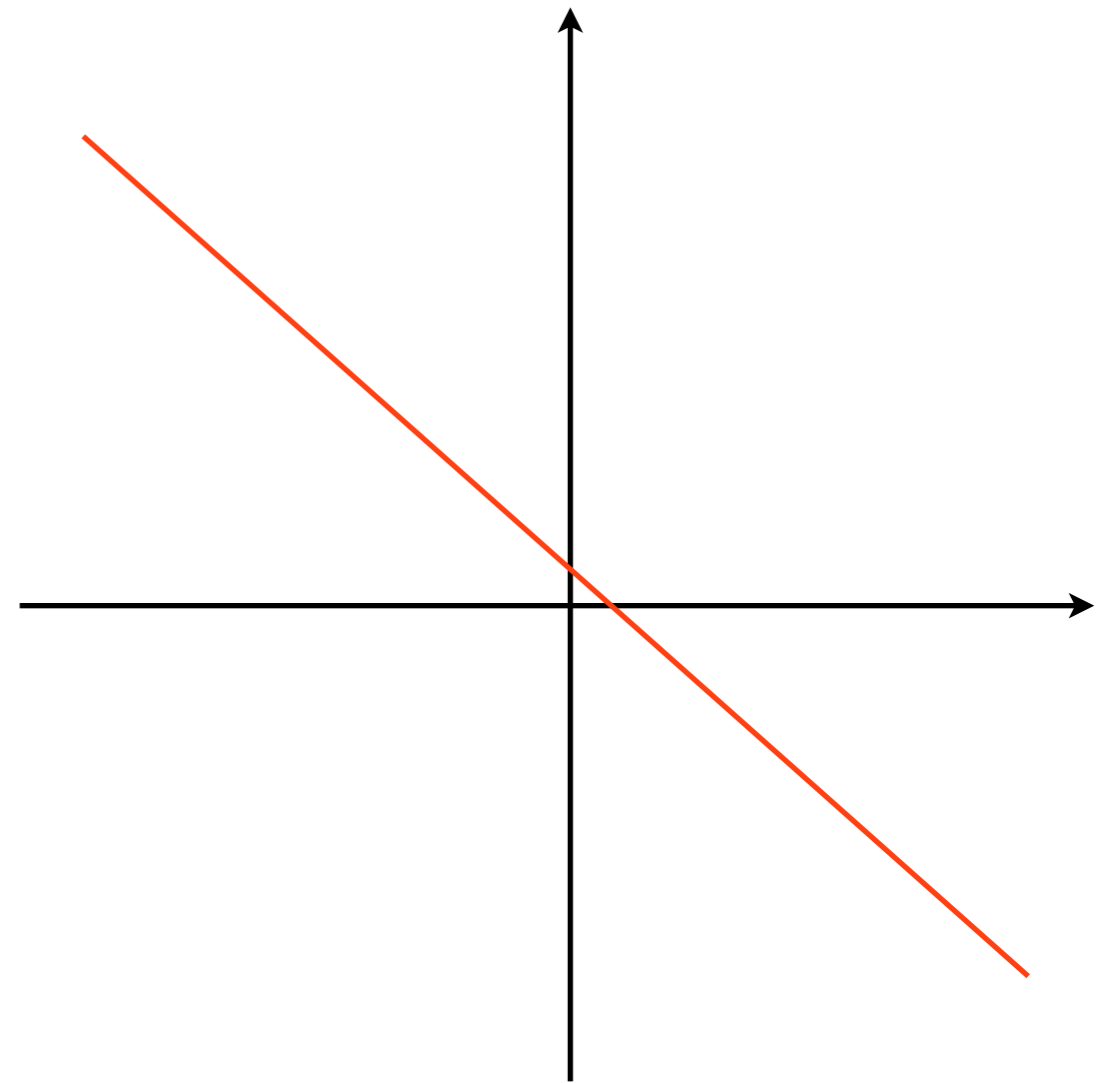
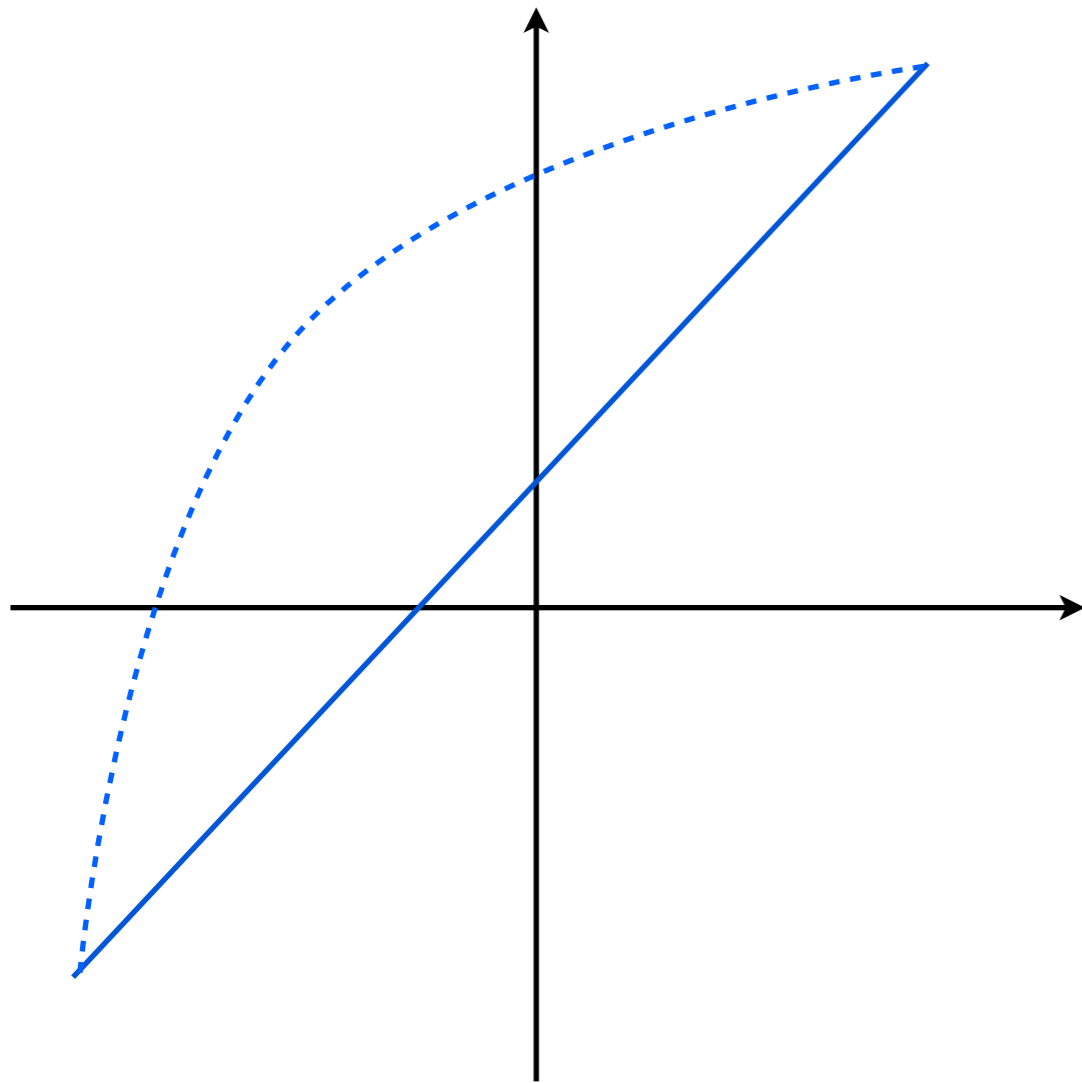


Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



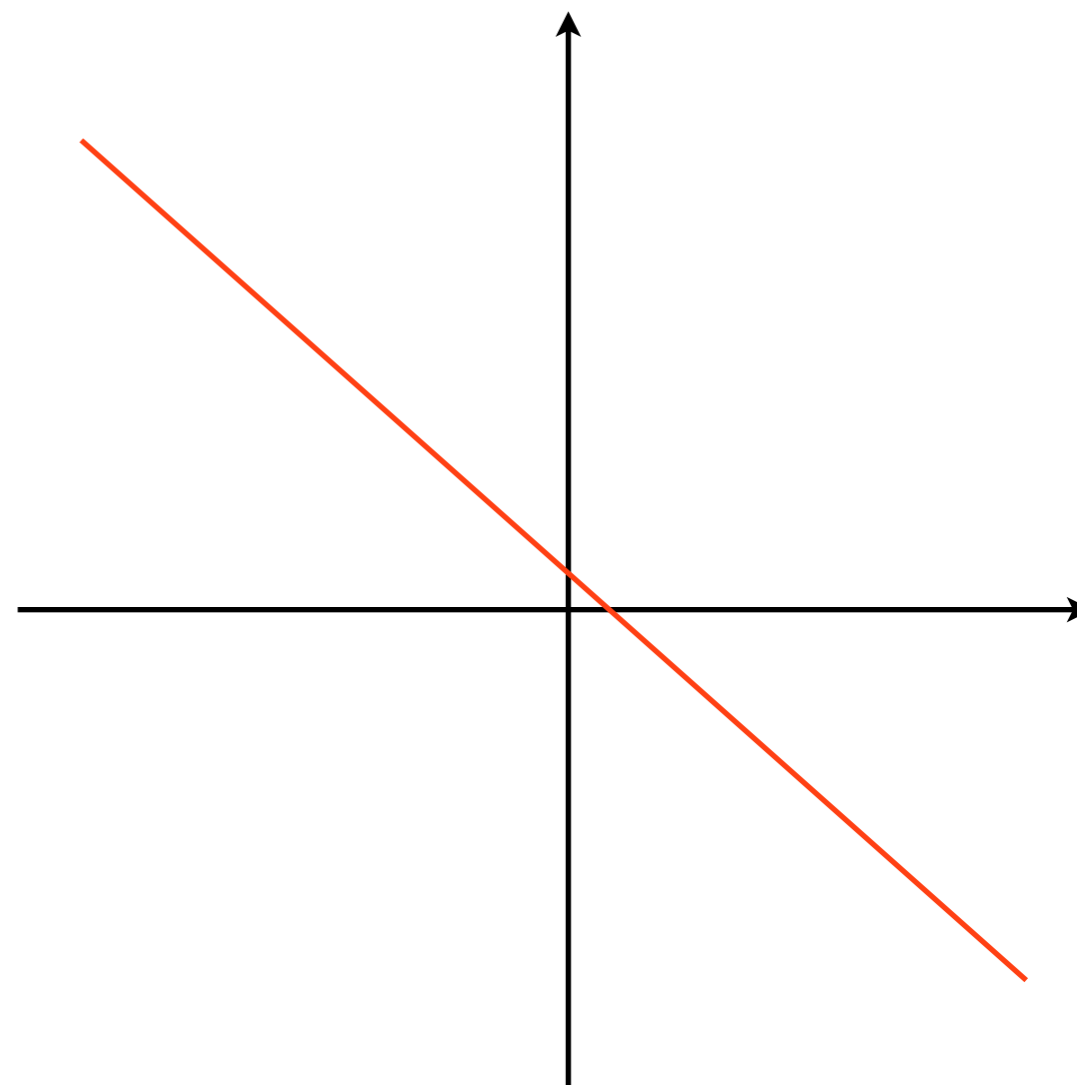
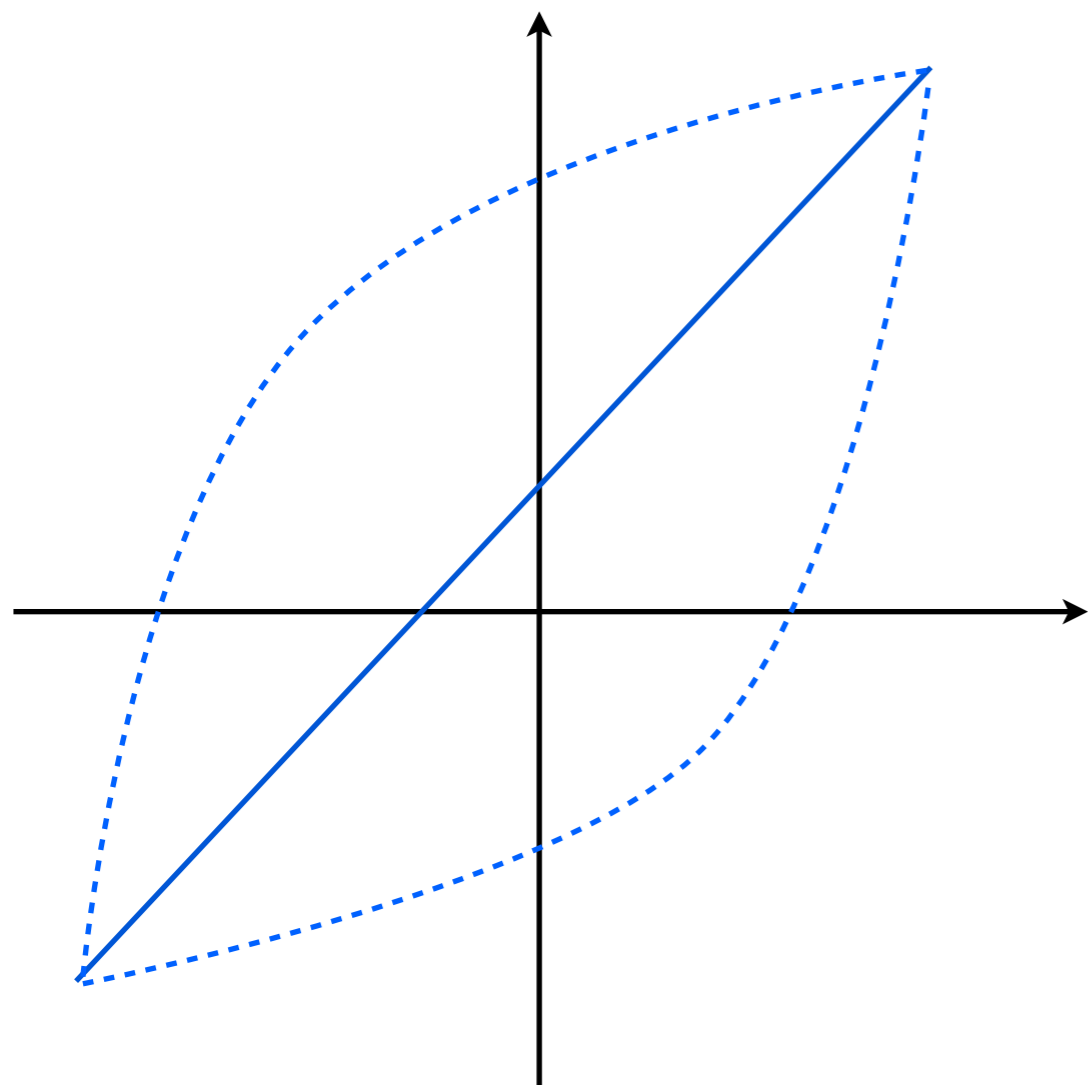
Est-il possible d'être plus précis sur l'allure de la fonction ?

Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



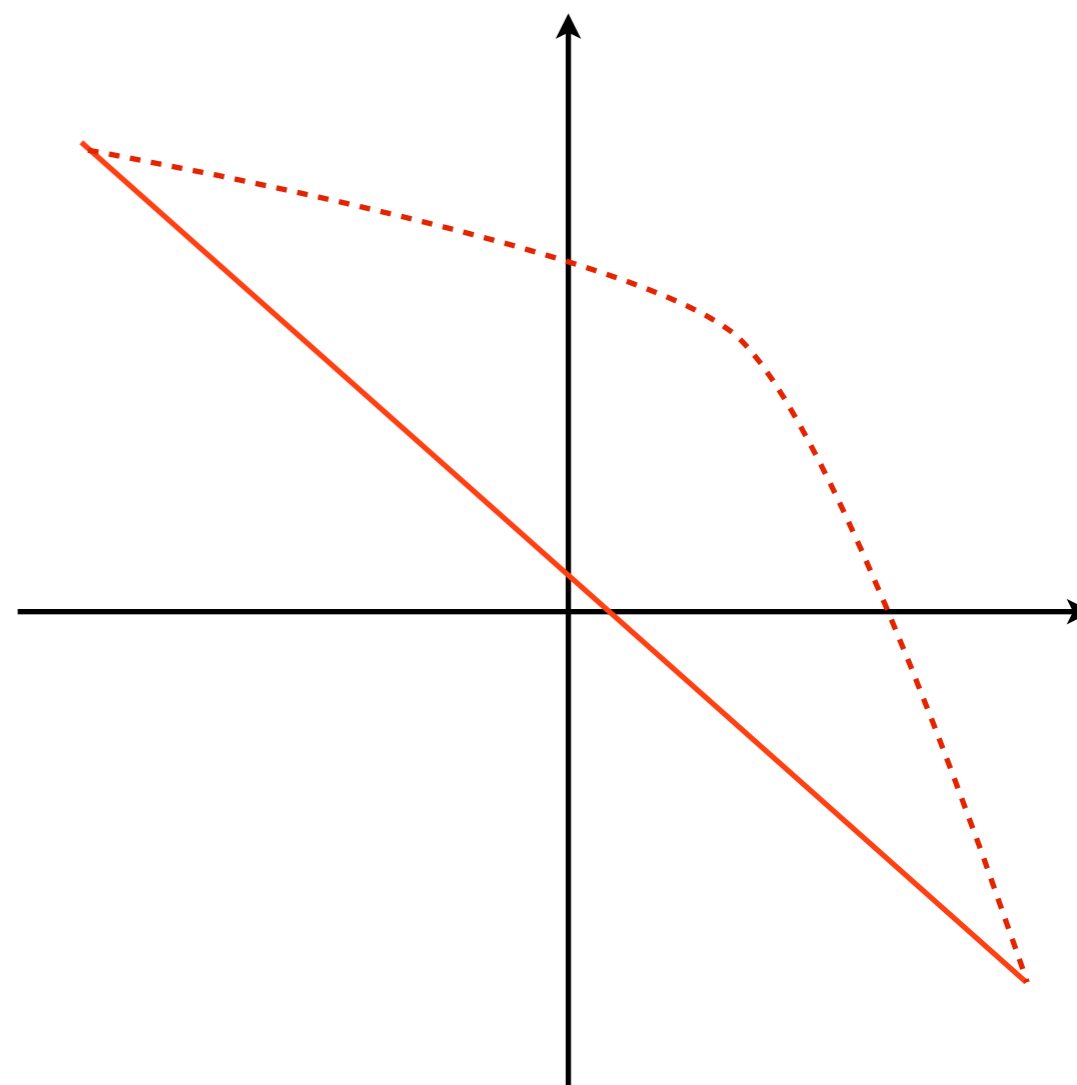
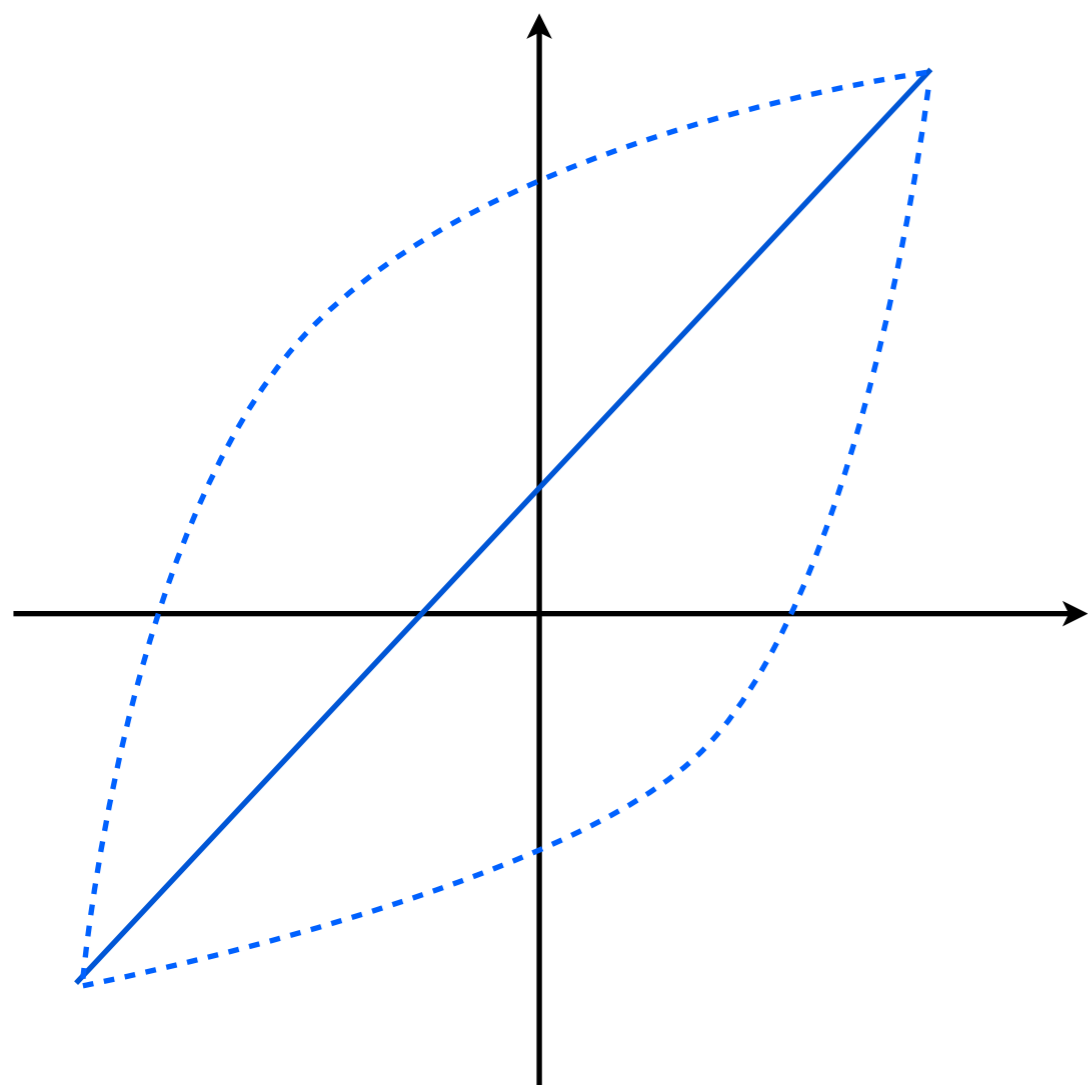
Est-il possible d'être plus précis sur l'allure de la fonction ?

Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



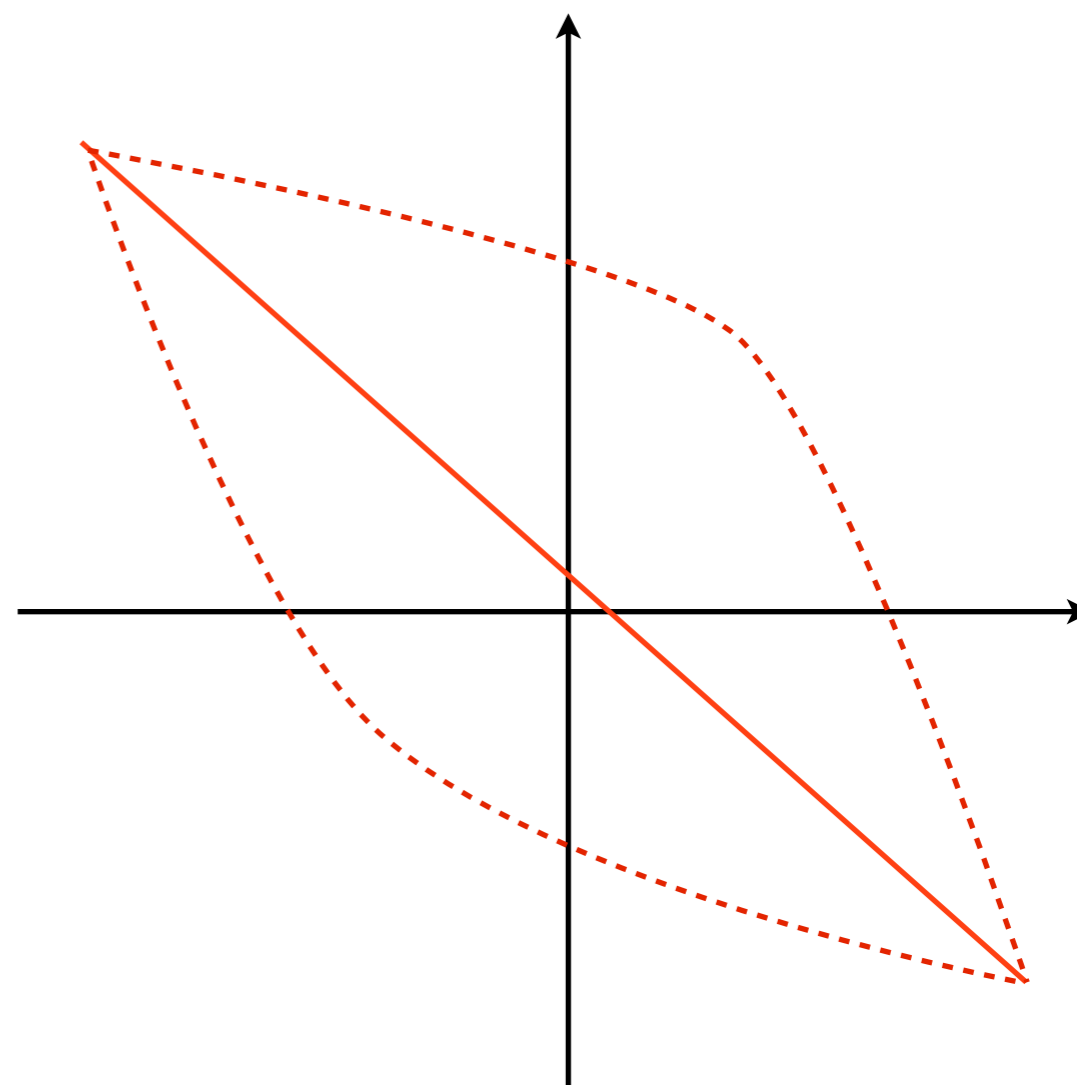
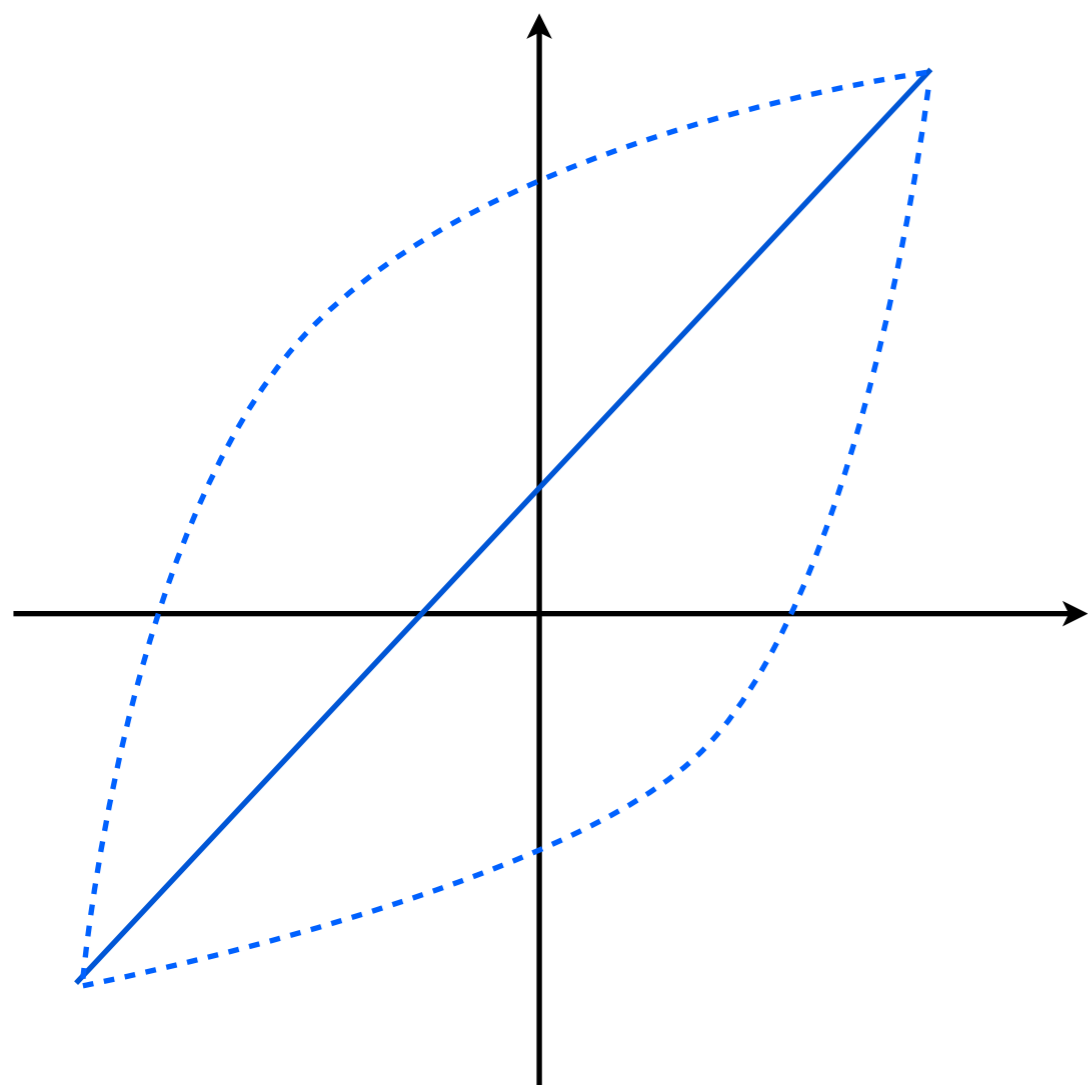
Est-il possible d'être plus précis sur l'allure de la fonction ?

Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.

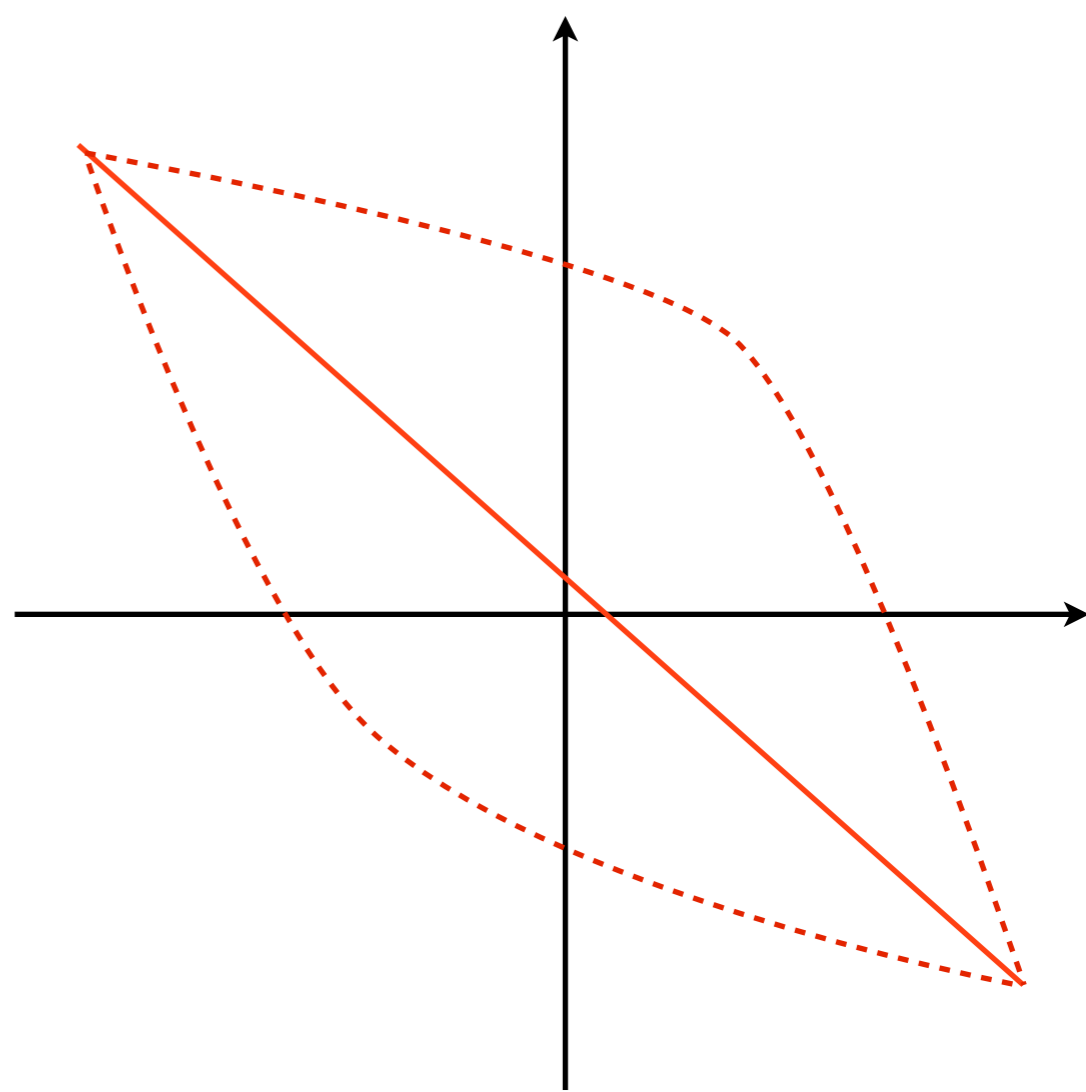
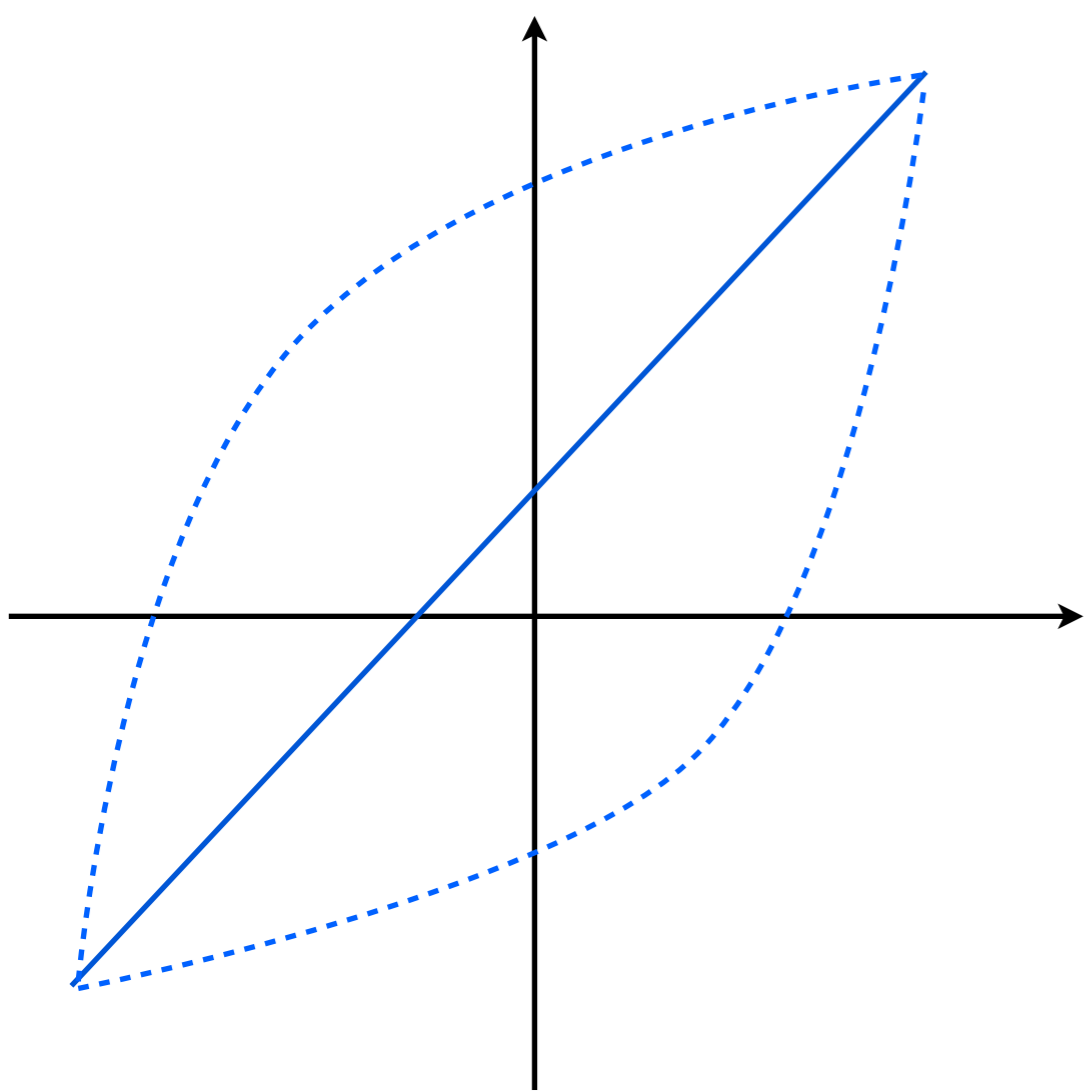


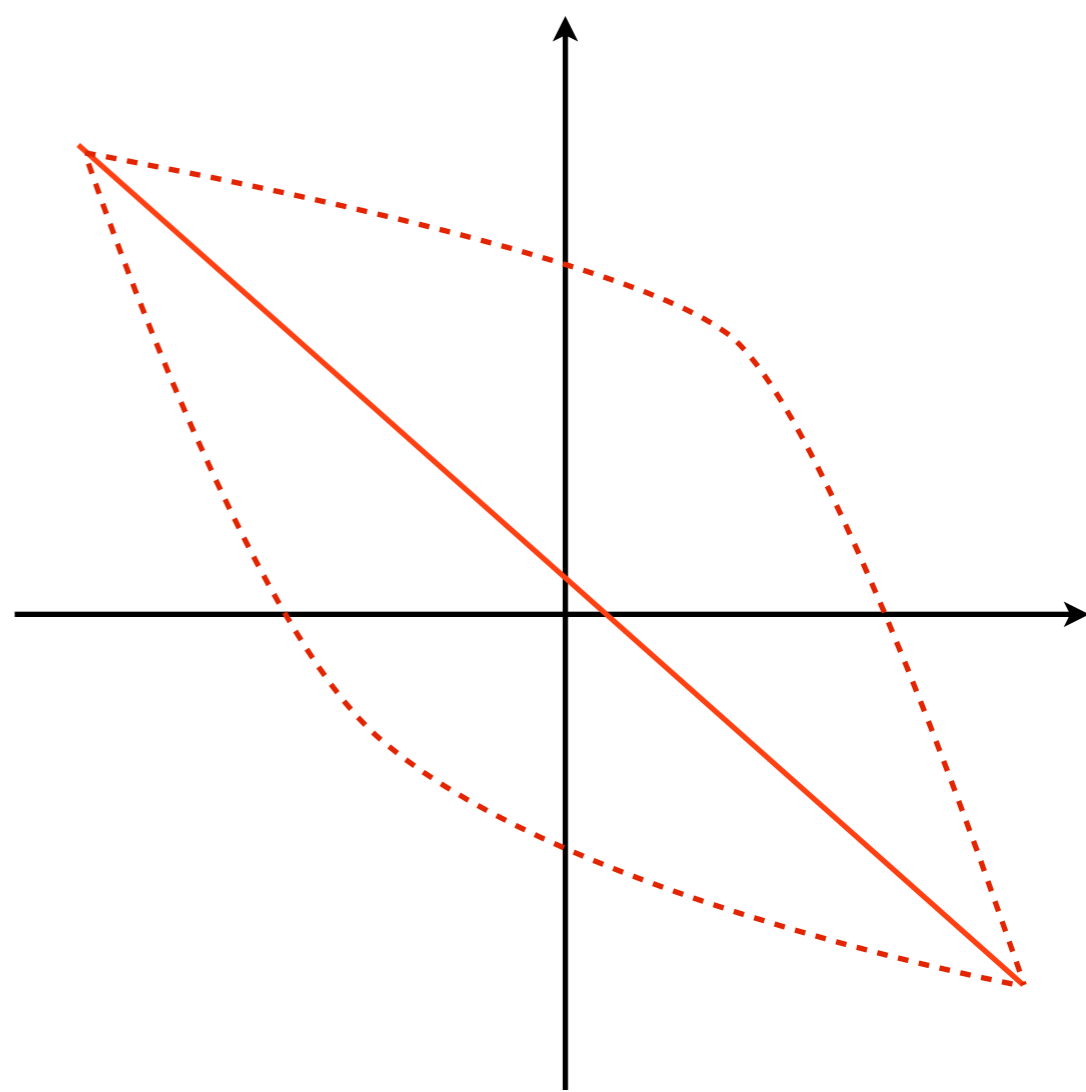
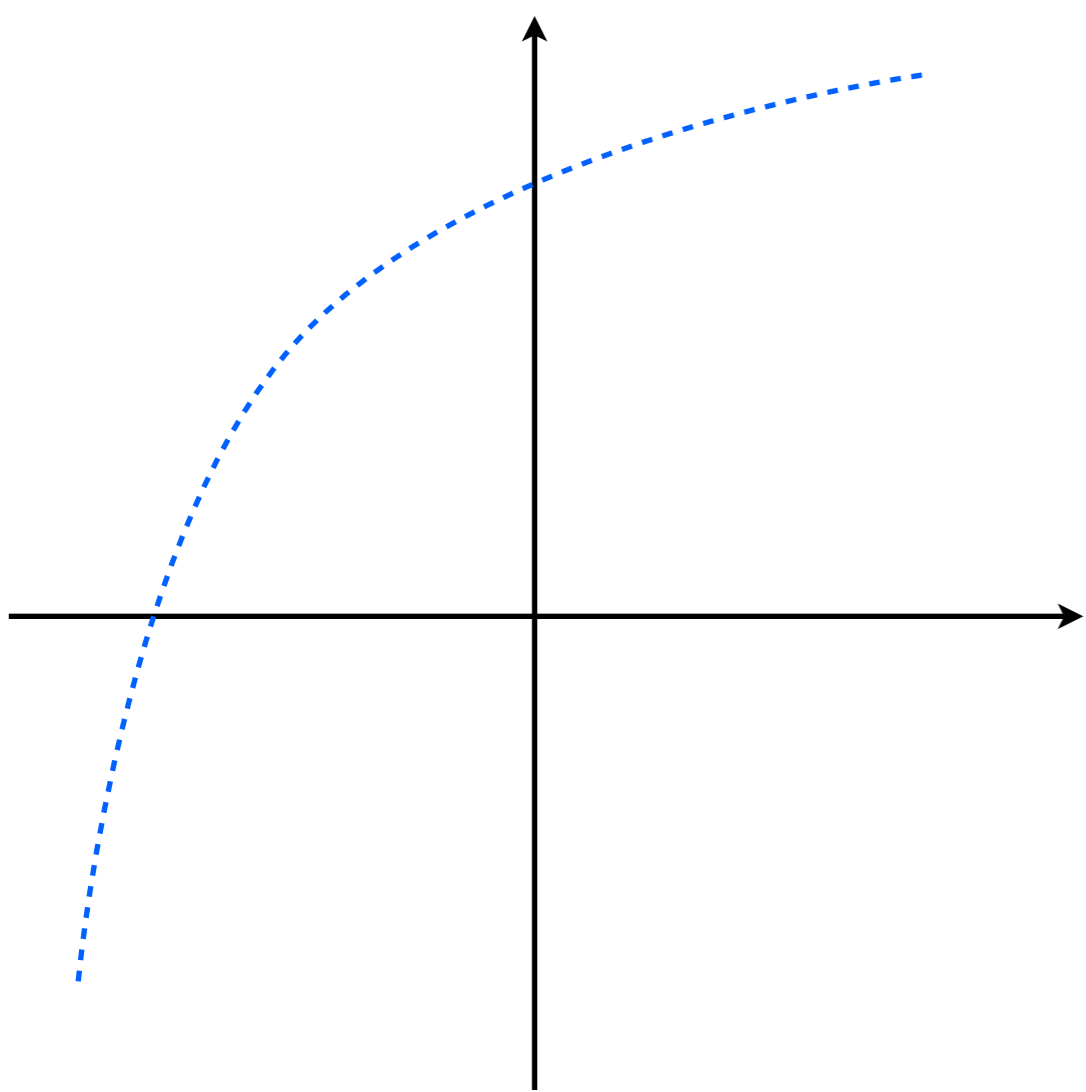
Est-il possible d'être plus précis sur l'allure de la fonction ?

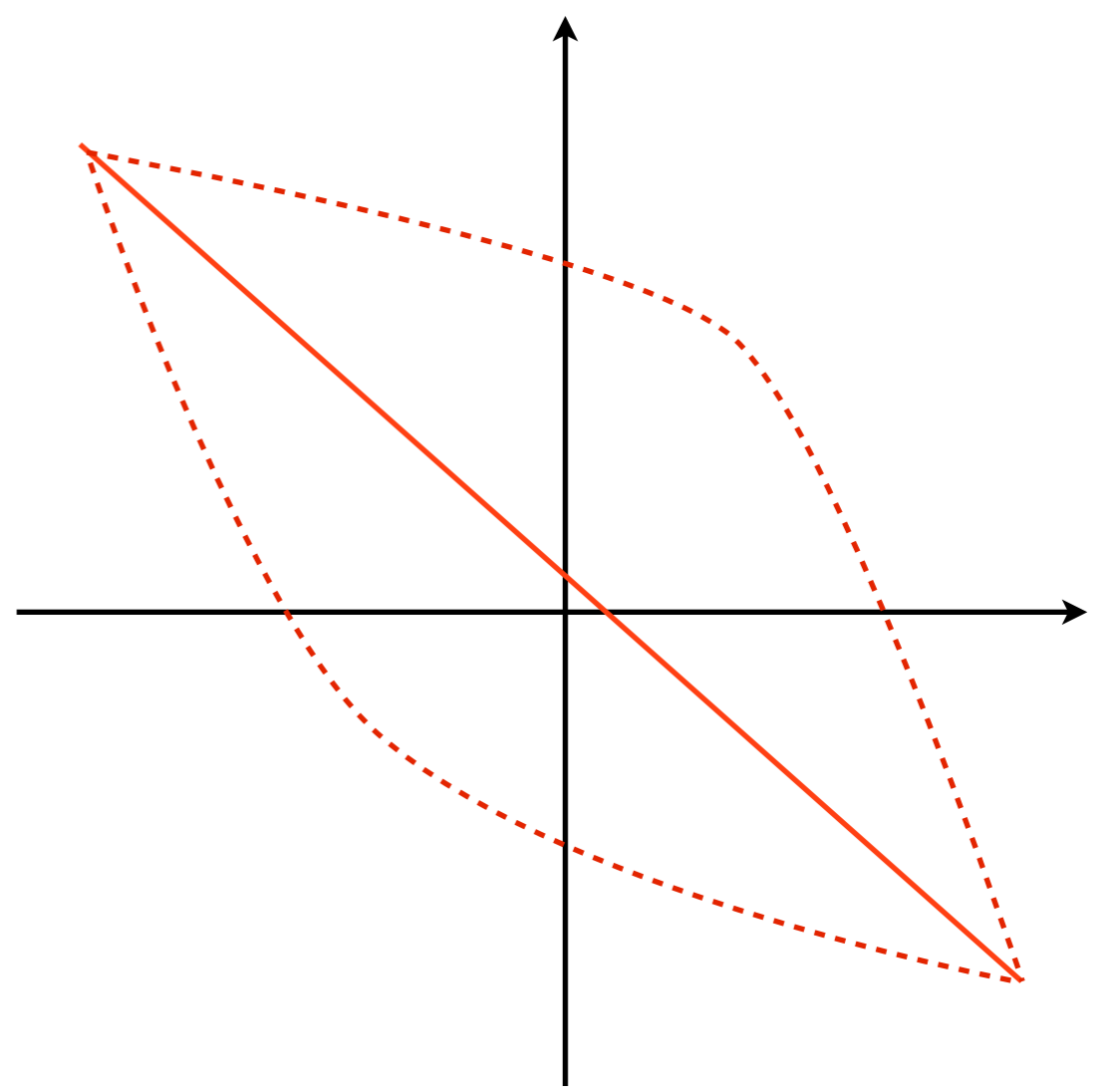
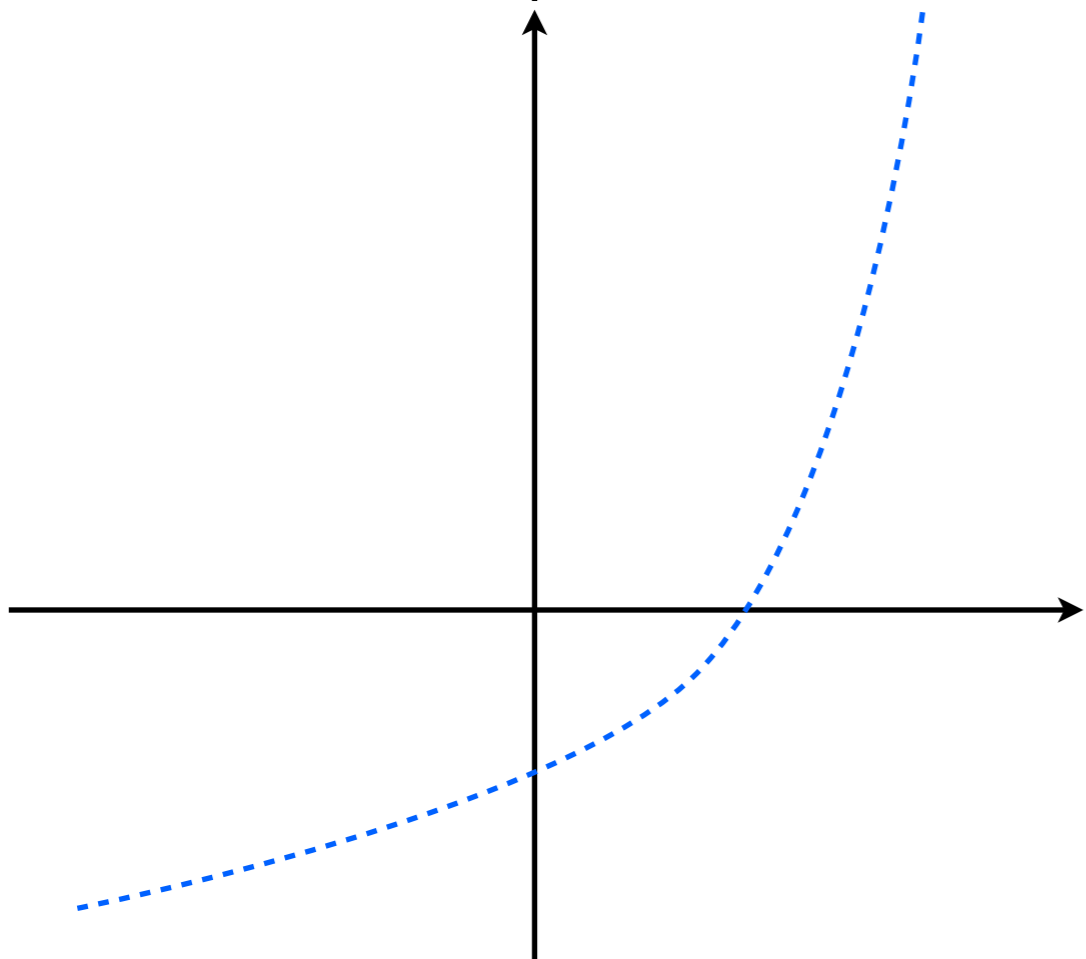
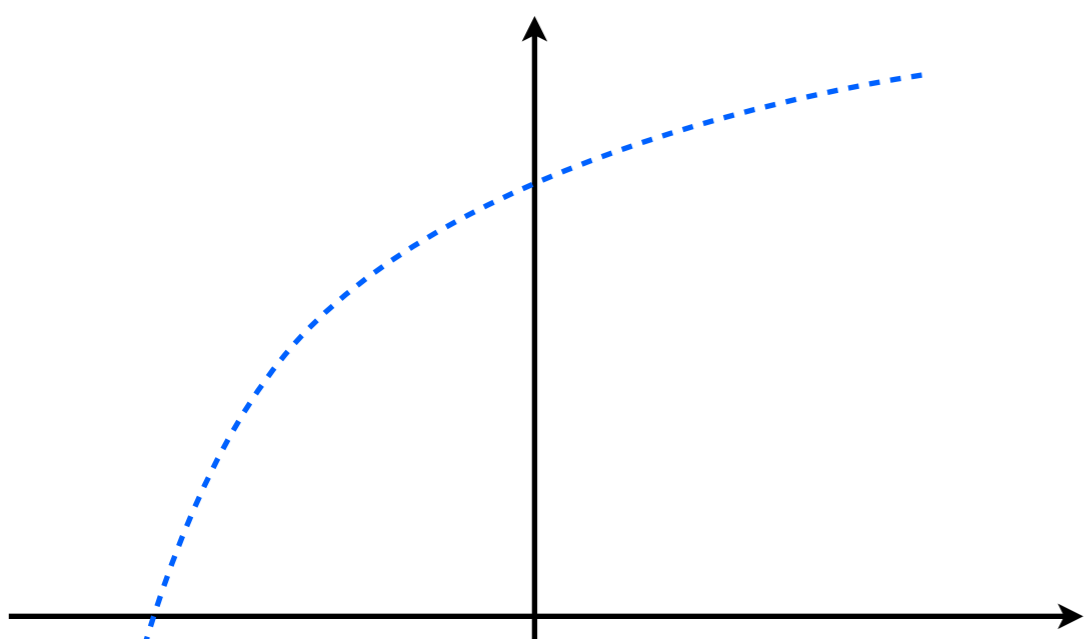
Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.

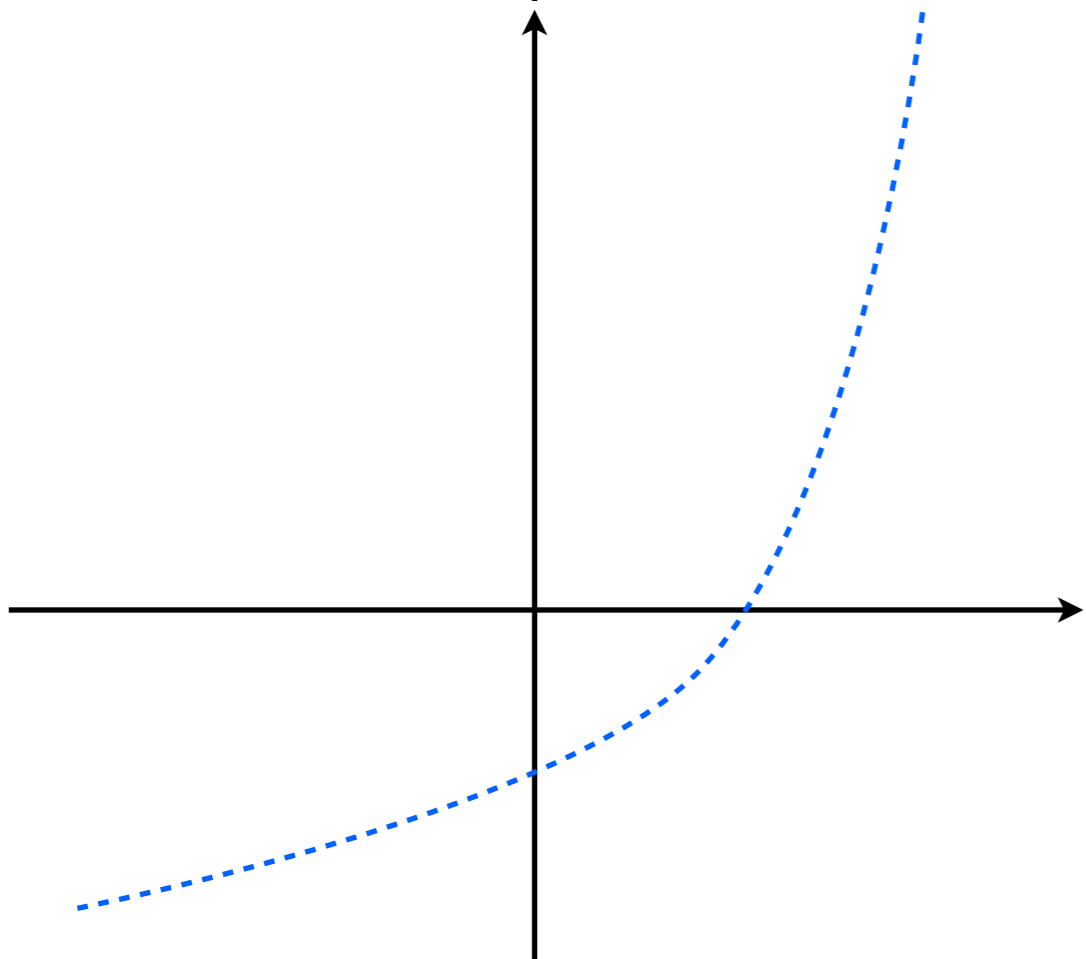
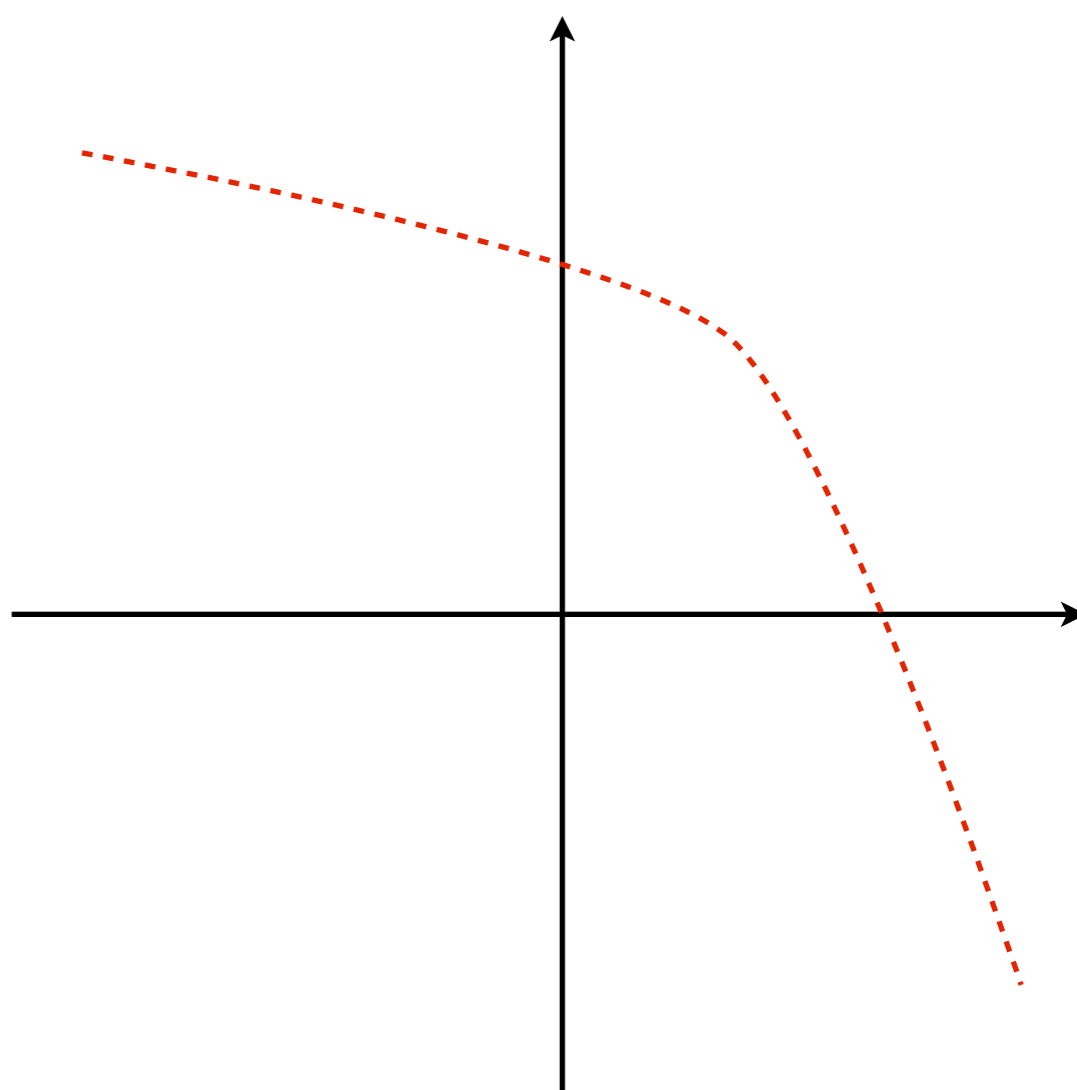
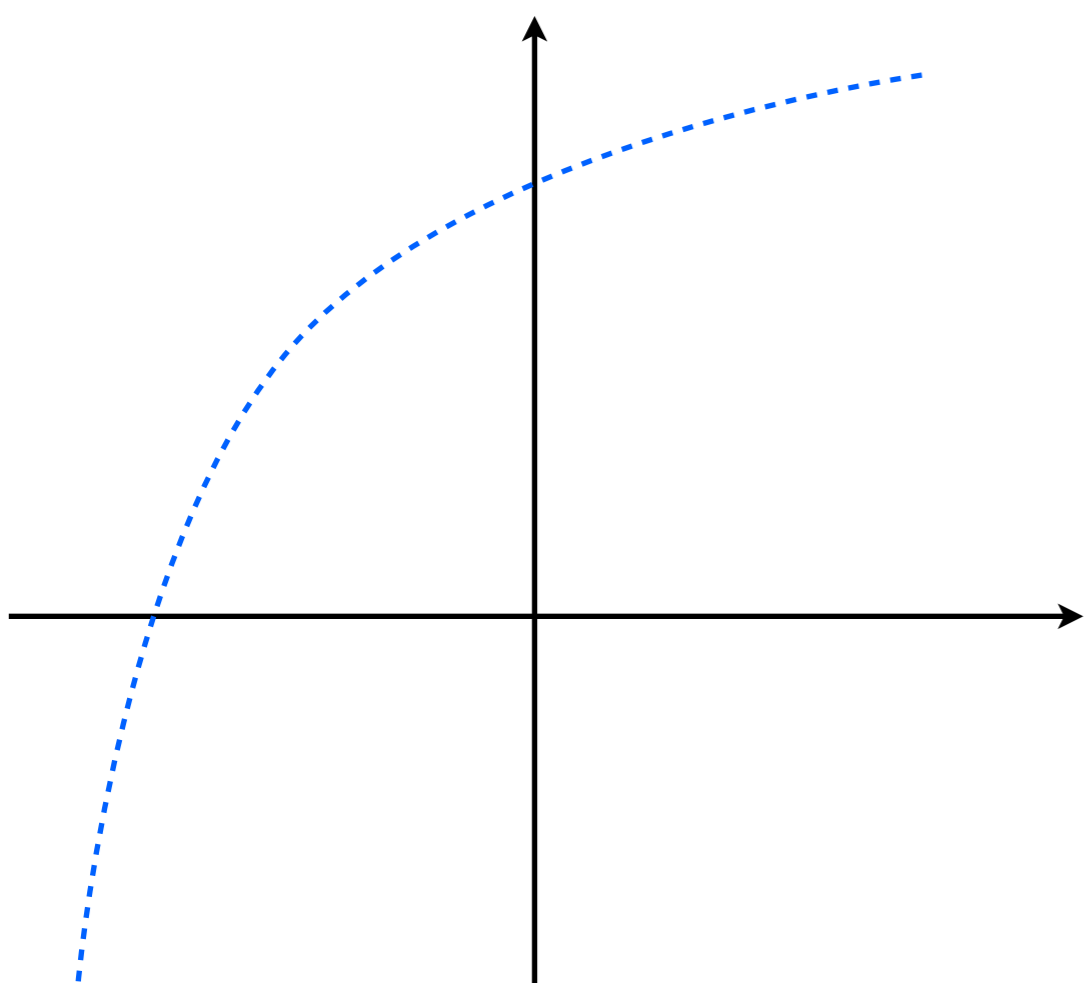


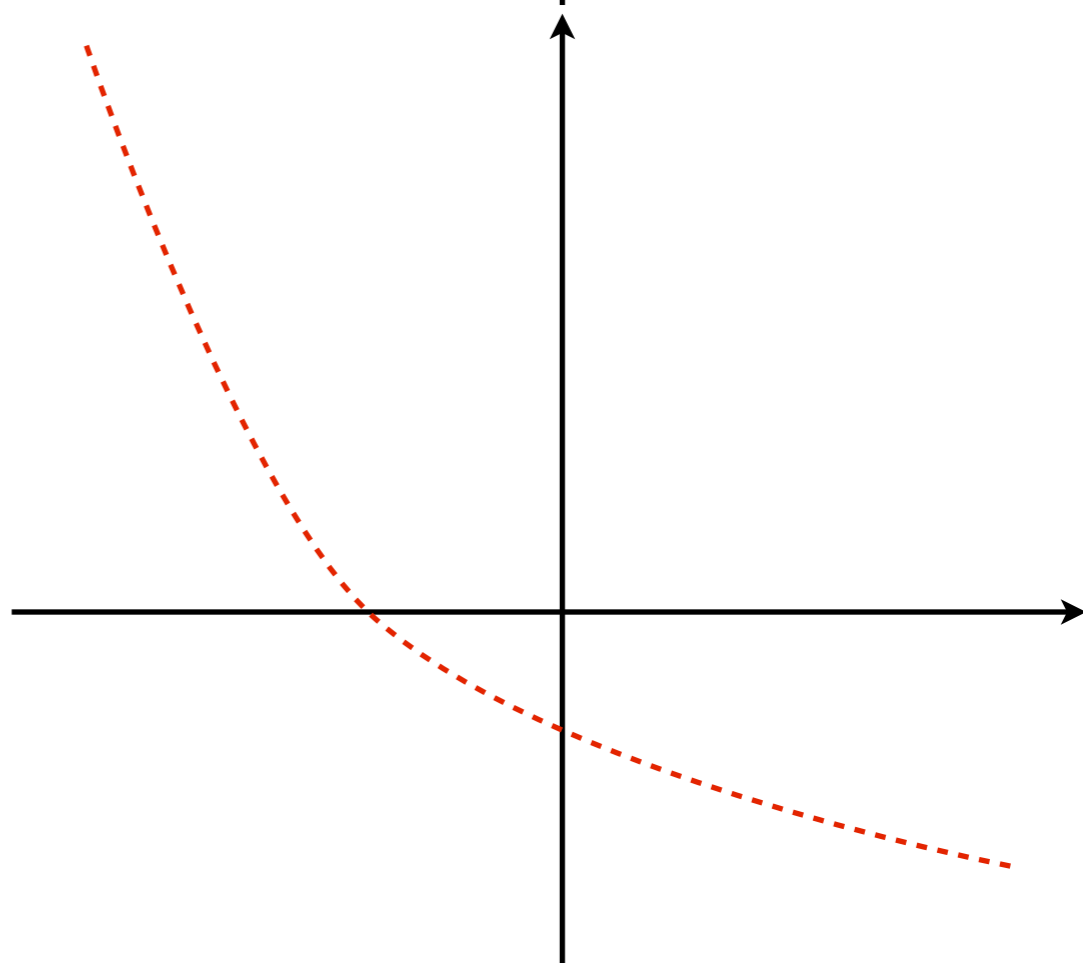
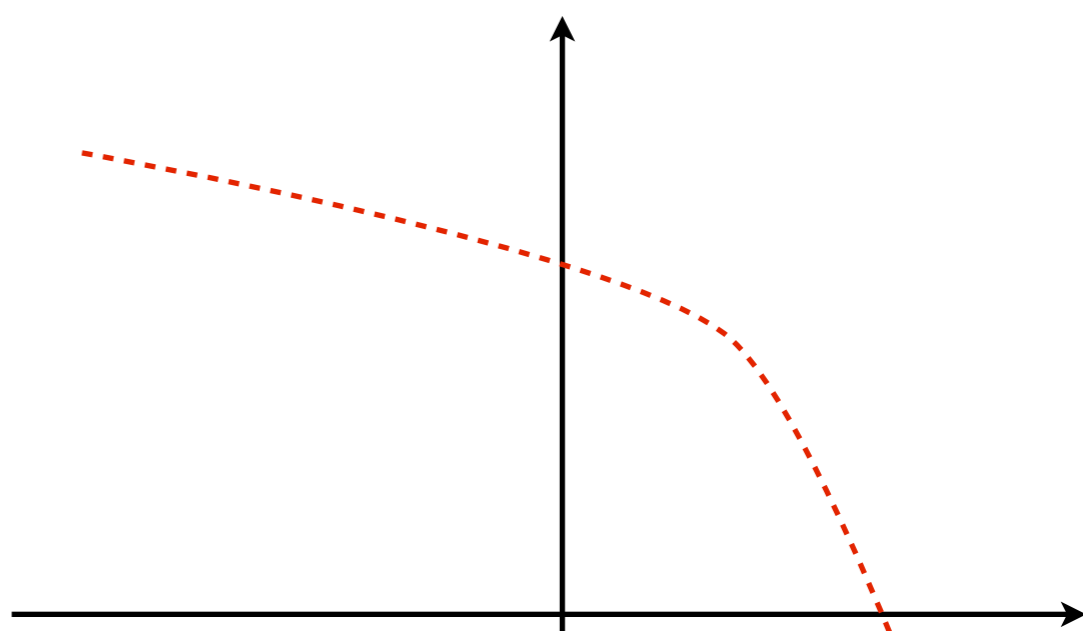
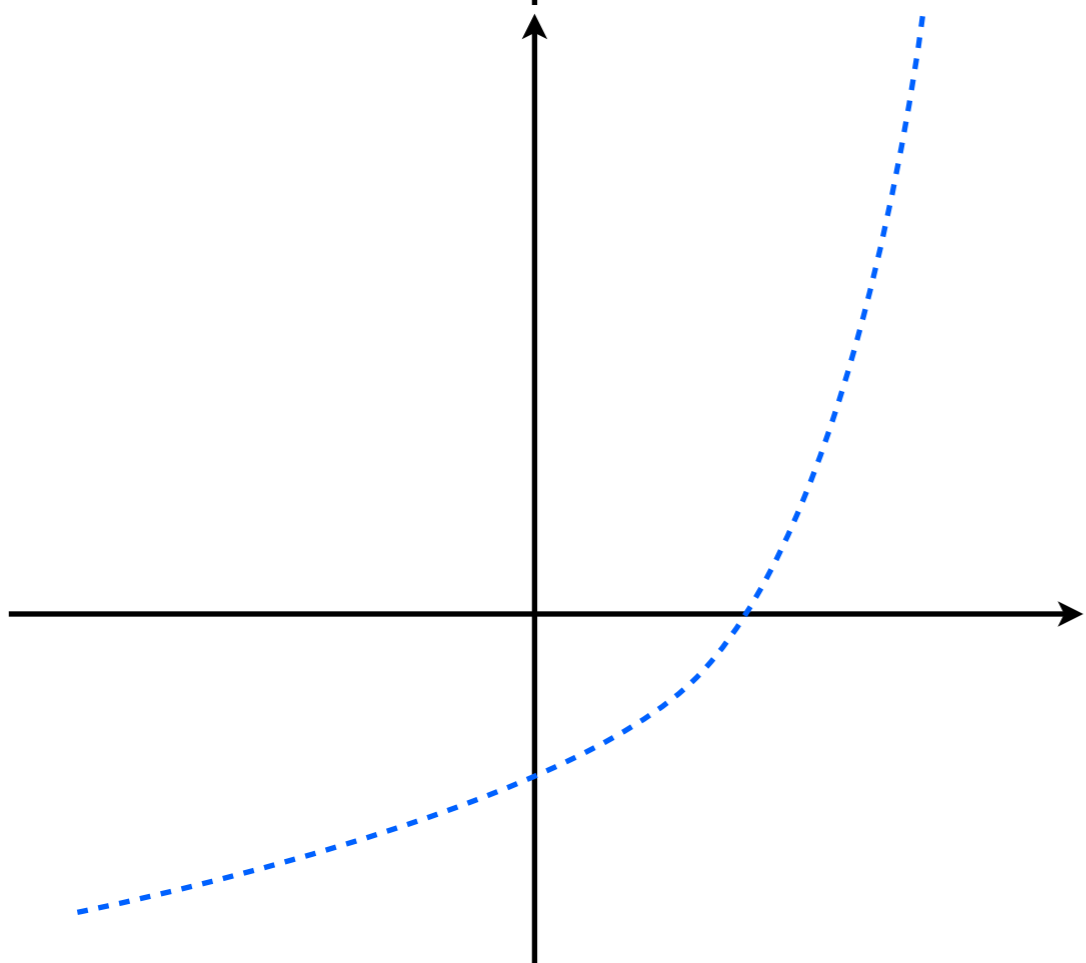
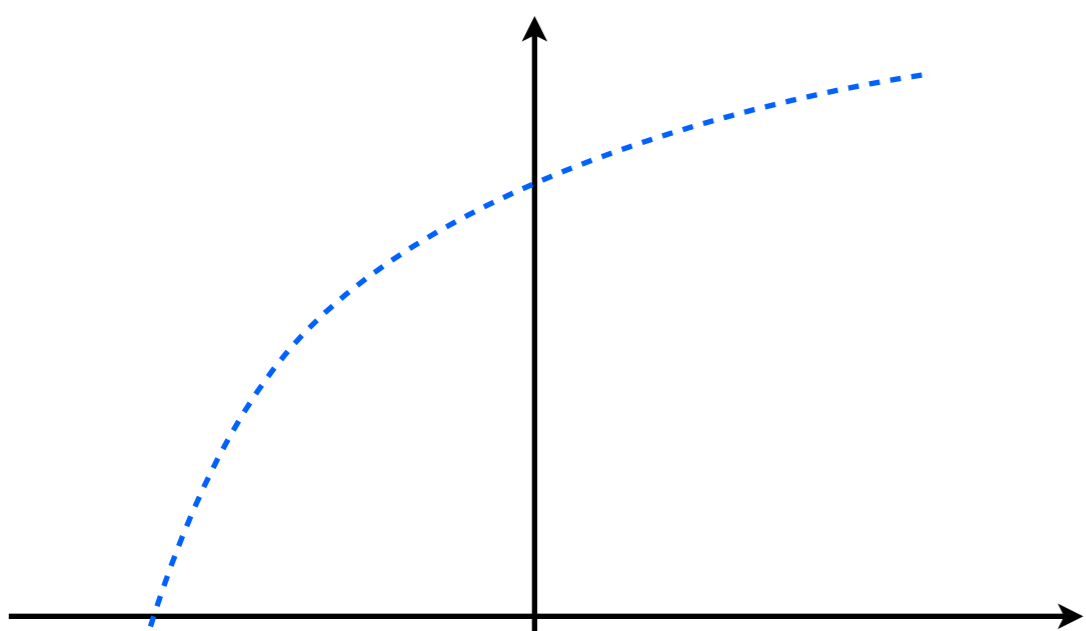
Est-il possible d'être plus précis sur l'allure de la fonction ?

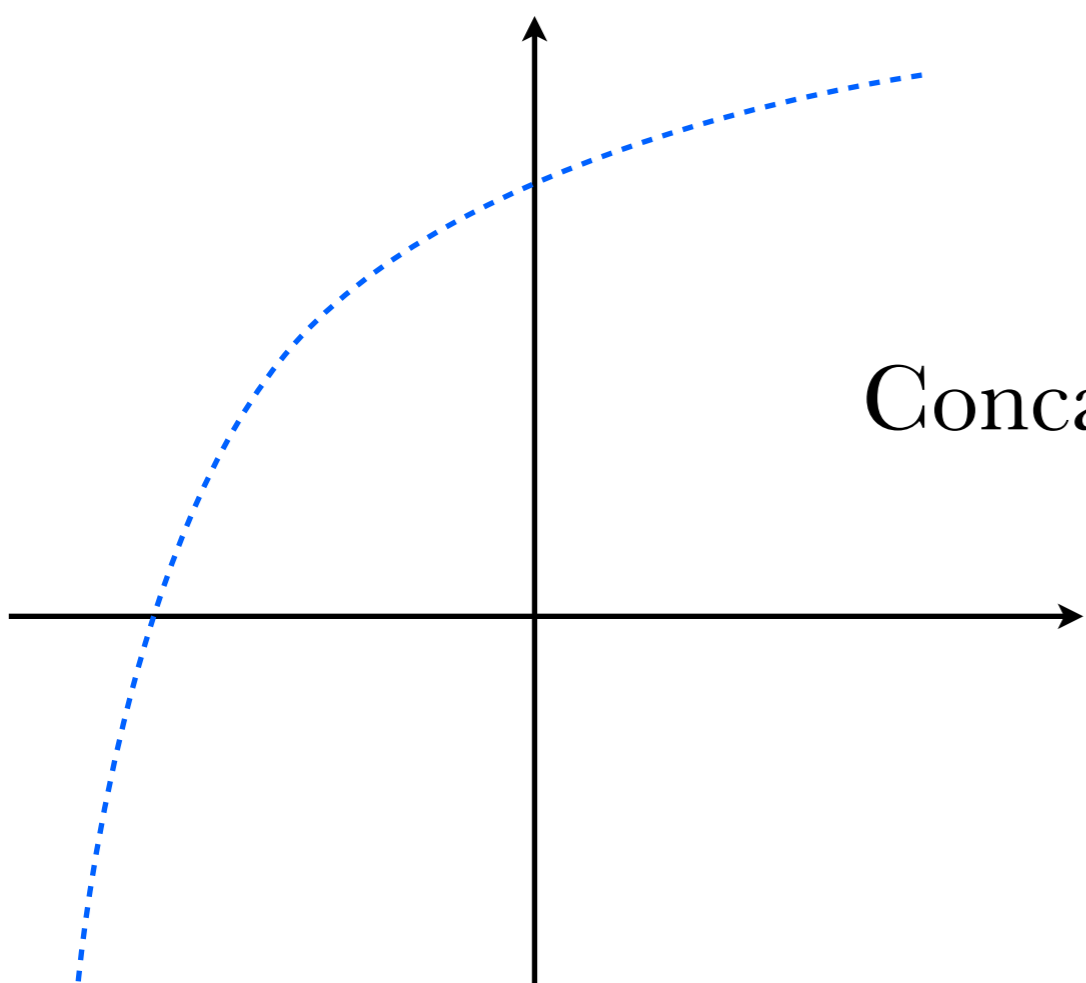




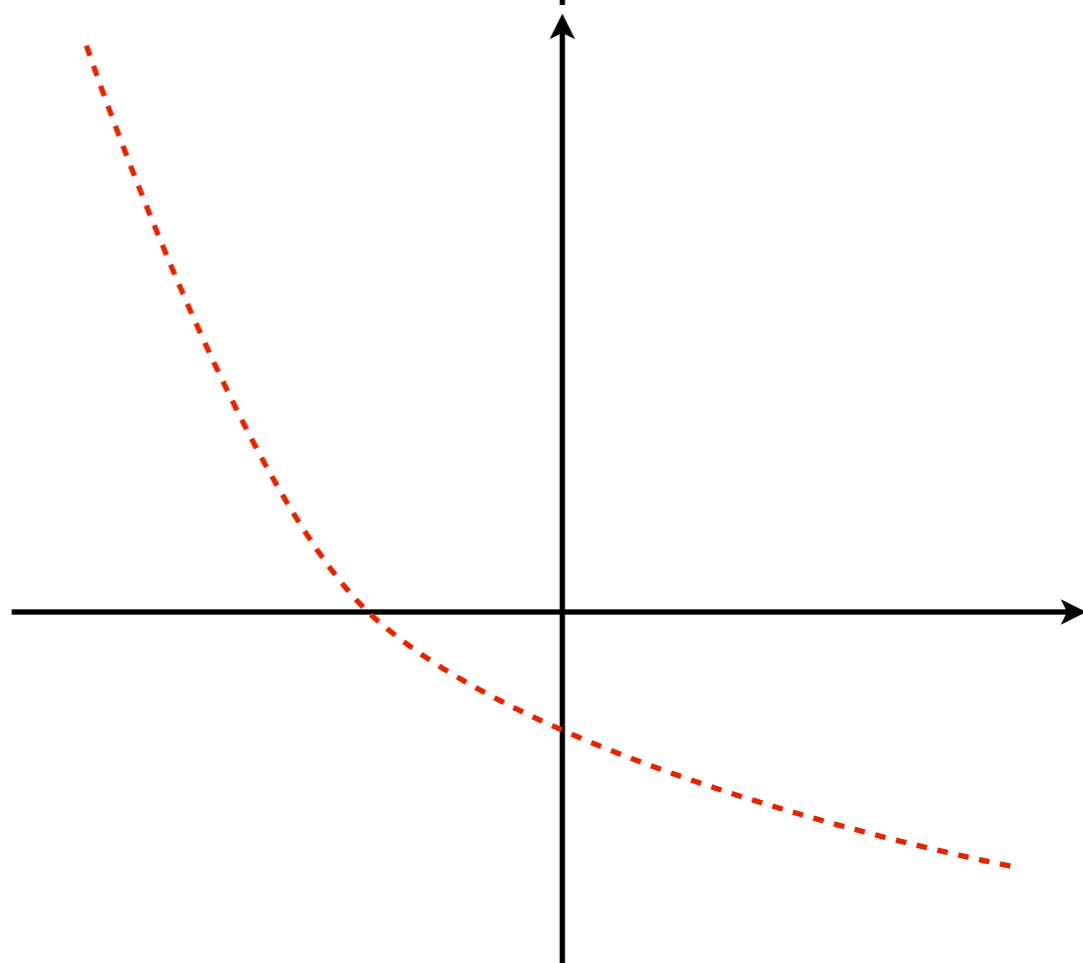
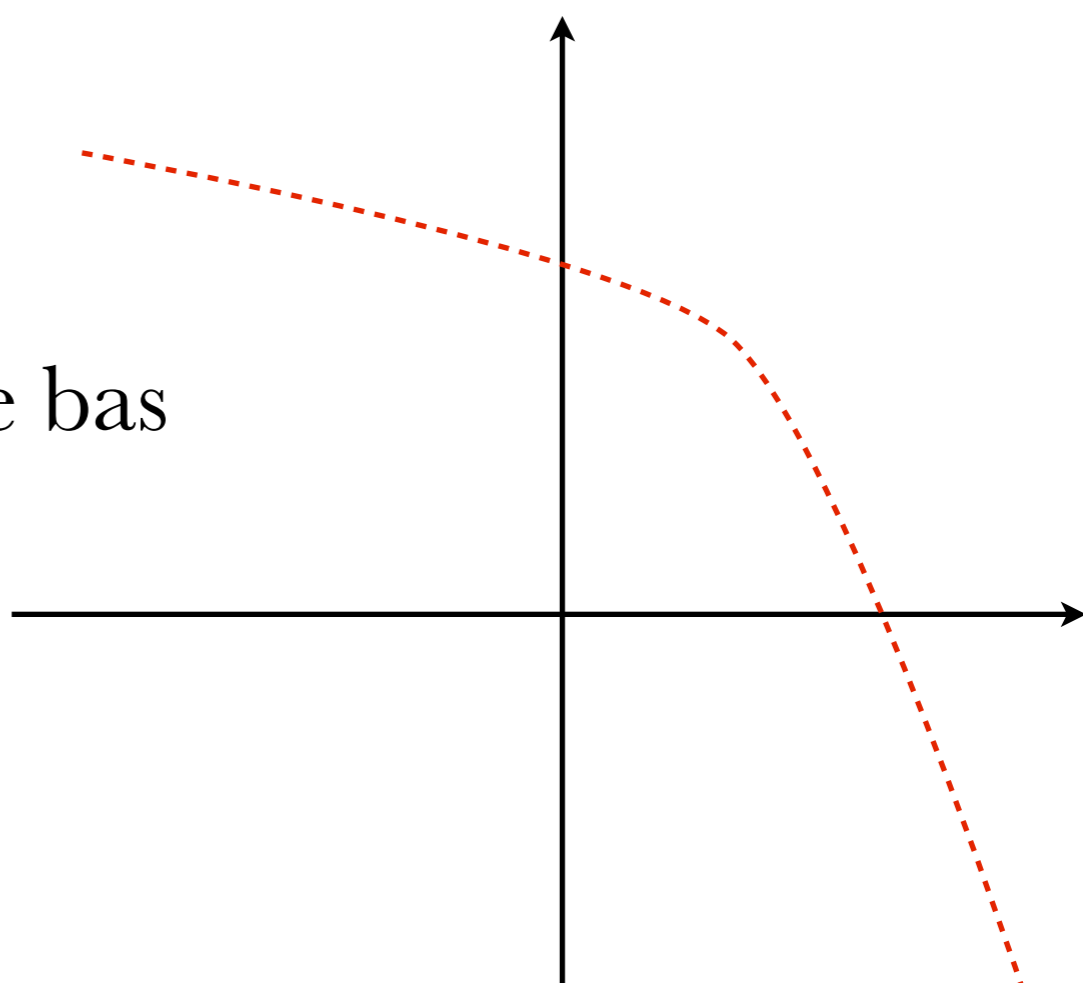
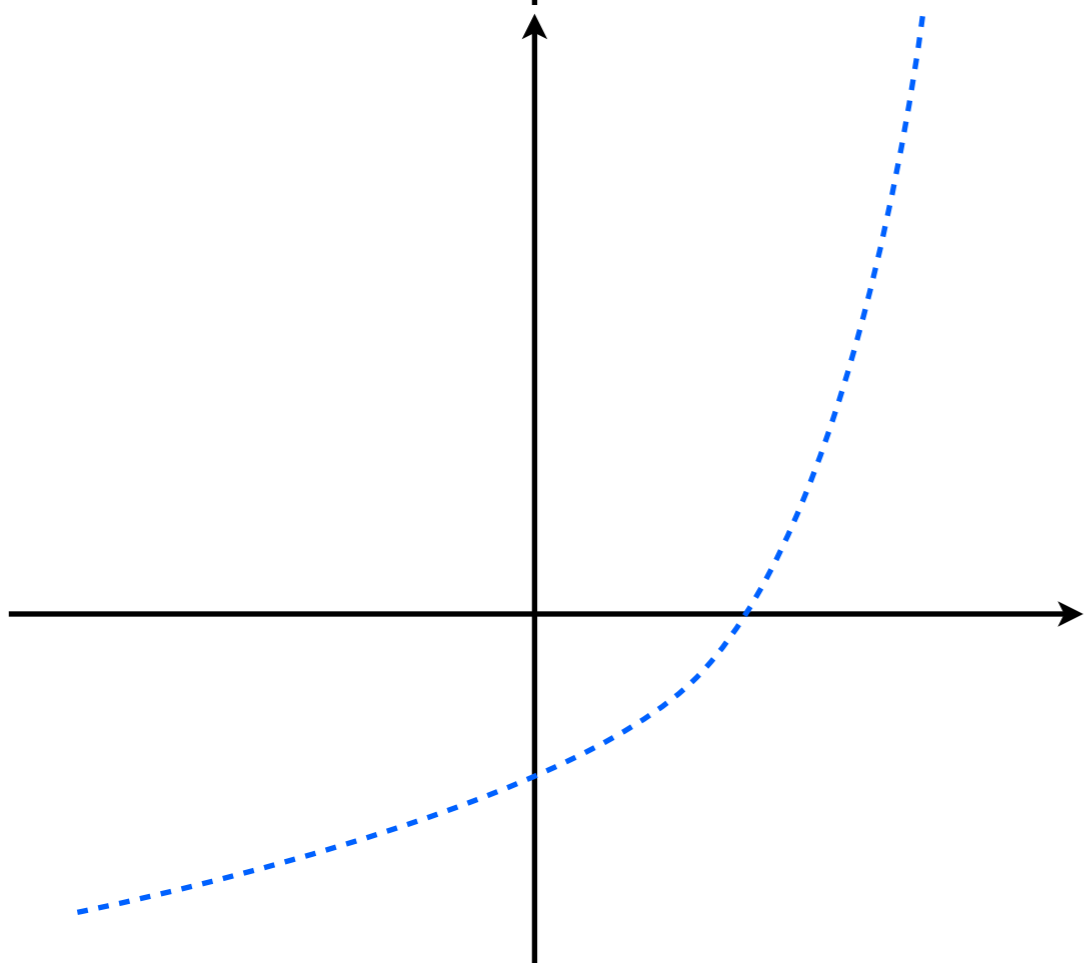


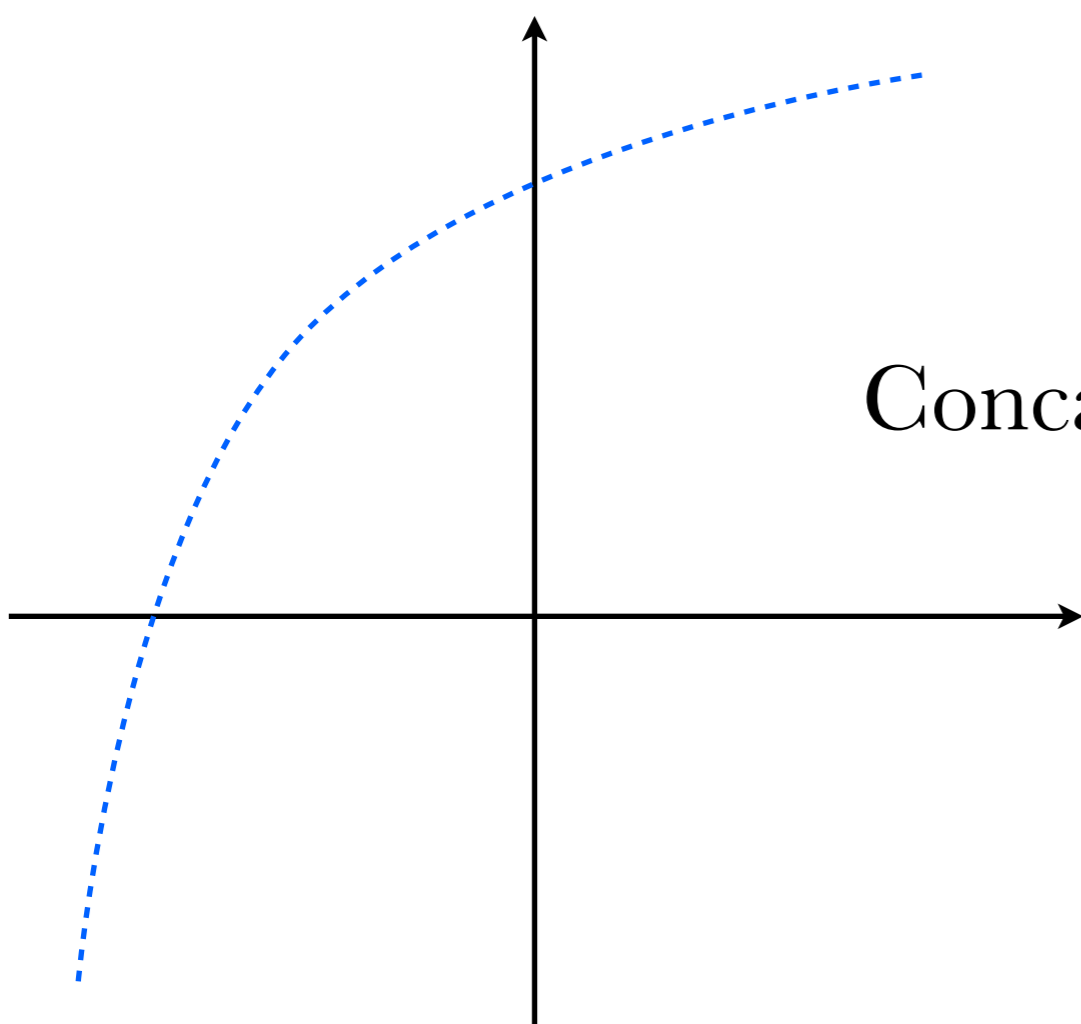




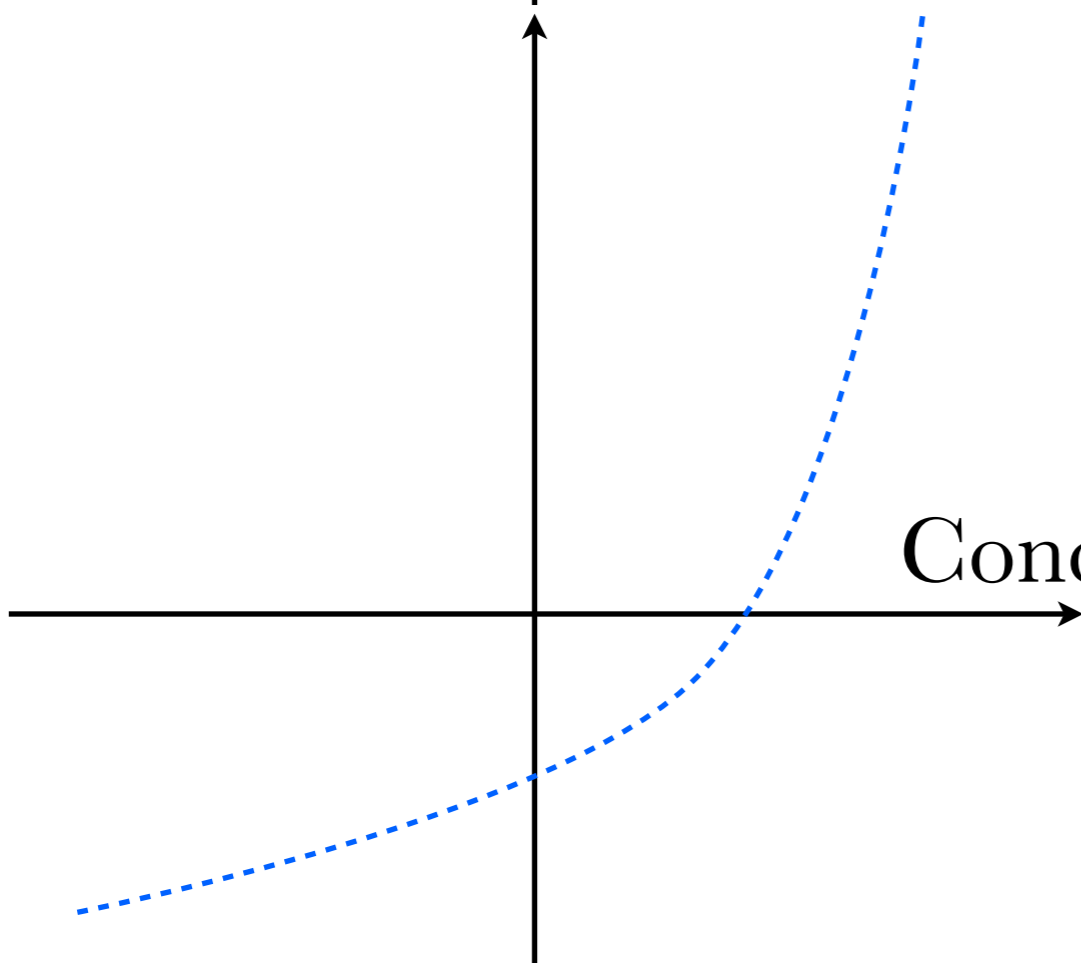
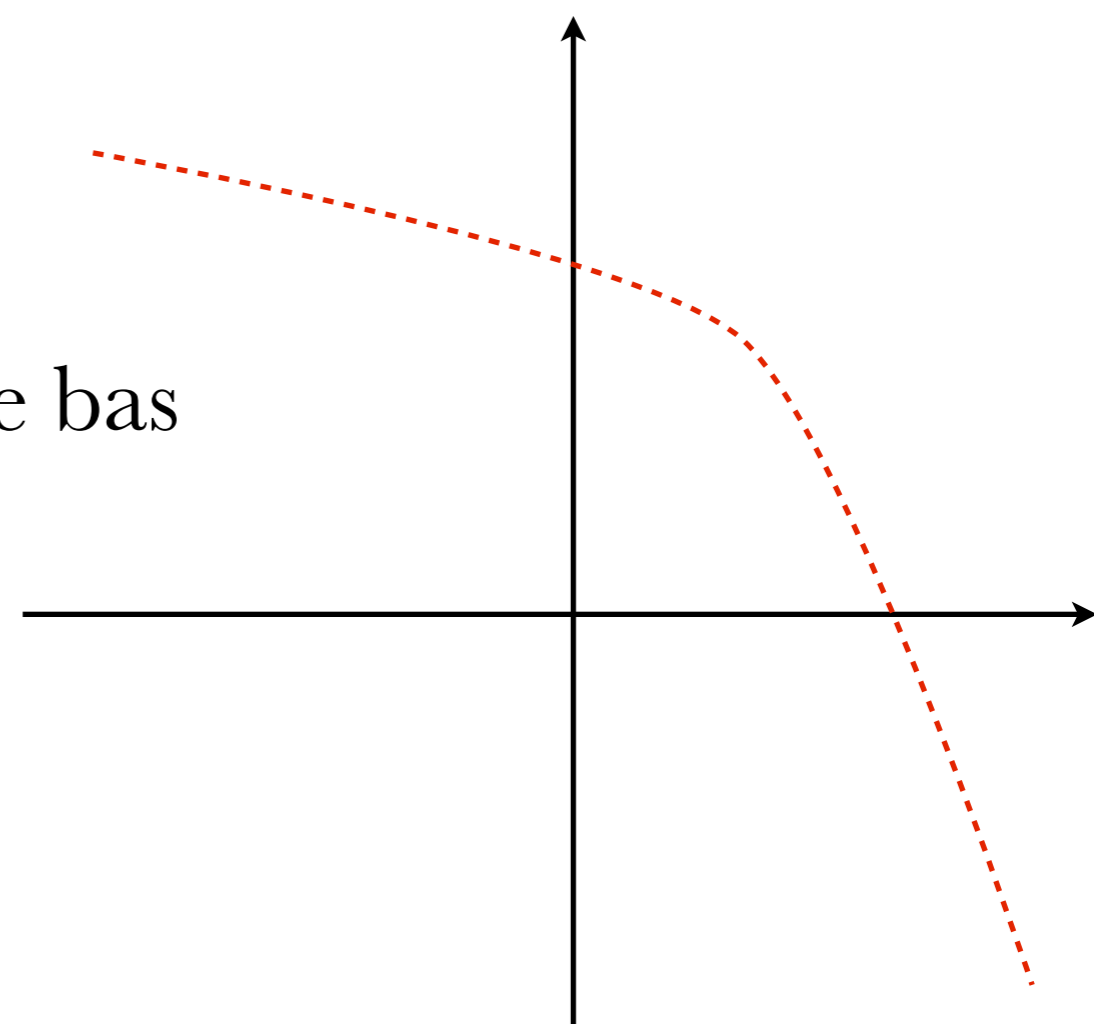


Concave vers le bas

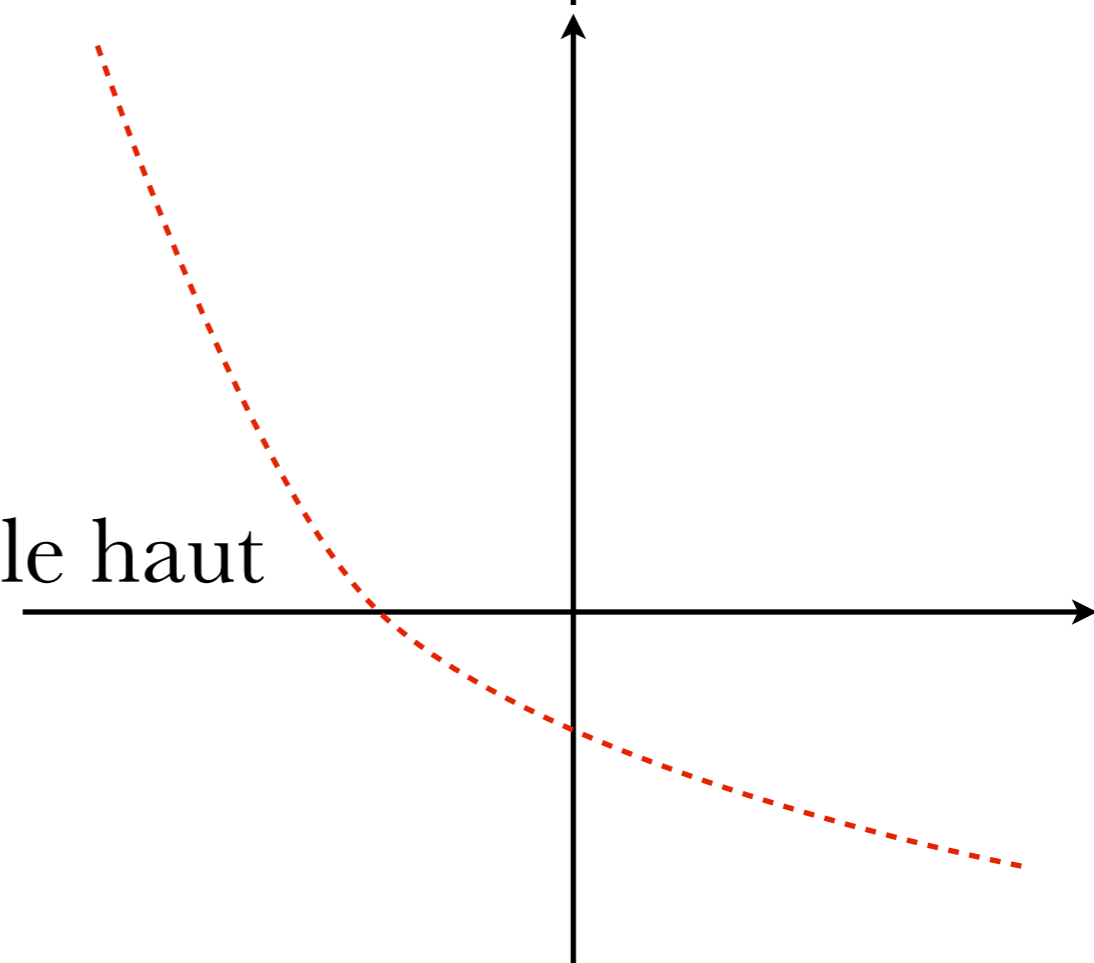


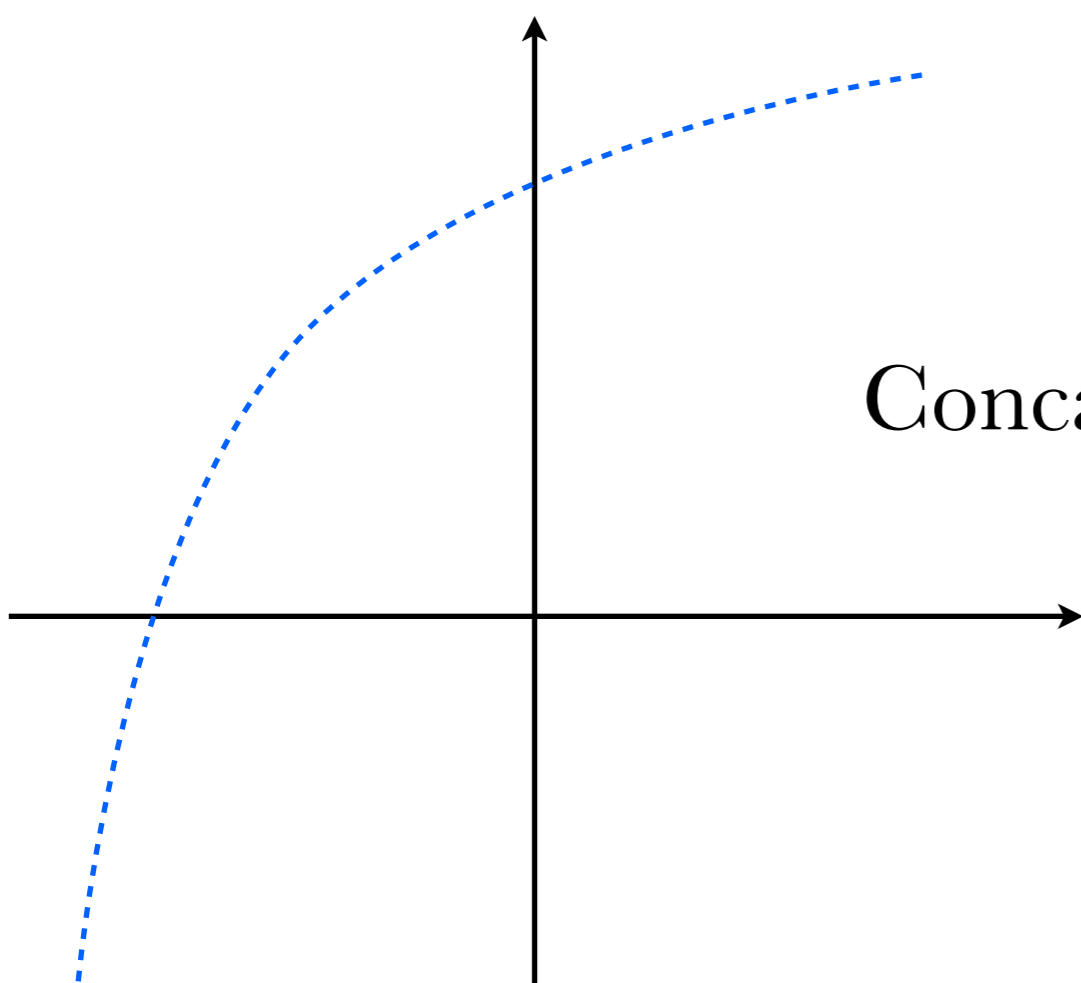


Concave vers le bas

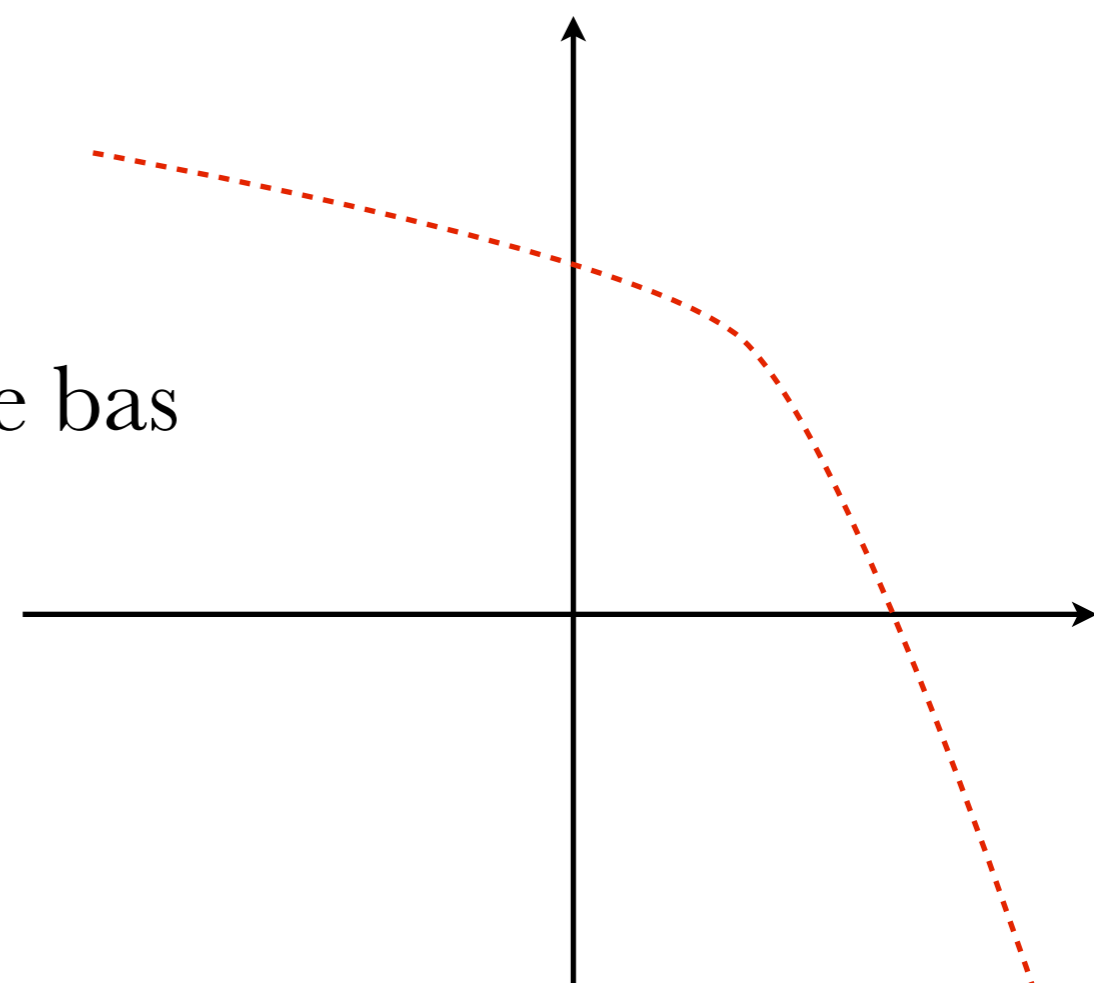


Concave vers le haut

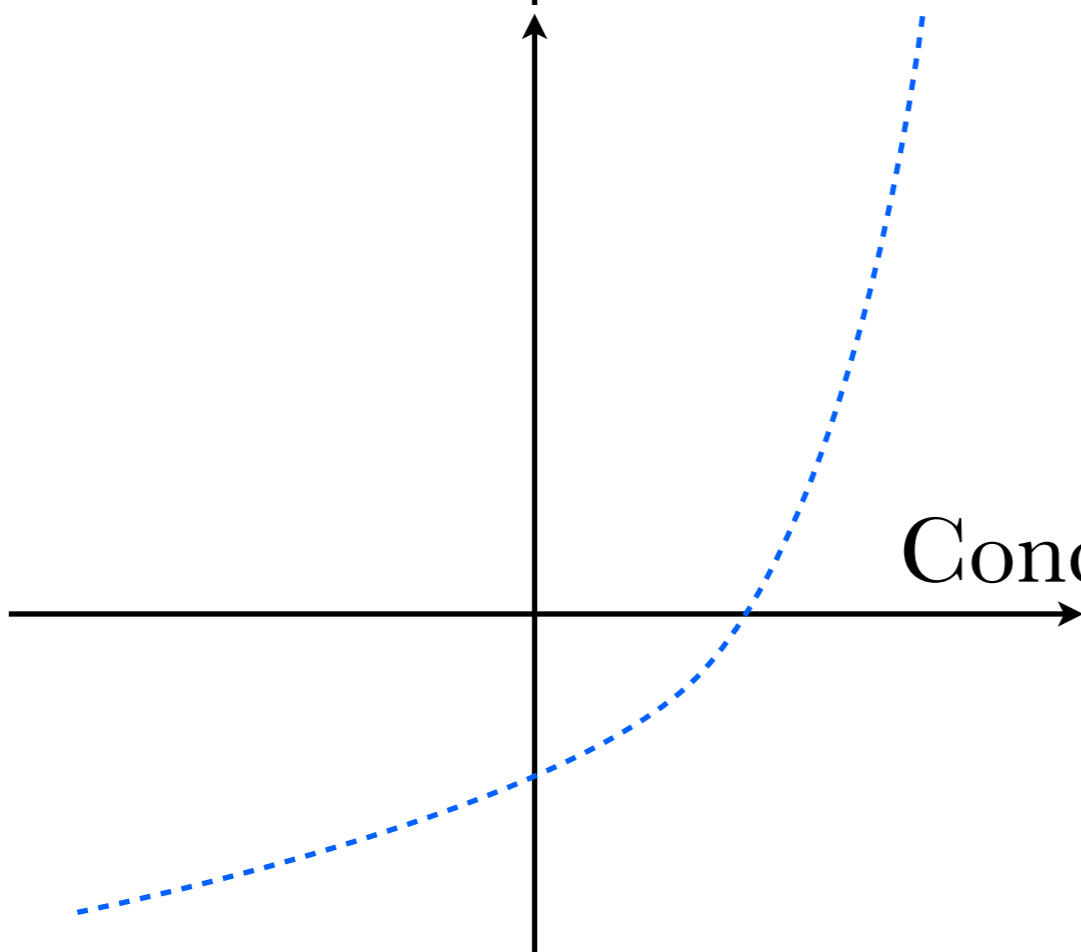




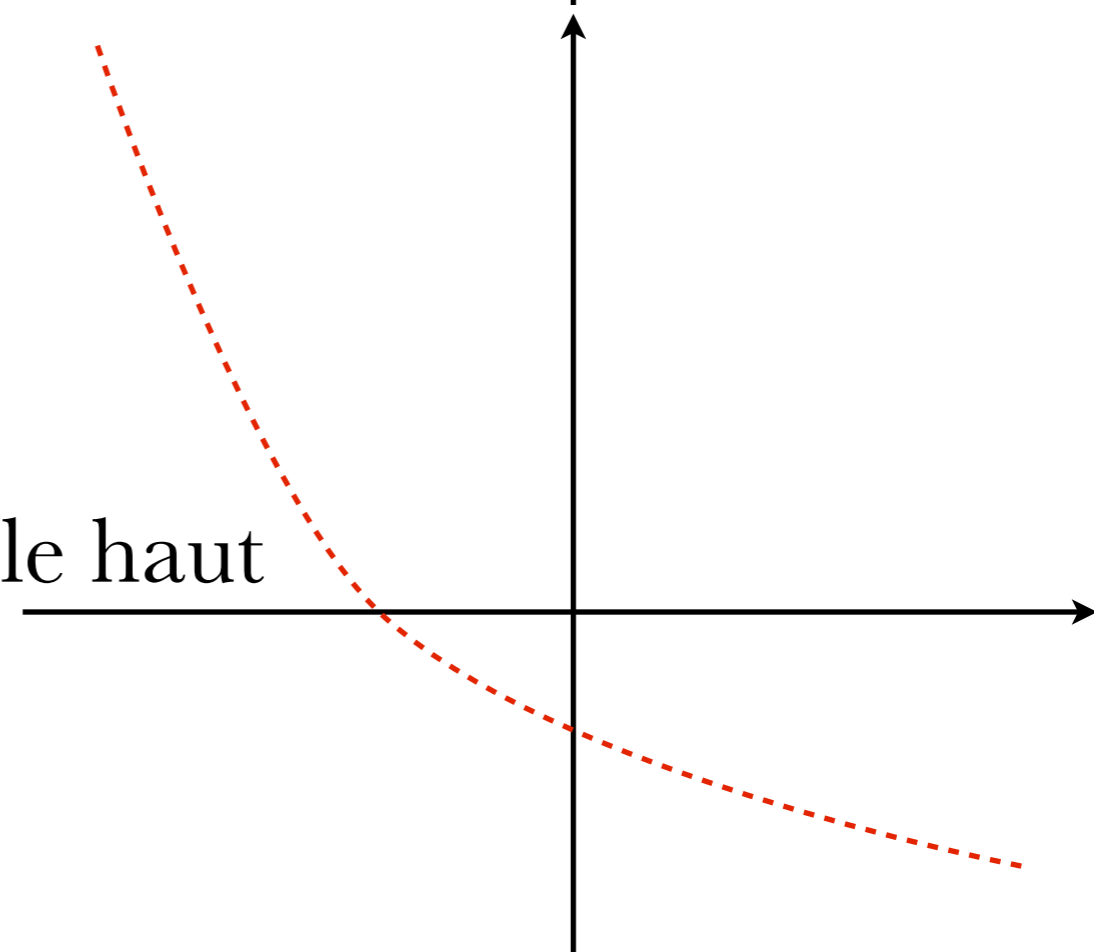
Concave vers le bas

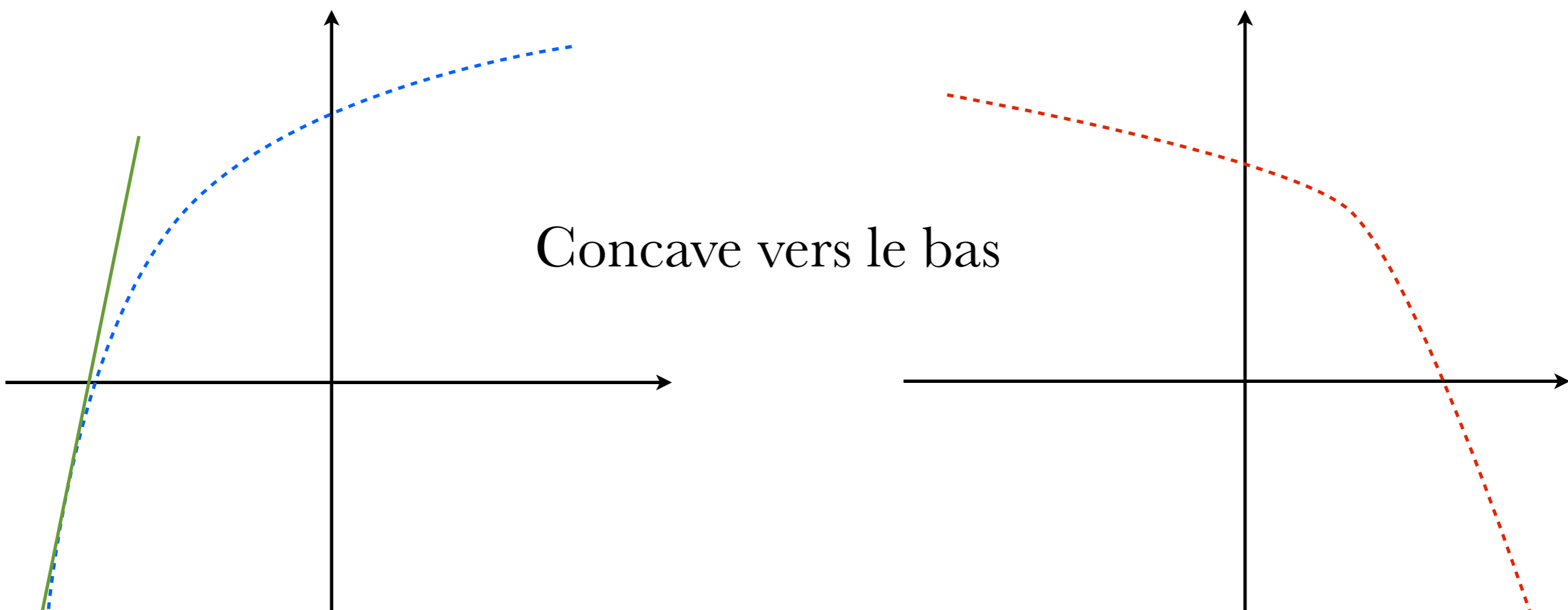


Regardons la dérivée dans chacun des cas.



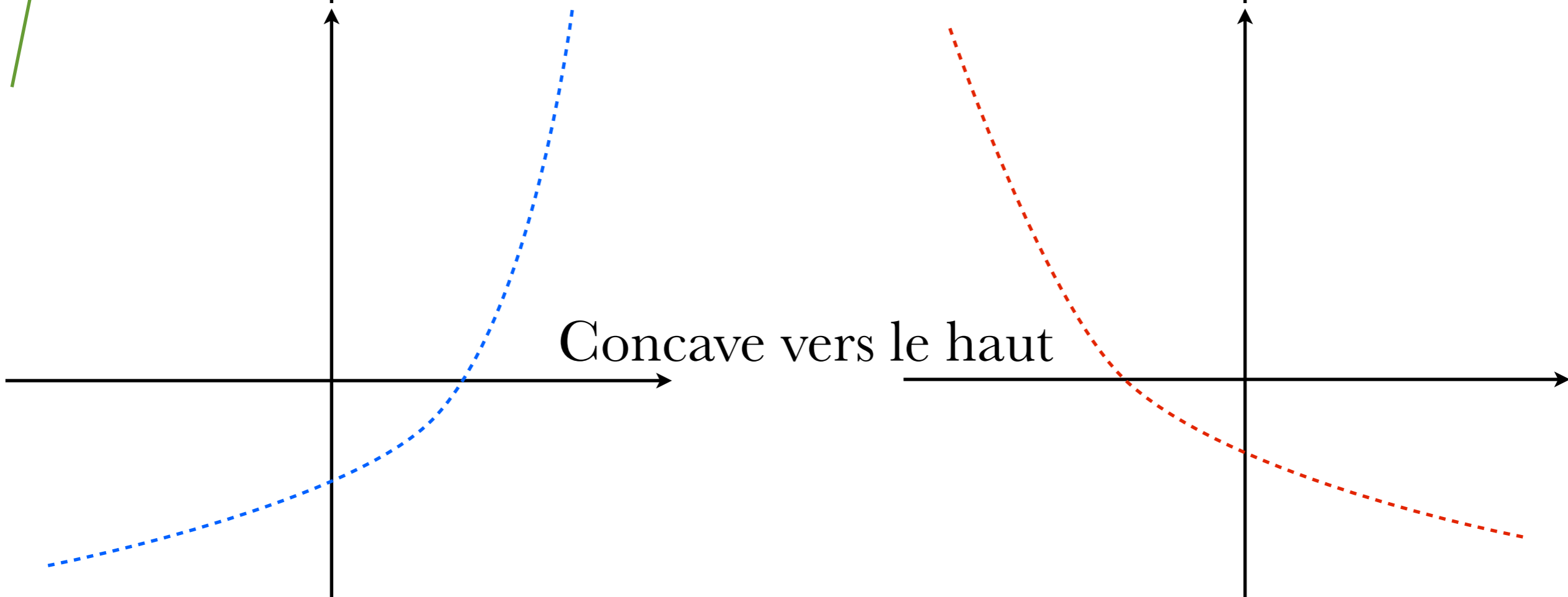
Concave vers le haut



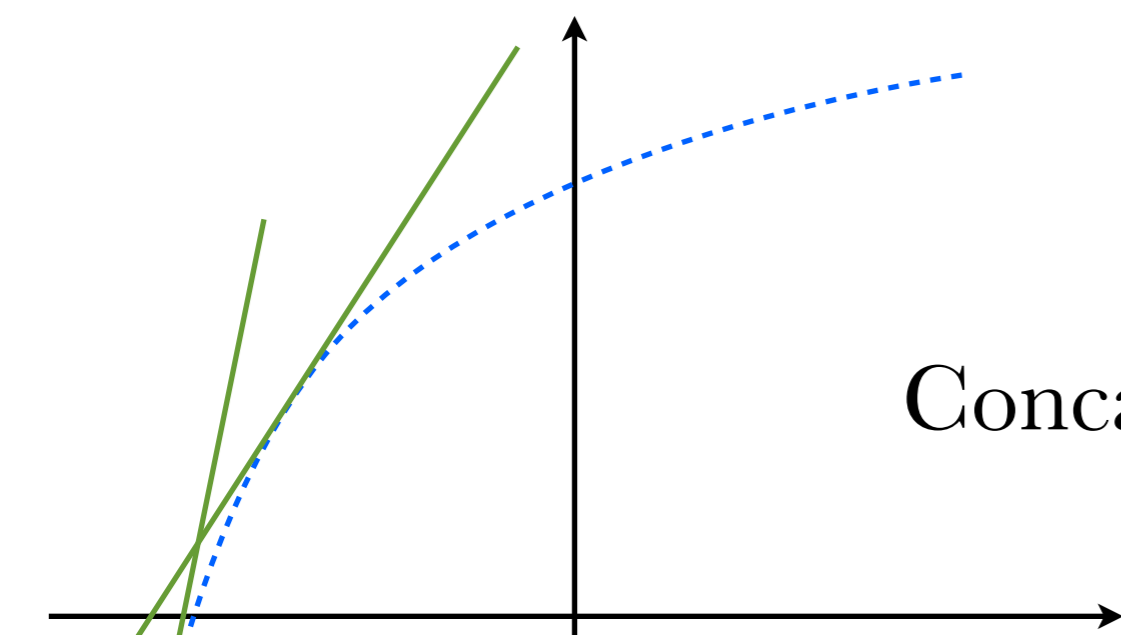


Concave vers le bas

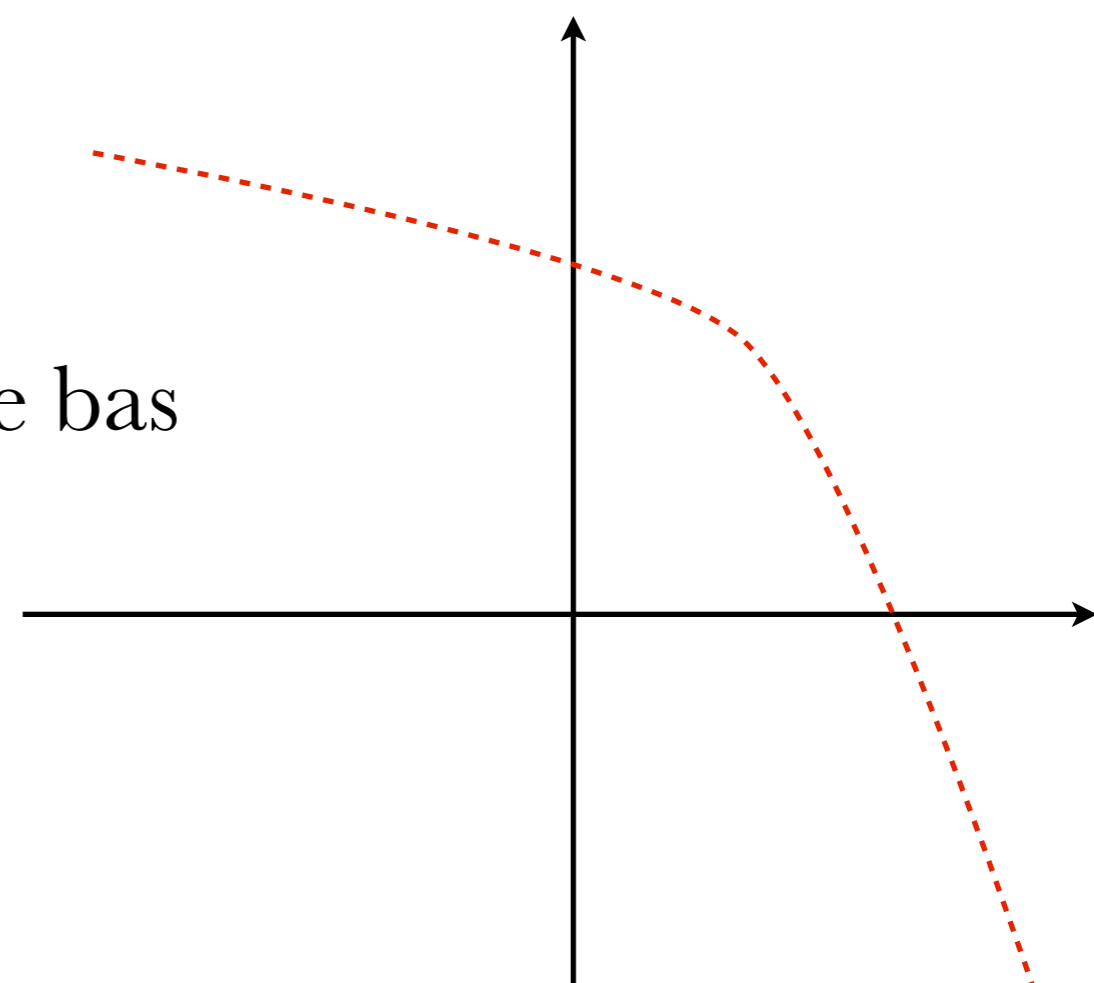
Regardons la dérivée dans chacun des cas.



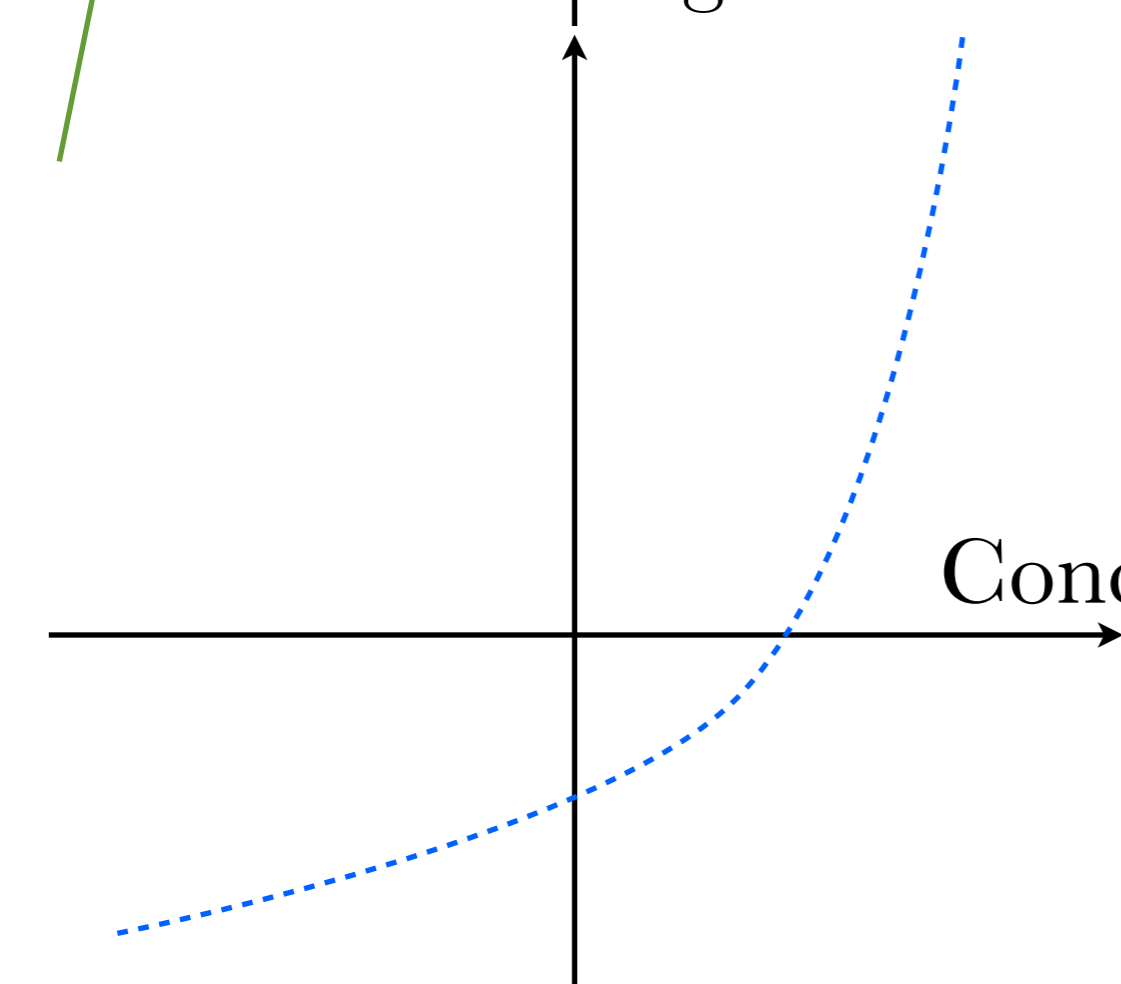
Concave vers le haut



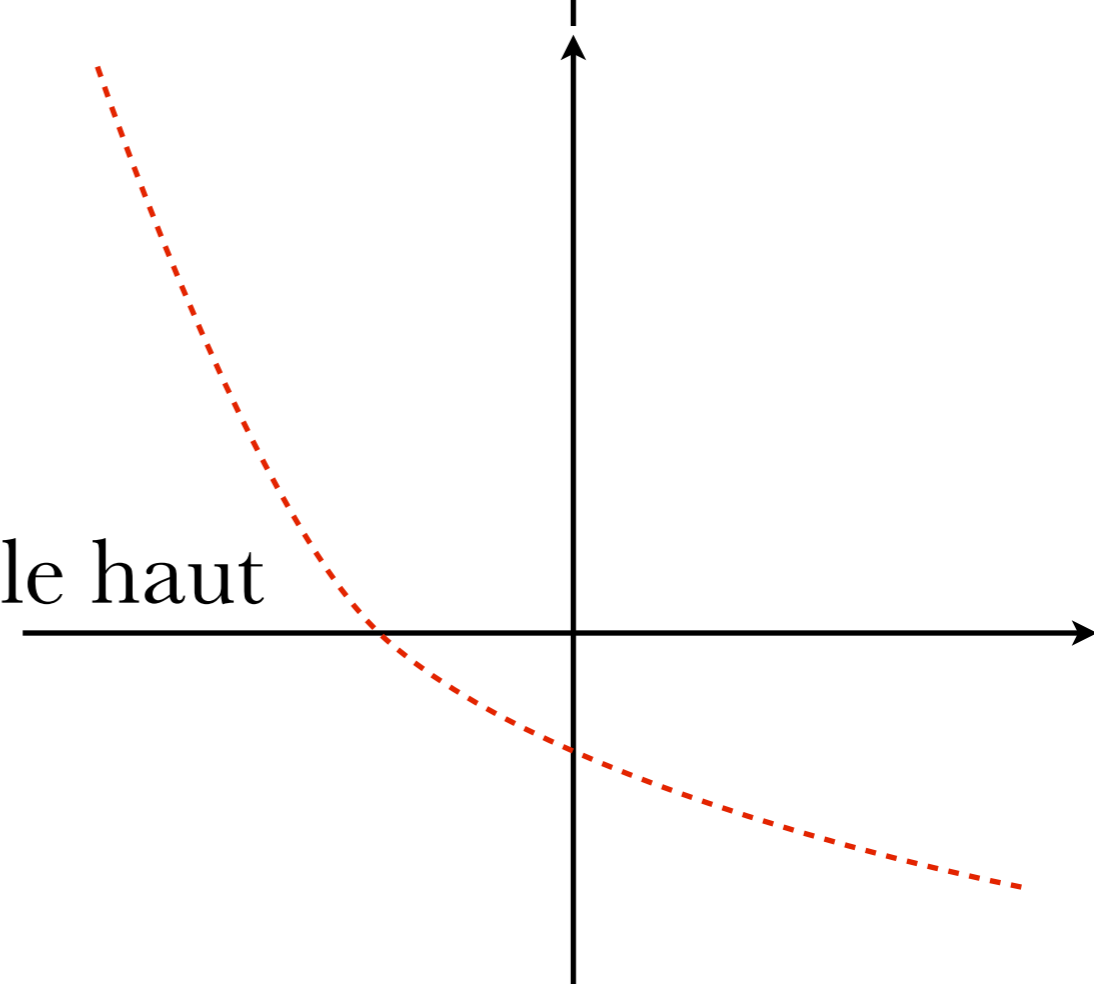
Concave vers le bas

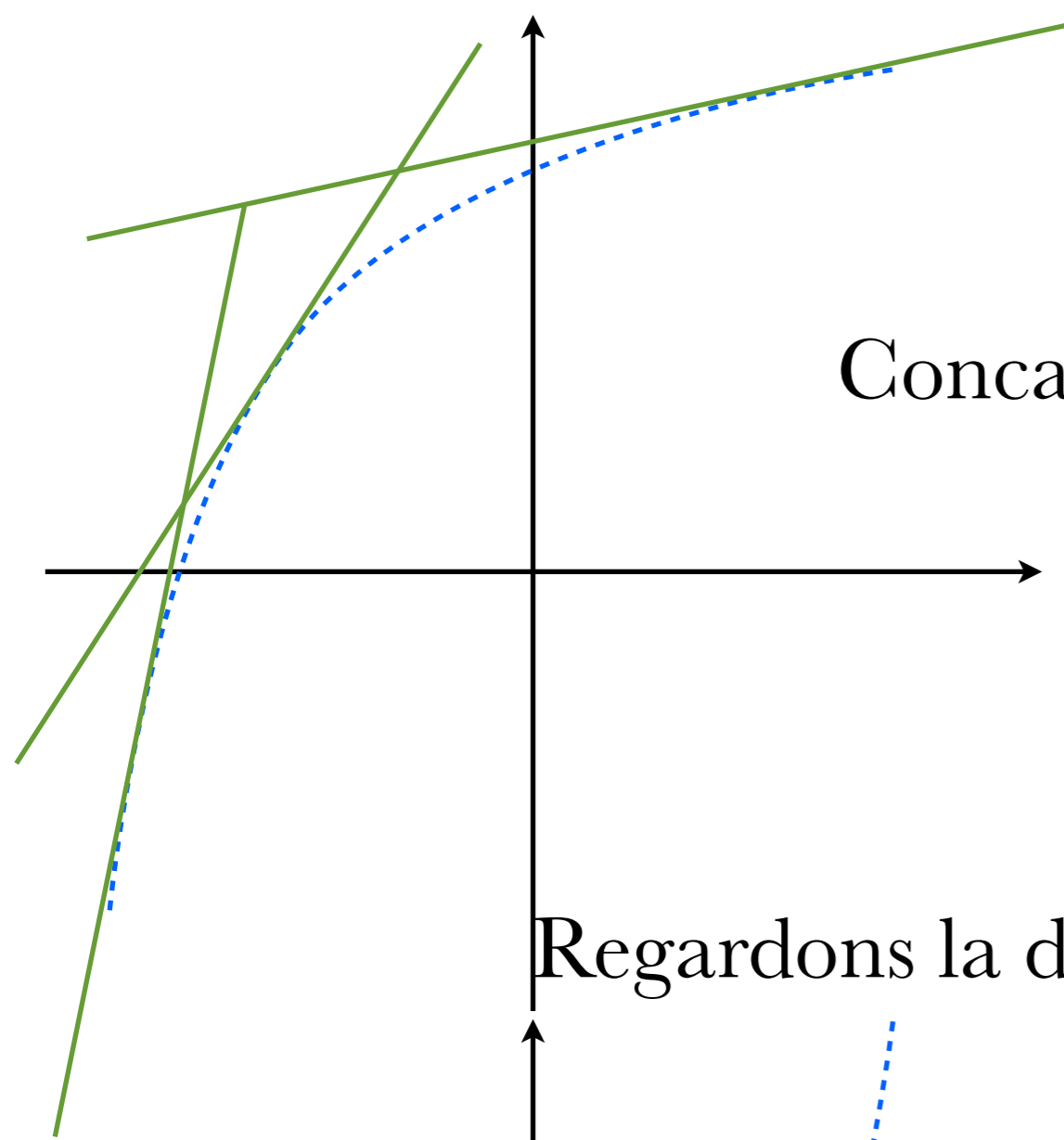


Regardons la dérivée dans chacun des cas.

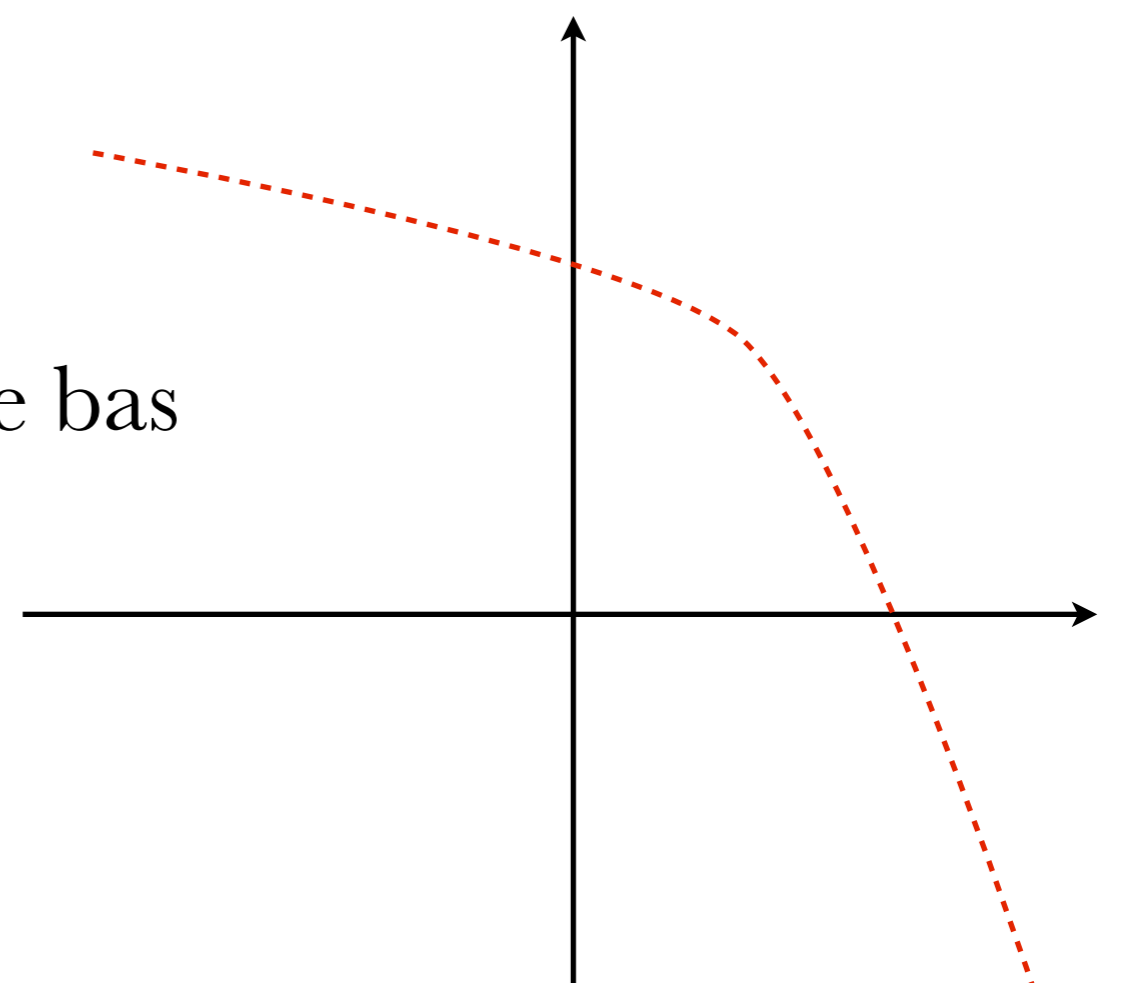


Concave vers le haut

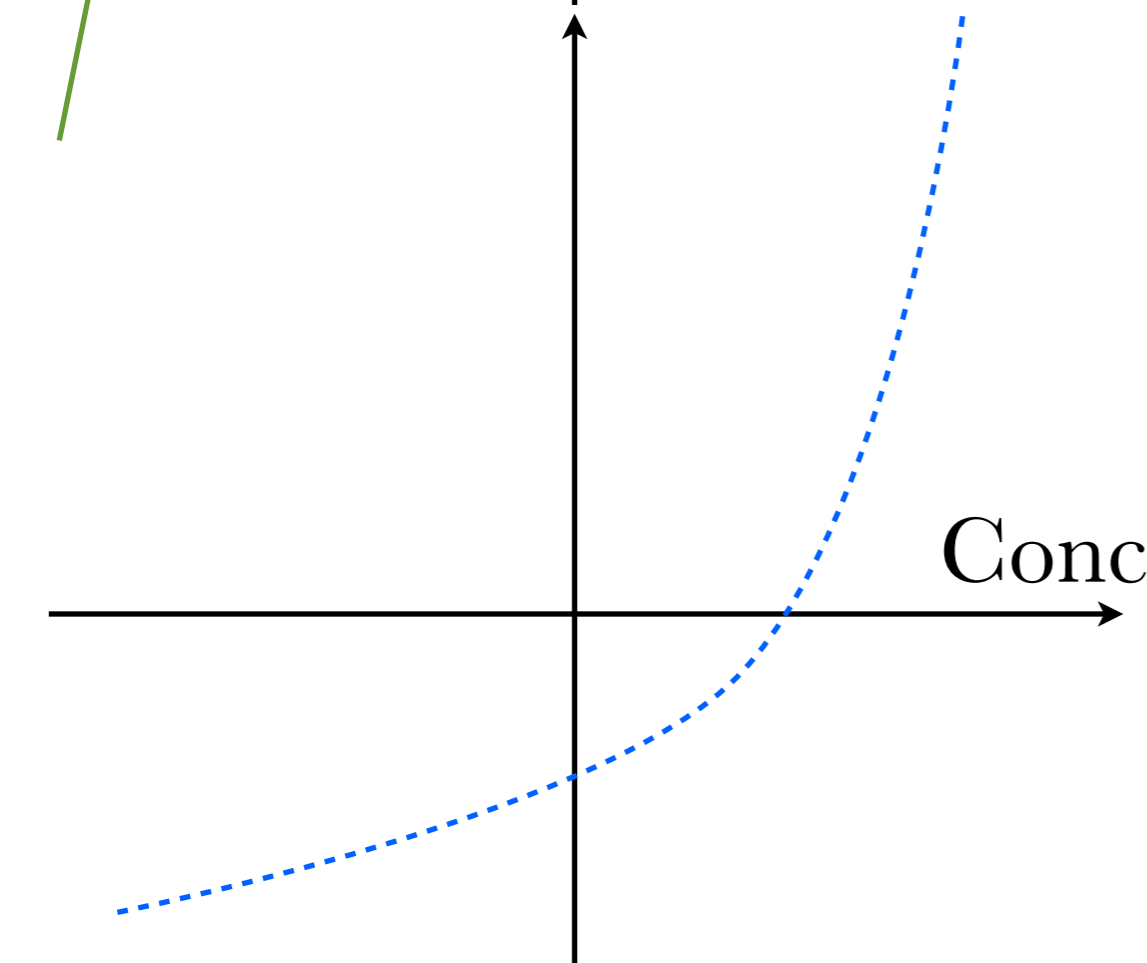




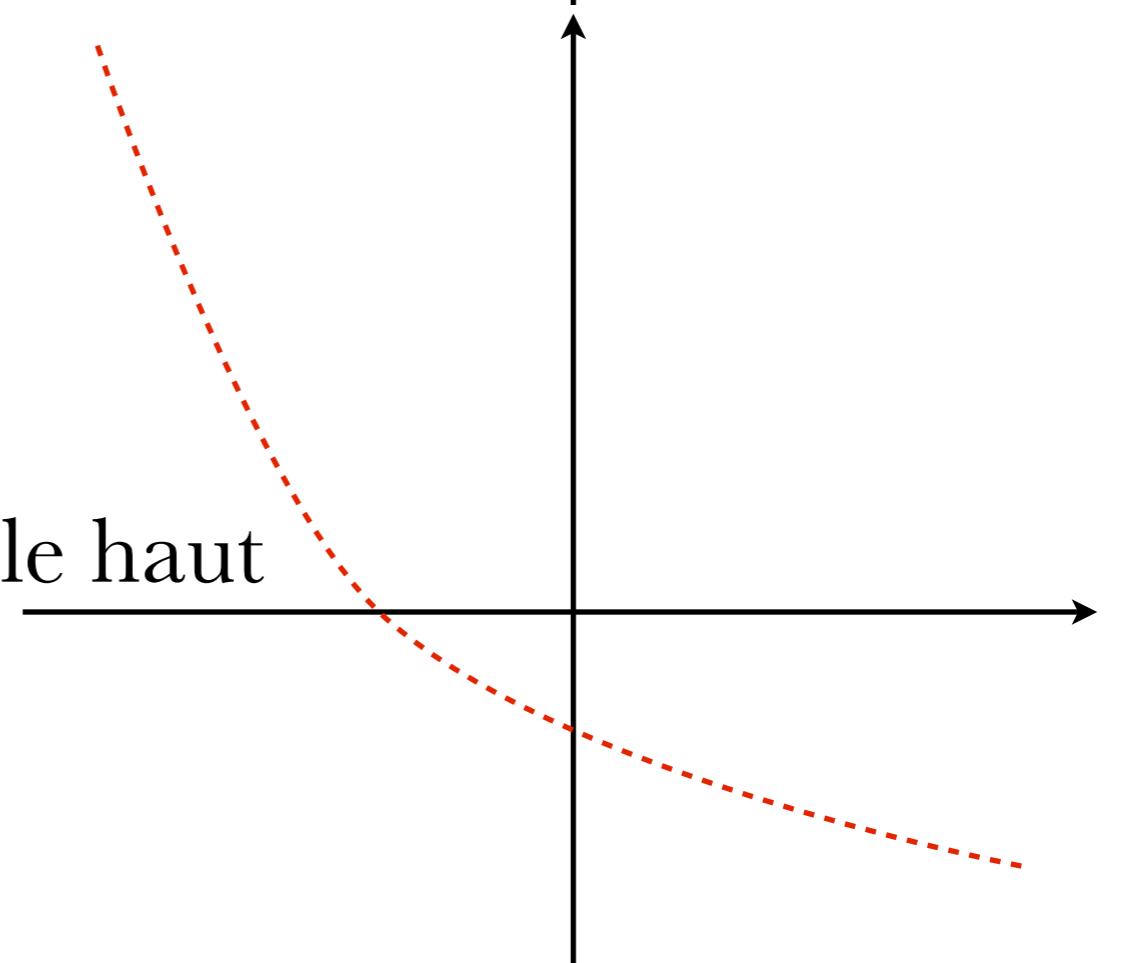
Concave vers le bas

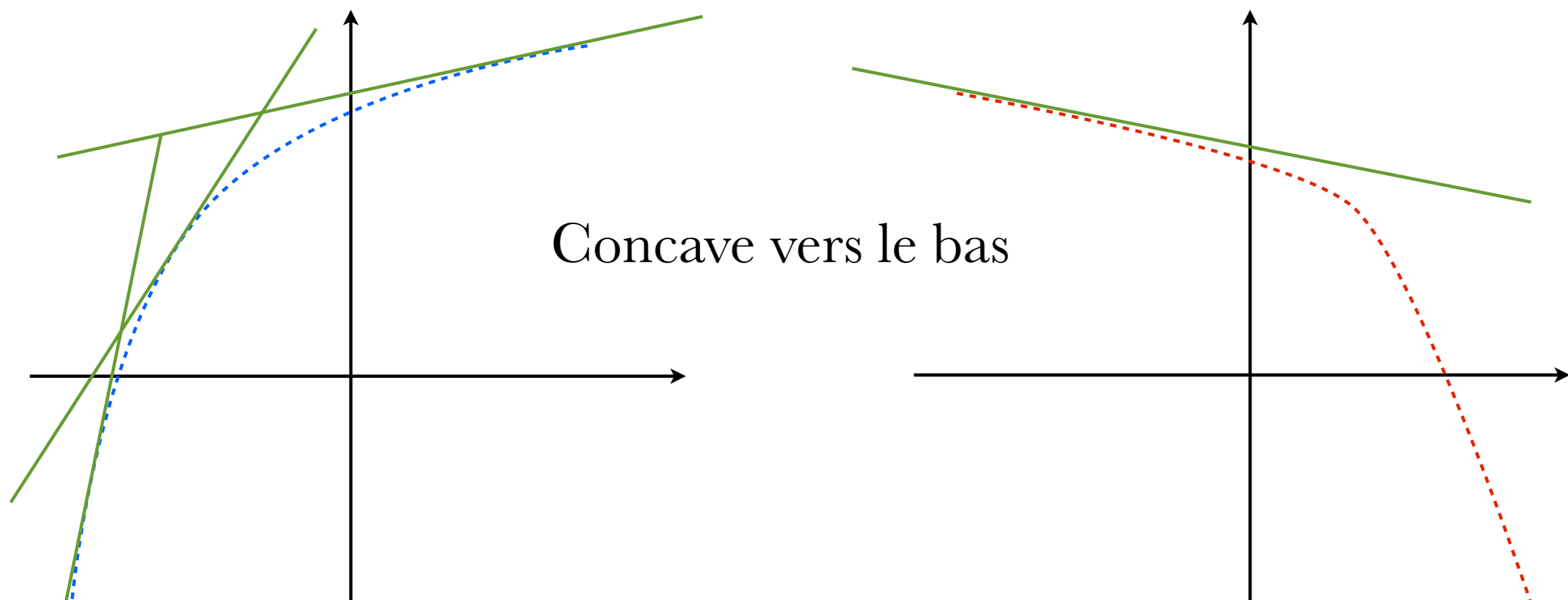


Regardons la dérivée dans chacun des cas.



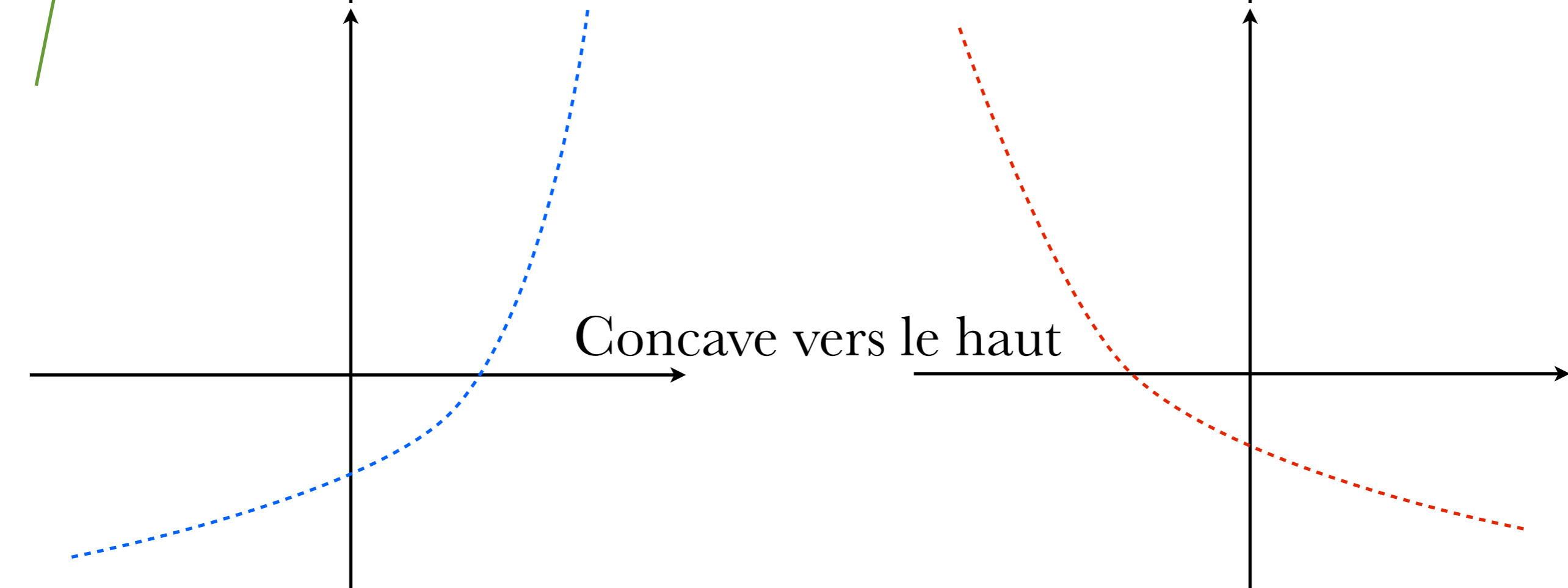
Concave vers le haut



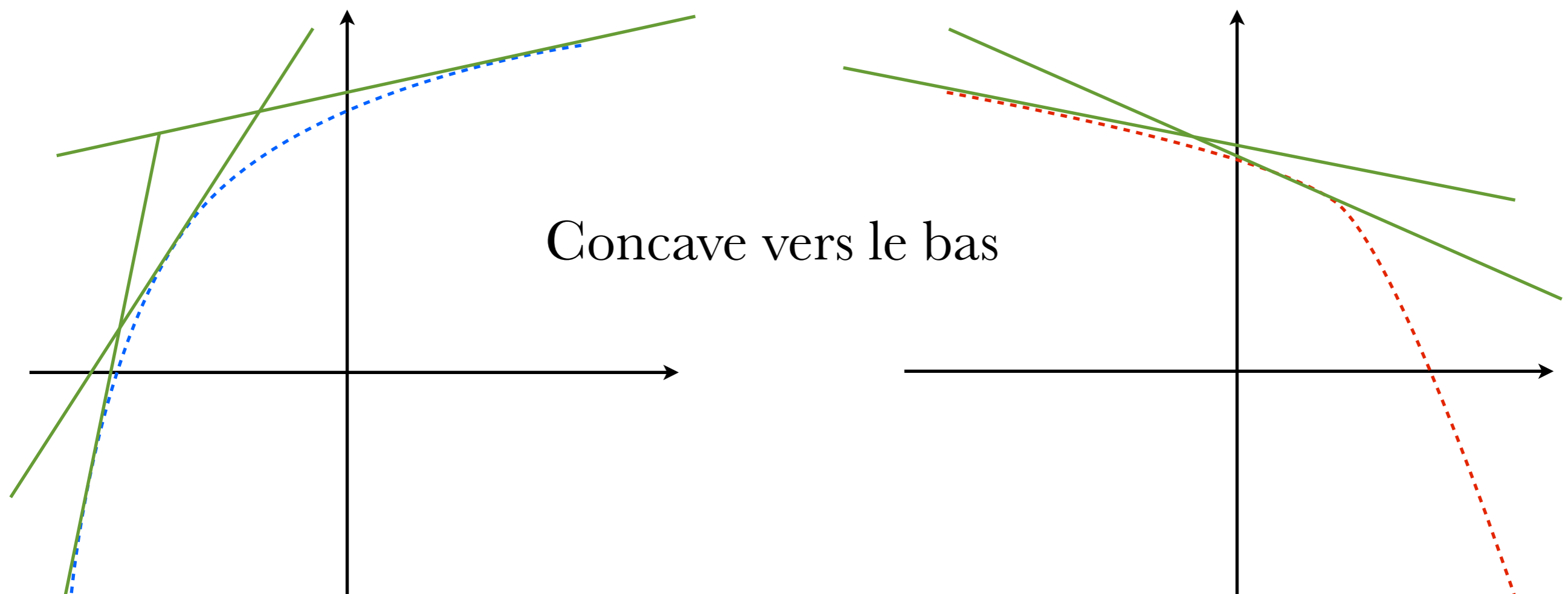


Concave vers le bas

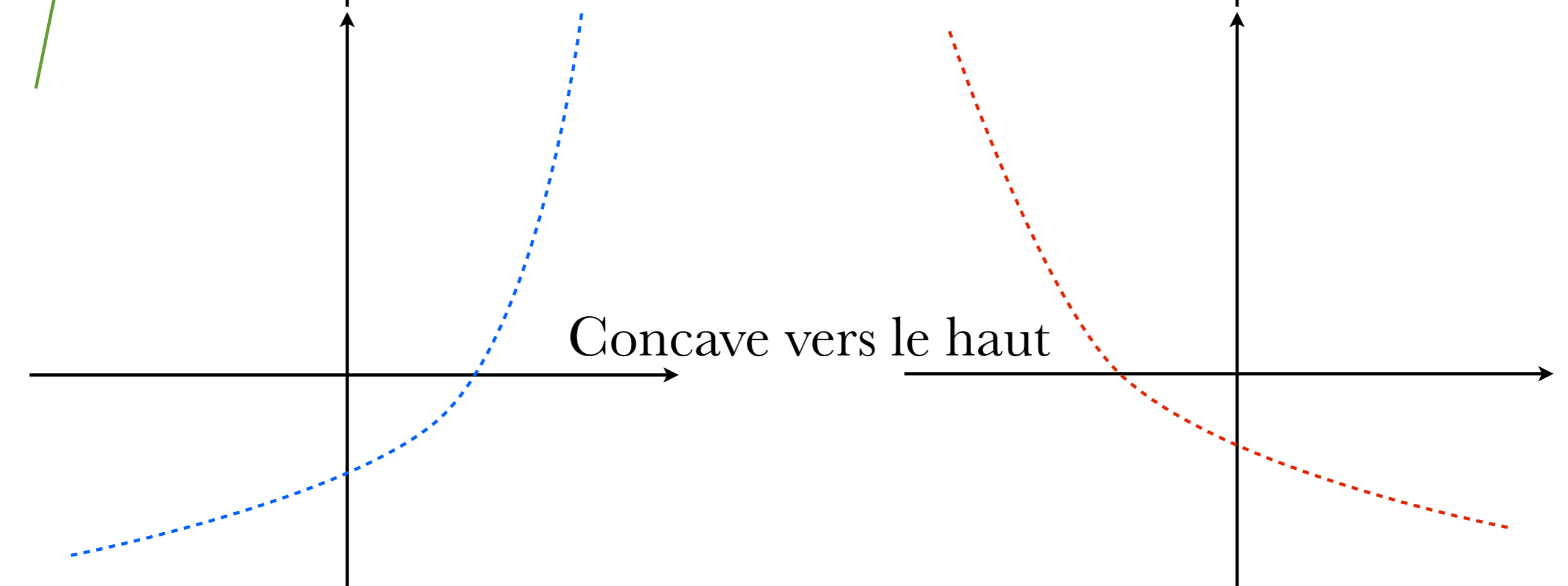
Regardons la dérivée dans chacun des cas.



Concave vers le haut



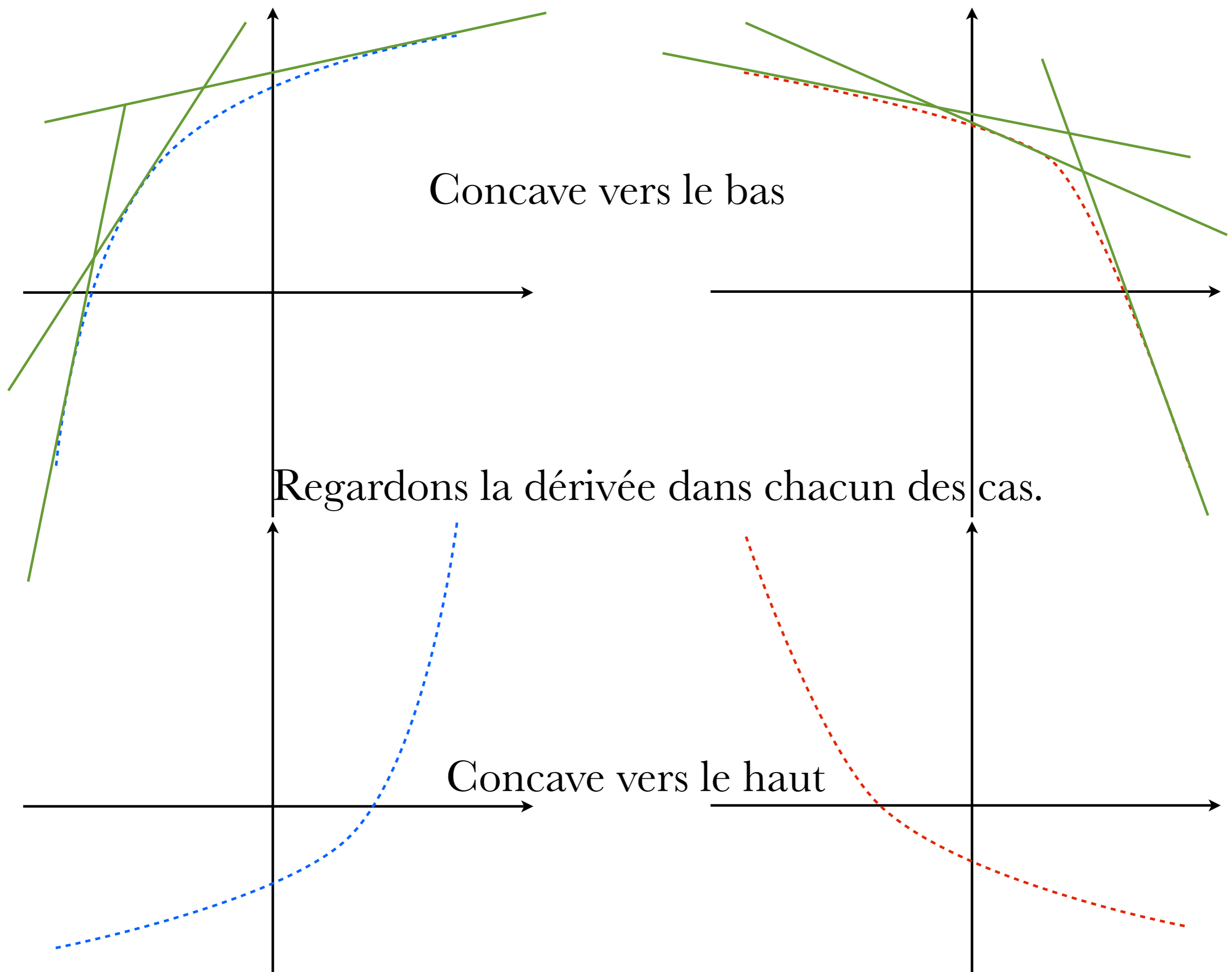
Regardons la dérivée dans chacun des cas.

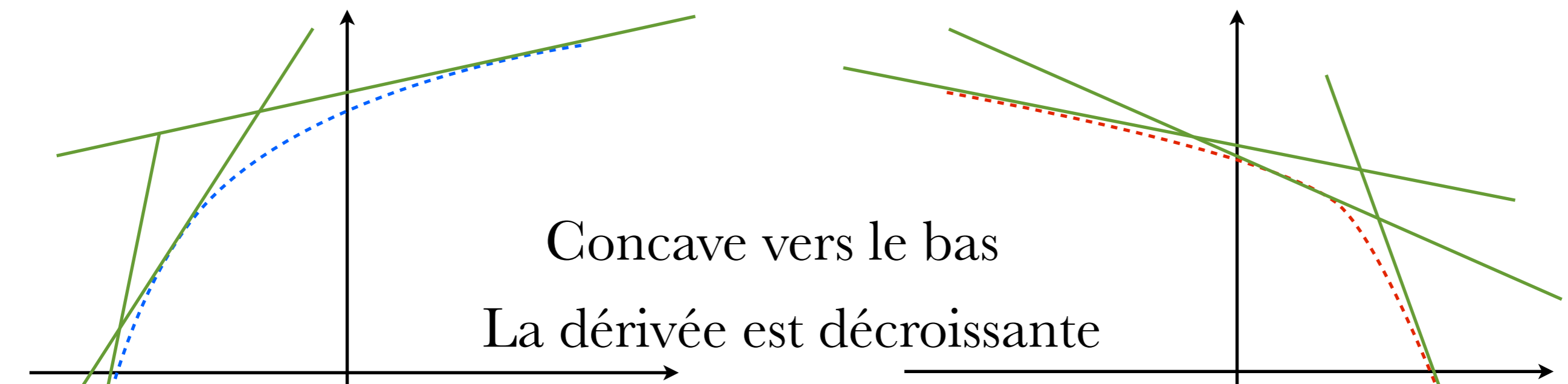


Concave vers le bas

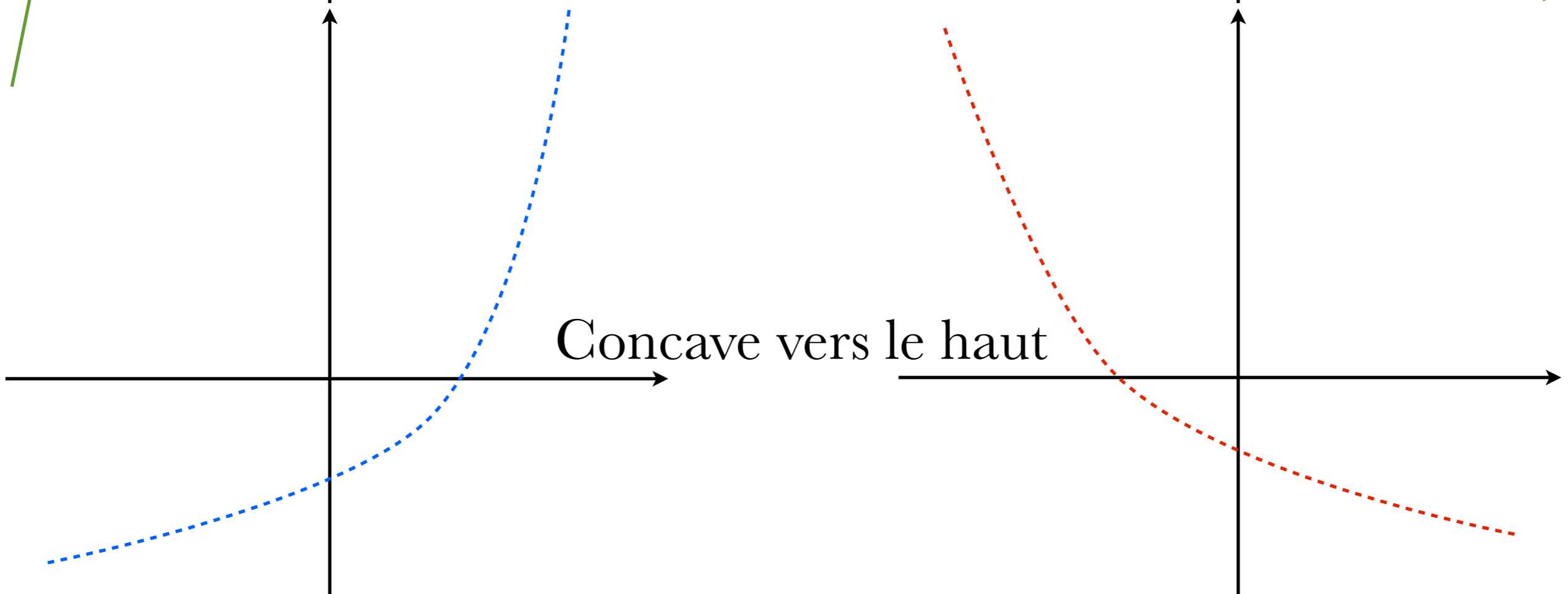
Regardons la dérivée dans chacun des cas.

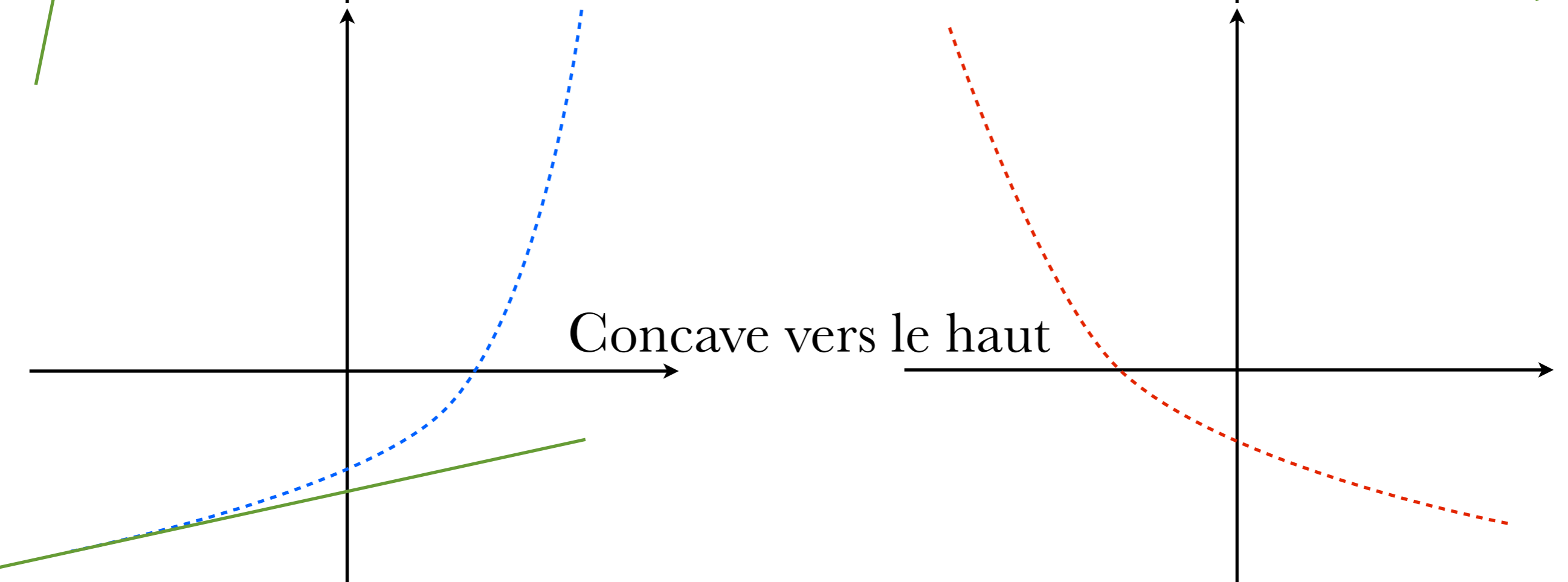
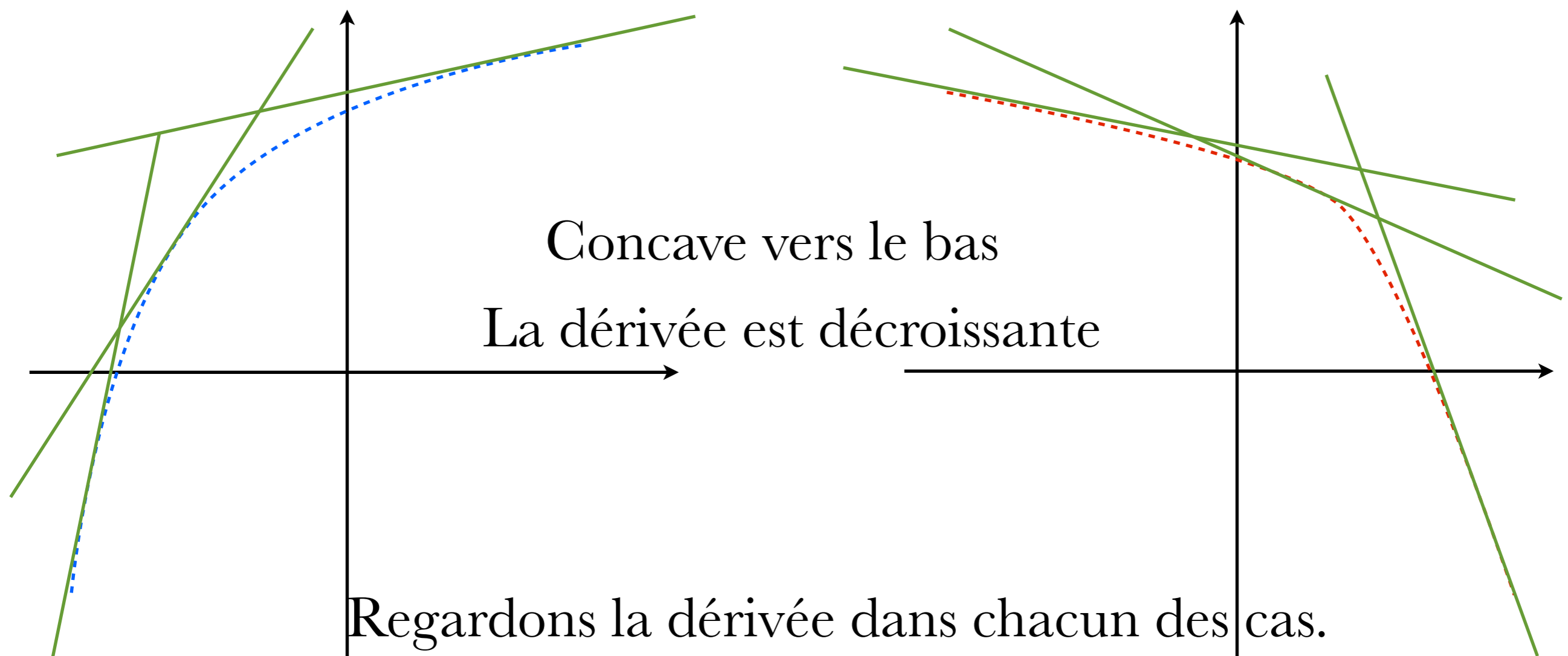
Concave vers le haut

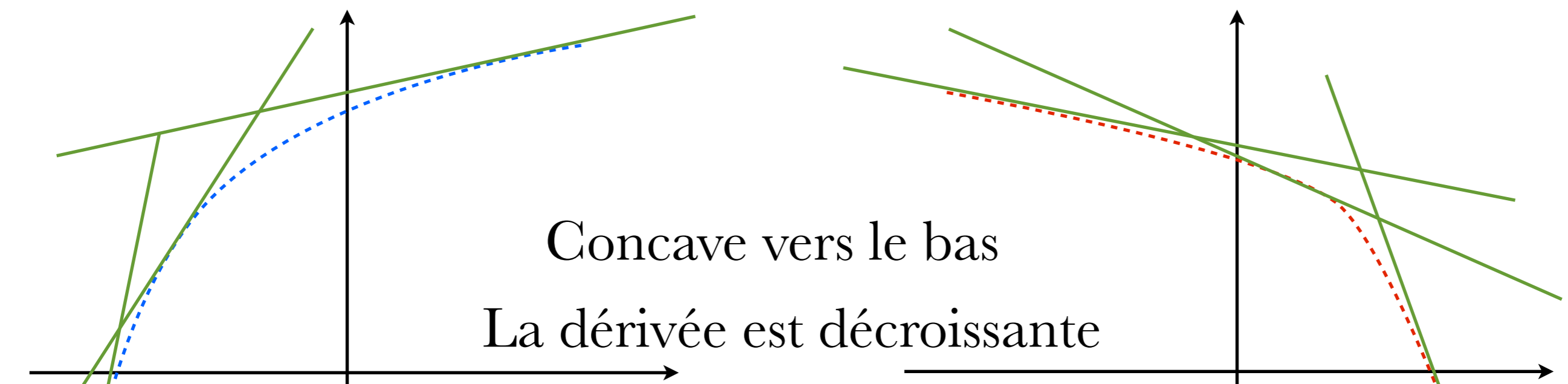




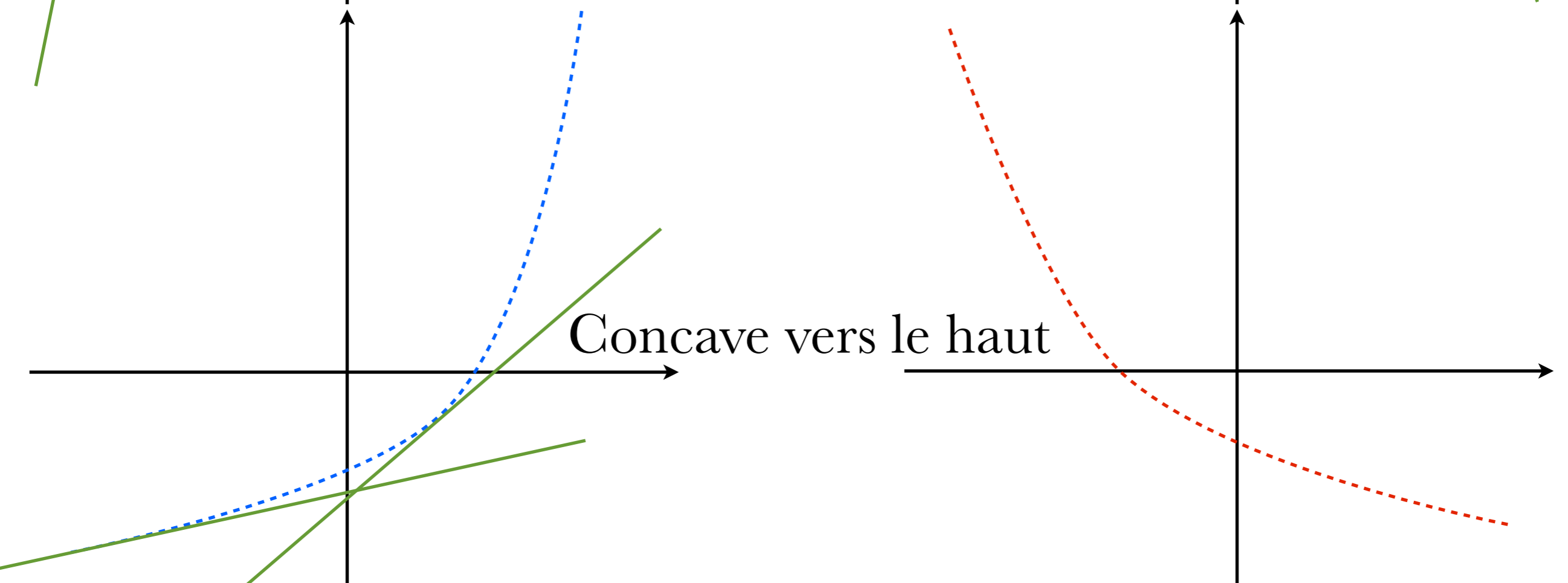
Regardons la dérivée dans chacun des cas.

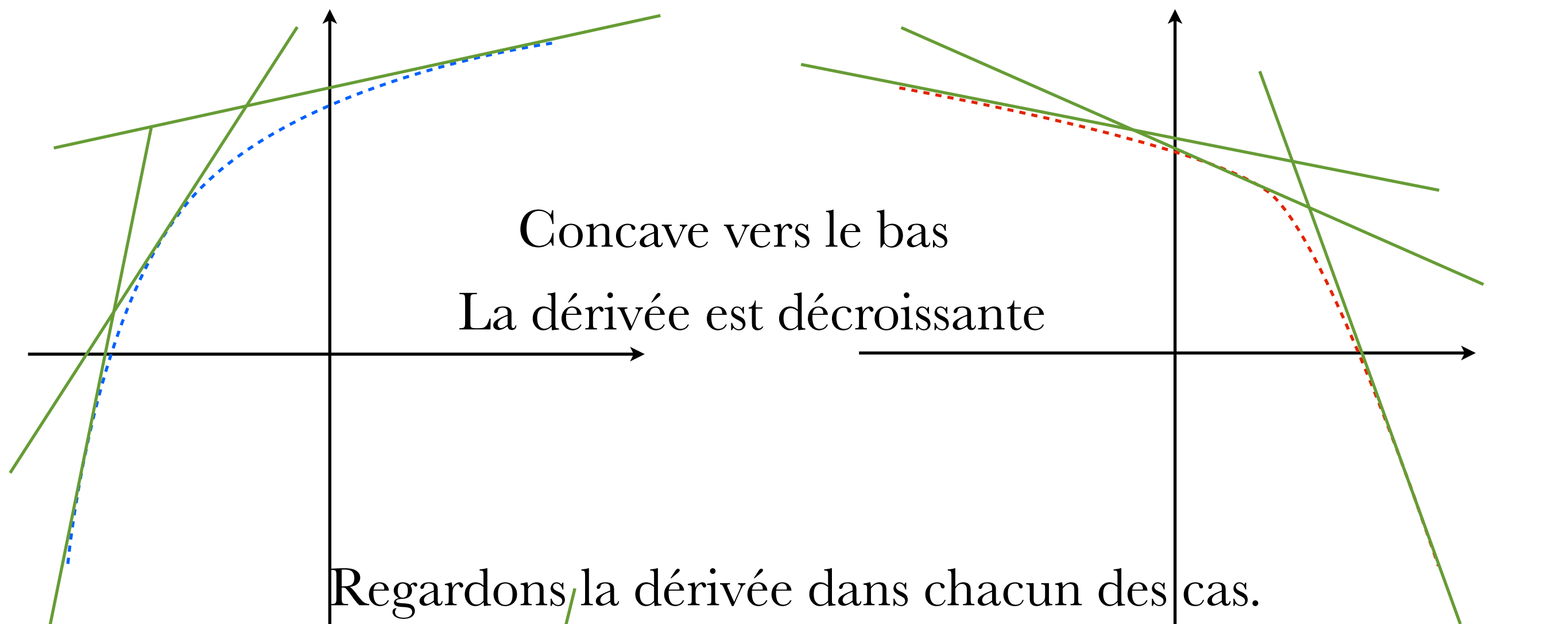






Regardons la dérivée dans chacun des cas.





Concave vers le bas
La dérivée est décroissante

The top graph shows a coordinate system with a solid green curve that is concave down. A blue dashed line is tangent to the curve at a point in the first quadrant. Several other green tangent lines are drawn at various points along the curve, showing that their slopes decrease as the x-value increases. A red dashed line is also shown, tangent to the curve in the fourth quadrant, where the slope is negative and decreasing.

Regardons la dérivée dans chacun des cas.



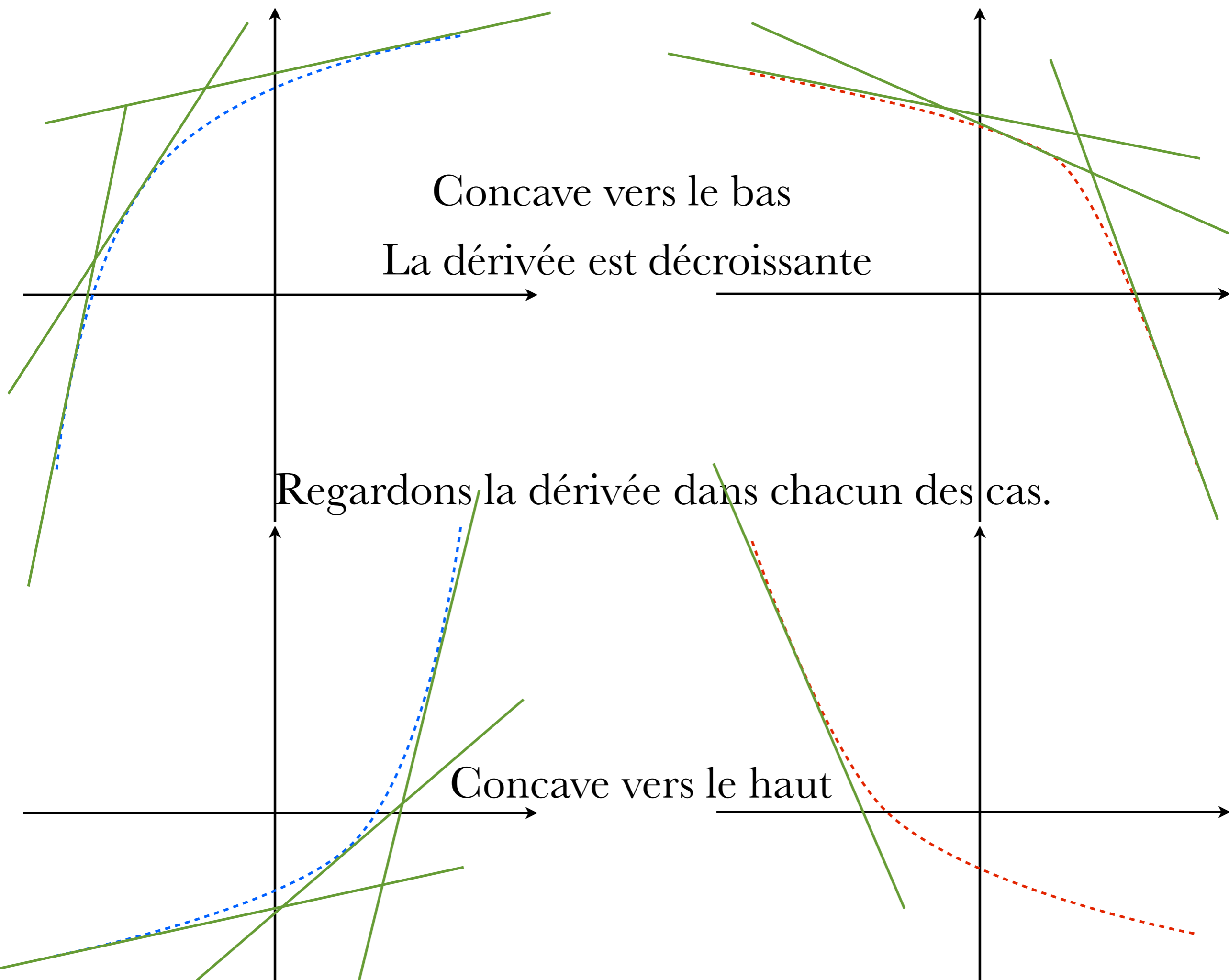
Concave vers le haut

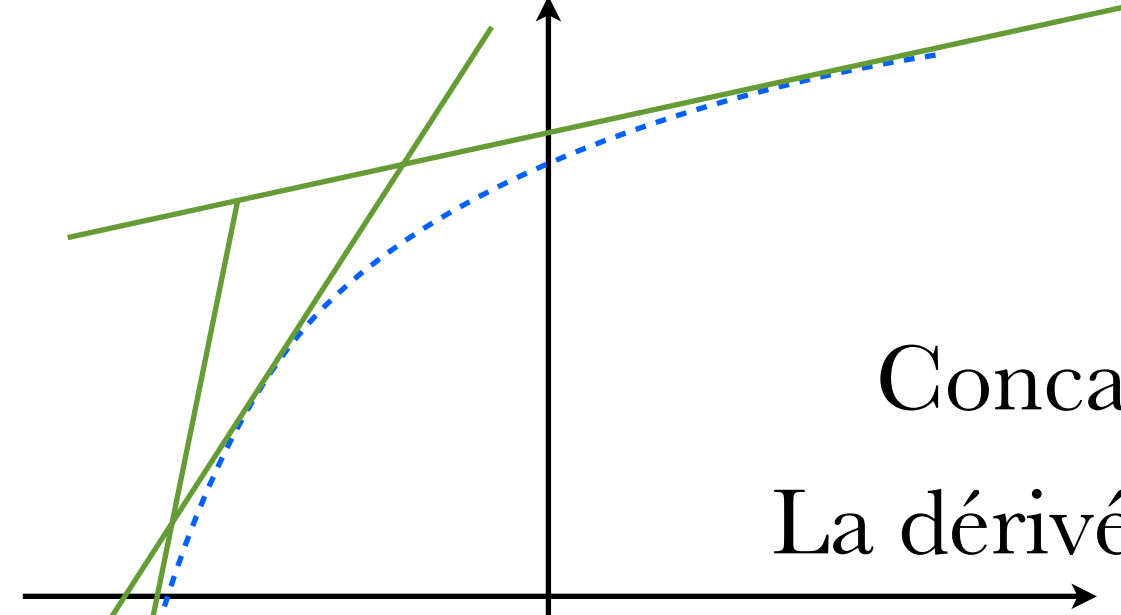
The bottom graph shows a coordinate system with a solid green curve that is concave up. A blue dashed line is tangent to the curve at a point in the first quadrant. Several other green tangent lines are drawn at various points along the curve, showing that their slopes increase as the x-value increases. A red dashed line is also shown, tangent to the curve in the fourth quadrant, where the slope is negative and increasing.

Concave vers le bas
La dérivée est décroissante

Regardons la dérivée dans chacun des cas.

Concave vers le haut





Concave vers le bas
La dérivée est décroissante

The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A blue dashed curve is concave down, starting from the bottom left and curving towards the top right. A green secant line connects two points on the curve. A blue dashed tangent line is drawn at the point where the secant line intersects the curve, showing that the slope of the tangent line is decreasing as it moves from left to right.

Regardons la dérivée dans chacun des cas.



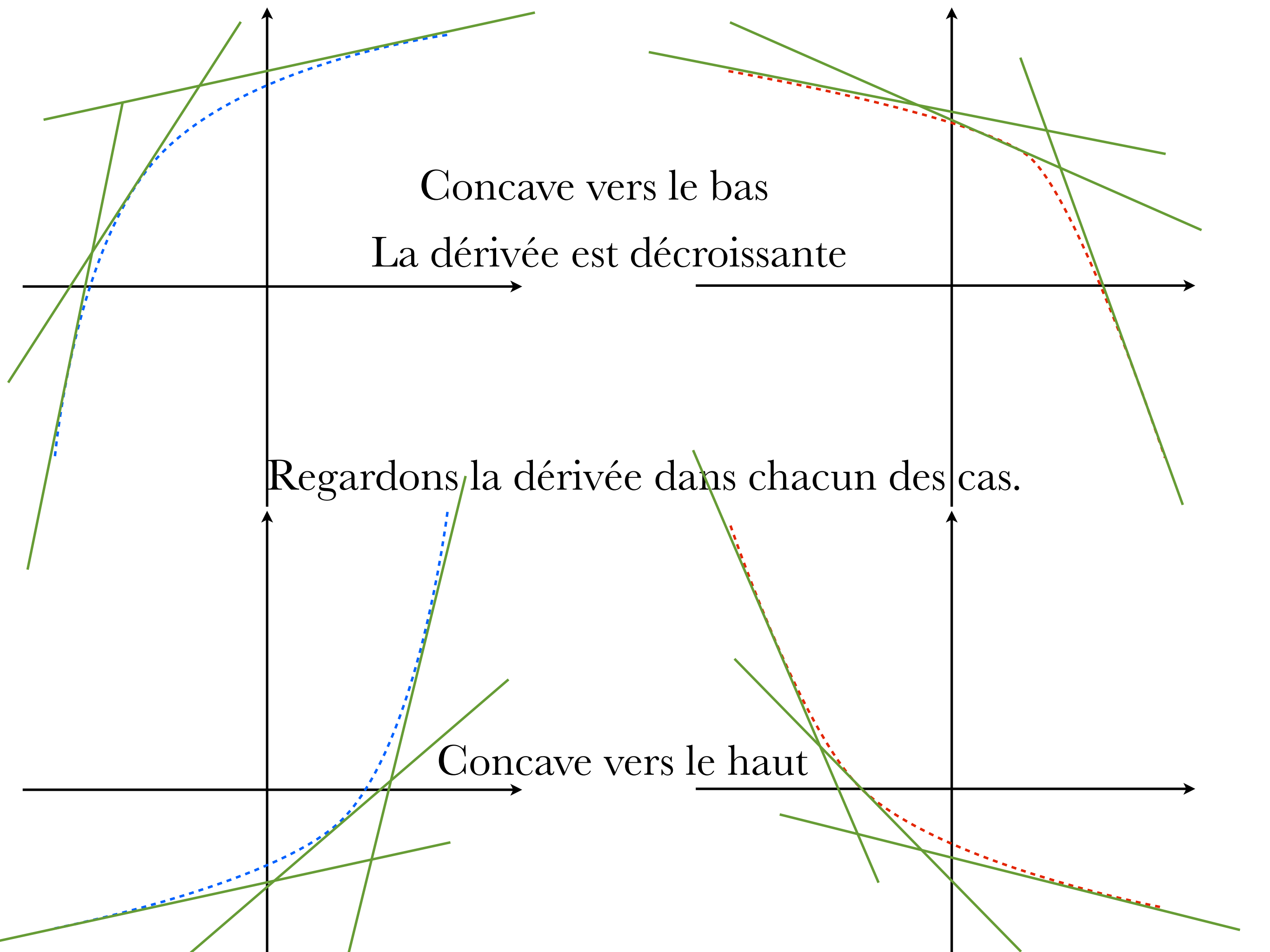
Concave vers le haut

The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A blue dashed curve is concave up, starting from the bottom left and curving towards the top right. A green secant line connects two points on the curve. A blue dashed tangent line is drawn at the point where the secant line intersects the curve, showing that the slope of the tangent line is increasing as it moves from left to right.



Concave vers le bas

The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A red dashed curve is concave down, starting from the top left and curving towards the bottom right. A green secant line connects two points on the curve. A red dashed tangent line is drawn at the point where the secant line intersects the curve, showing that the slope of the tangent line is decreasing as it moves from left to right.

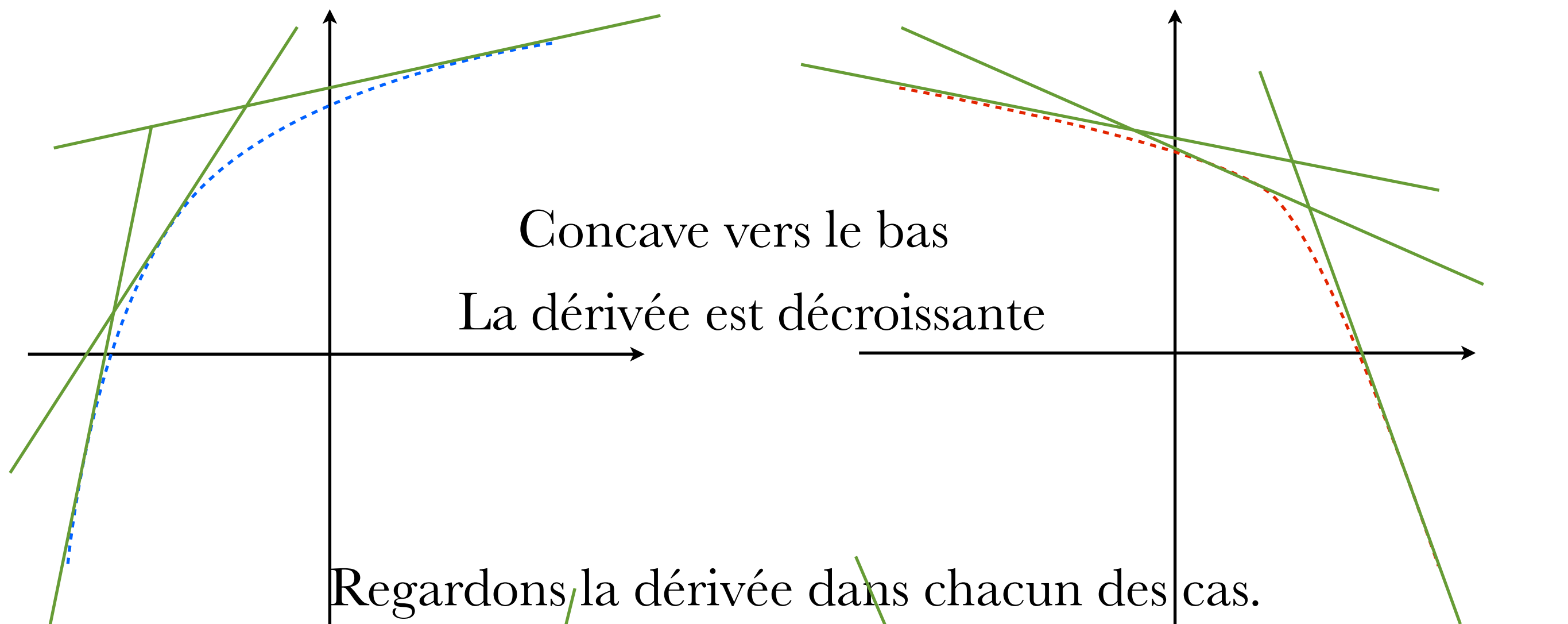


The image consists of four separate coordinate systems arranged in a 2x2 grid. Each system has a horizontal x-axis and a vertical y-axis. The top-left graph shows a blue dashed curve that is concave down, with two green tangent lines drawn at different points. The top-right graph shows a red dashed curve that is also concave down, with two green tangent lines. The bottom-left graph shows a blue dashed curve that is concave up, with two green tangent lines. The bottom-right graph shows a red dashed curve that is also concave up, with two green tangent lines. The text 'Concave vers le bas' and 'La dérivée est décroissante' is centered between the top two graphs. The text 'Regardons la dérivée dans chacun des cas.' is centered between the two rows of graphs. The text 'Concave vers le haut' is centered between the bottom two graphs.

Concave vers le bas
La dérivée est décroissante

Regardons la dérivée dans chacun des cas.

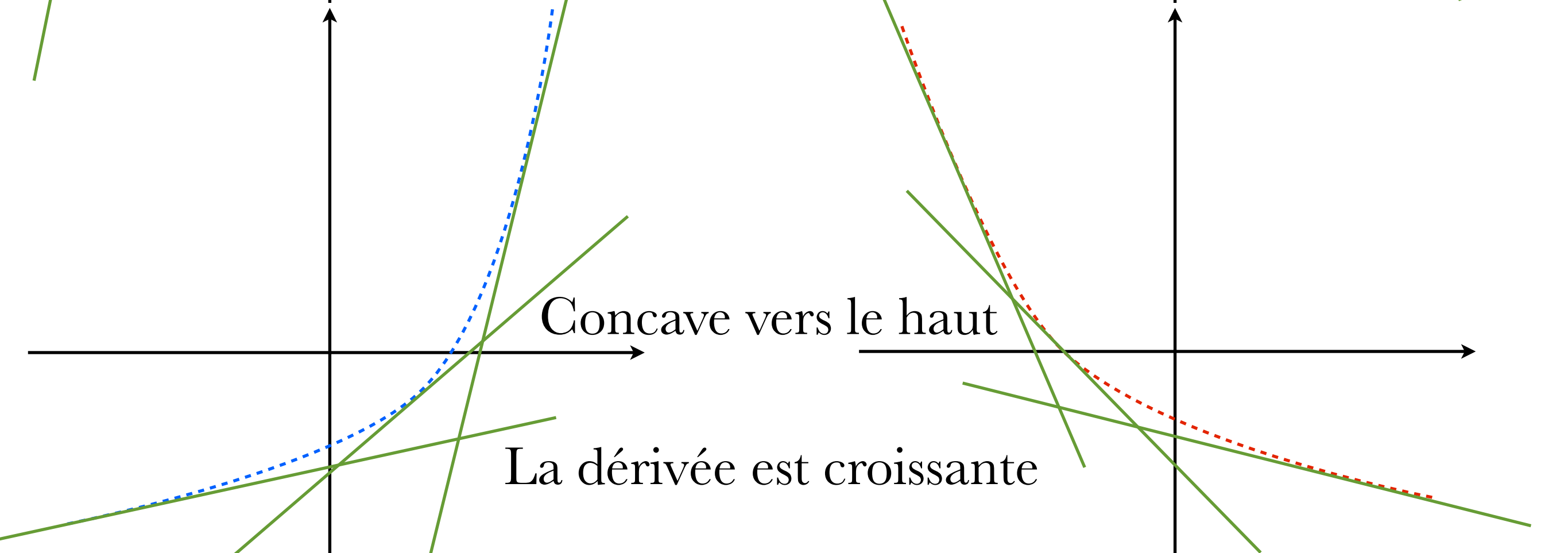
Concave vers le haut



Concave vers le bas
La dérivée est décroissante

The top graph shows a coordinate system with a blue dashed curve that is concave down. A blue dashed tangent line is drawn at a point on the curve, and a red dashed secant line connects two points on the curve. The text 'Concave vers le bas' and 'La dérivée est décroissante' is centered below the graph.

Regardons la dérivée dans chacun des cas.



Concave vers le haut
La dérivée est croissante

The bottom graph shows a coordinate system with a blue dashed curve that is concave up. A blue dashed tangent line is drawn at a point on the curve, and a red dashed secant line connects two points on the curve. The text 'Concave vers le haut' and 'La dérivée est croissante' is centered below the graph.

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas

Concave vers le haut

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas $\implies f'(x)$ décroissante

Concave vers le haut

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas $\implies f'(x)$ décroissante

Concave vers le haut $\implies f'(x)$ croissante

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas $\implies f'(x)$ décroissante $\implies f''(x) \leq 0$

Concave vers le haut $\implies f'(x)$ croissante

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas $\implies f'(x)$ décroissante $\implies f''(x) \leq 0$

Concave vers le haut $\implies f'(x)$ croissante $\implies f''(x) \geq 0$

Faites les exercices suivants

Section 3.2 # 24 à 28

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

Définition

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

Définition

Les **points critiques** d'une fonction $f'(x)$ sont les valeurs de x tel que

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

Définition

Les **points critiques** d'une fonction $f'(x)$ sont les valeurs de x tel que

$$f''(a) = 0$$

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

Définition

Les **points critiques** d'une fonction $f'(x)$ sont les valeurs de x tel que

$$f''(a) = 0$$

ou

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

Définition

Les **points critiques** d'une fonction $f'(x)$ sont les valeurs de x tel que

$$f''(a) = 0$$

ou

$$a \notin \text{dom}(f''(x))$$

Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4$$

Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

		0	

Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

		0	
$f''(x)$			

Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

		0	
$f''(x)$	-		

Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

		0	
$f''(x)$	-		+

Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

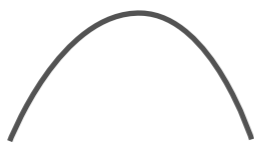
		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+

Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

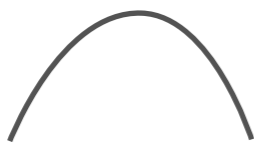

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+

Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

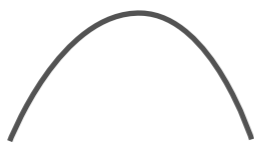

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+

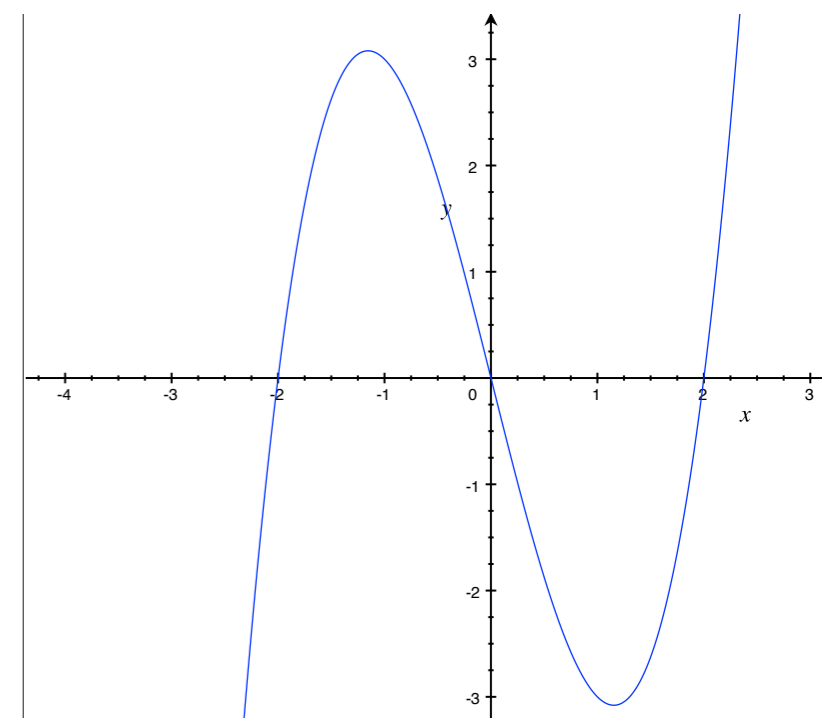
Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+

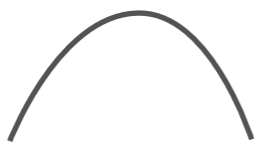



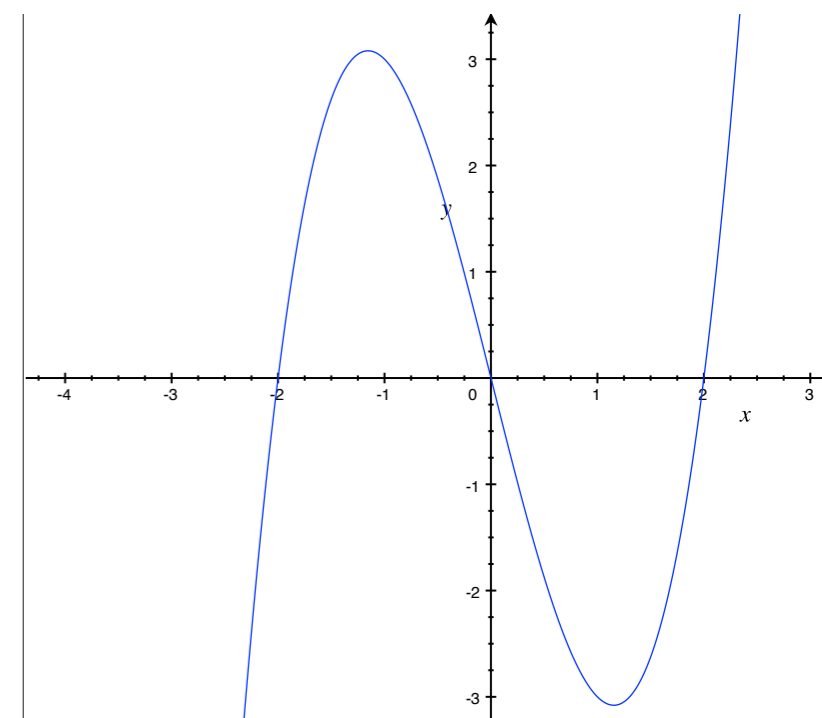
Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+



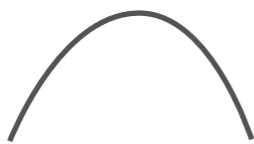

Petit truc pour se souvenir

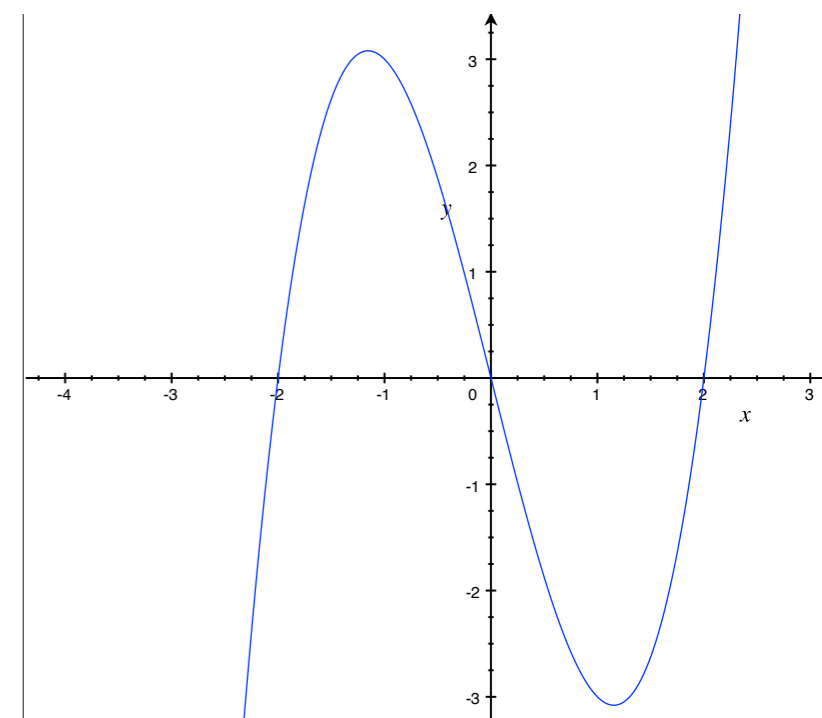
Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

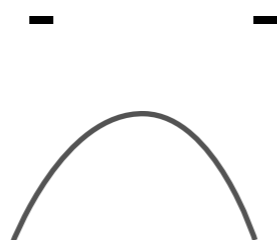
$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+



Petit truc pour se souvenir

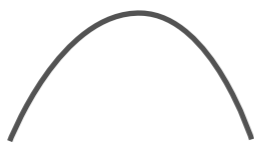



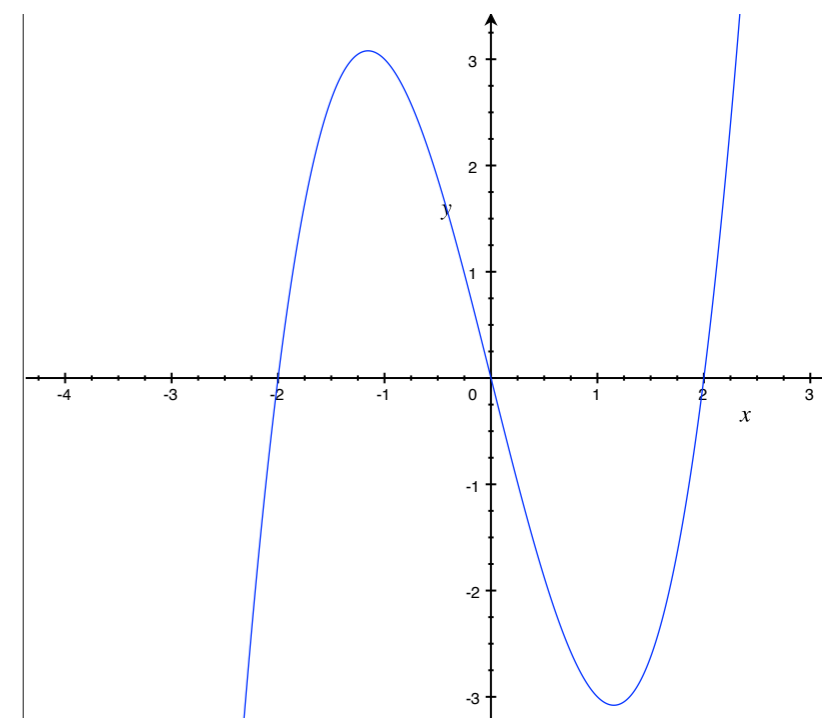
Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

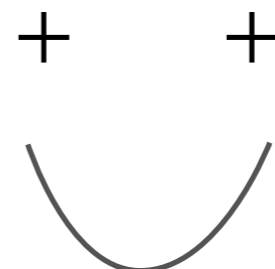
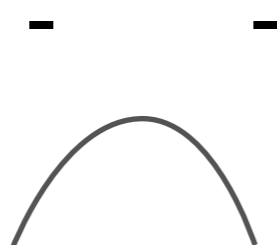
$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de $f'(x)$ est $x = 0$

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+



Petit truc pour se souvenir



Définition

On nomme les endroits où il y a un changement de concavité, un **point d'inflexion**.

Définition

On nomme les endroits où il y a un changement de concavité, un **point d'inflexion**.

Remarque:

Définition

On nomme les endroits où il y a un changement de concavité, un **point d'inflexion**.

Remarque:

Un peu comme avec les extrémum relatif, les points critique de $f'(x)$ sont de bon candidats à être des point d'inflexion mais n'en sont pas nécessairement.

Exemple

Example

$$f(x) = x^3$$

Example

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Example

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

Example

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

Example

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

Example

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g''(x) = 12x^2$$

Exemple

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g''(x) = 12x^2$$

Le seul point critique de $f'(x)$ et $g'(x)$ est $x = 0$

Exemple

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

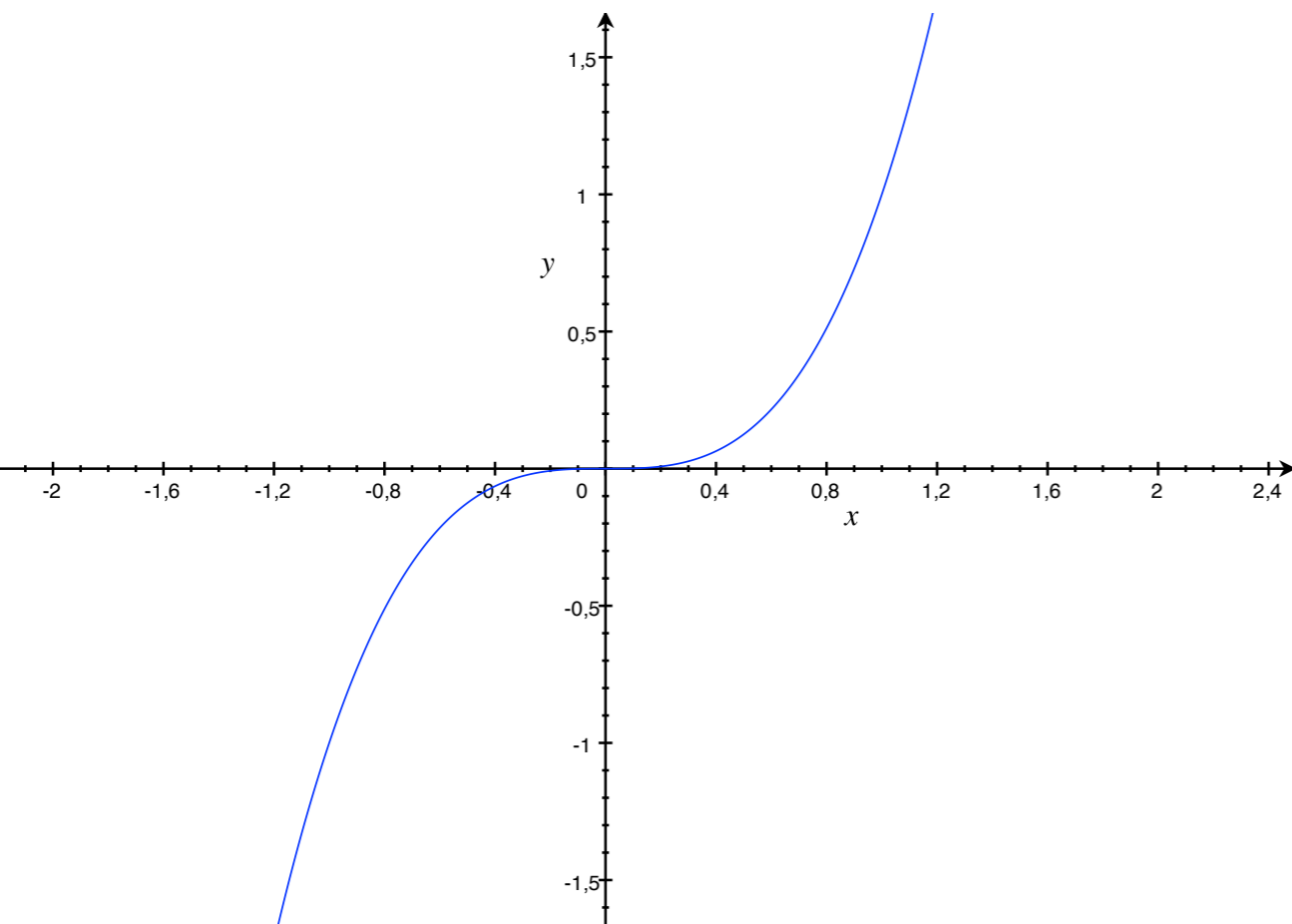
$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g''(x) = 12x^2$$

Le seul point critique de $f'(x)$ et $g'(x)$ est $x = 0$



Exemple

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

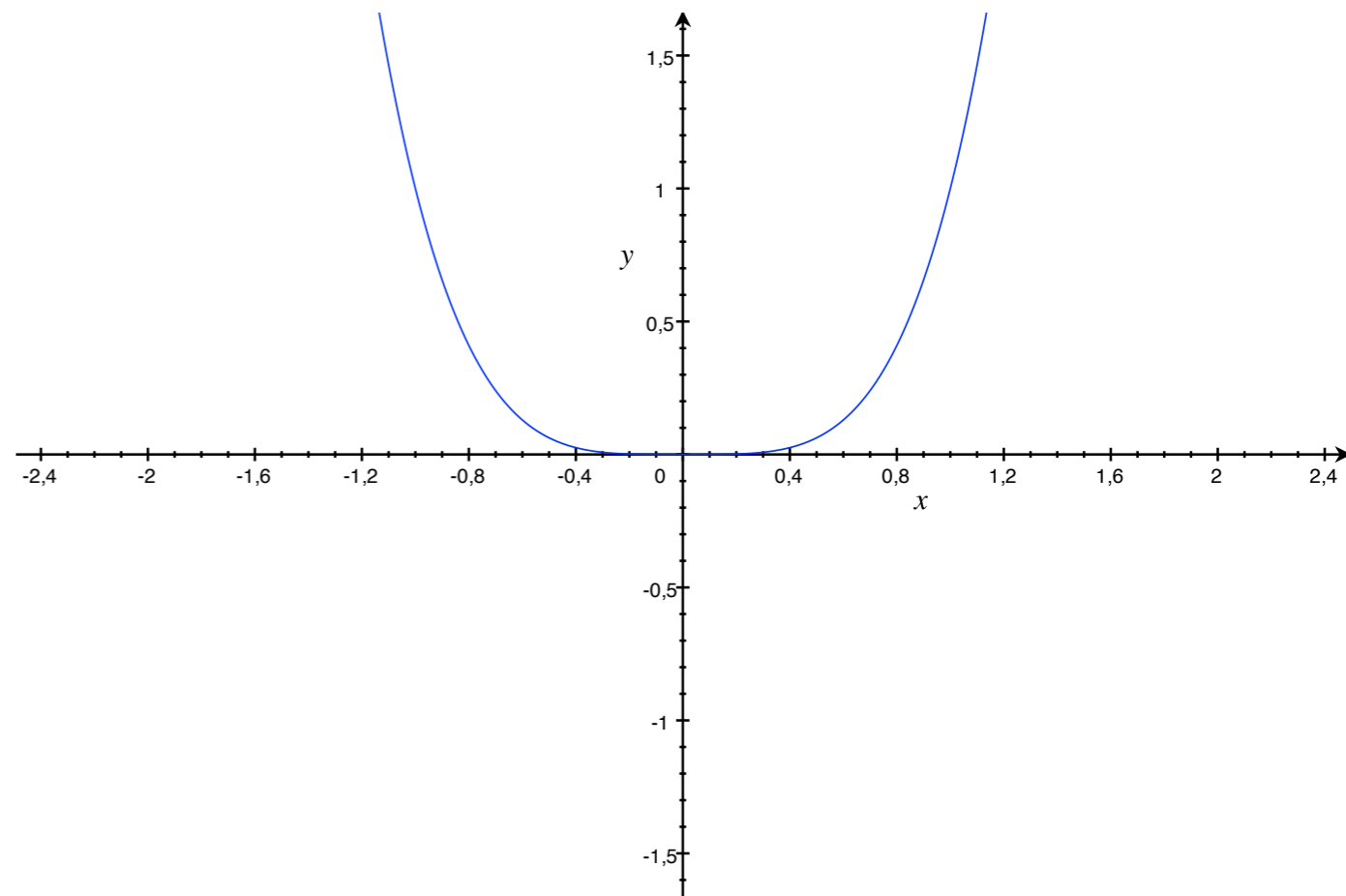
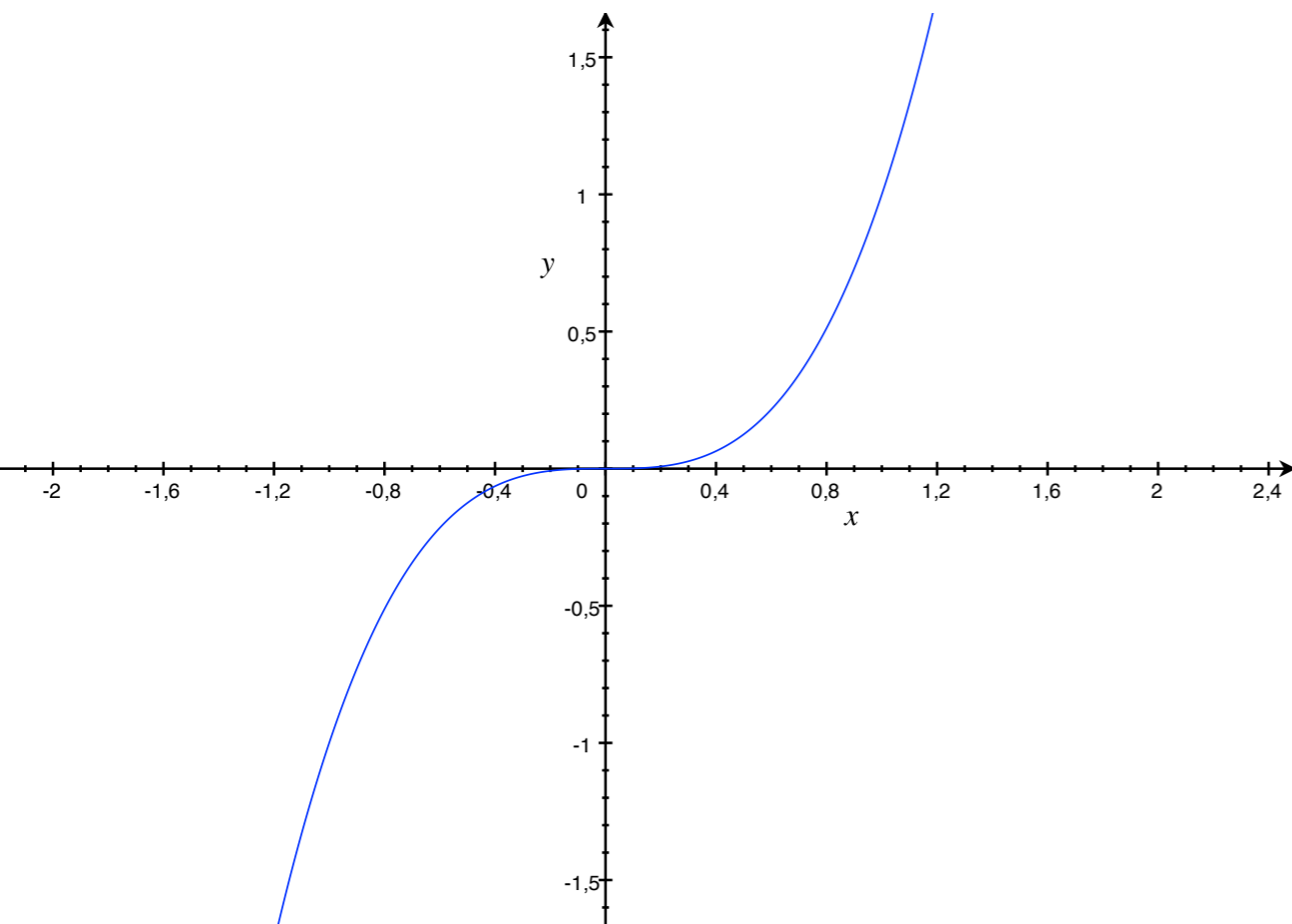
$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g''(x) = 12x^2$$

Le seul point critique de $f'(x)$ et $g'(x)$ est $x = 0$



Exemple

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

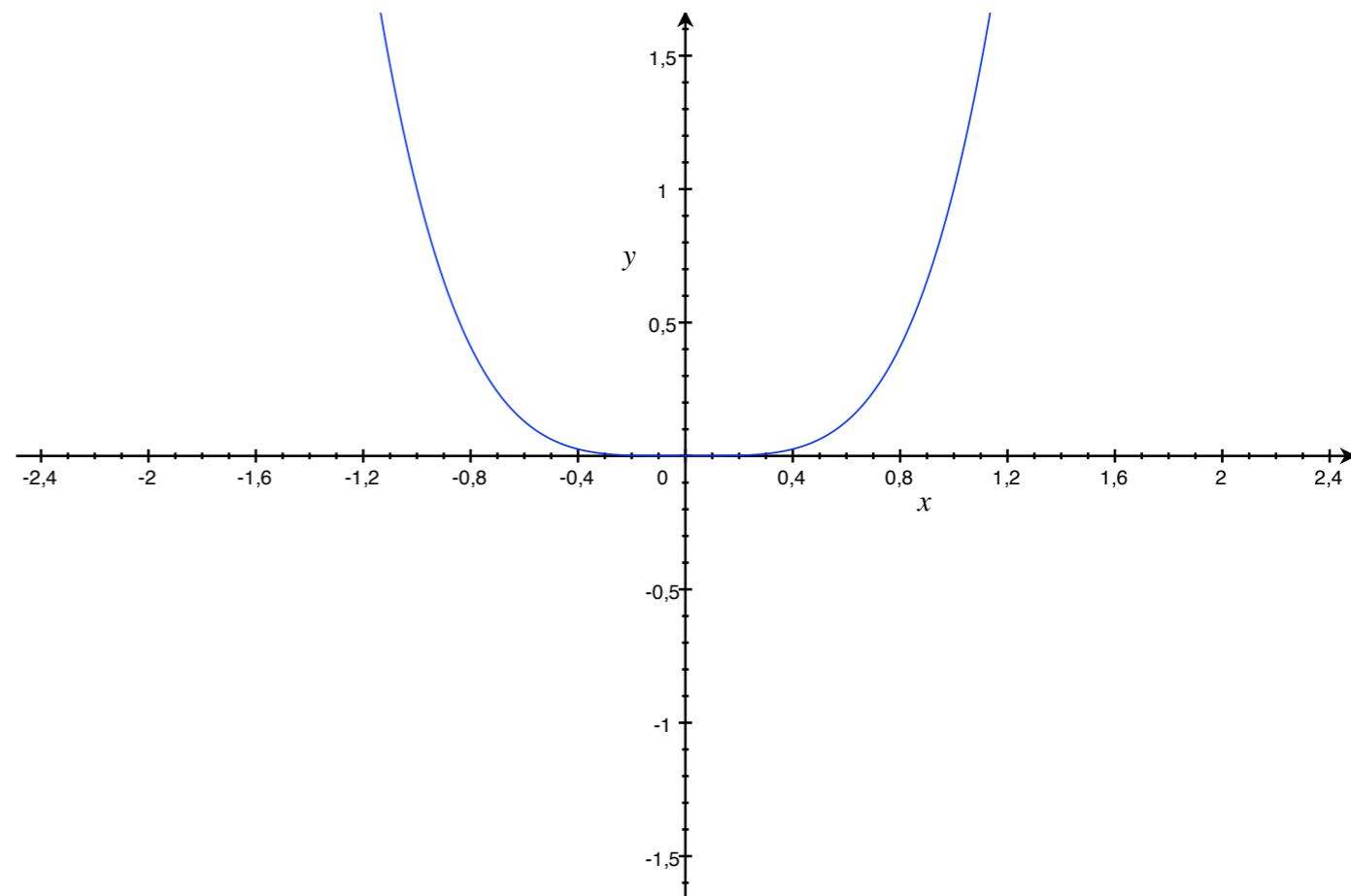
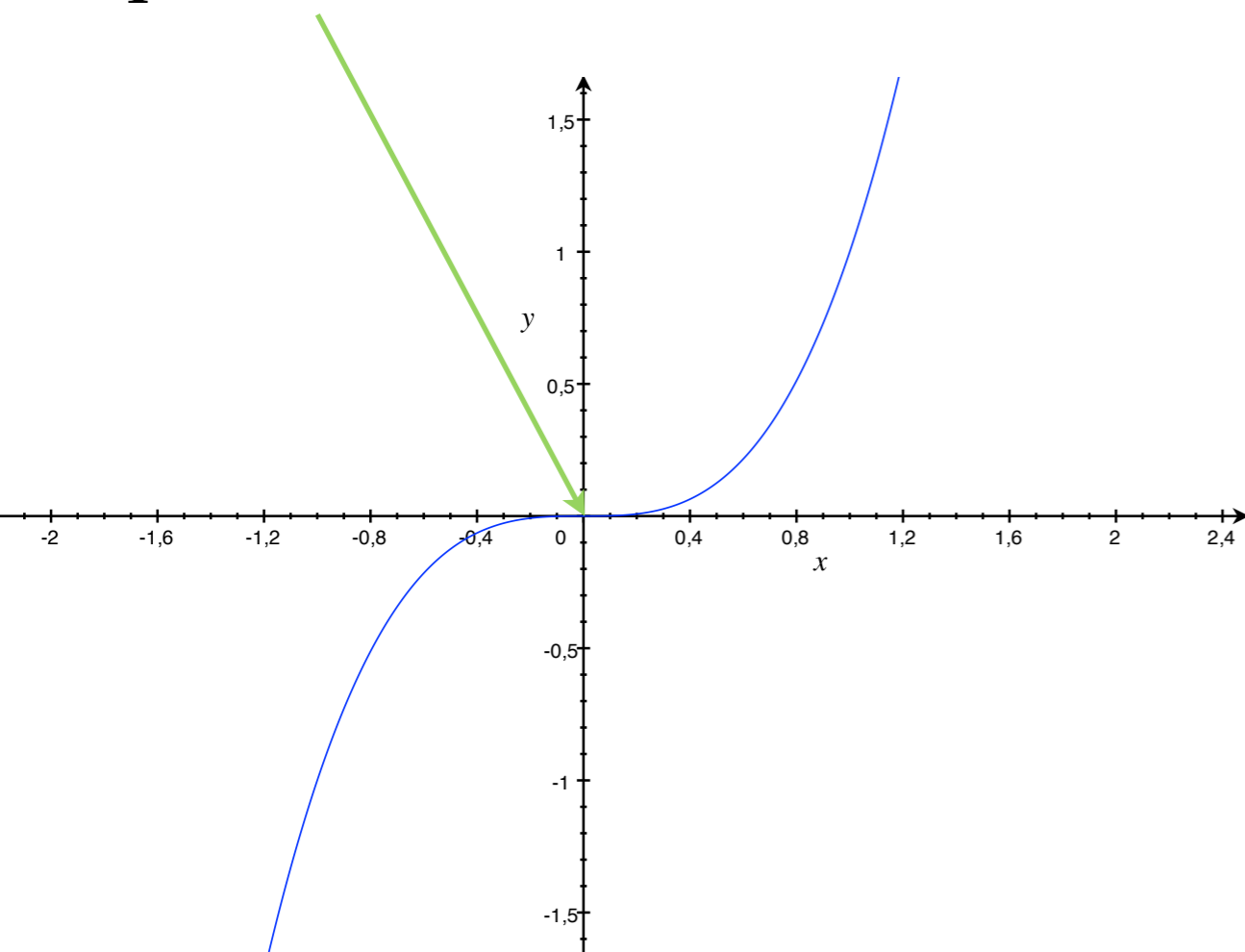
$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g''(x) = 12x^2$$

Le seul point critique de $f'(x)$ et $g'(x)$ est $x = 0$

point d'inflexion



Exemple

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

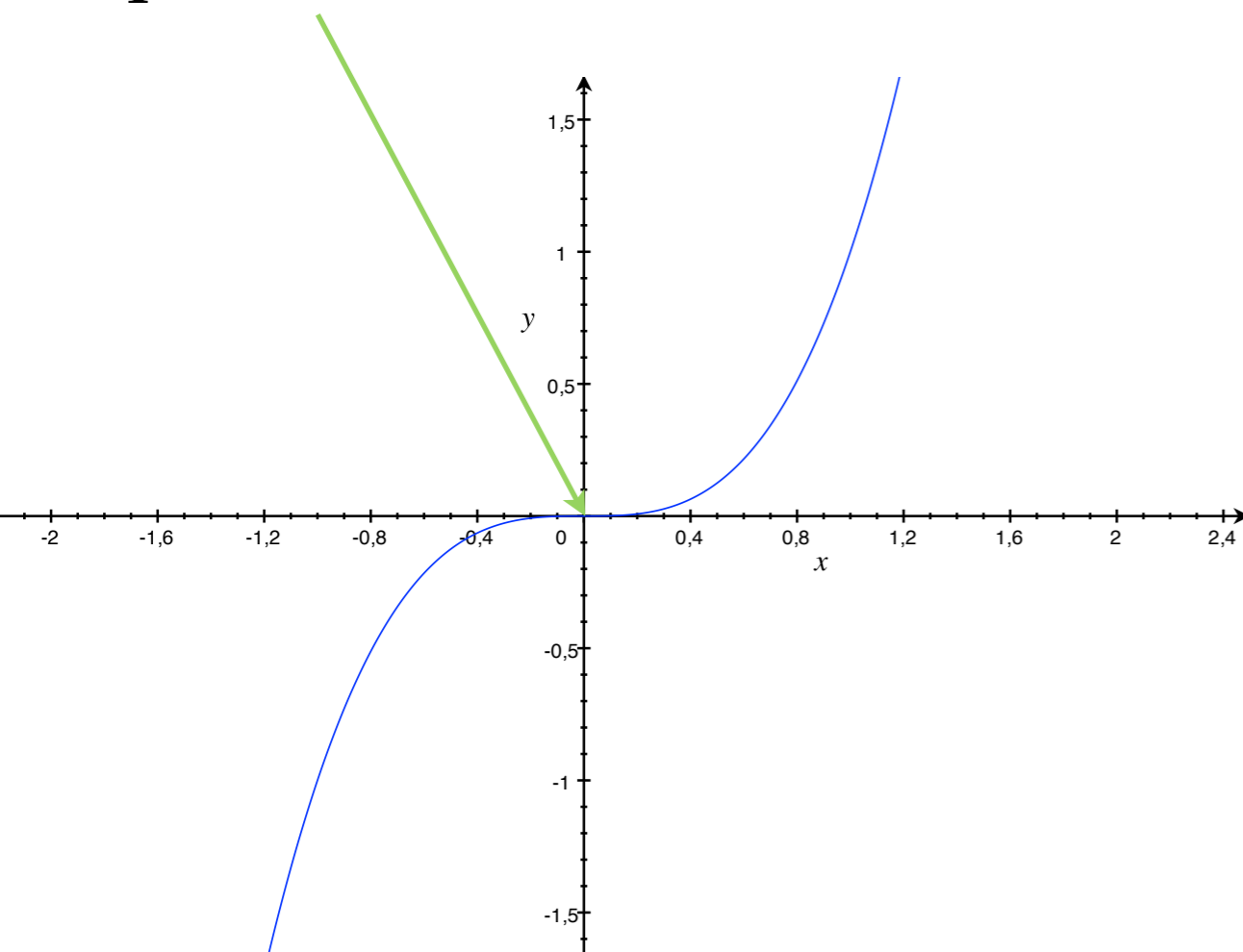
$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

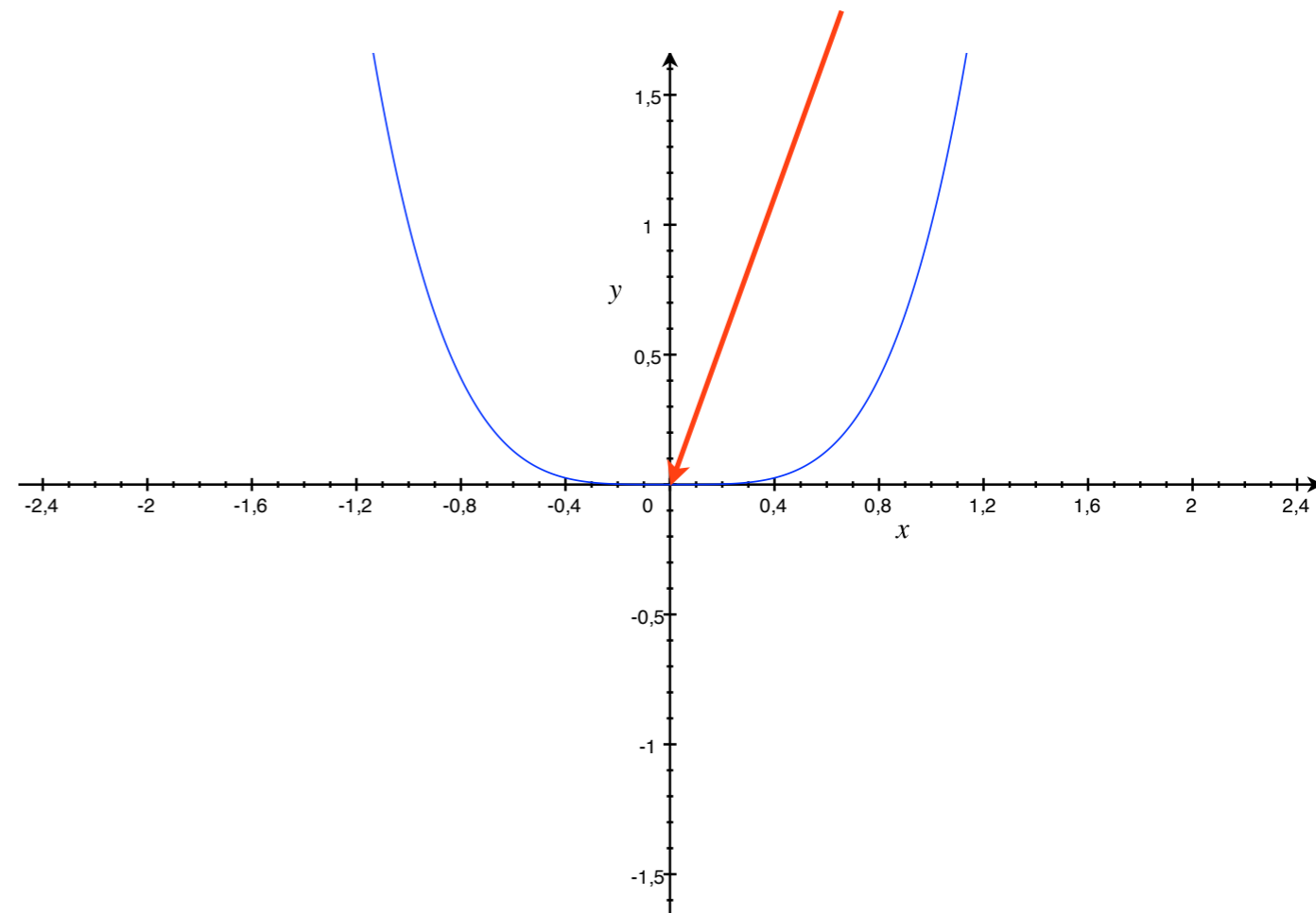
$$g''(x) = 12x^2$$

Le seul point critique de $f'(x)$ et $g'(x)$ est $x = 0$

point d'inflexion



pas un point d'inflexion



Faites les exercices suivants

Section 3.2 # 29

Aujourd'hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Concavité et le lien avec la dérivée seconde

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Concavité et le lien avec la dérivée seconde

Devoir:

Section 3.3 # 24 à 29