

# 3.3 CONCAVITÉ

Cours 16

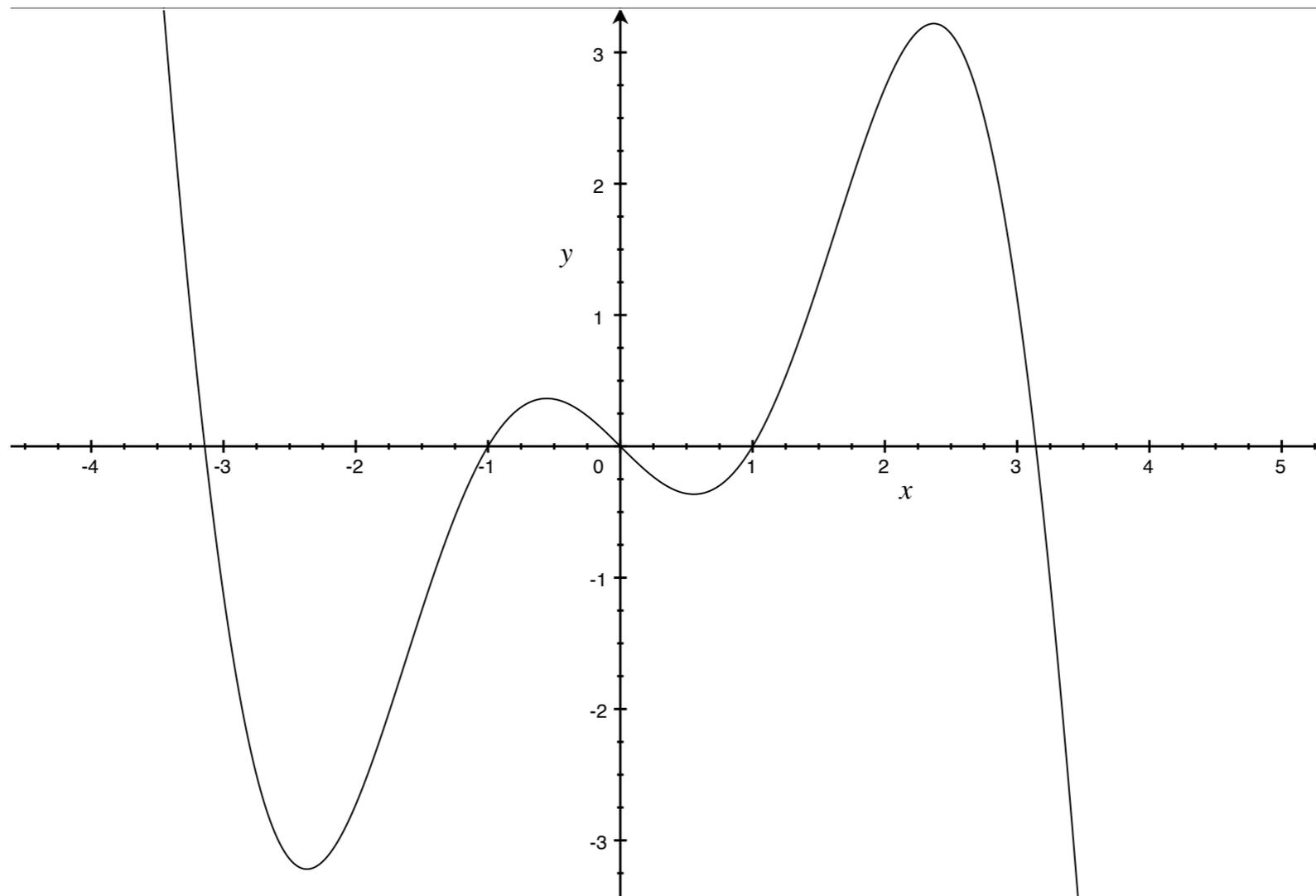
Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Croissance et décroissance

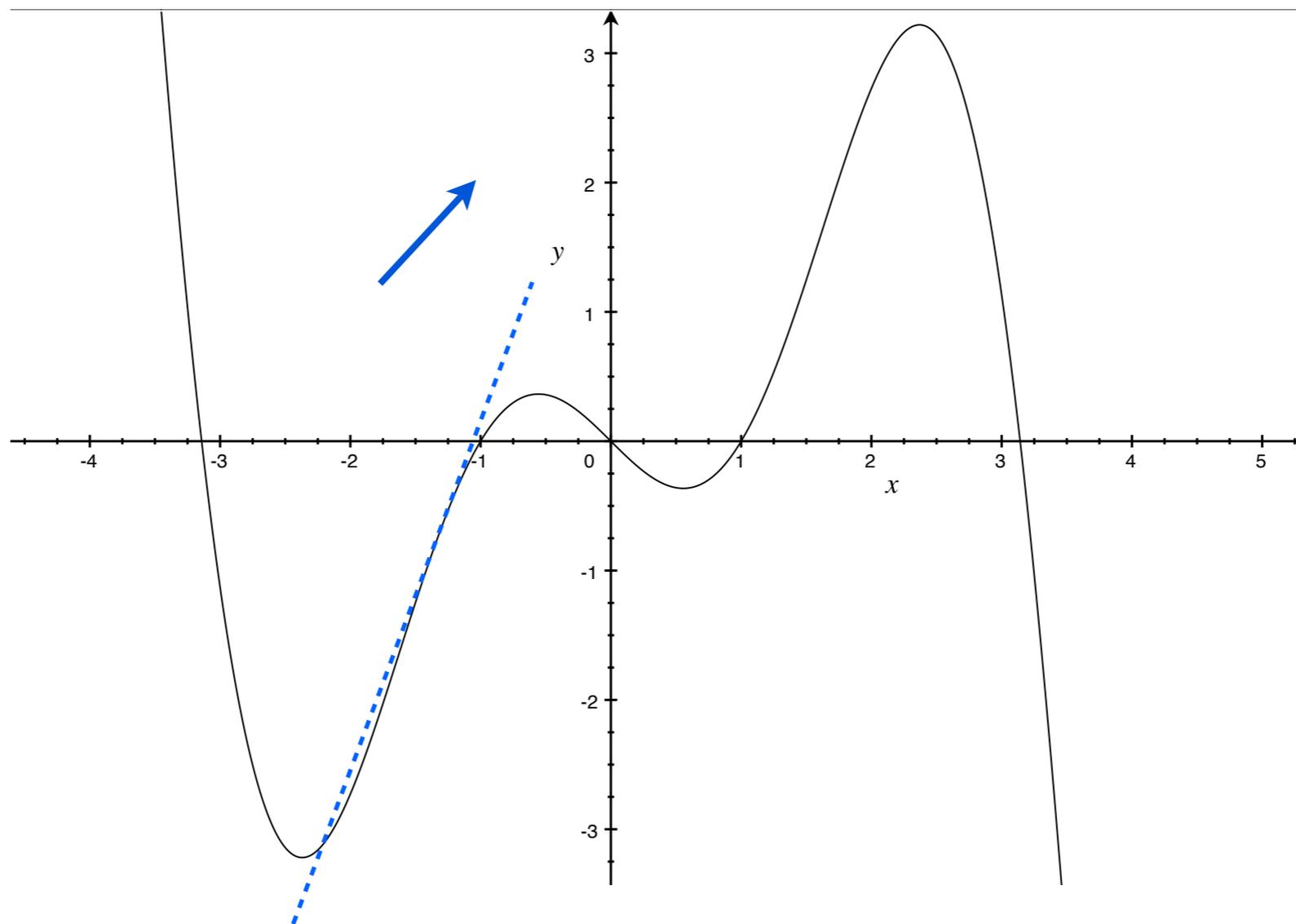
# Au dernier cours, nous avons vu

✓ Croissance et décroissance



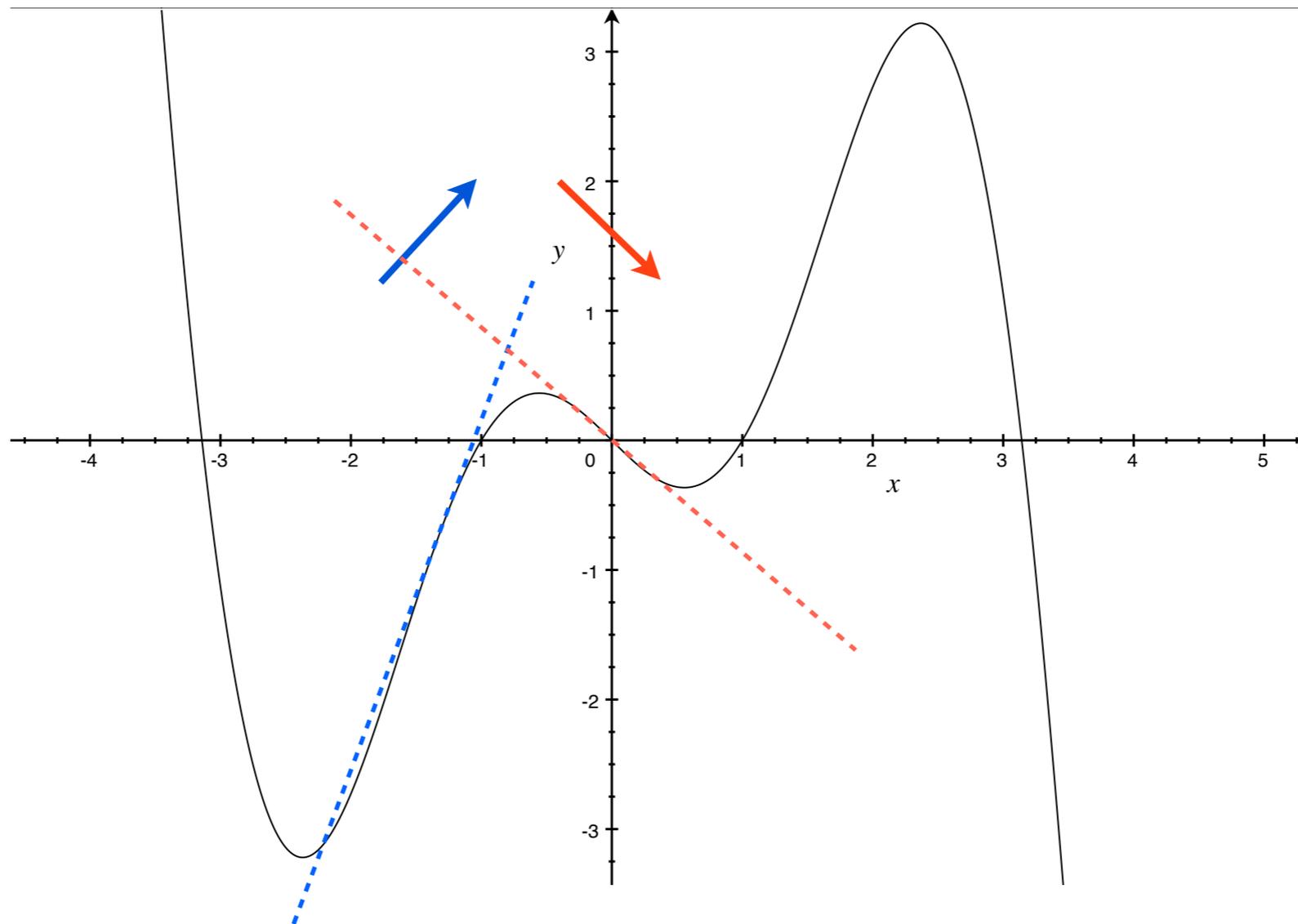
# Au dernier cours, nous avons vu

✓ Croissance et décroissance



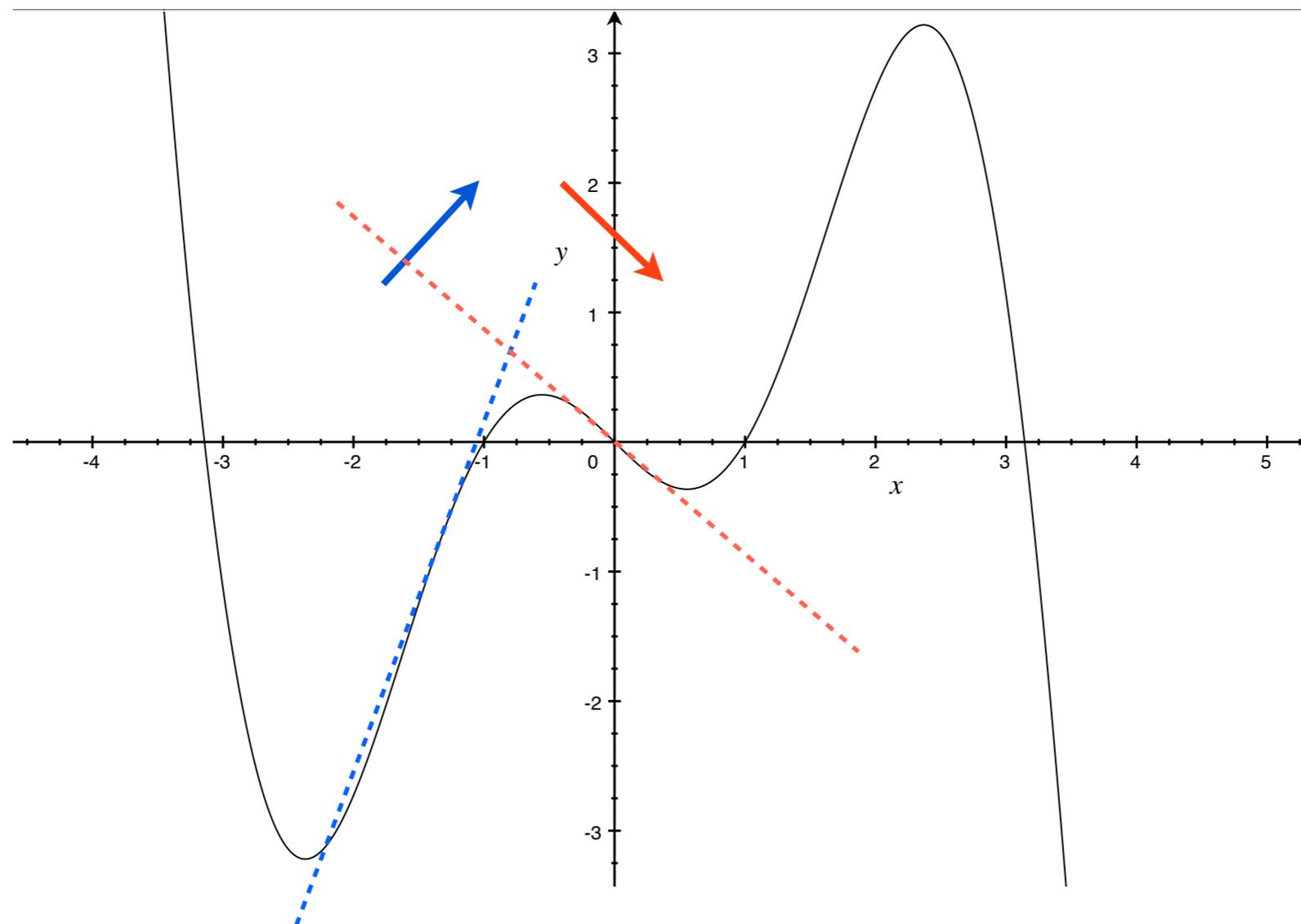
# Au dernier cours, nous avons vu

✓ Croissance et décroissance



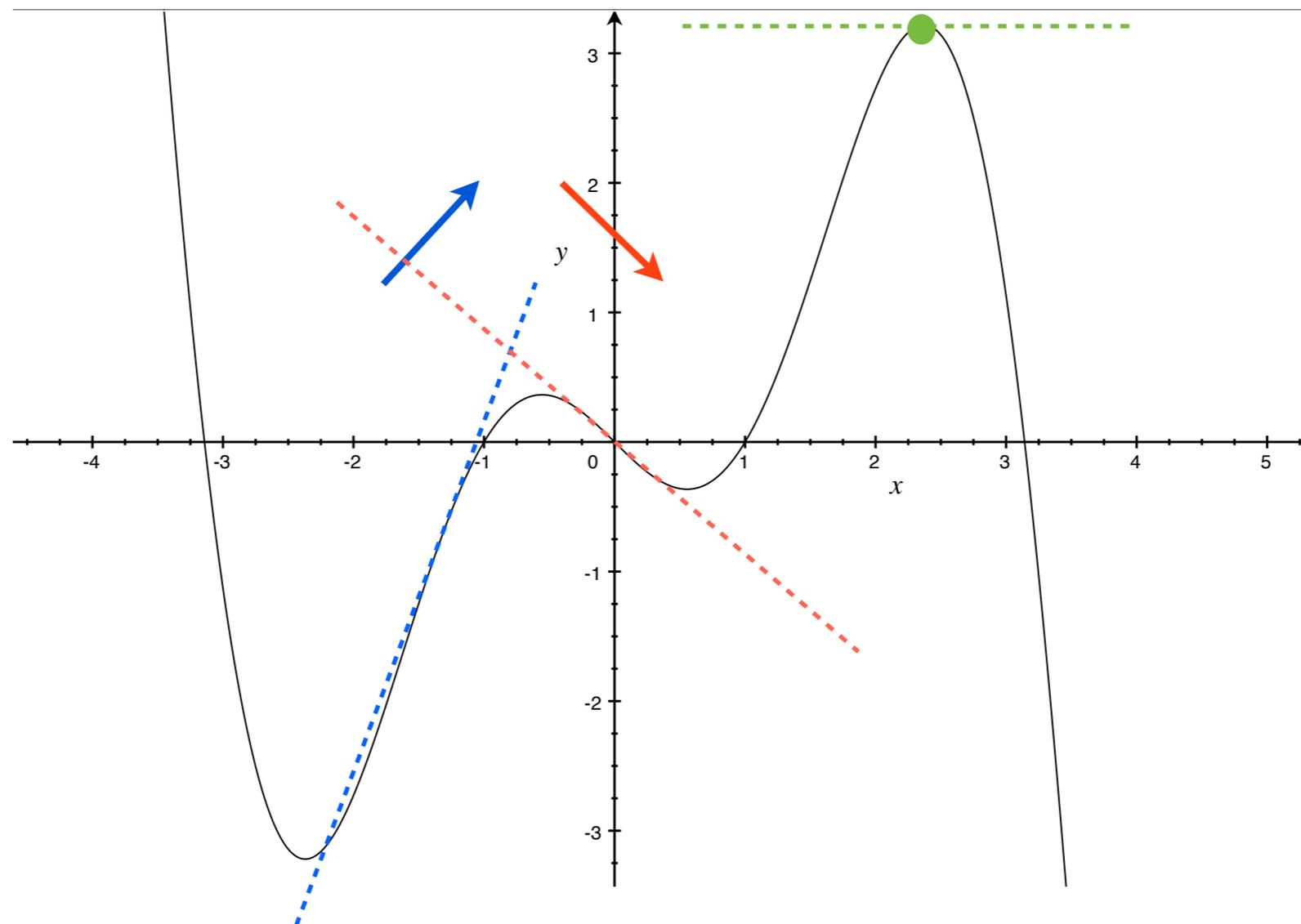
# Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Croissance et décroissance
- ✓ Maximum et minimum relatif



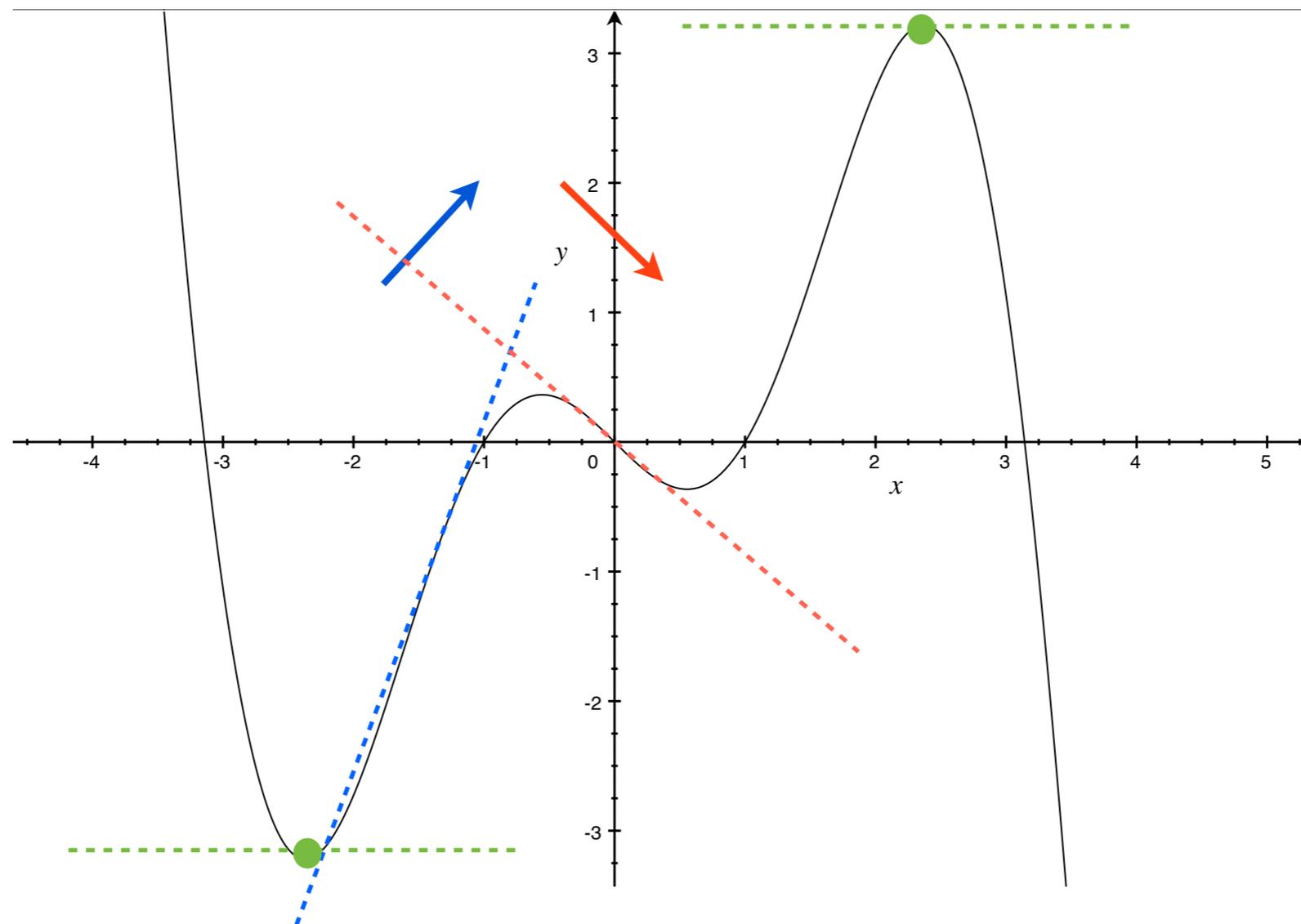
# Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Croissance et décroissance
- ✓ Maximum et minimum relatif



# Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Croissance et décroissance
- ✓ Maximum et minimum relatif



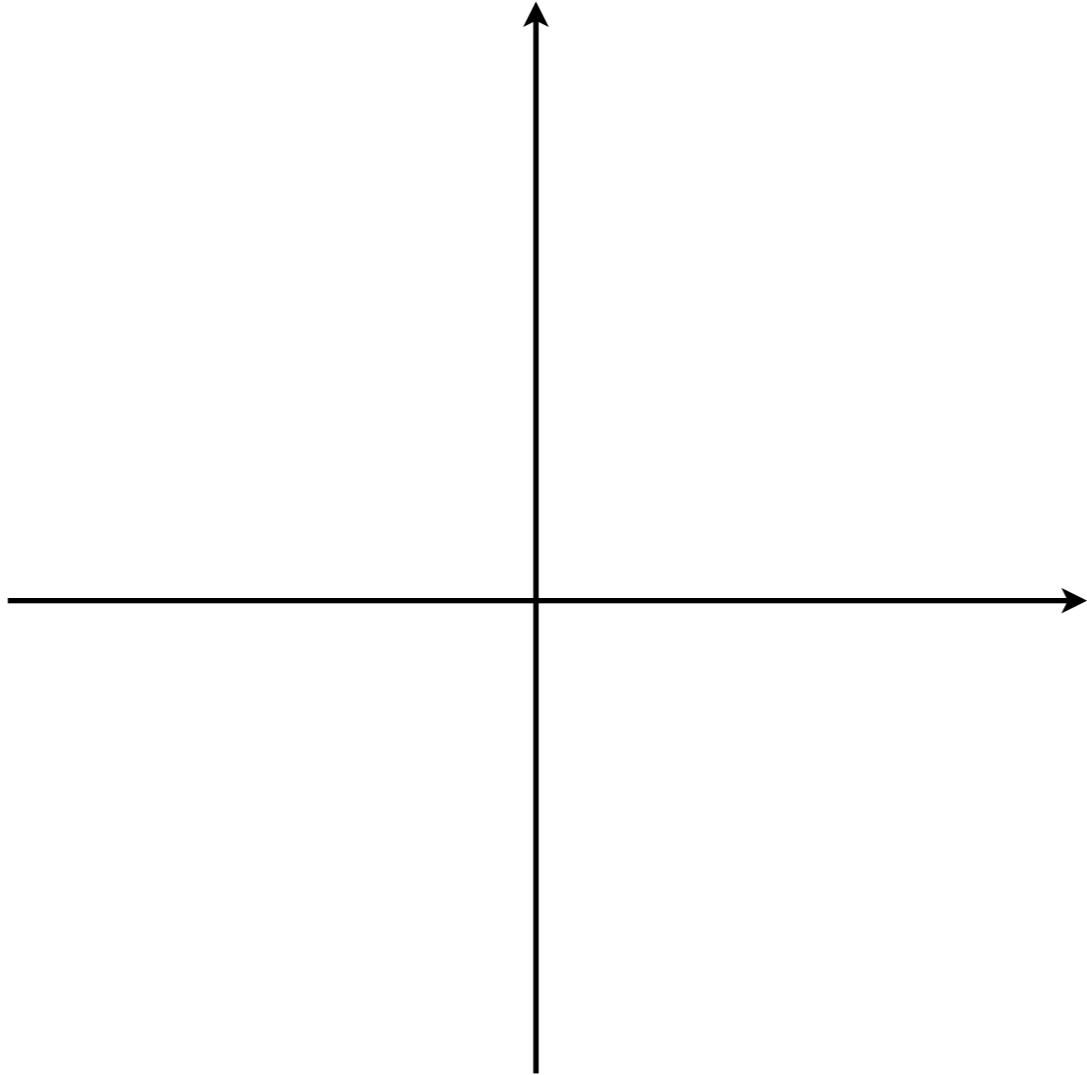
Aujourd'hui, nous allons voir

# Aujourd'hui, nous allons voir

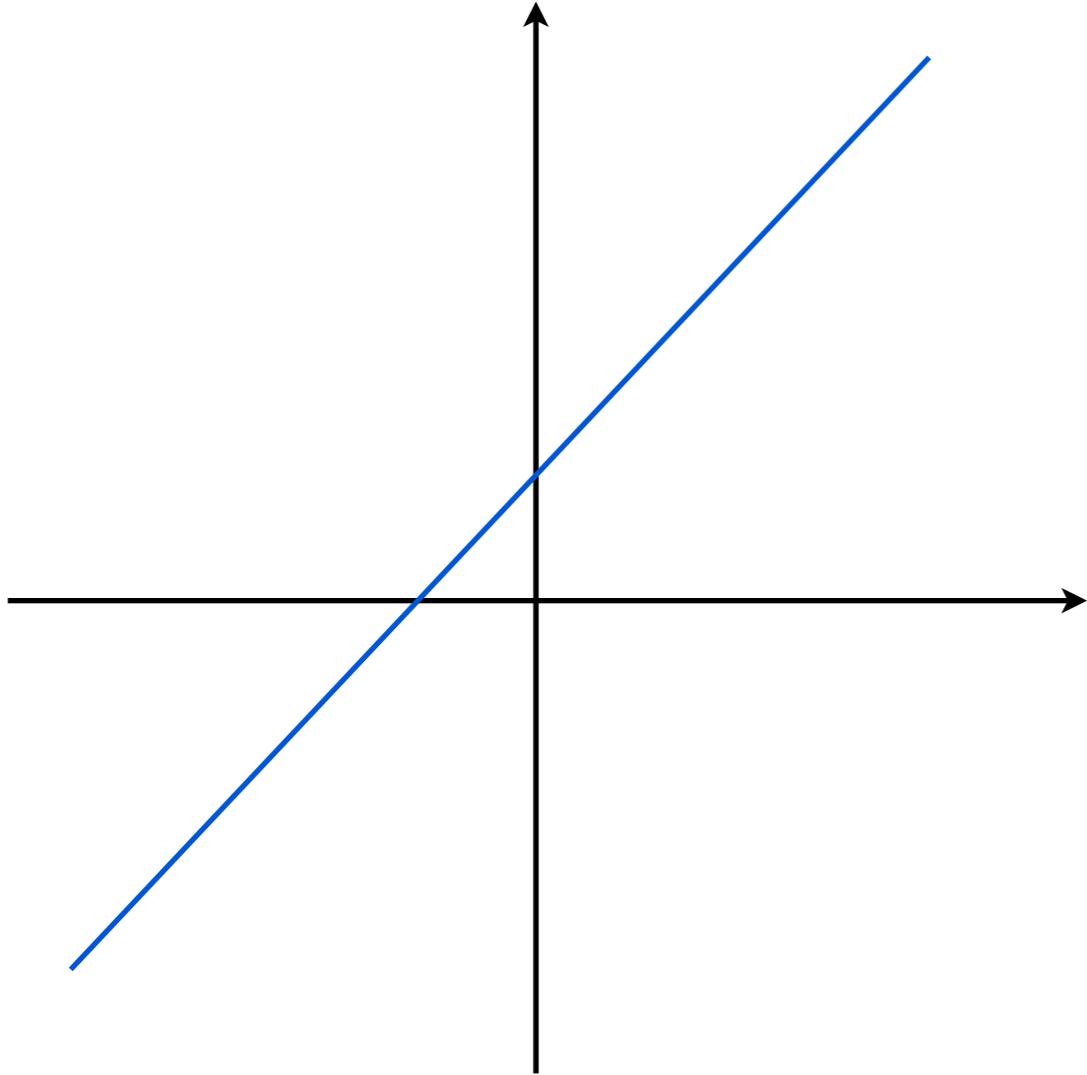
✓ Concavité

Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.

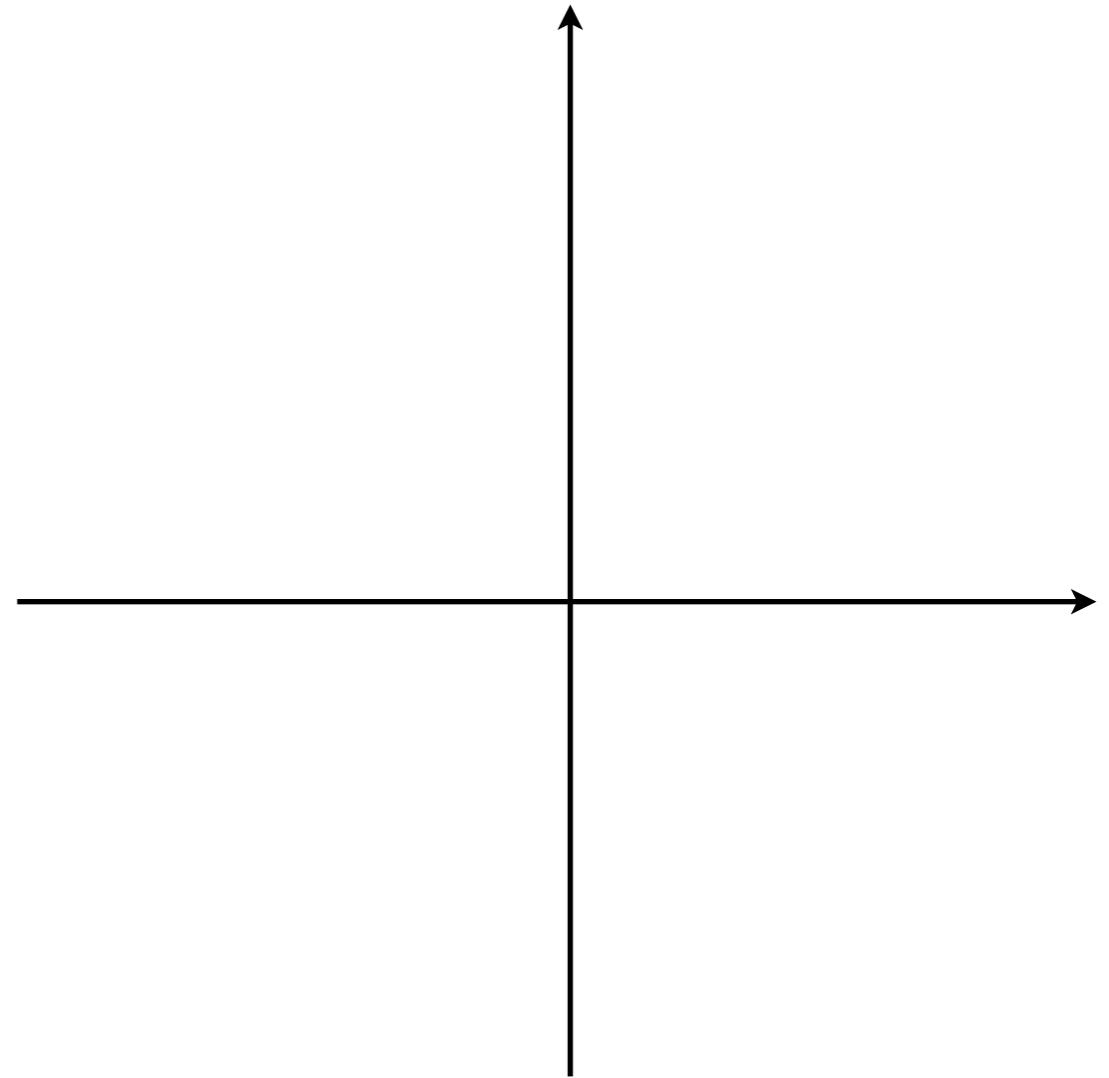
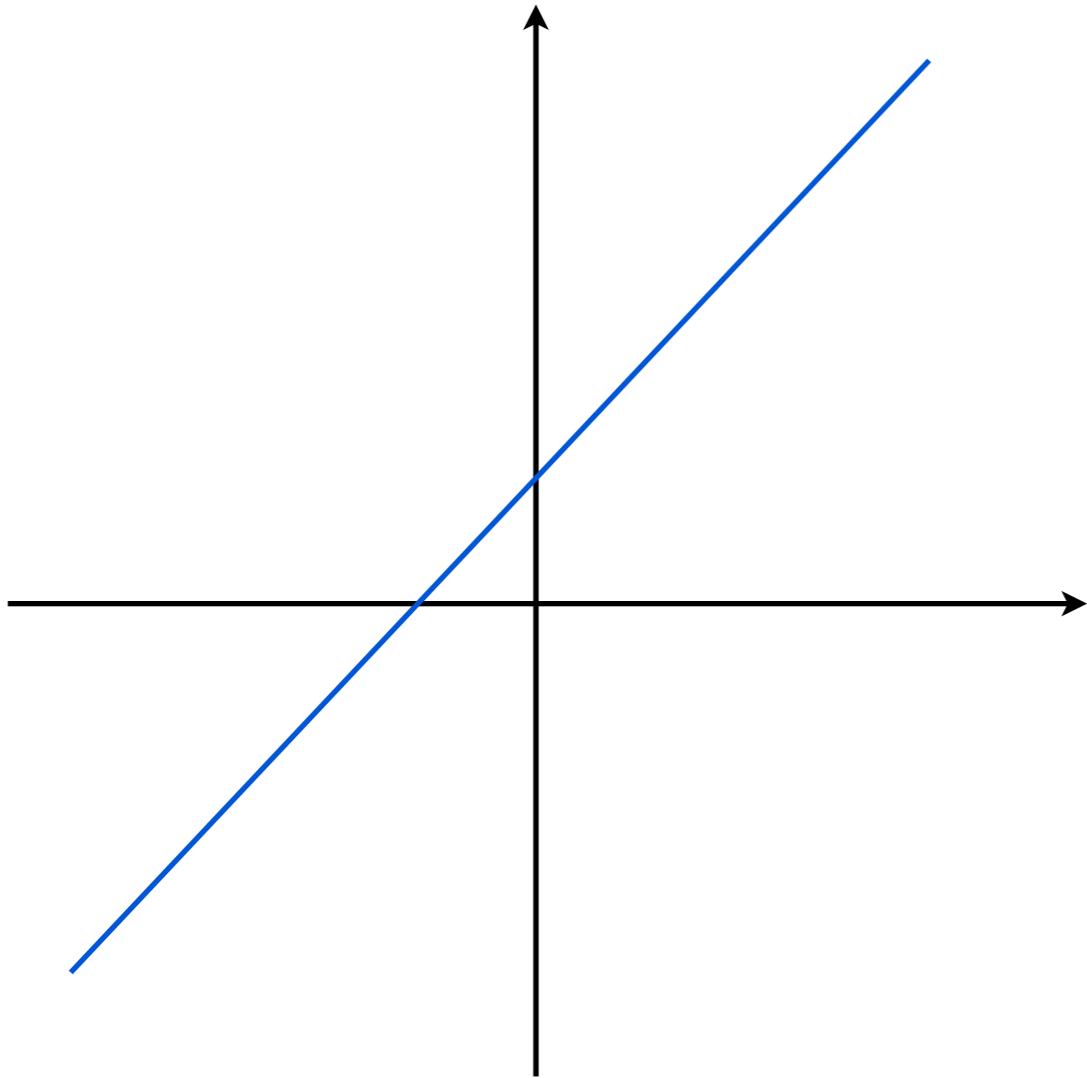
Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



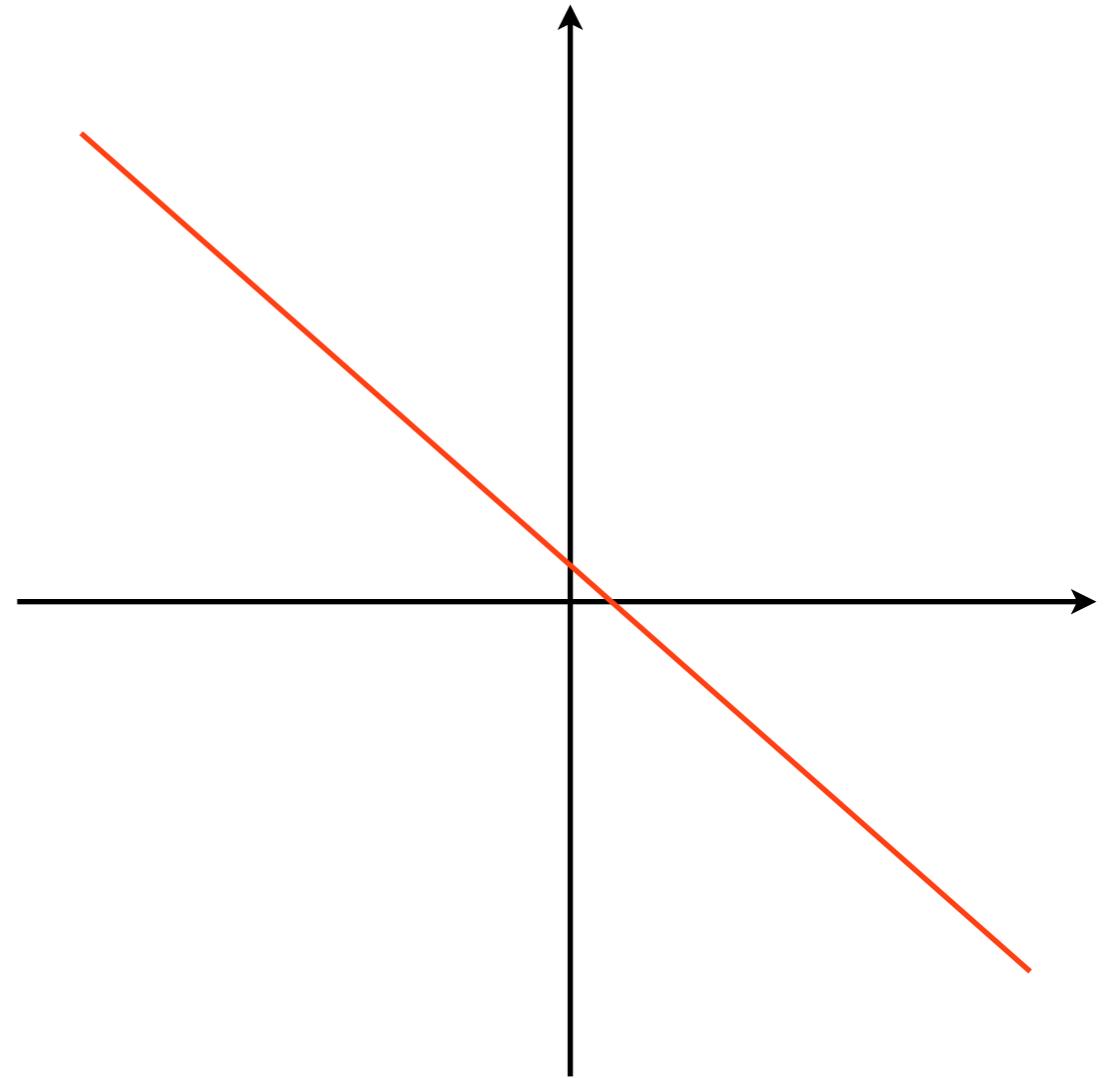
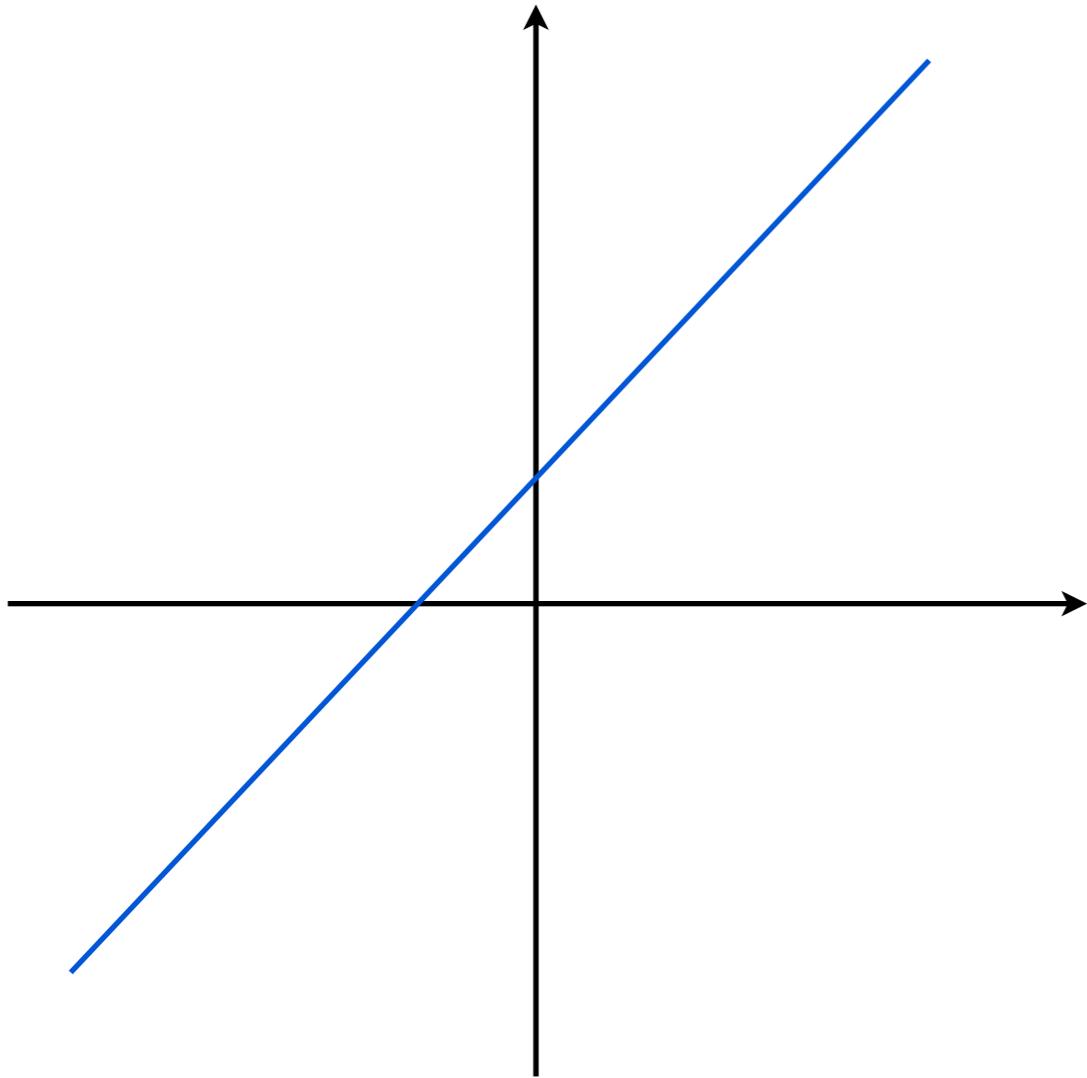
Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



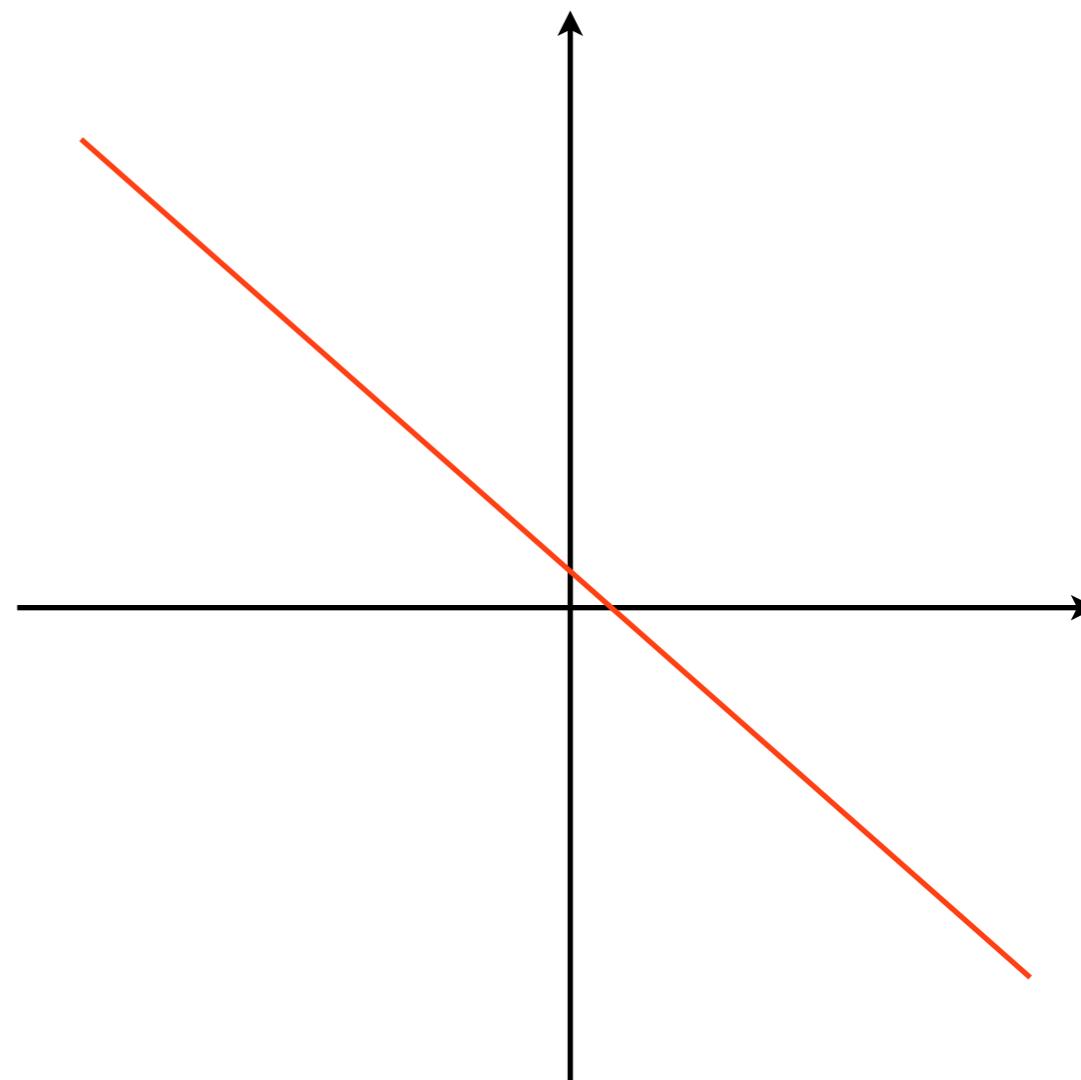
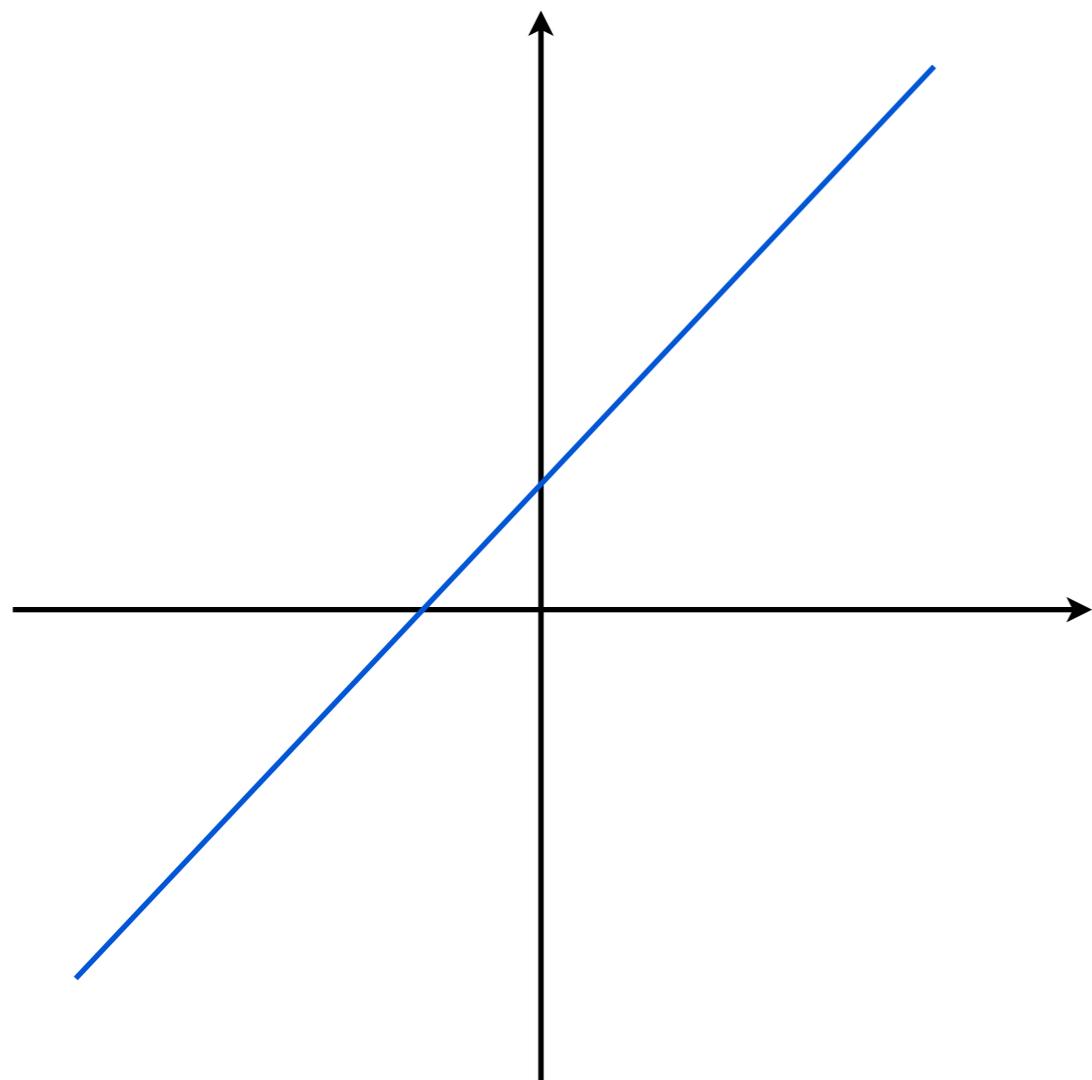
Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.

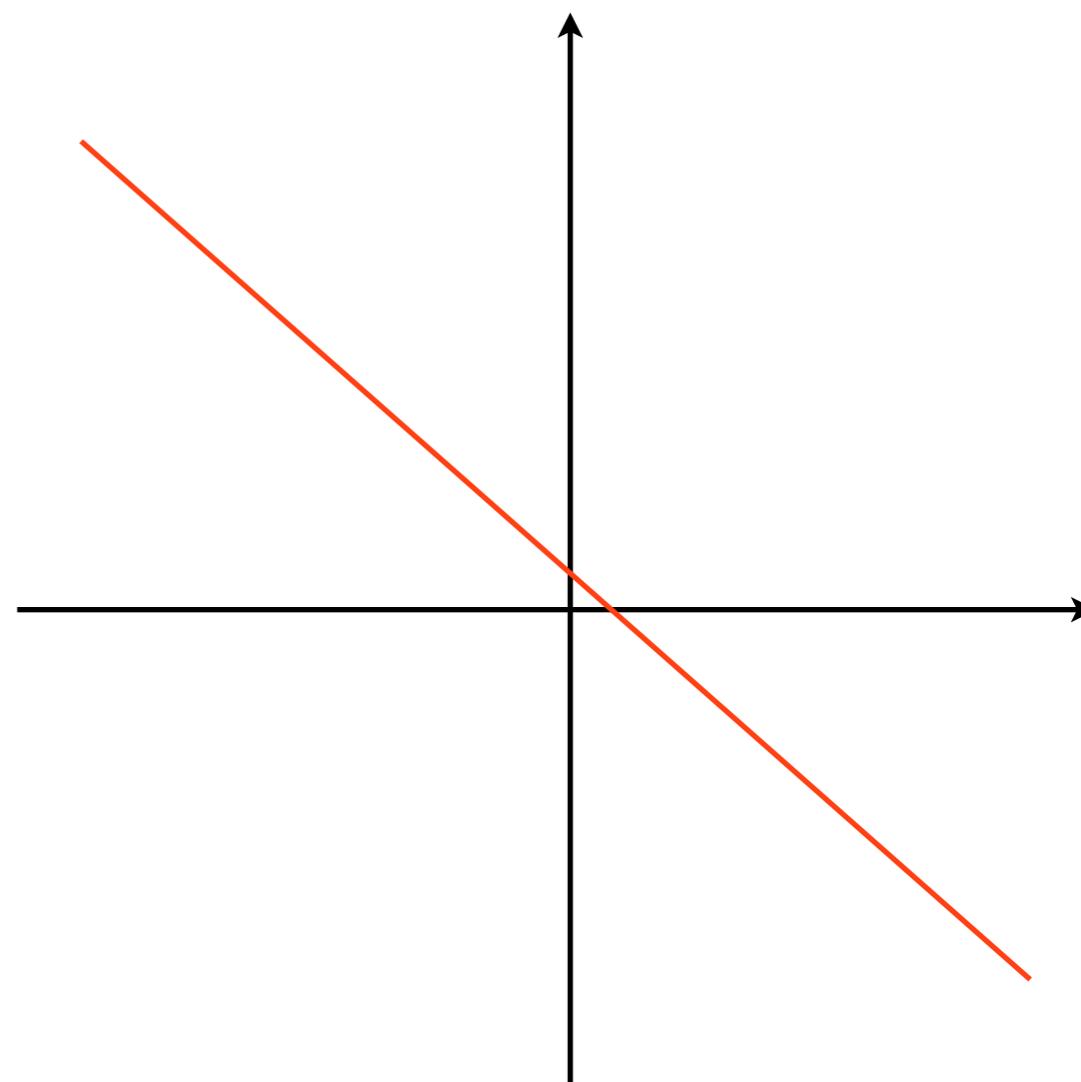
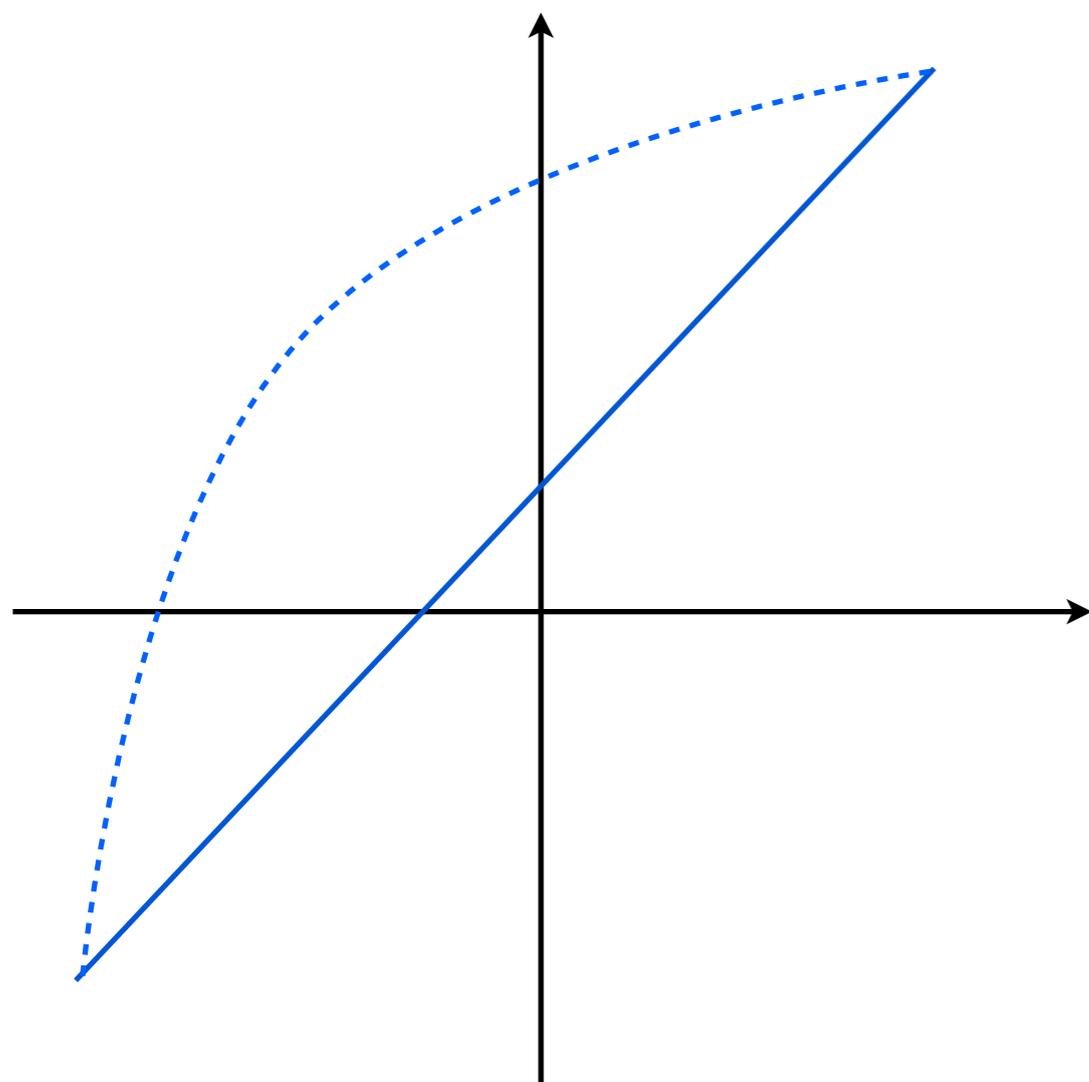


Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



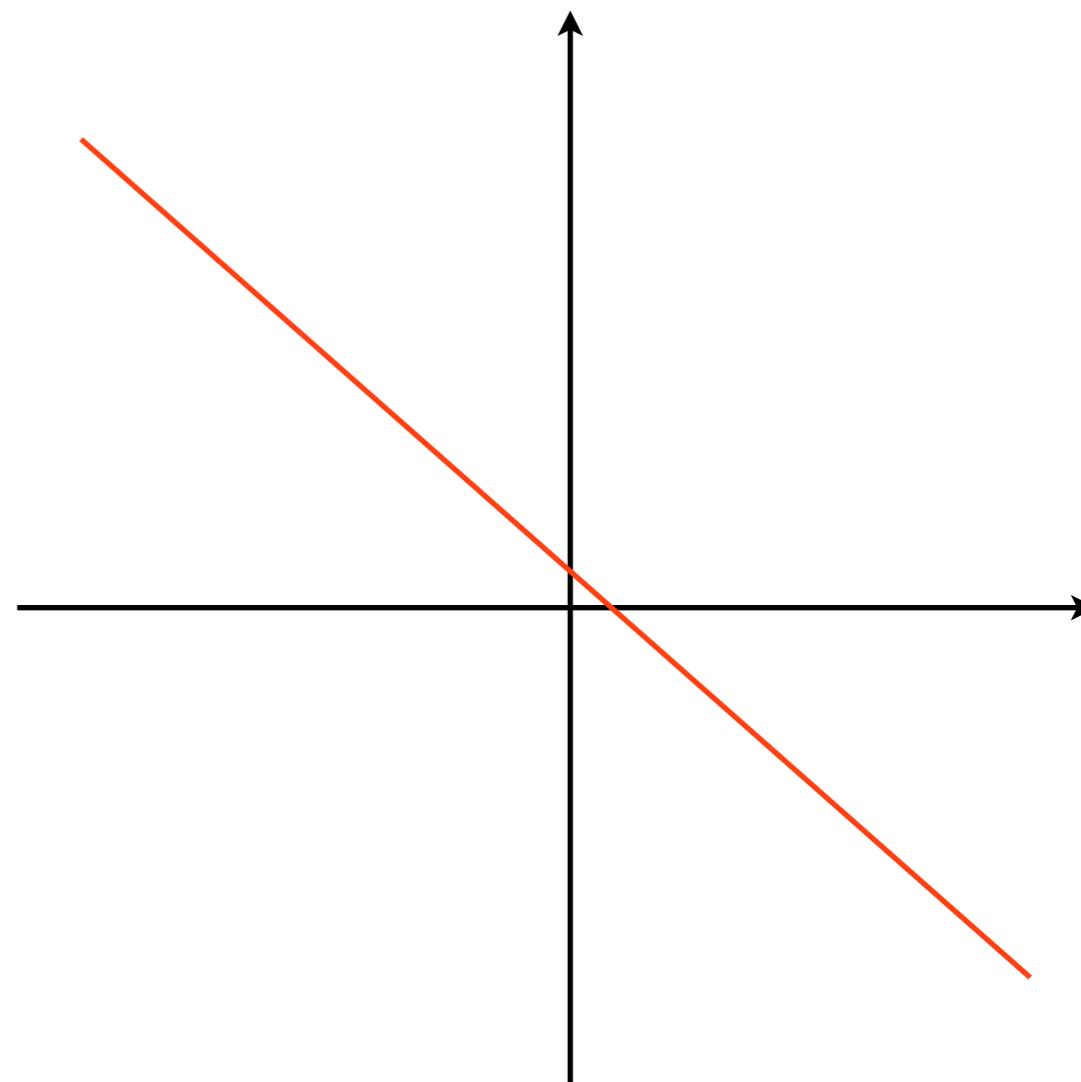
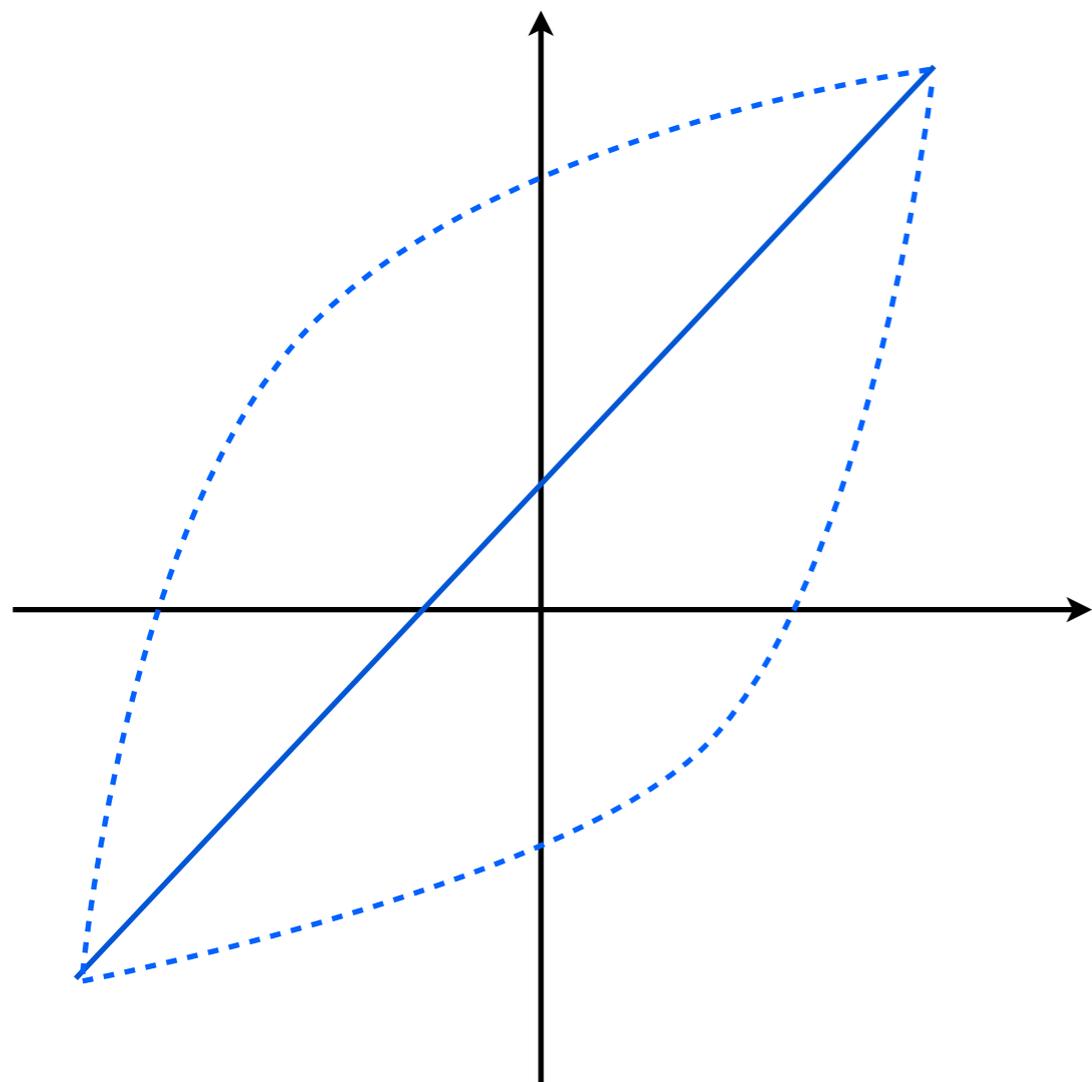
Est-il possible d'être plus précis sur l'allure de la fonction ?

Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



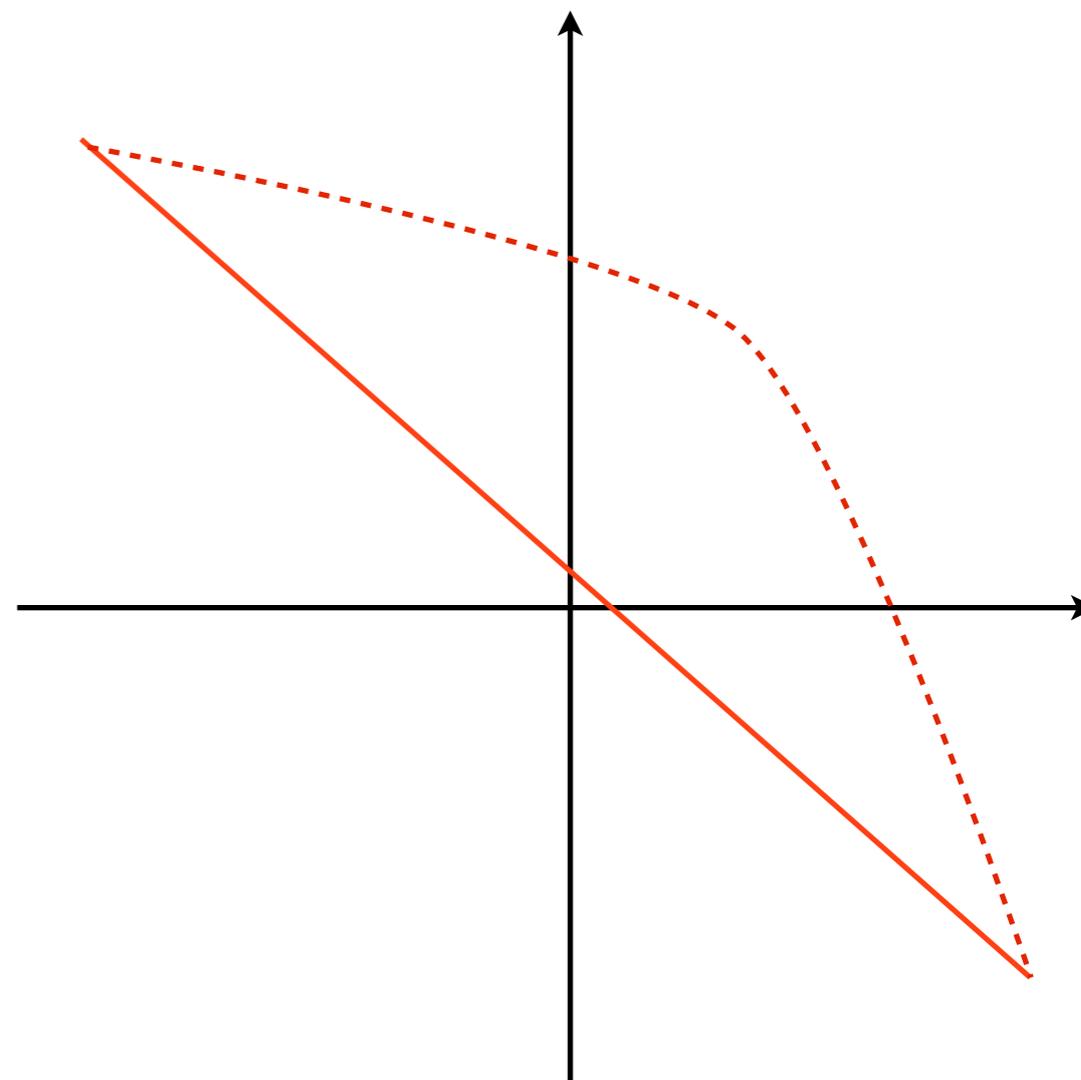
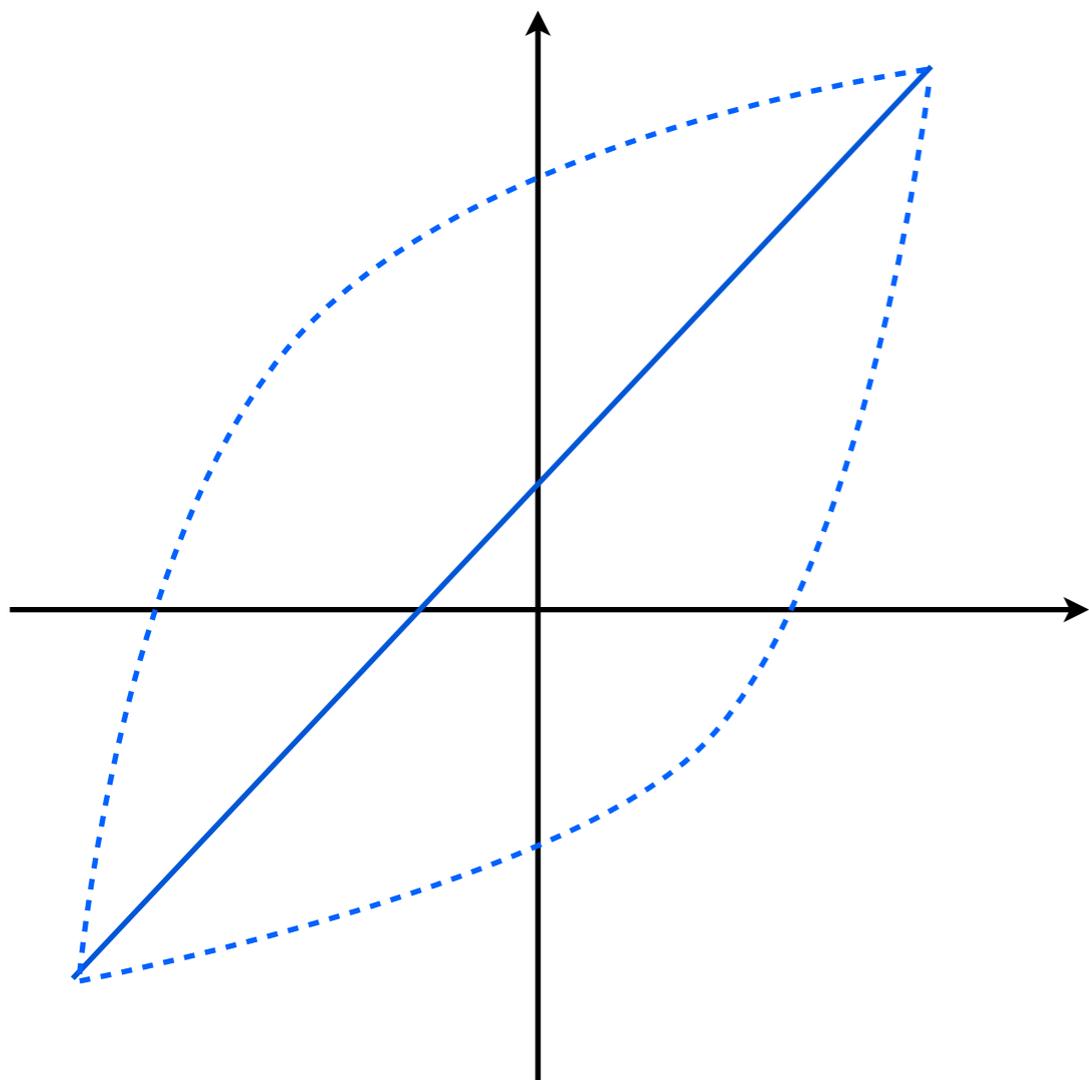
Est-il possible d'être plus précis sur l'allure de la fonction ?

Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.



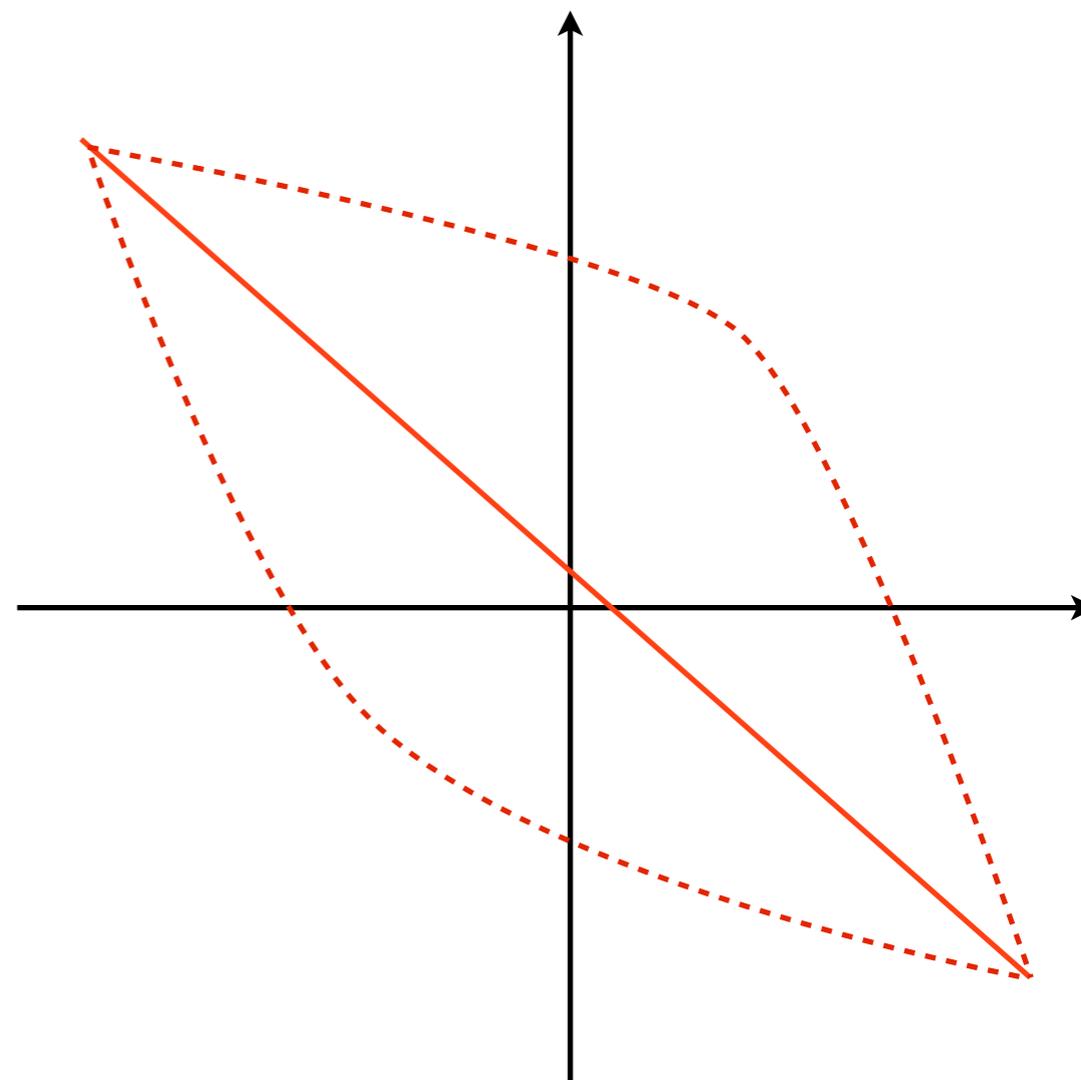
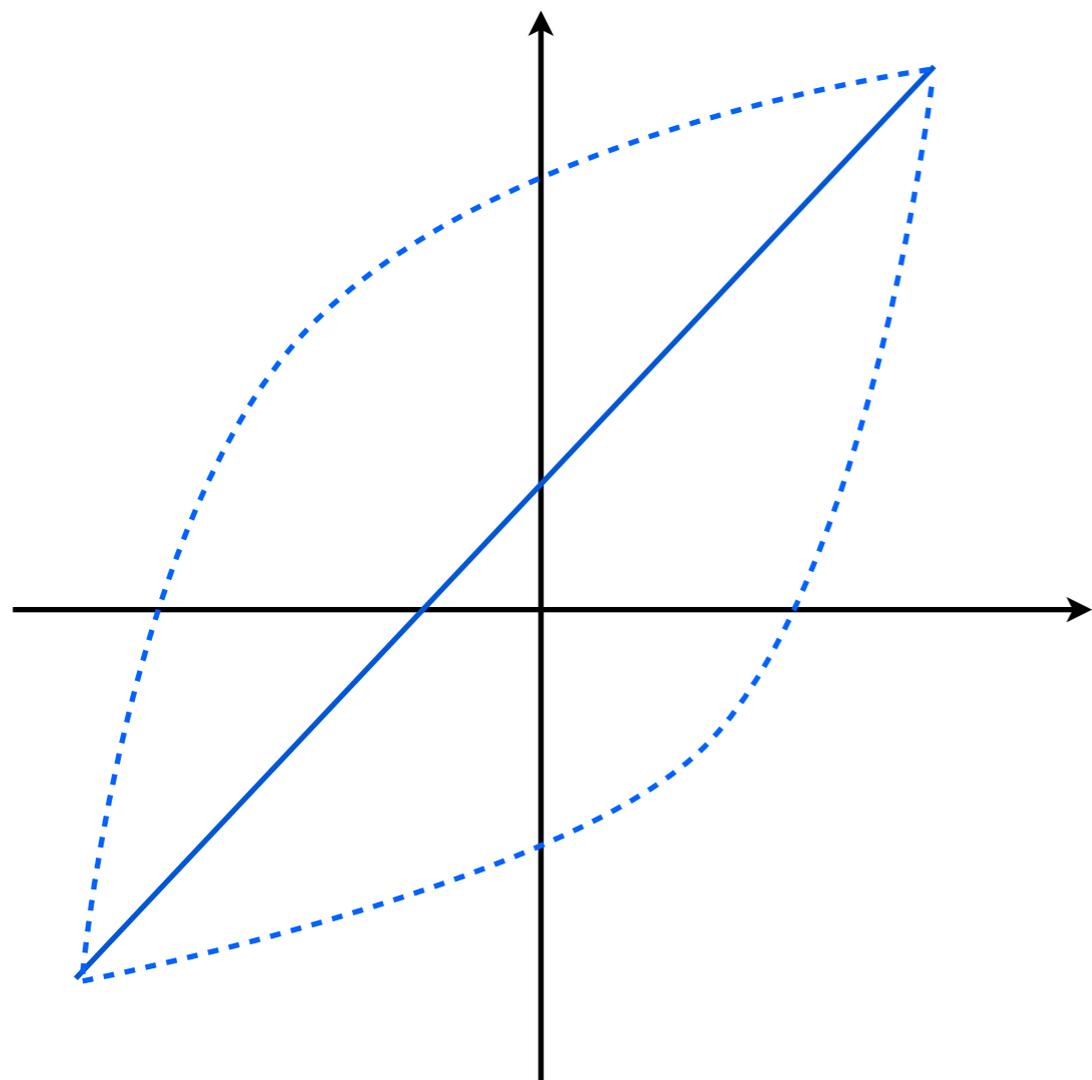
Est-il possible d'être plus précis sur l'allure de la fonction ?

Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.

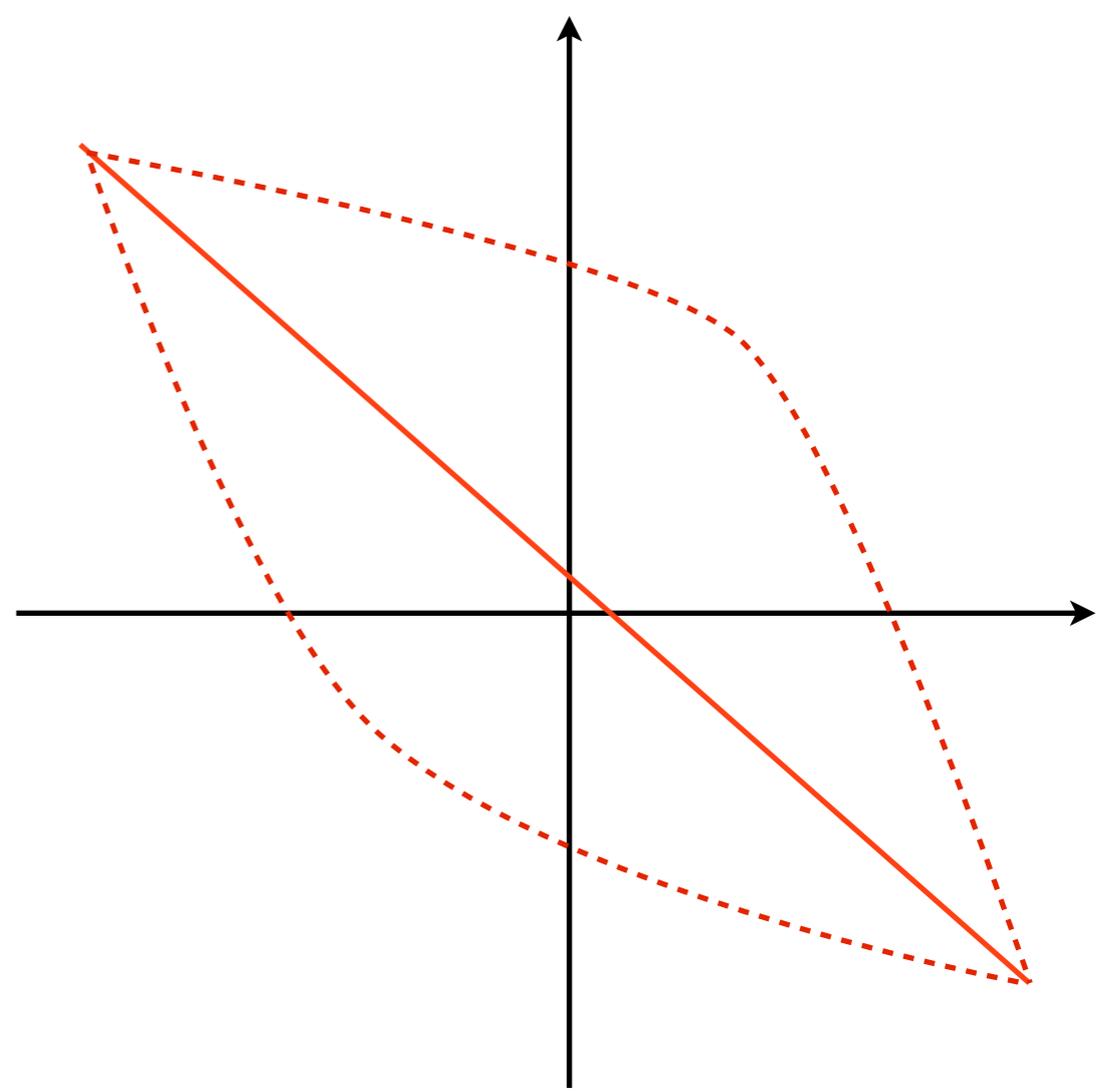
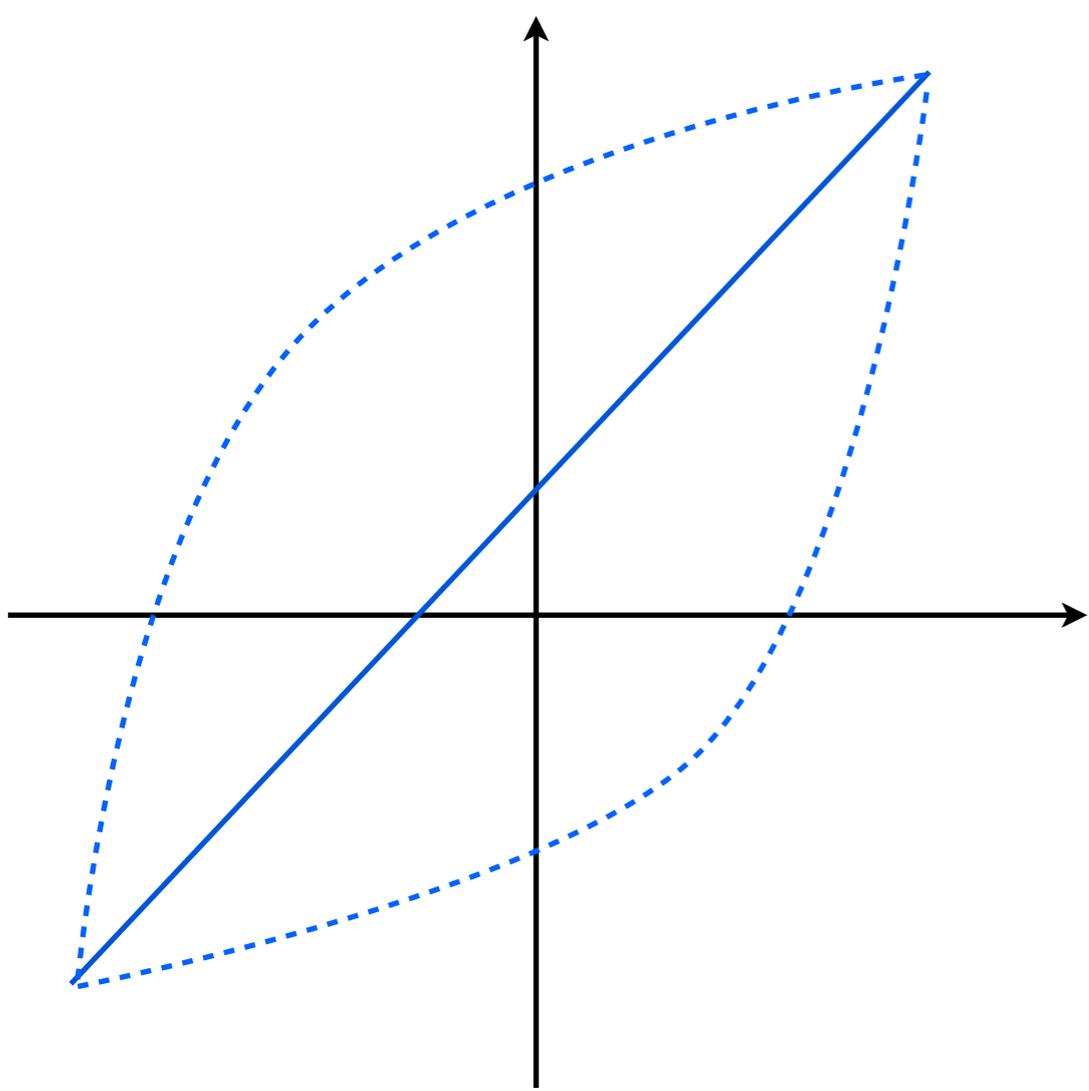


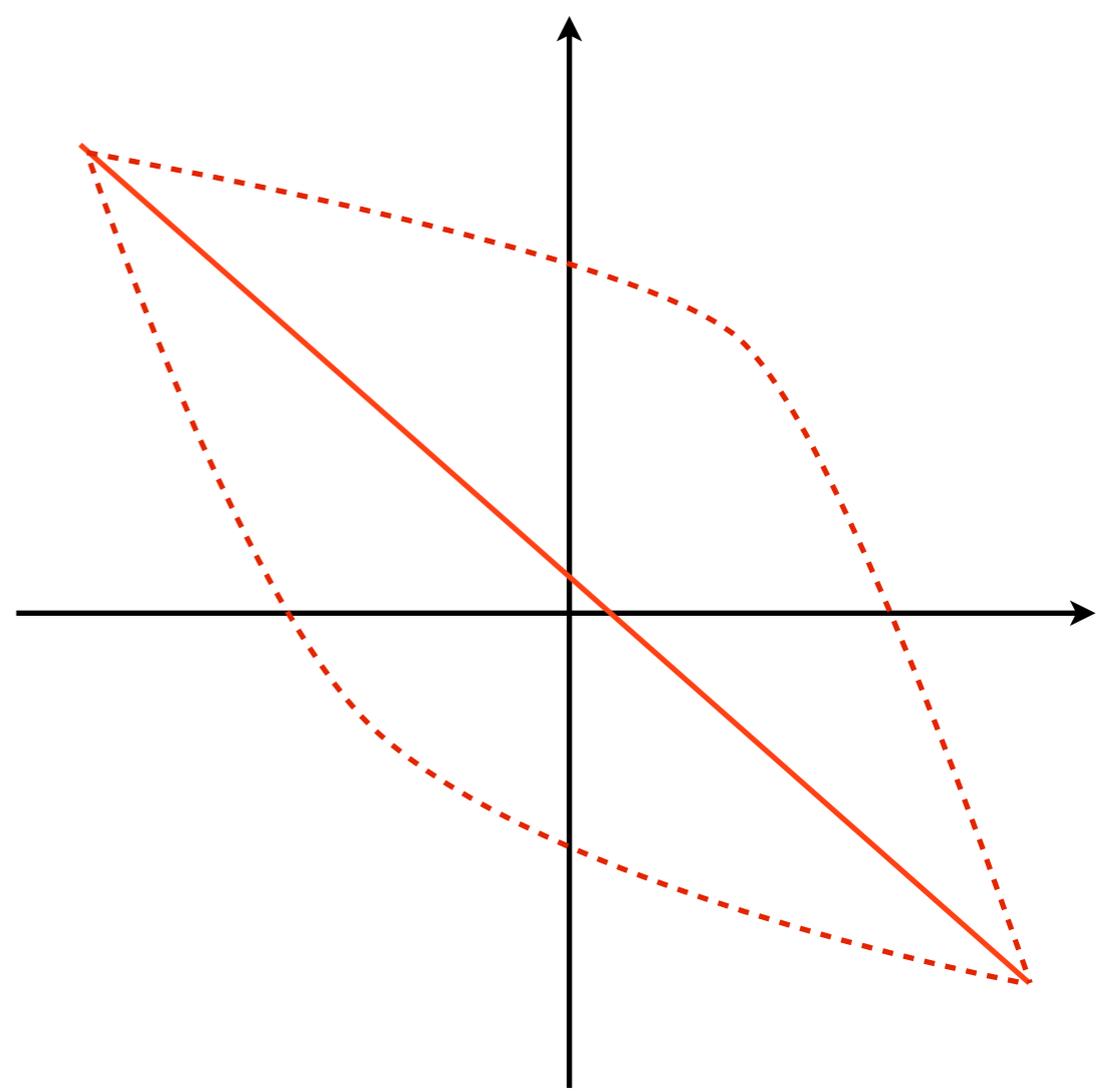
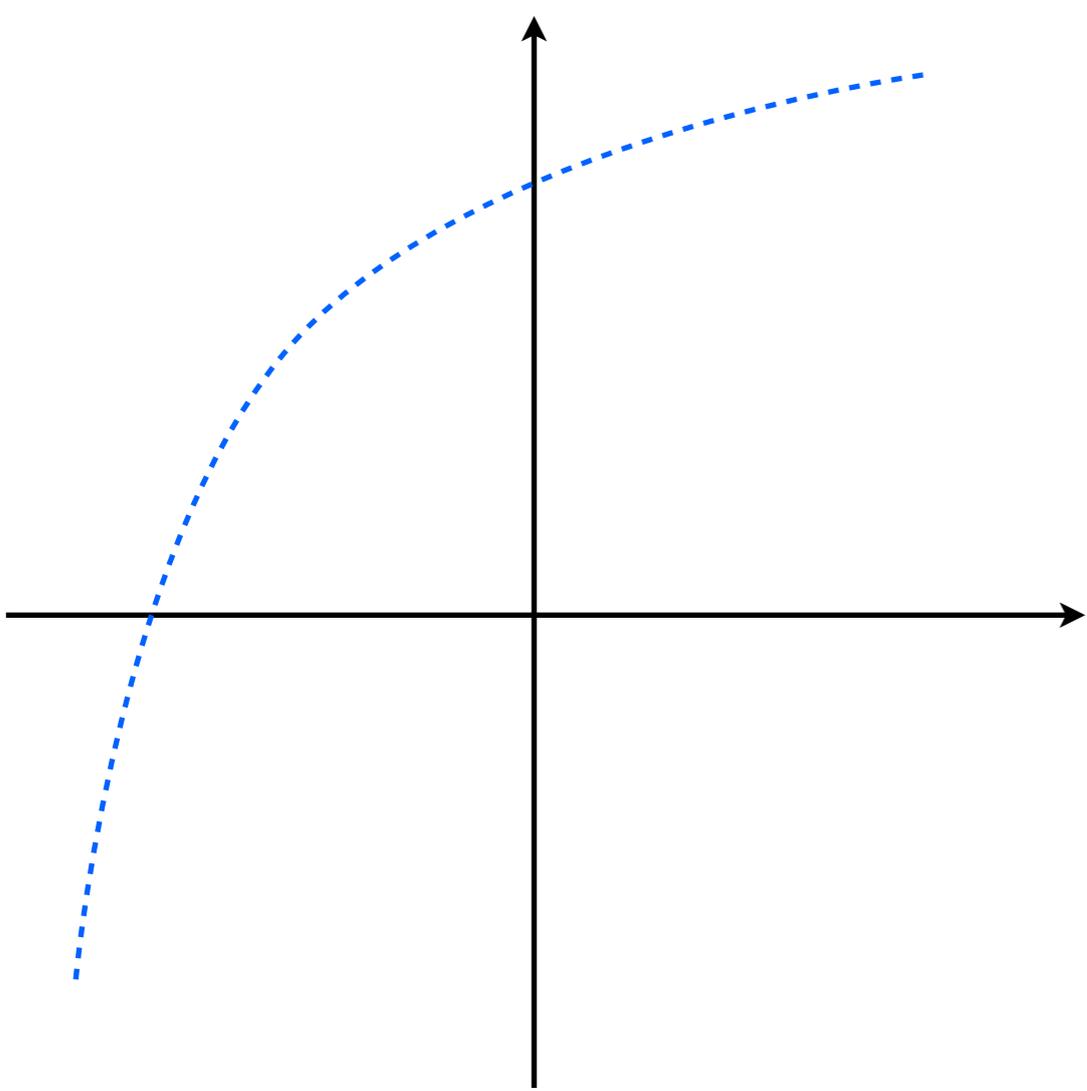
Est-il possible d'être plus précis sur l'allure de la fonction ?

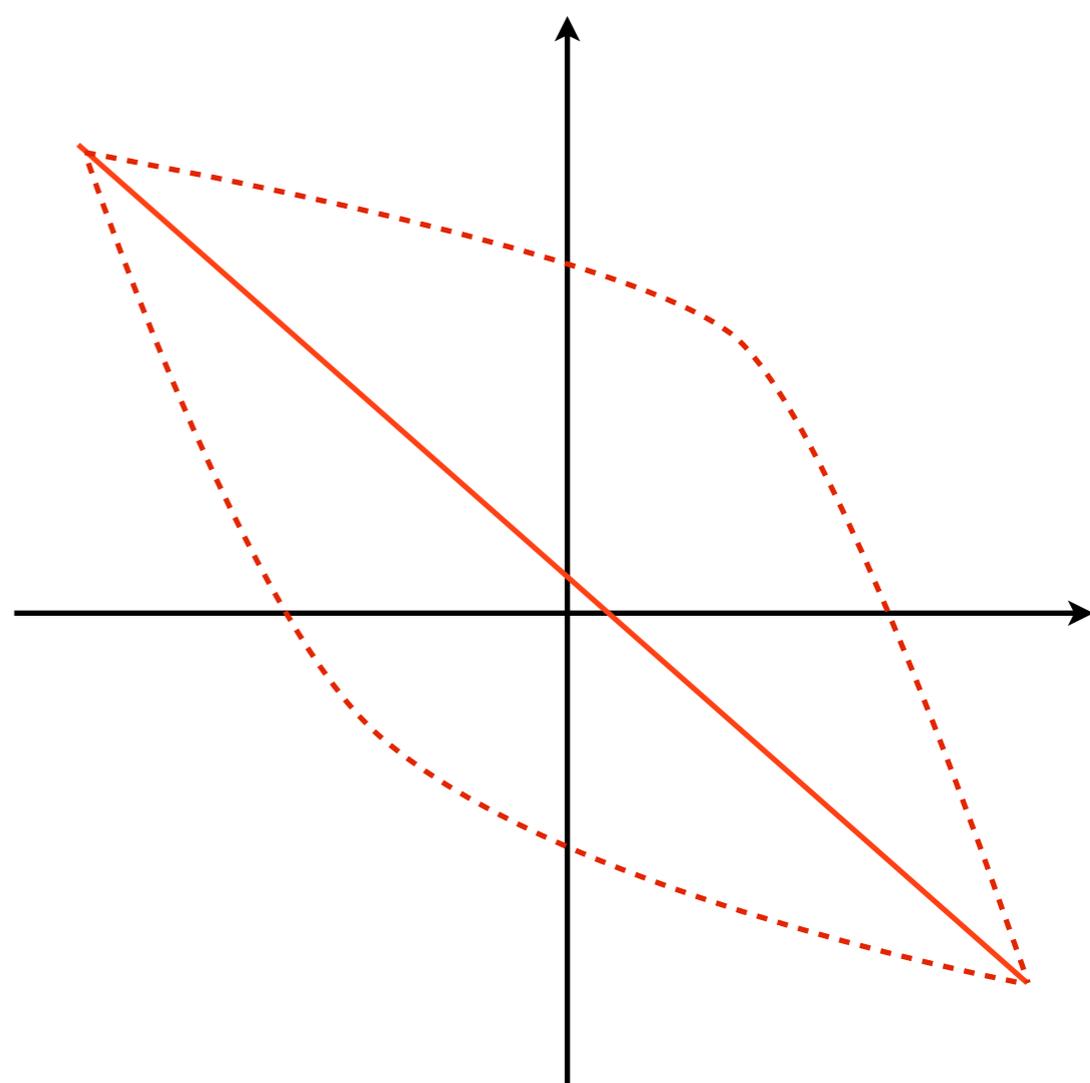
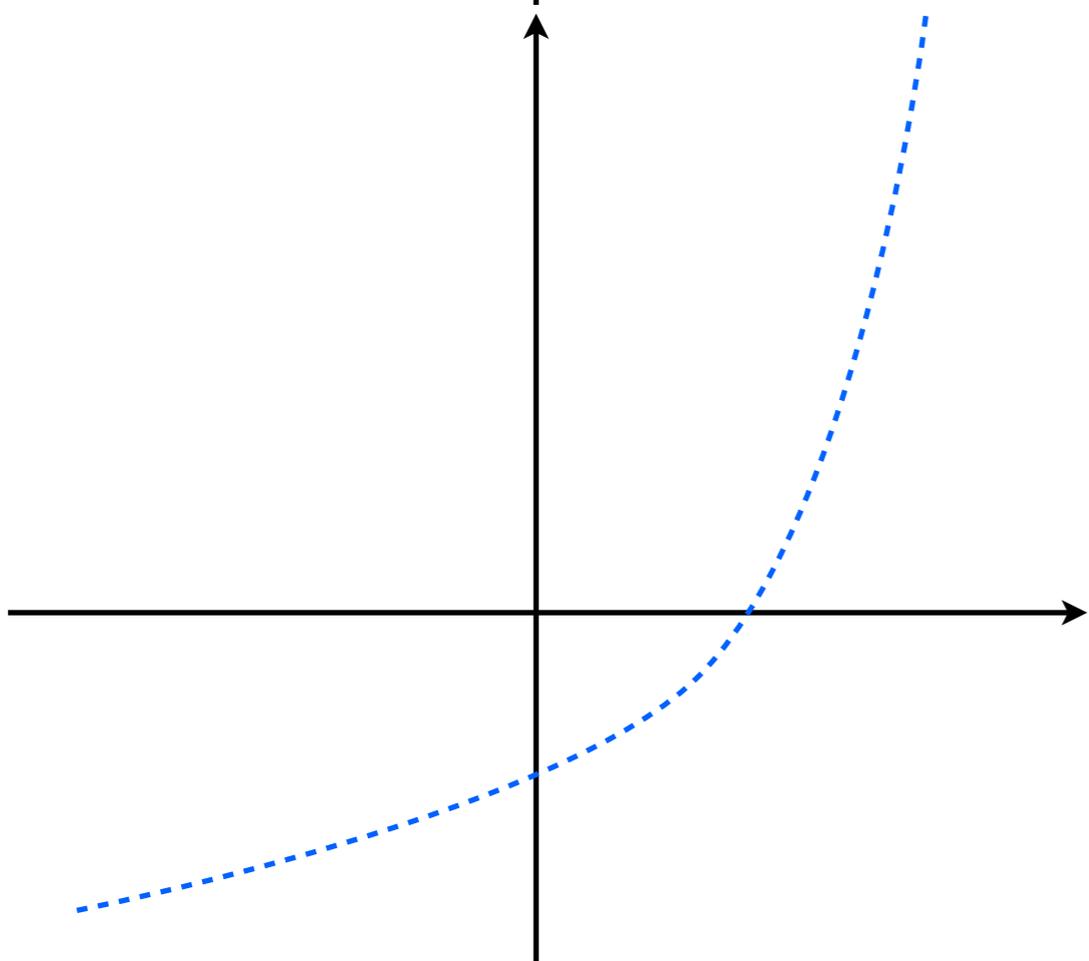
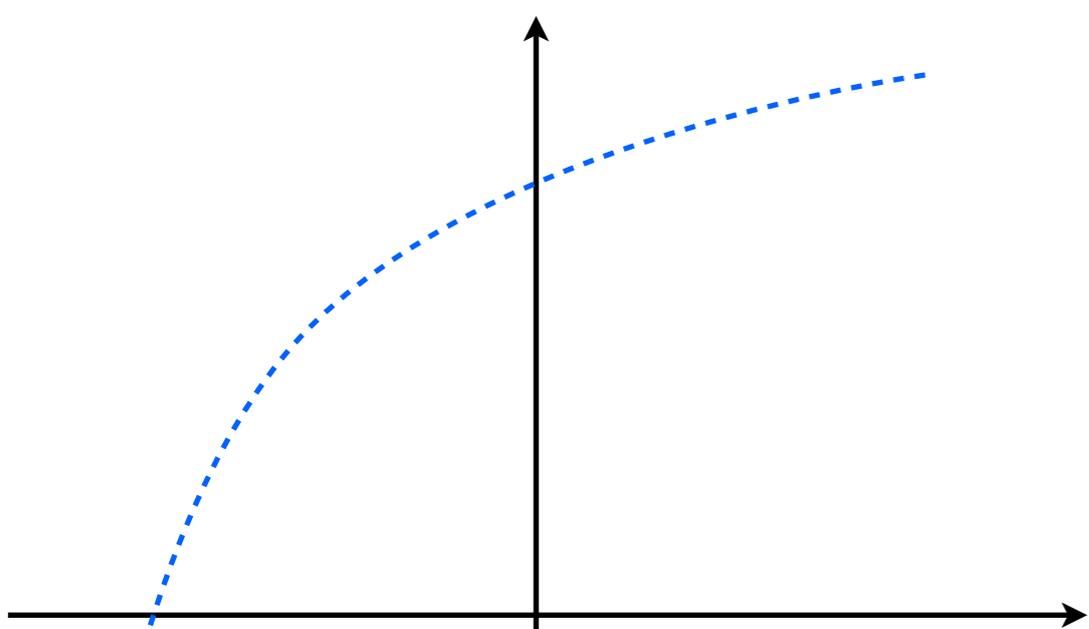
Au dernier cours, on a vu comment déterminer si une fonction était croissante ou décroissante sur un intervalle donné.

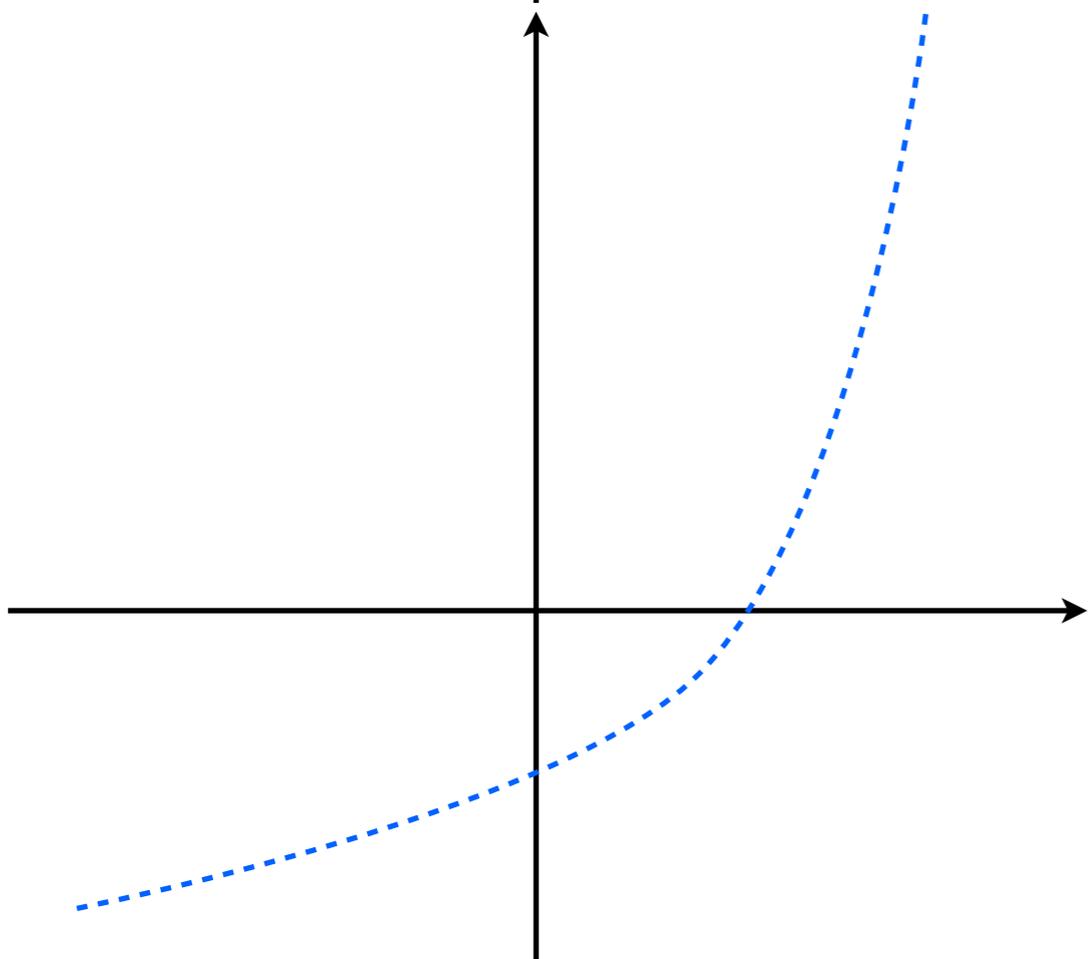
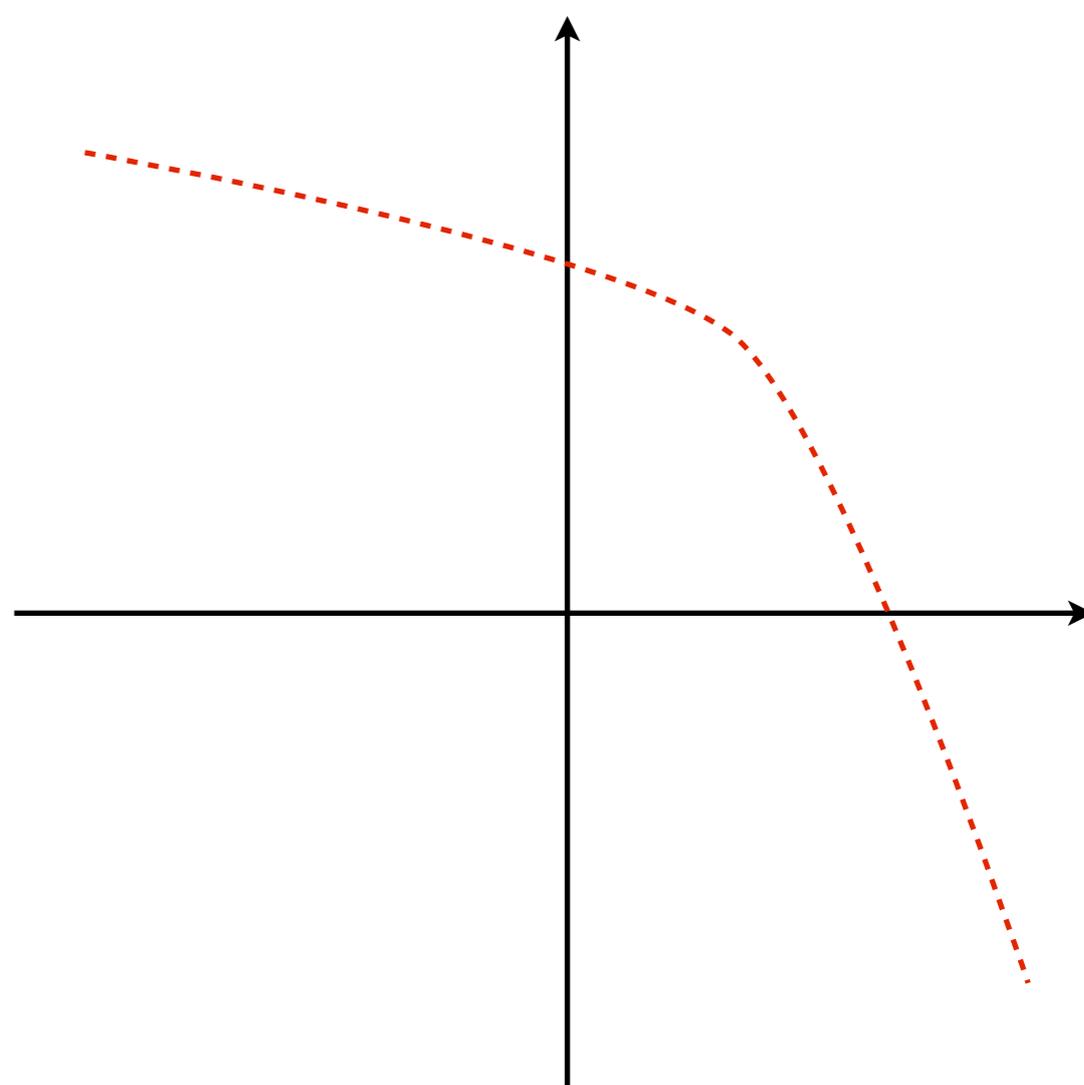
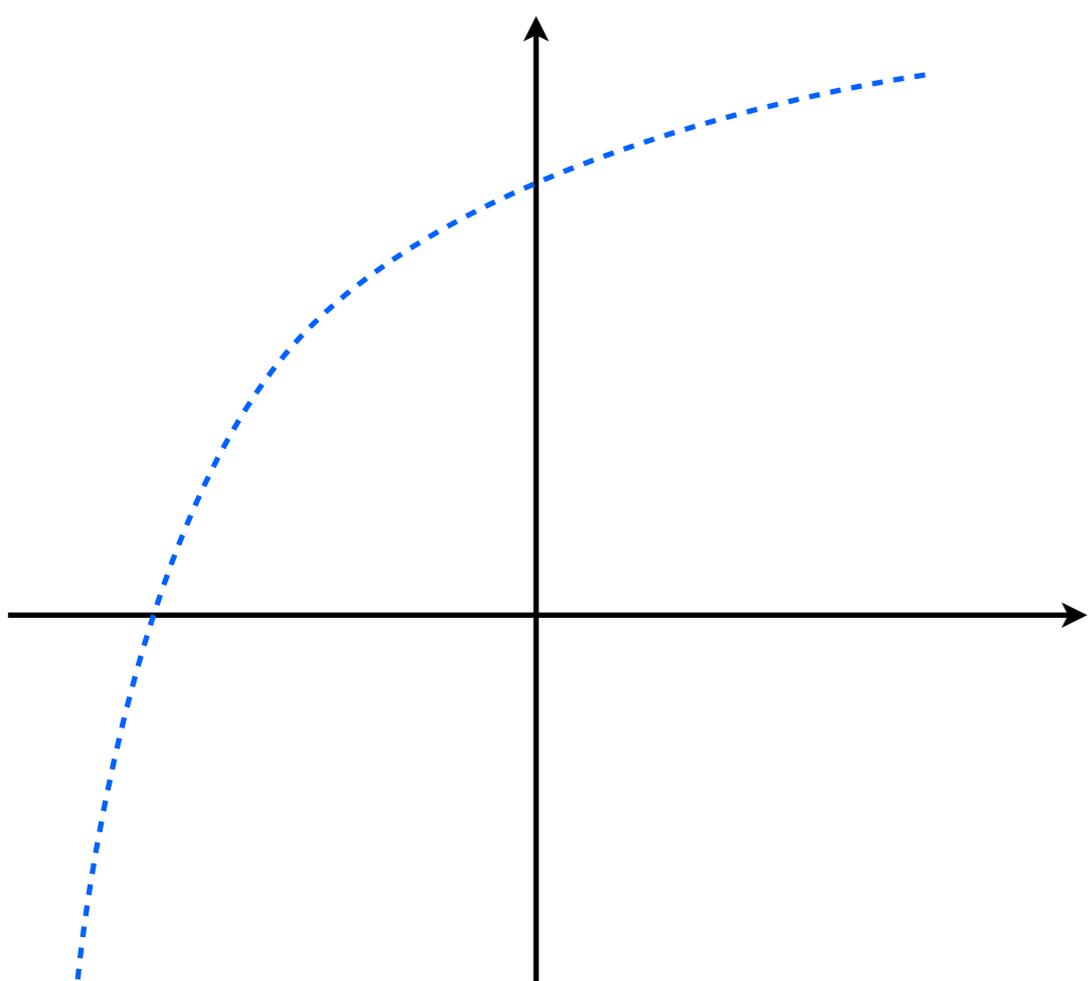


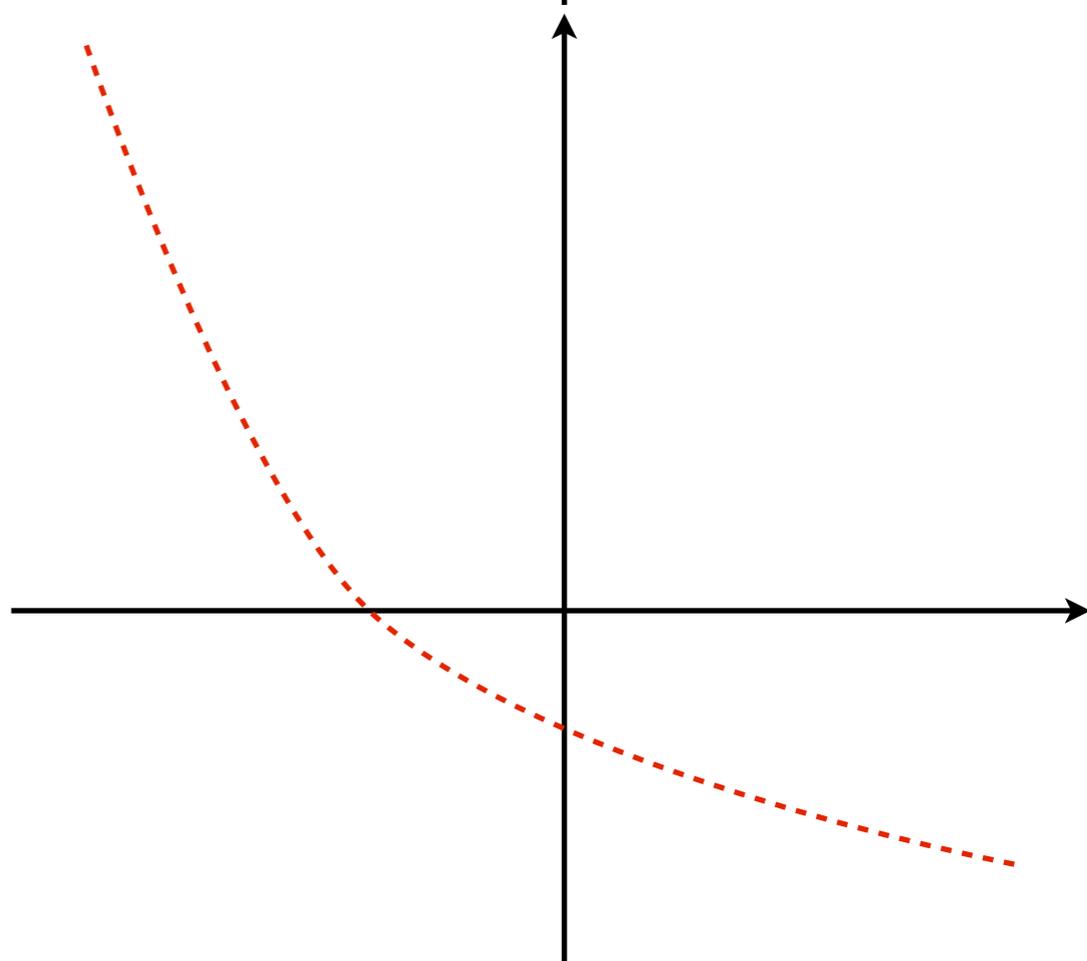
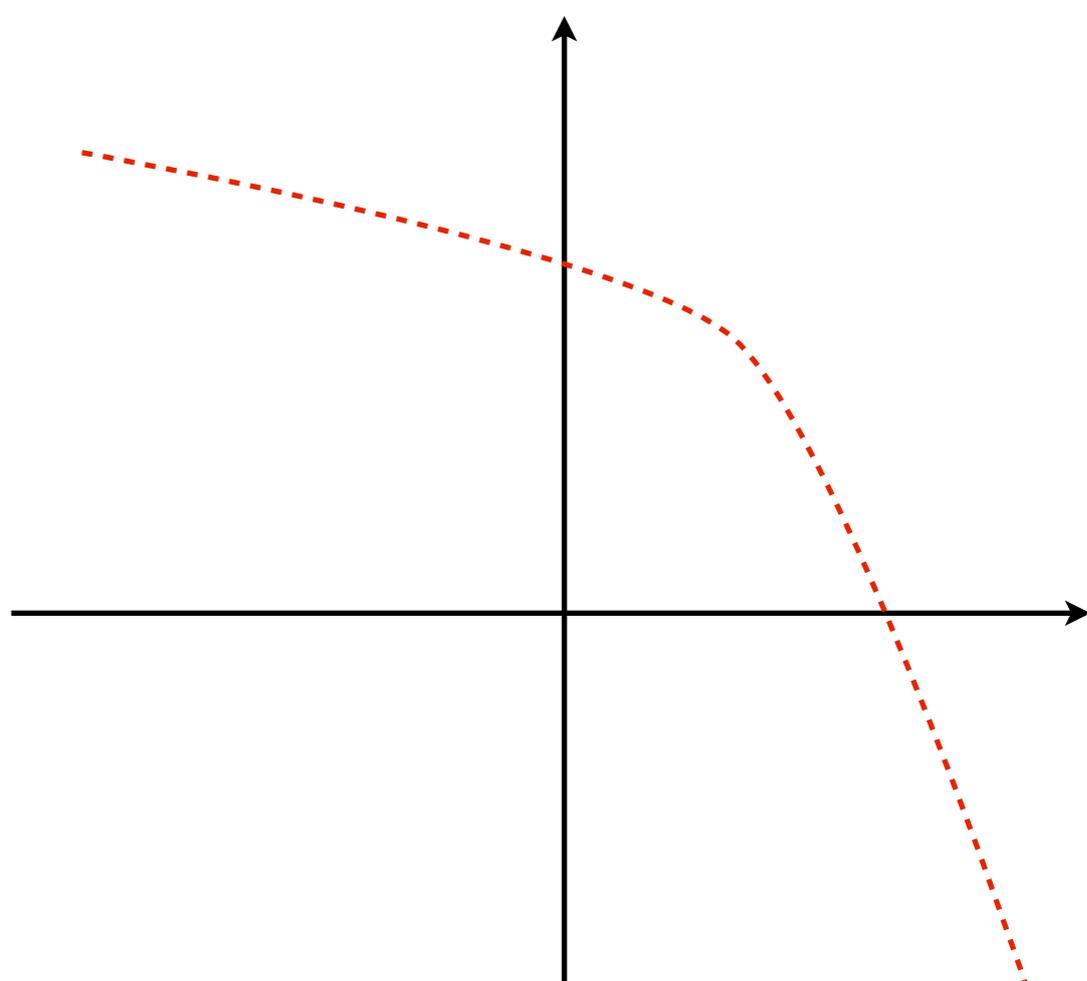
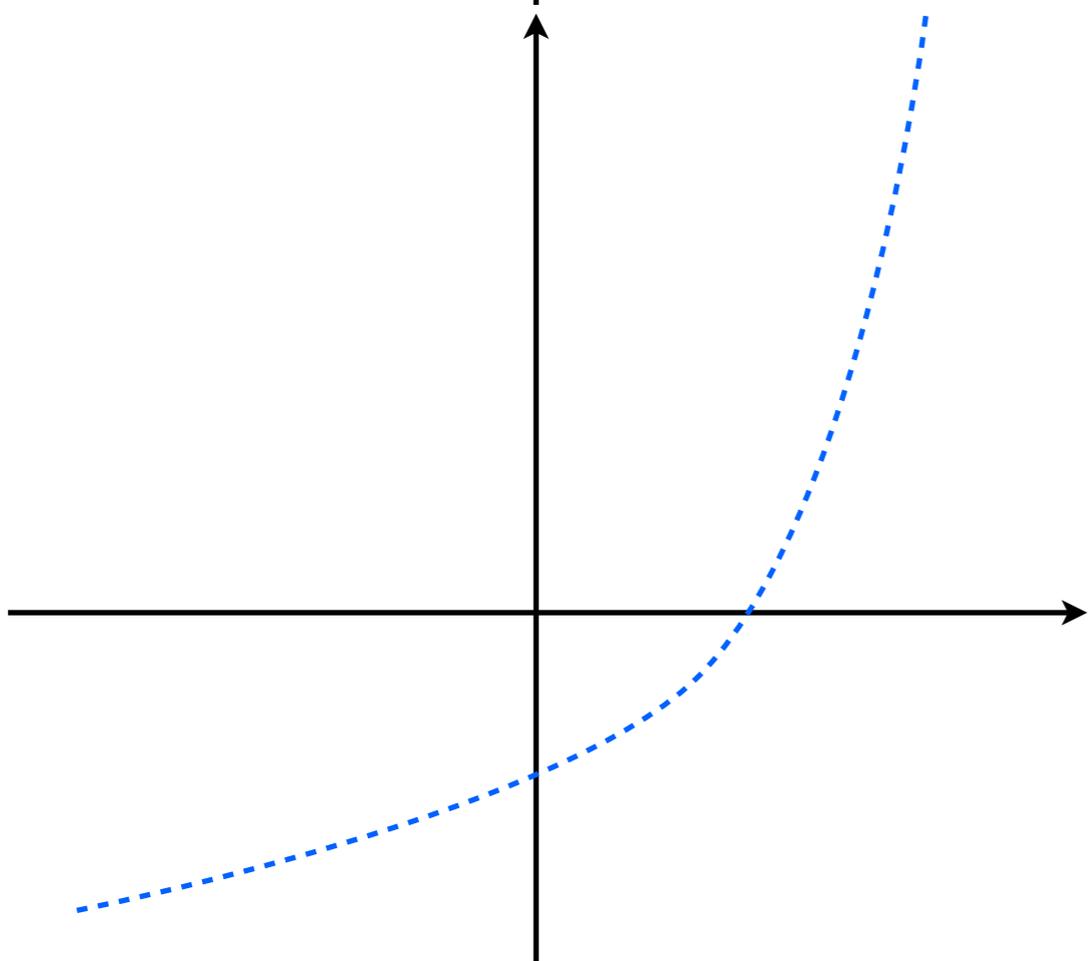
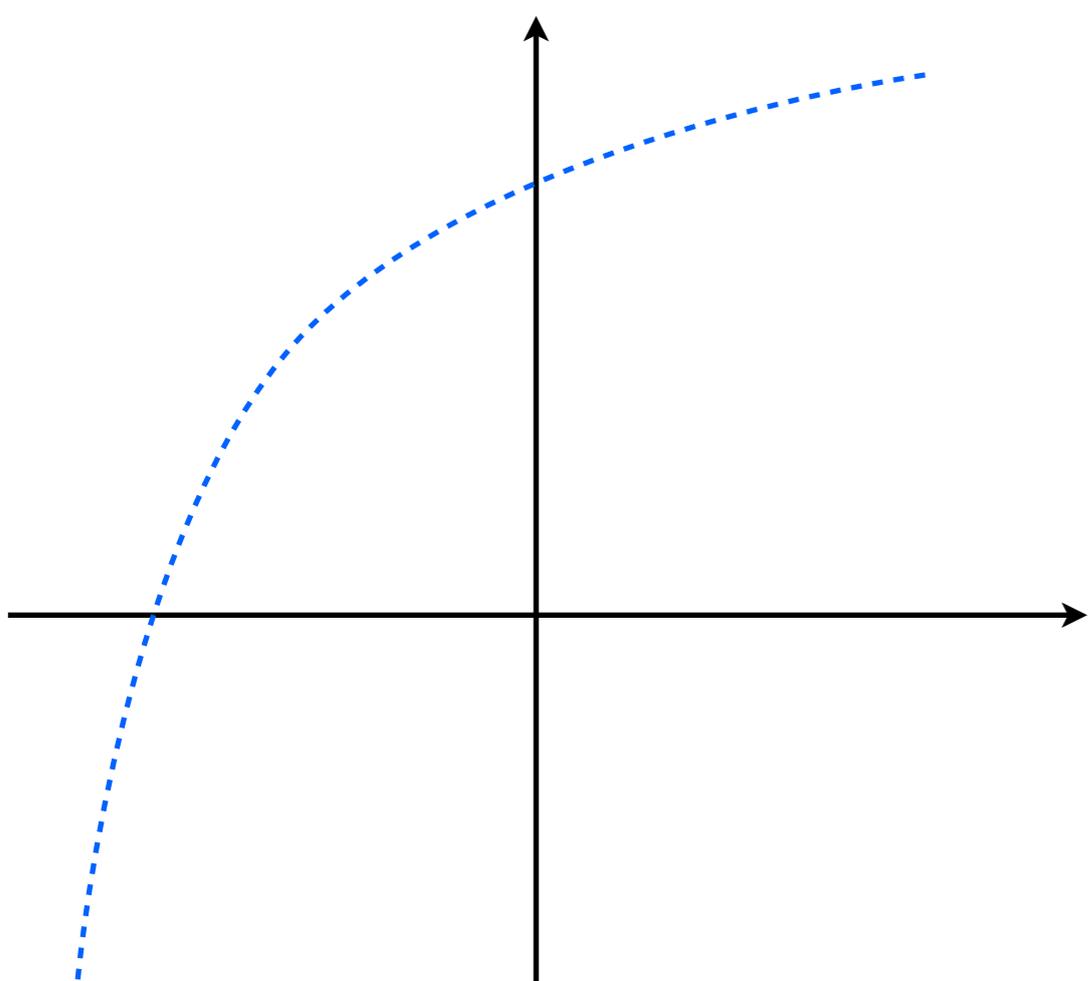
Est-il possible d'être plus précis sur l'allure de la fonction ?

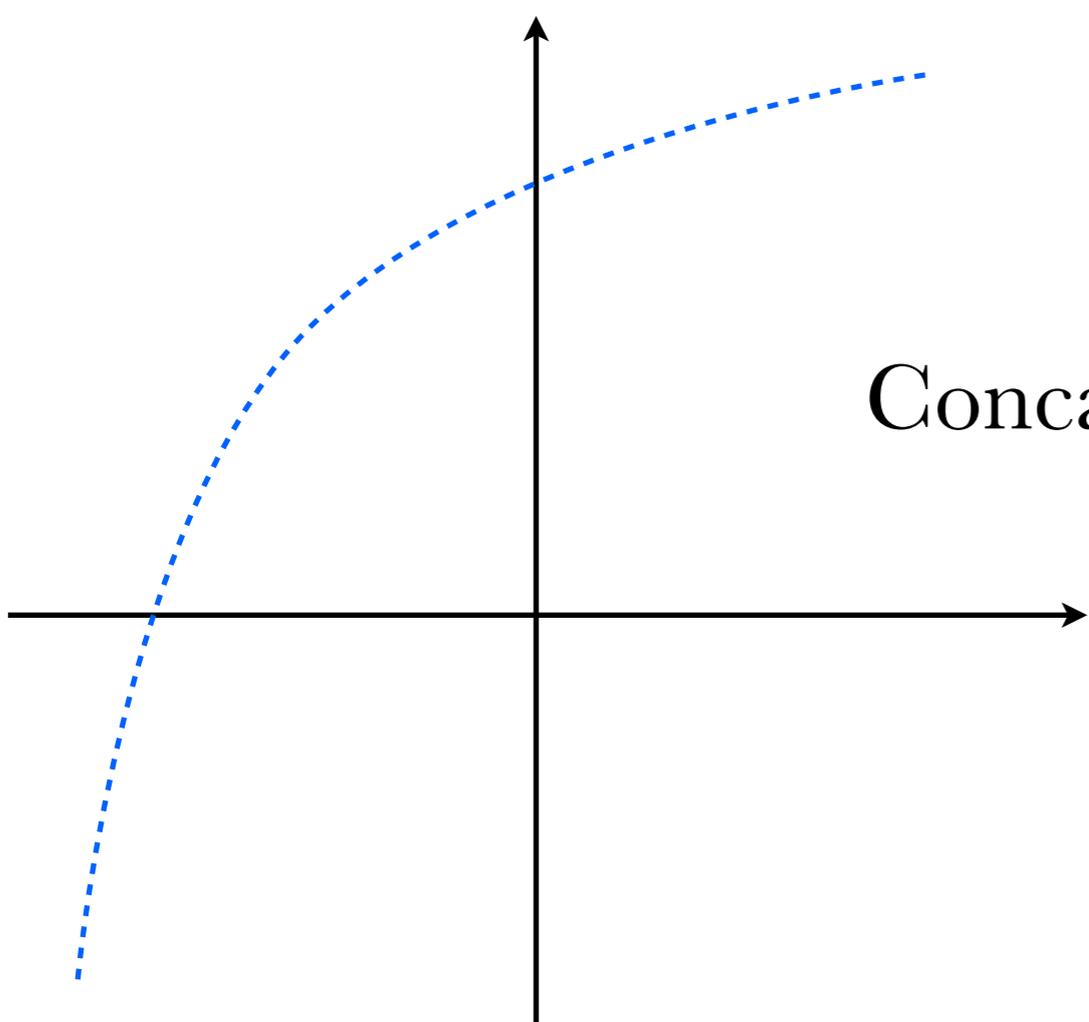




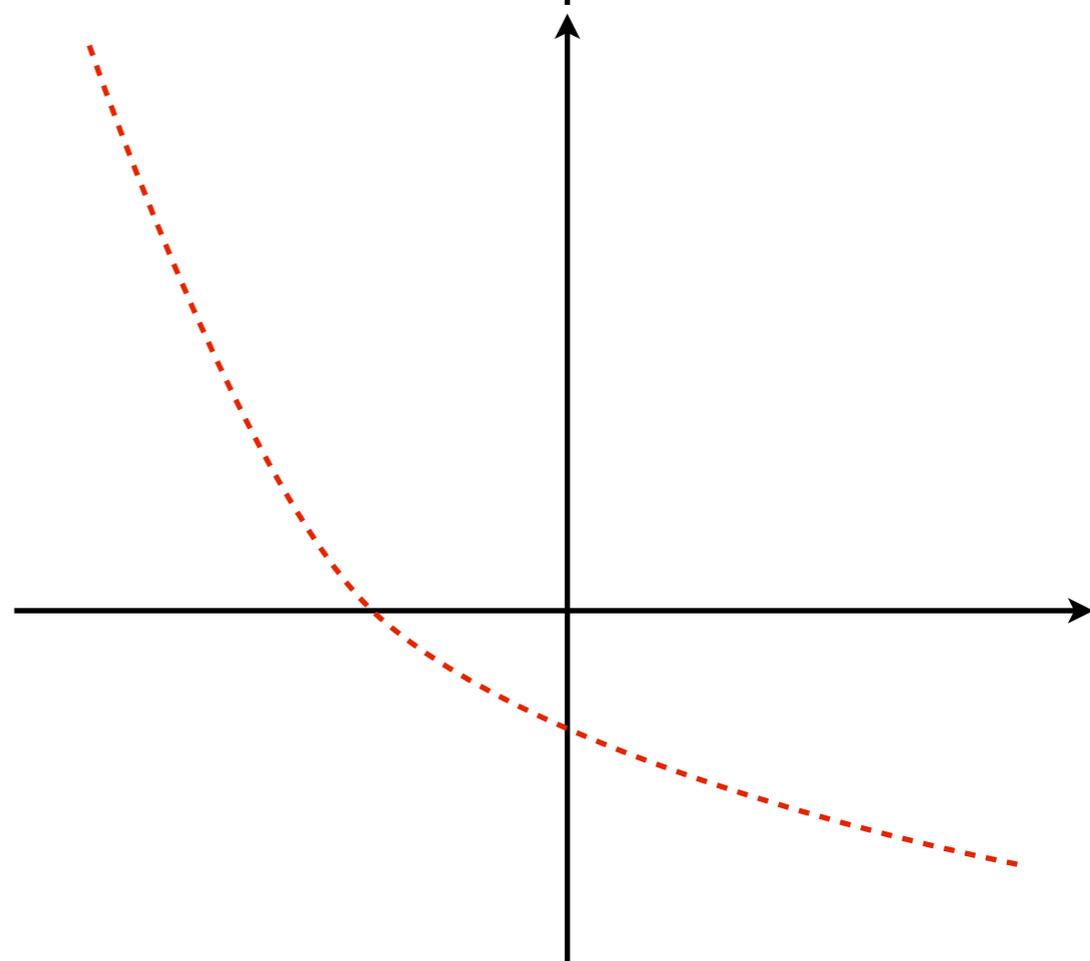
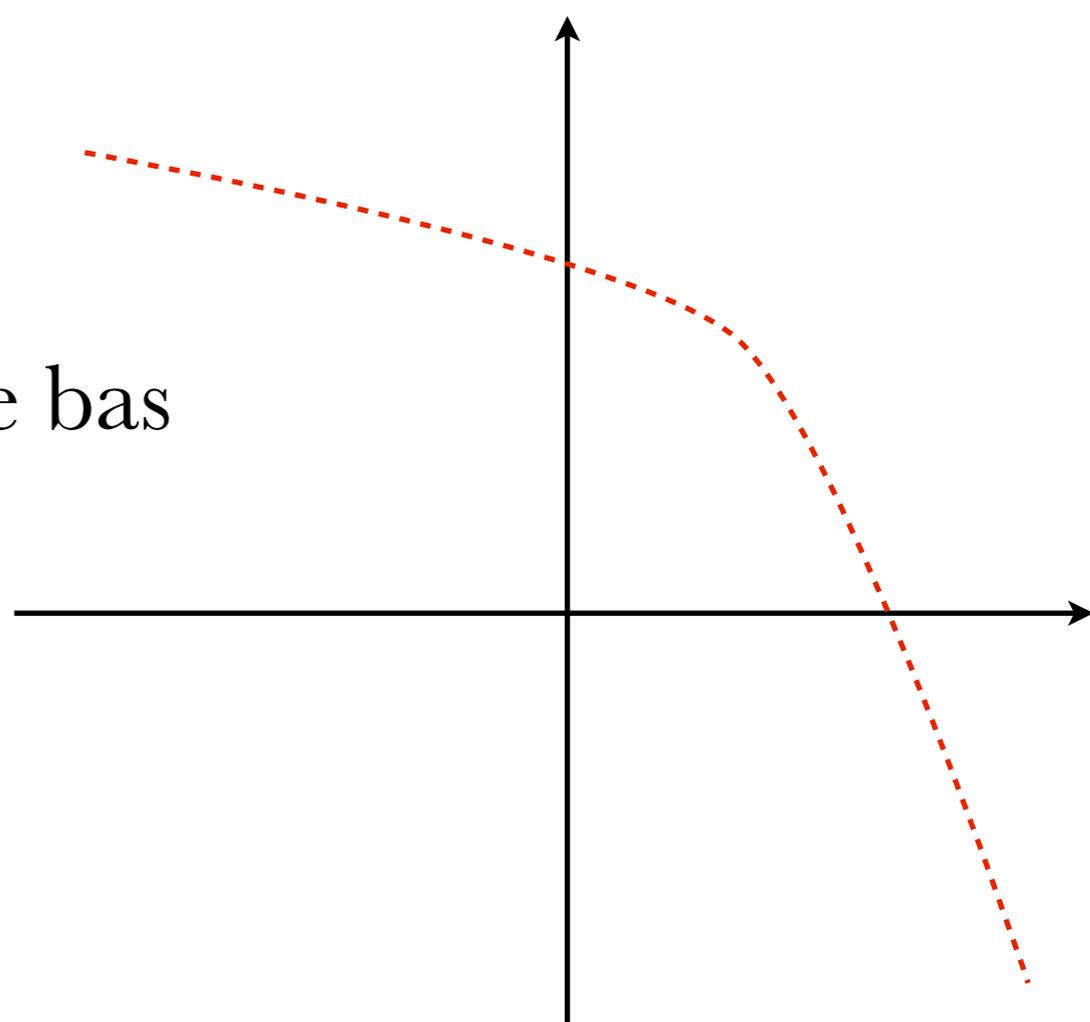
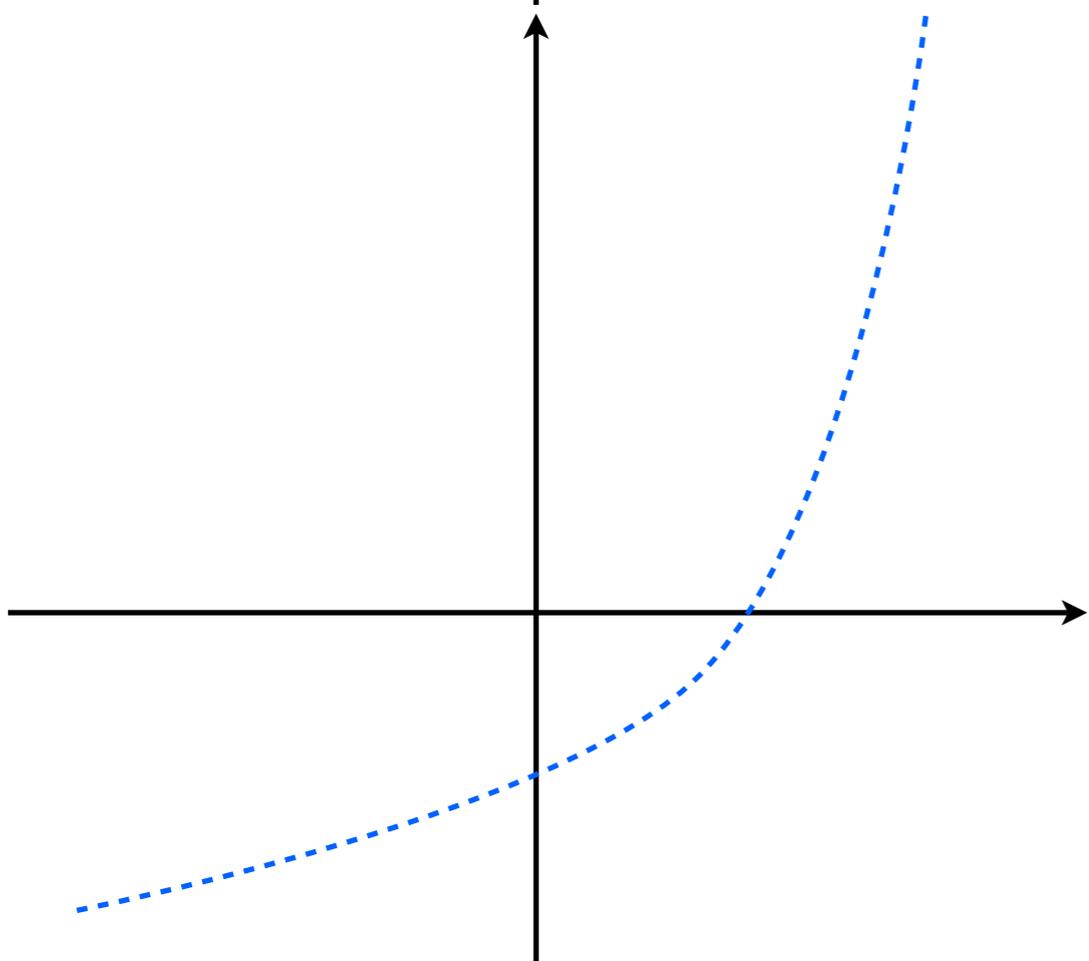


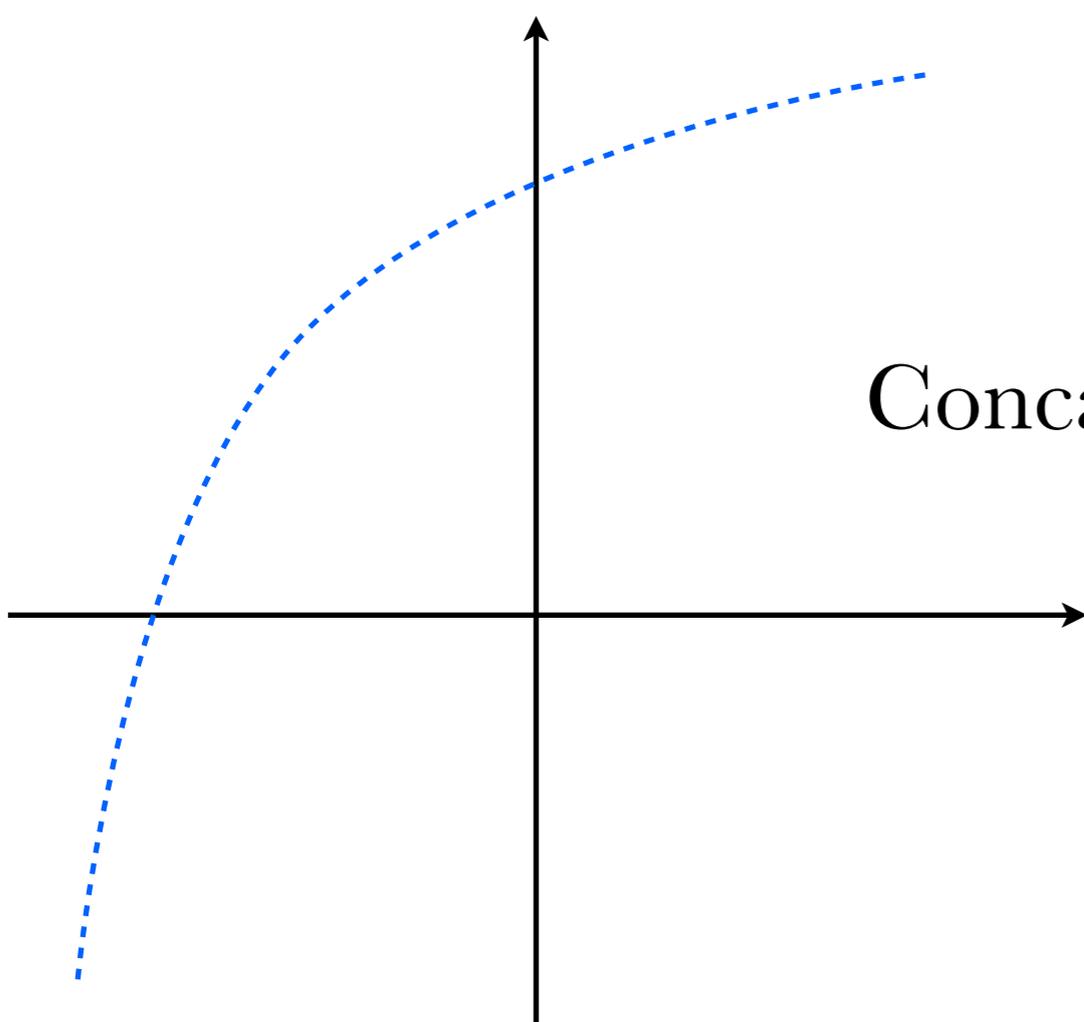




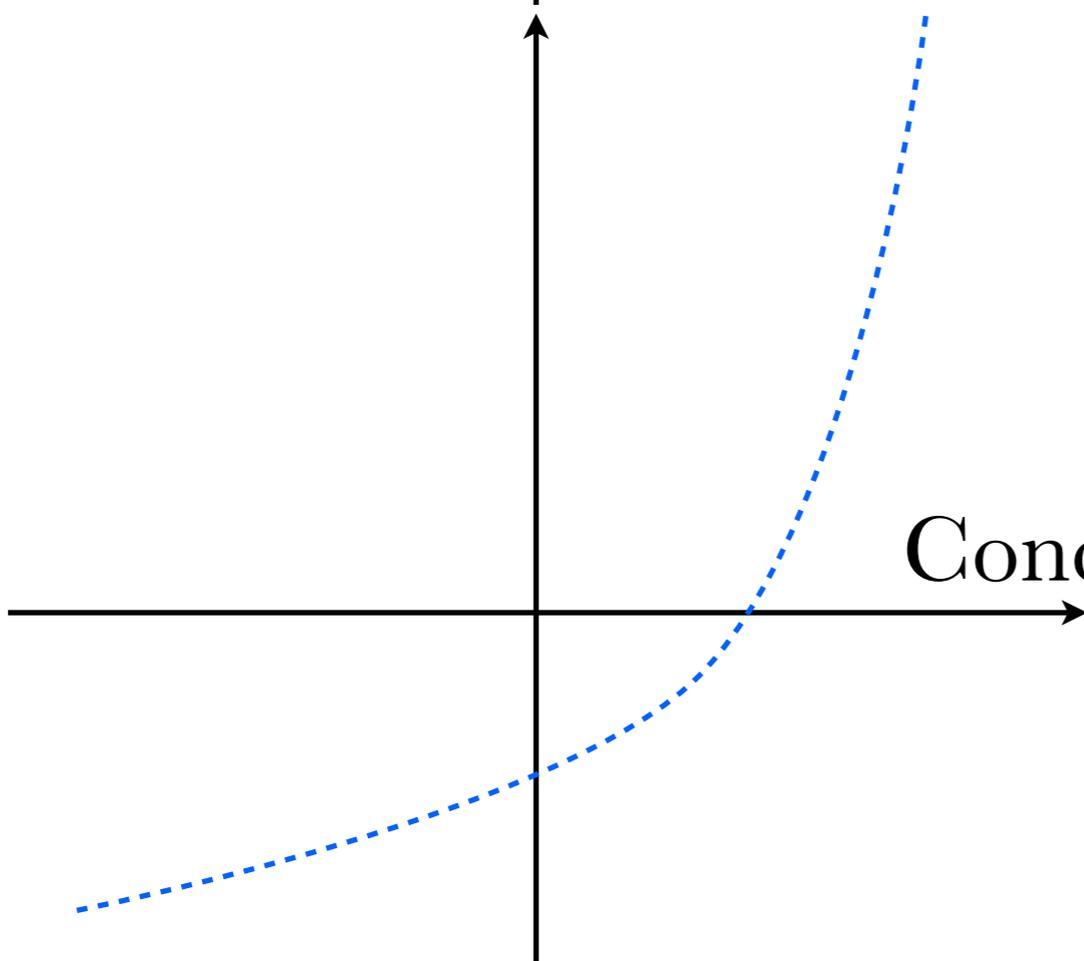
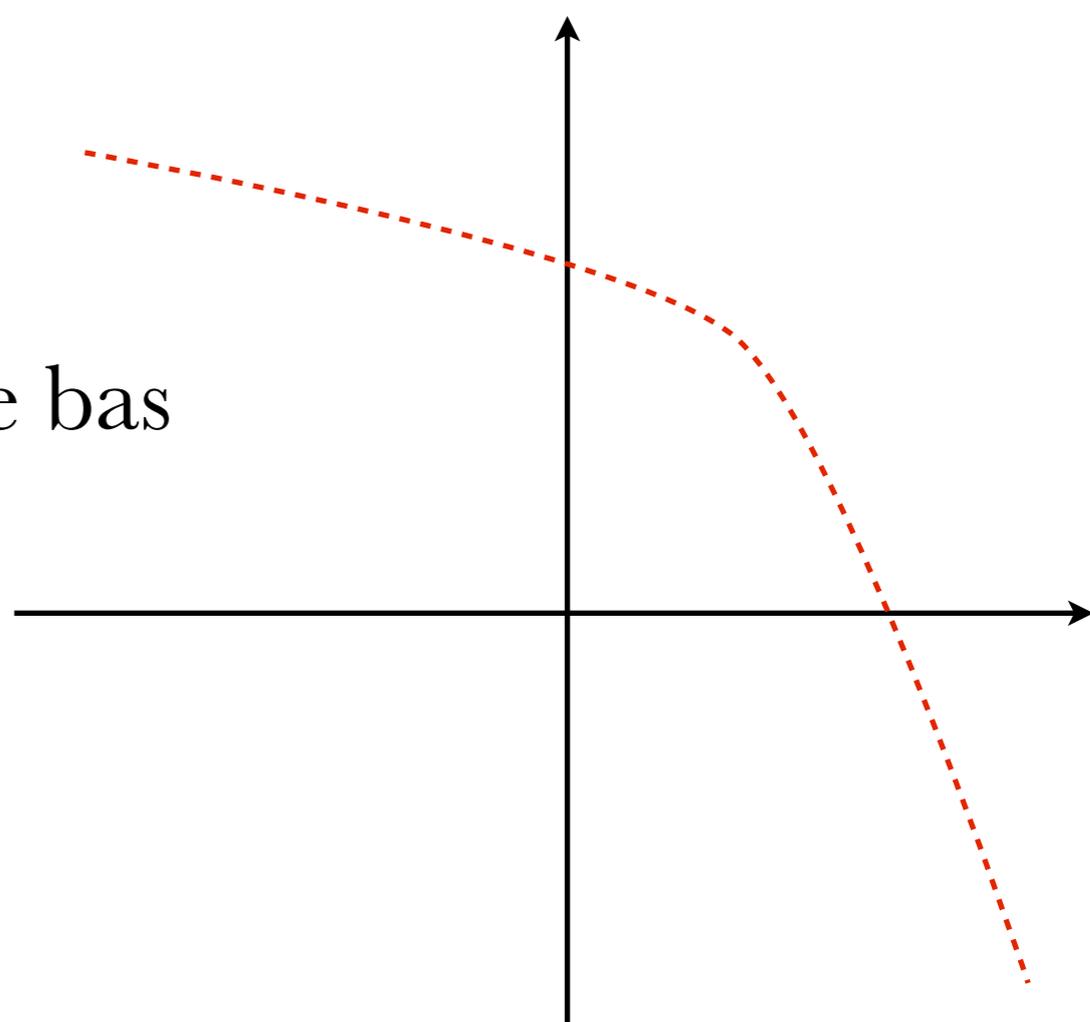


Concave vers le bas

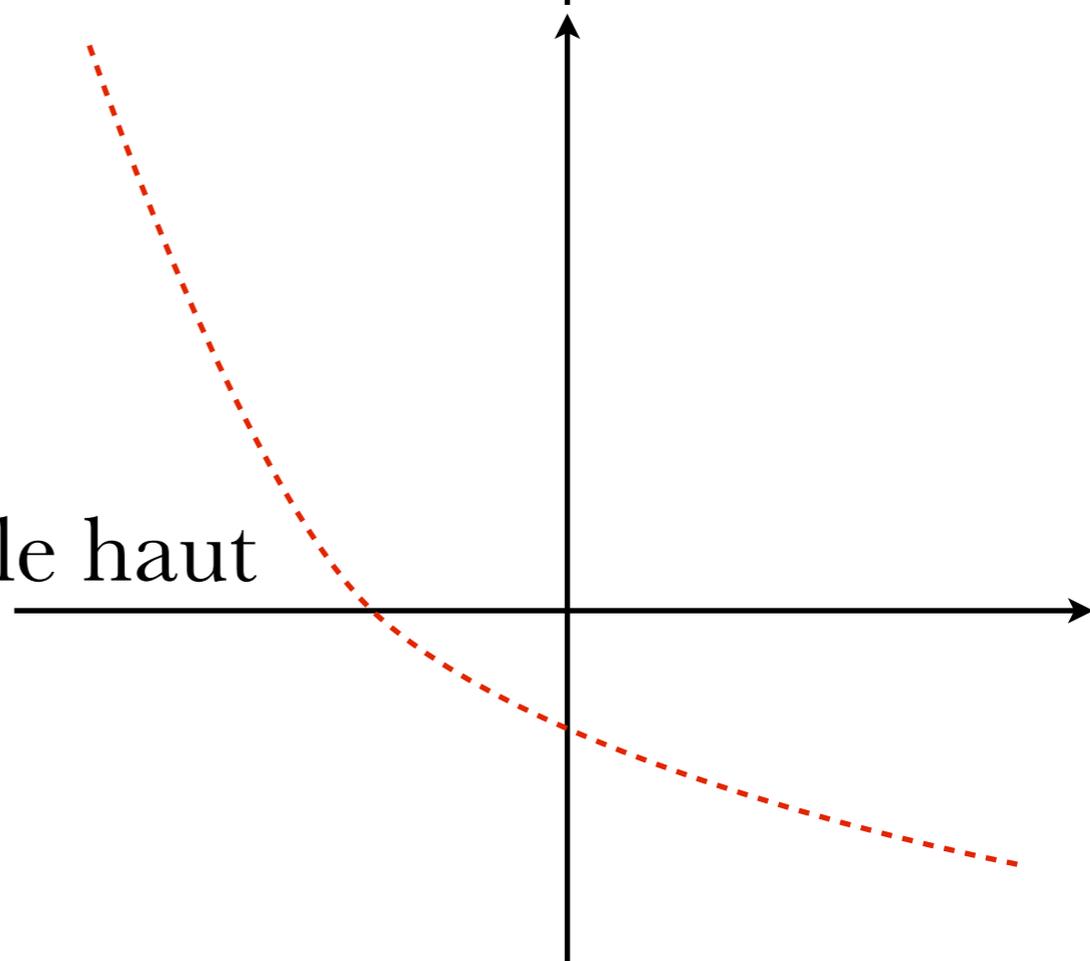


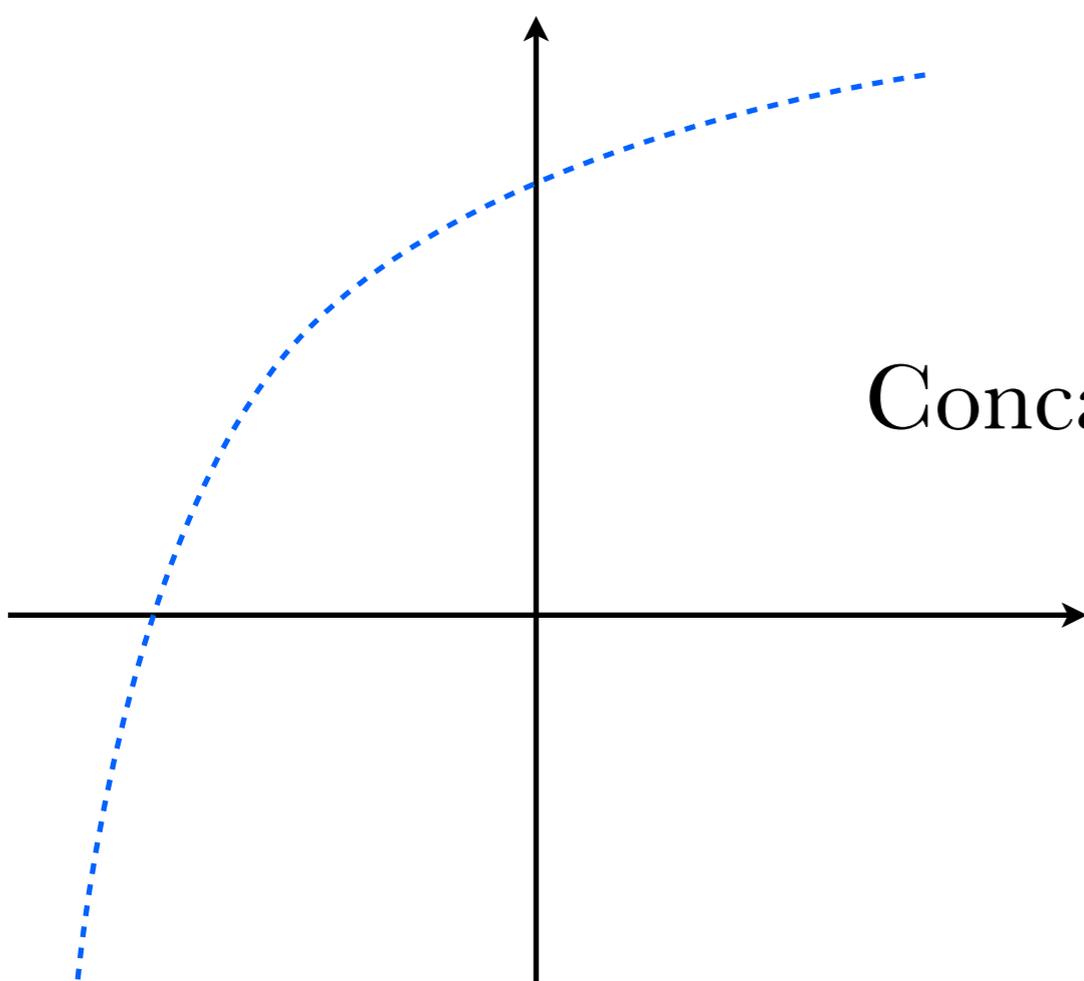


Concave vers le bas

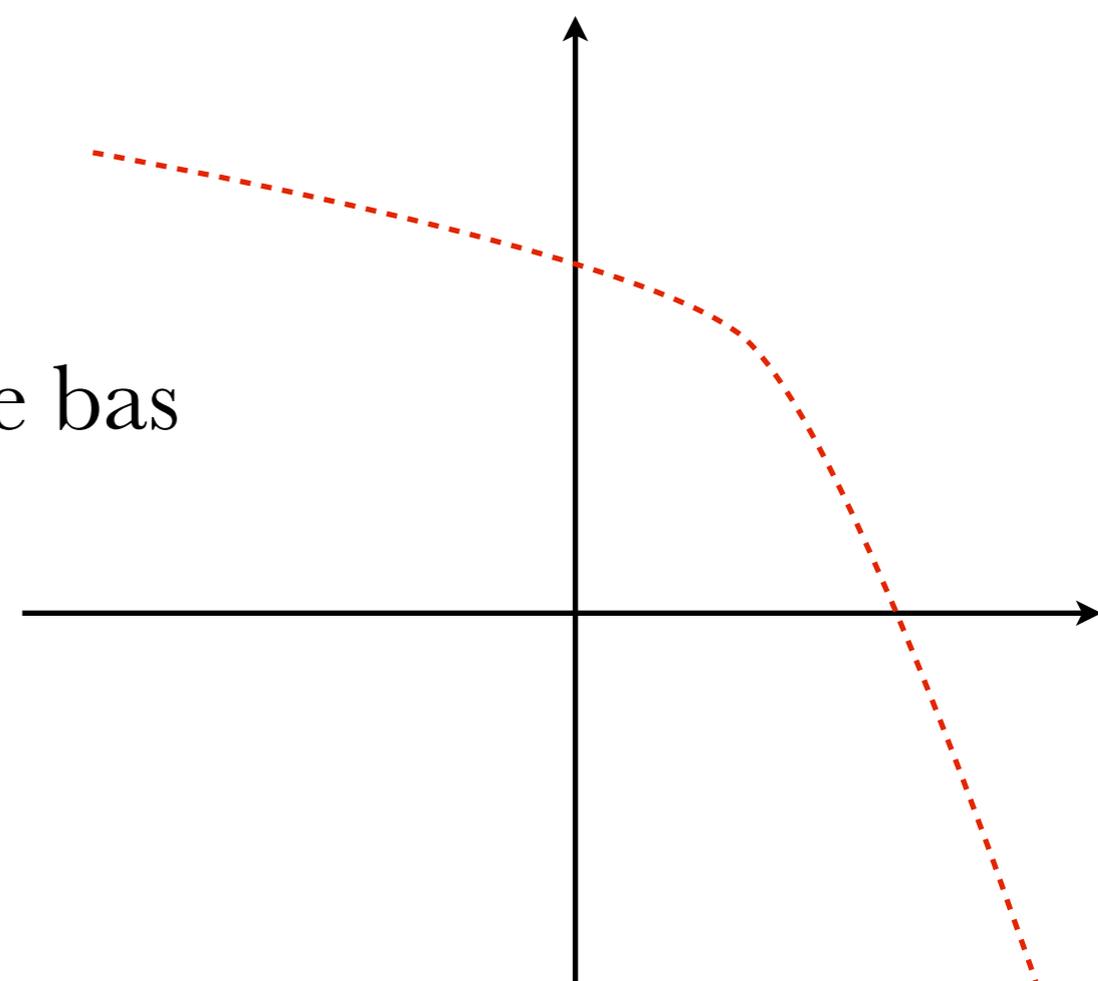


Concave vers le haut

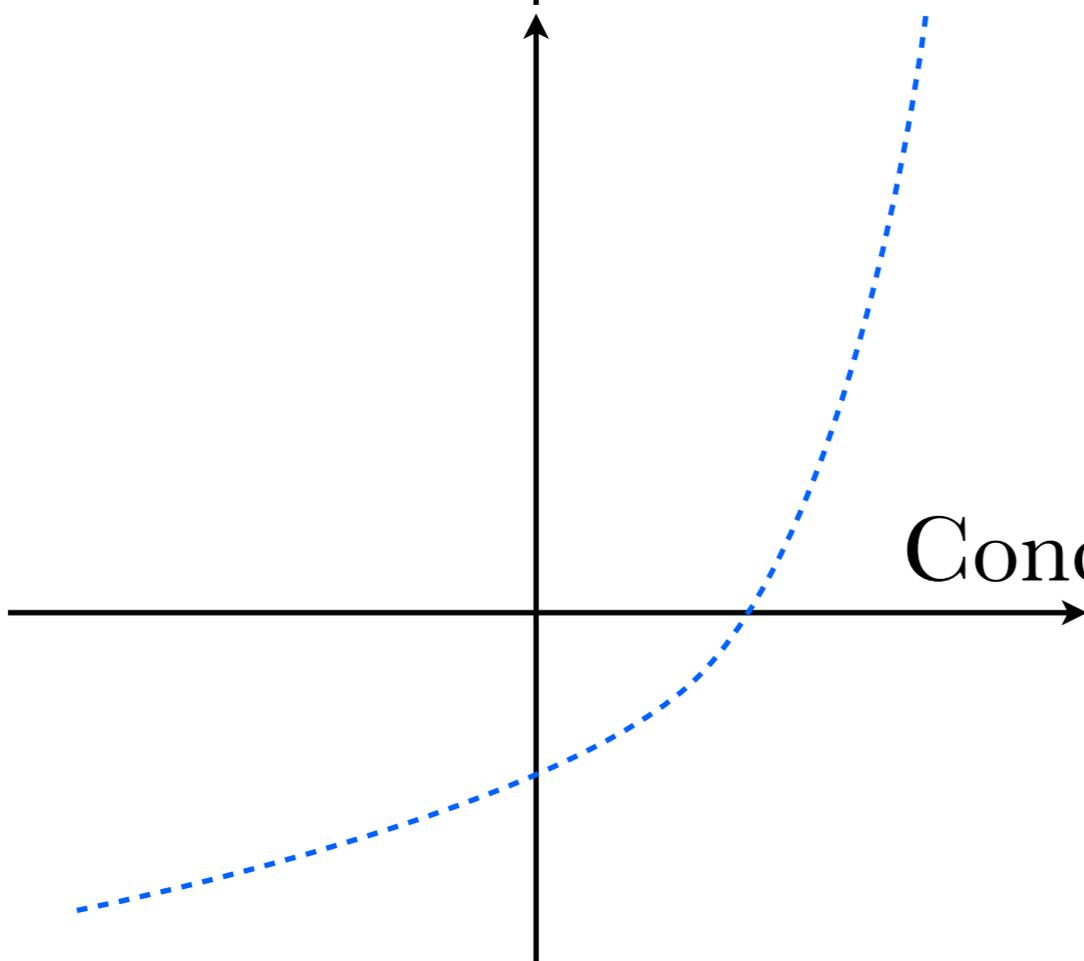




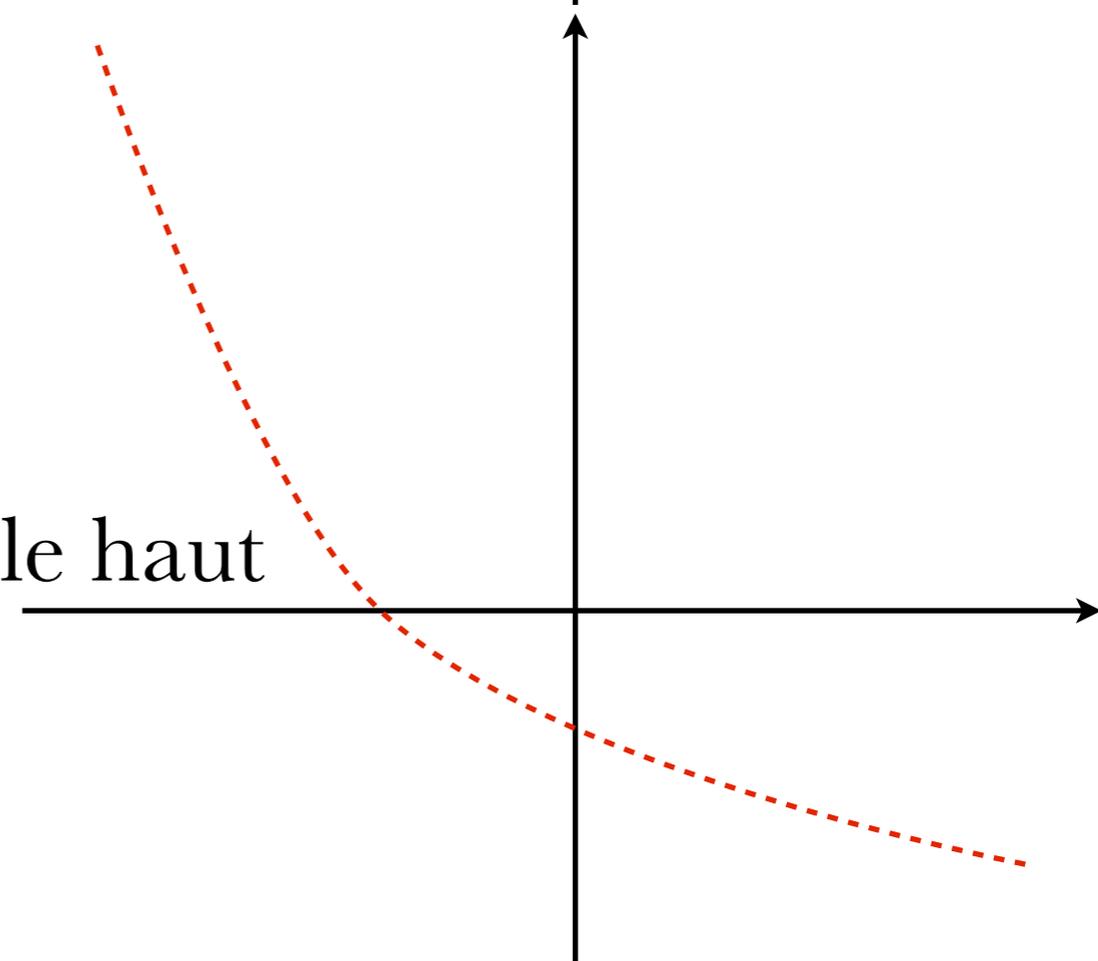
Concave vers le bas

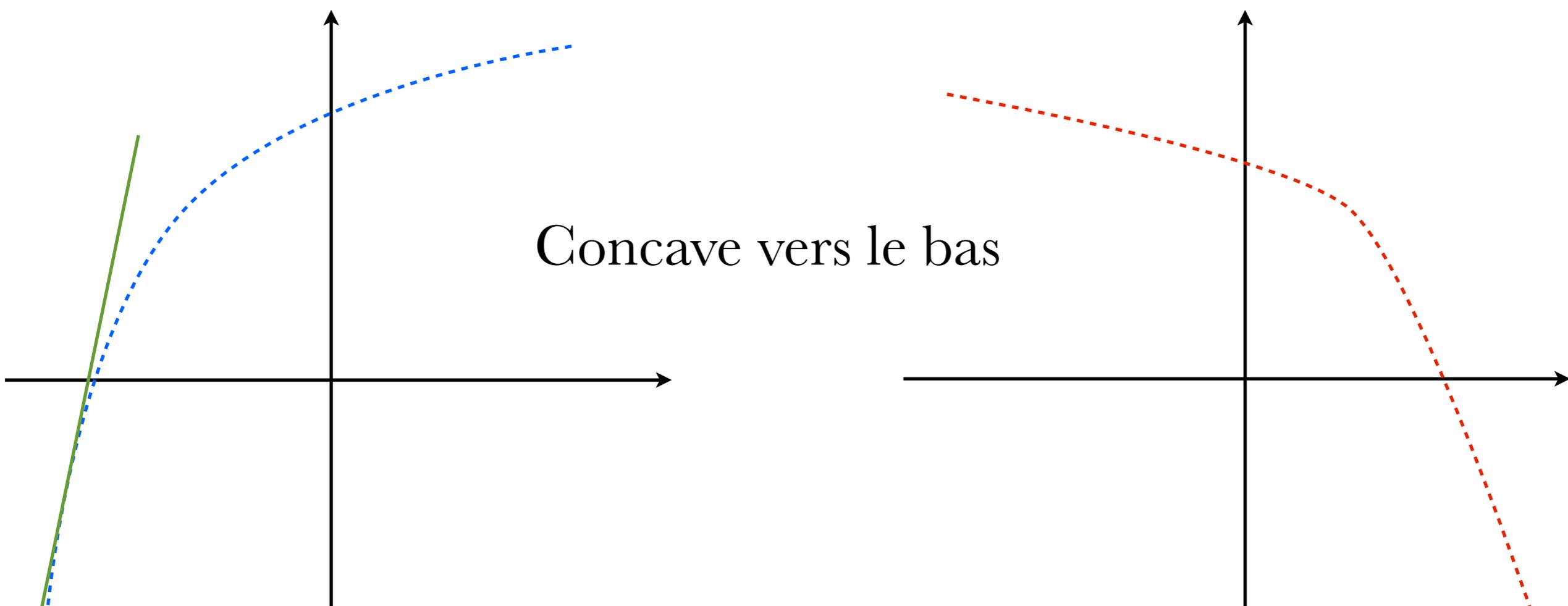


Regardons la dérivée dans chacun des cas.



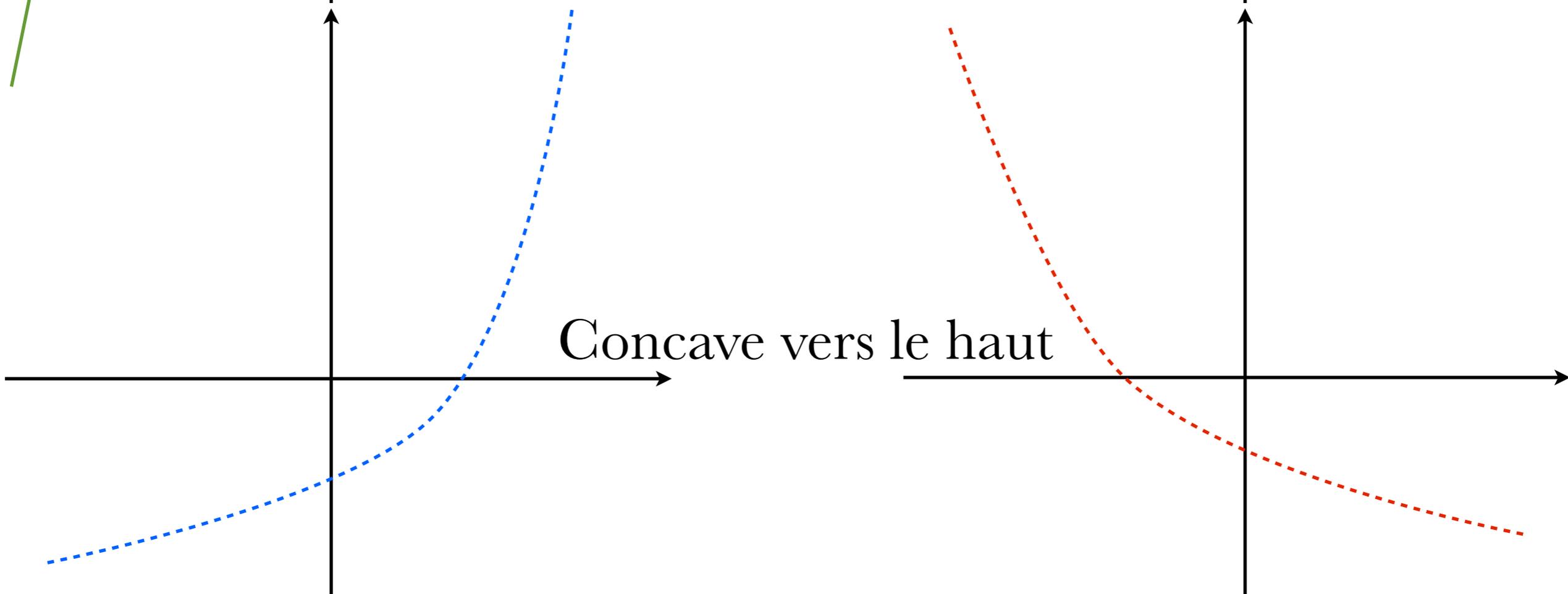
Concave vers le haut



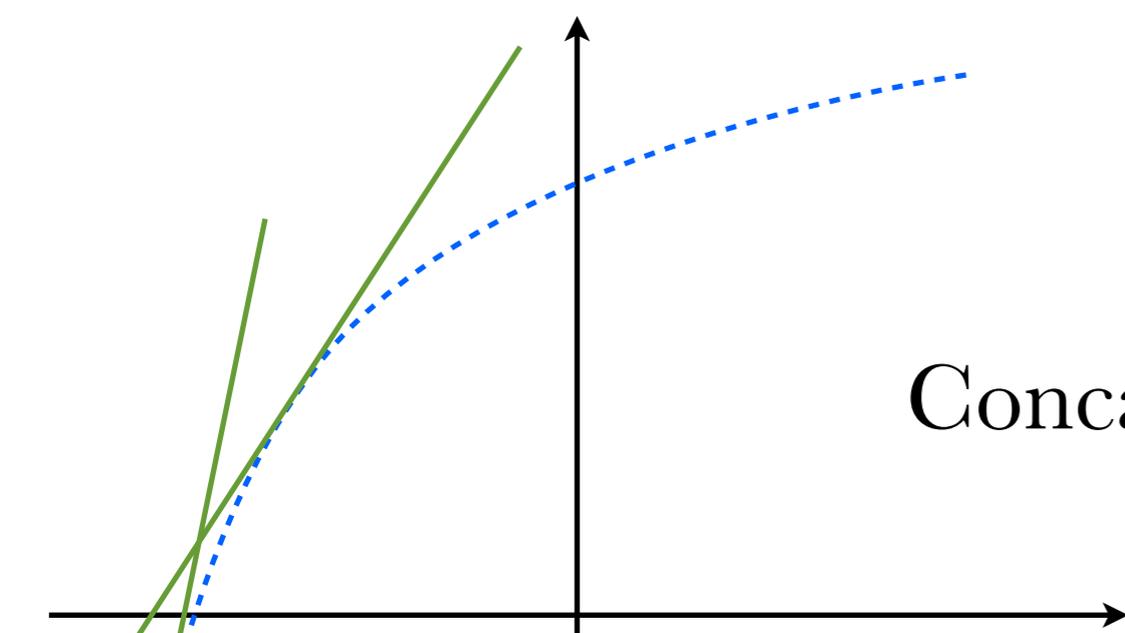


Concave vers le bas

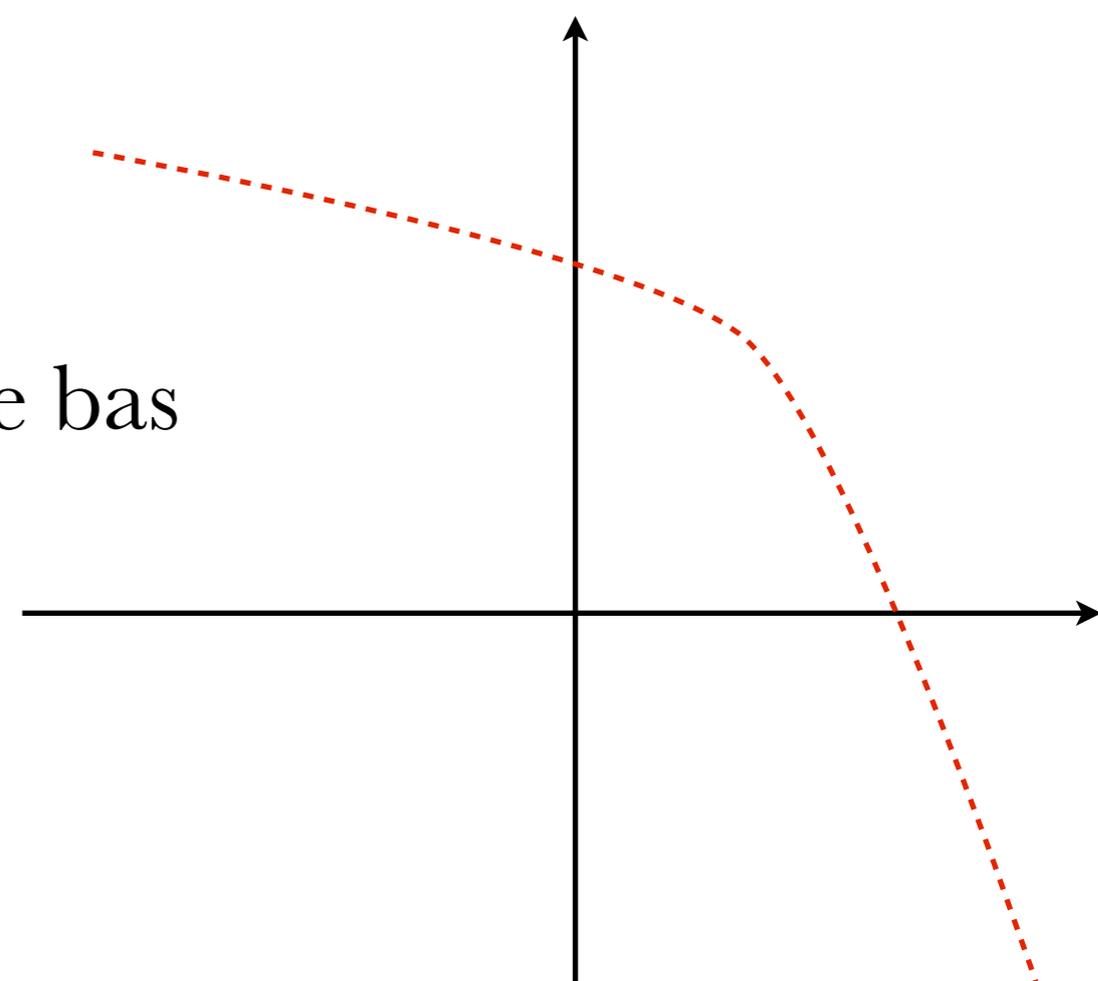
Regardons la dérivée dans chacun des cas.



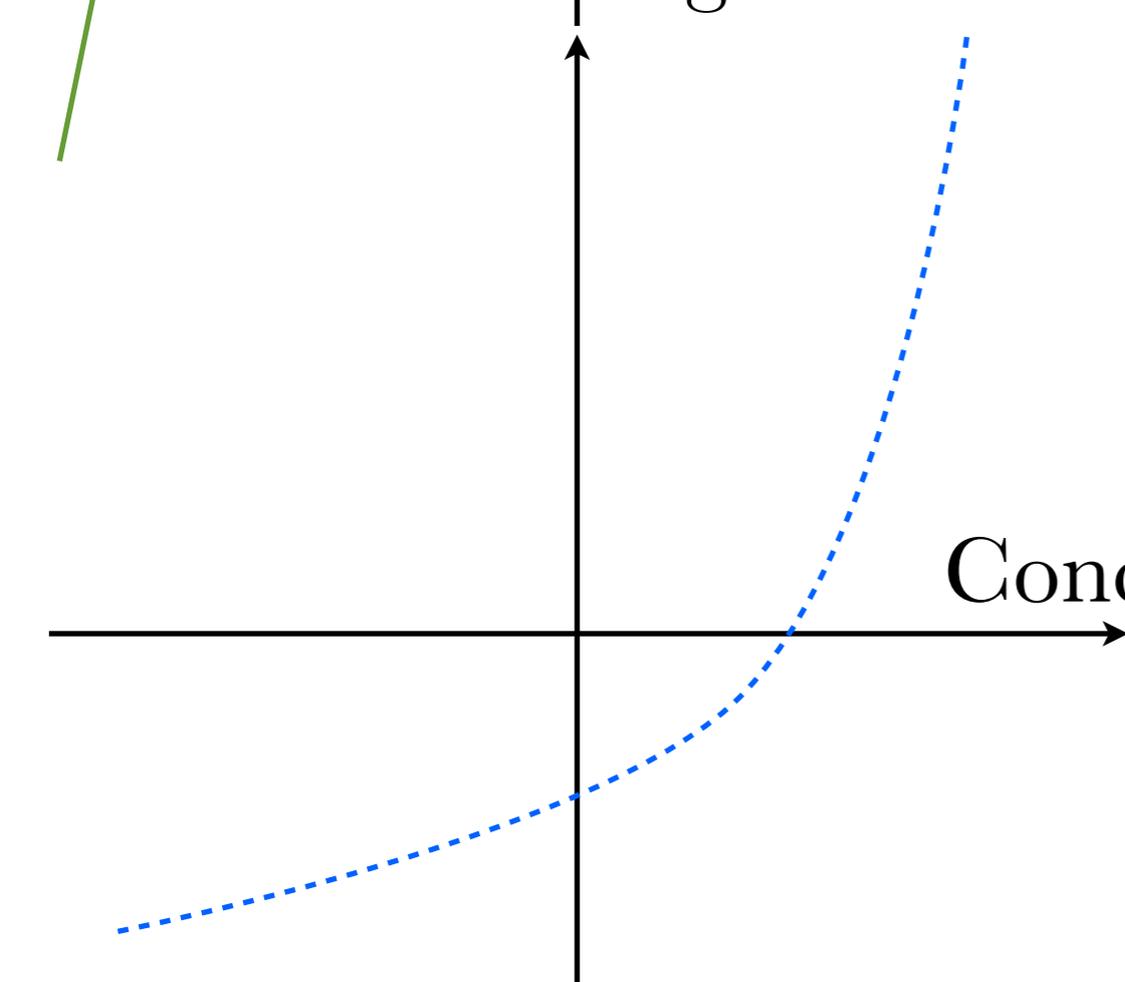
Concave vers le haut



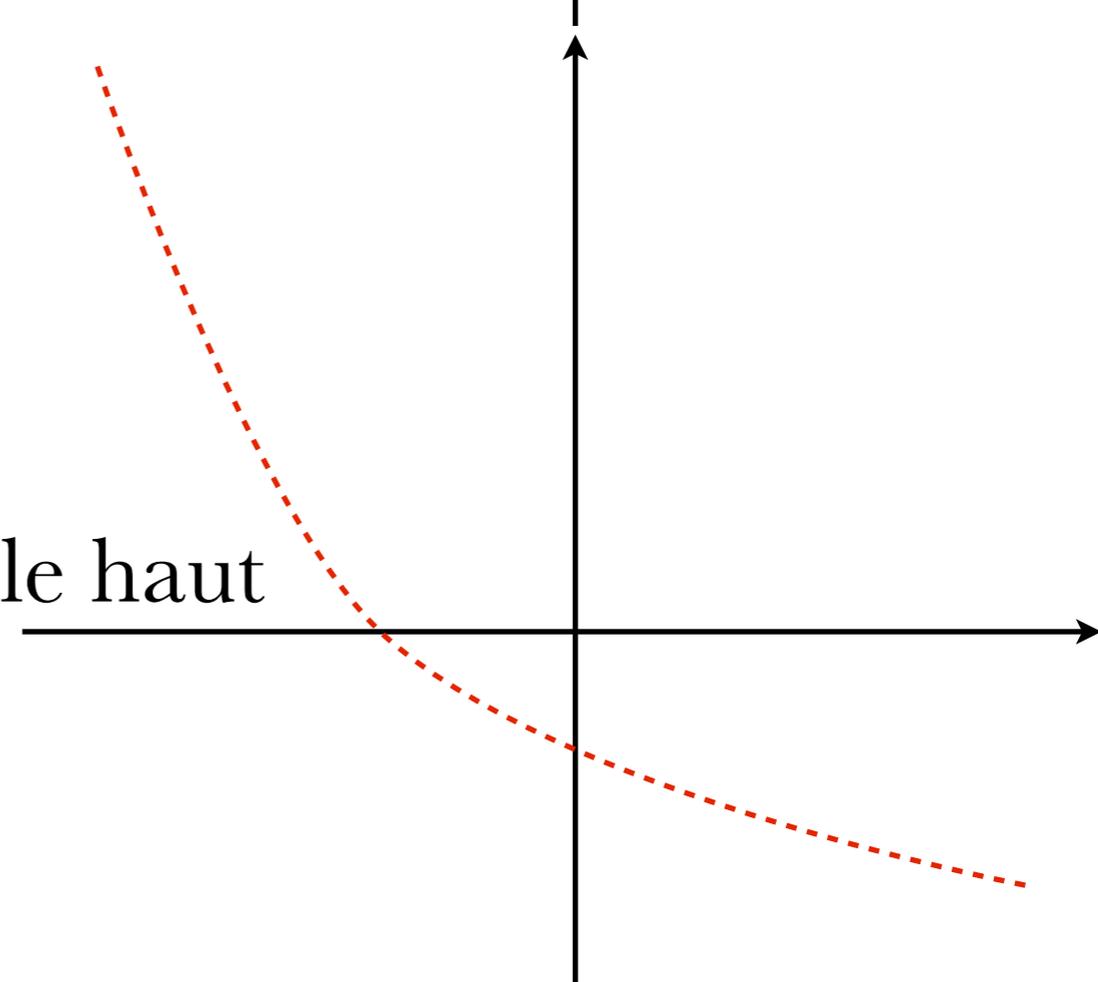
Concave vers le bas

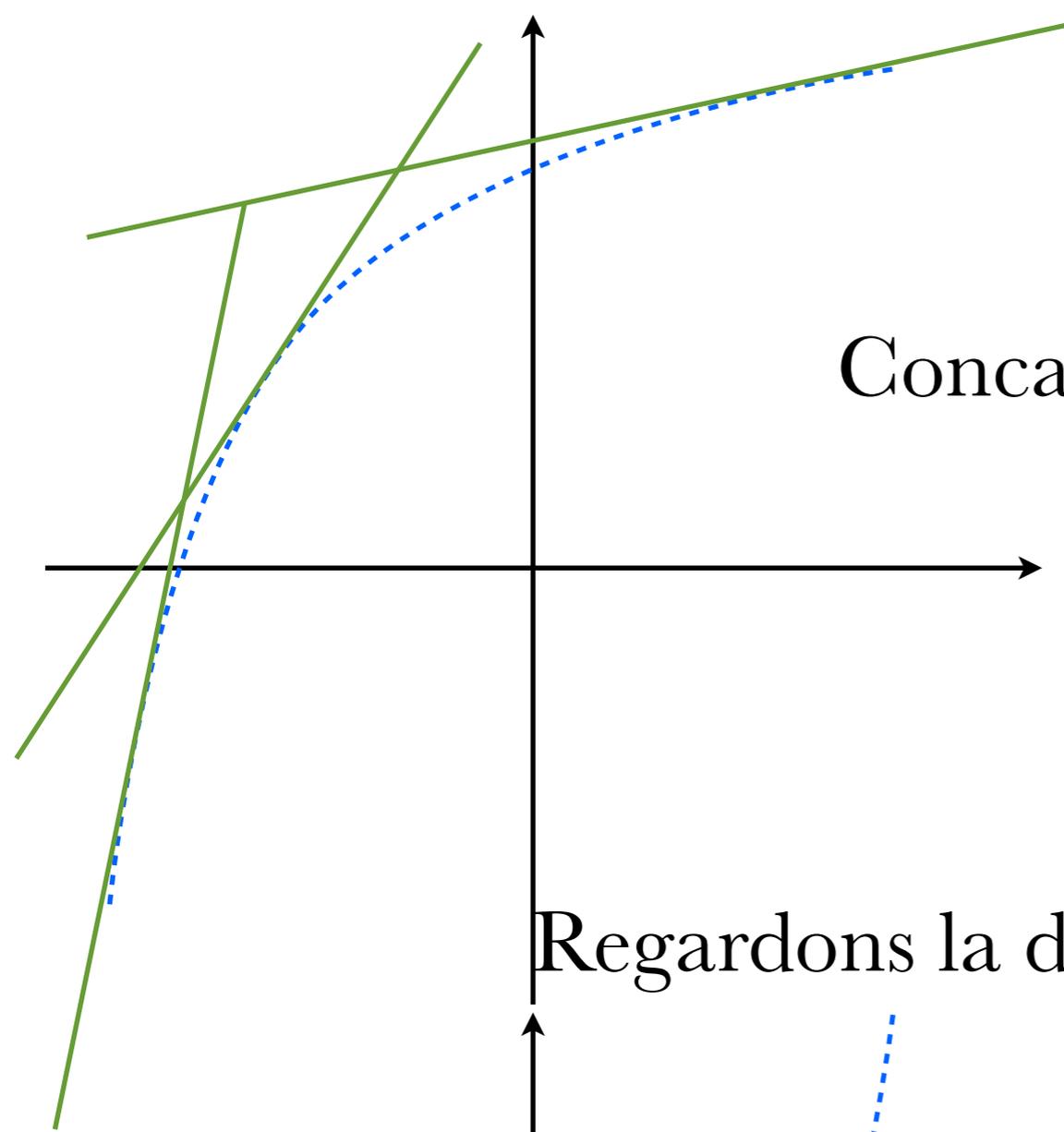


Regardons la dérivée dans chacun des cas.

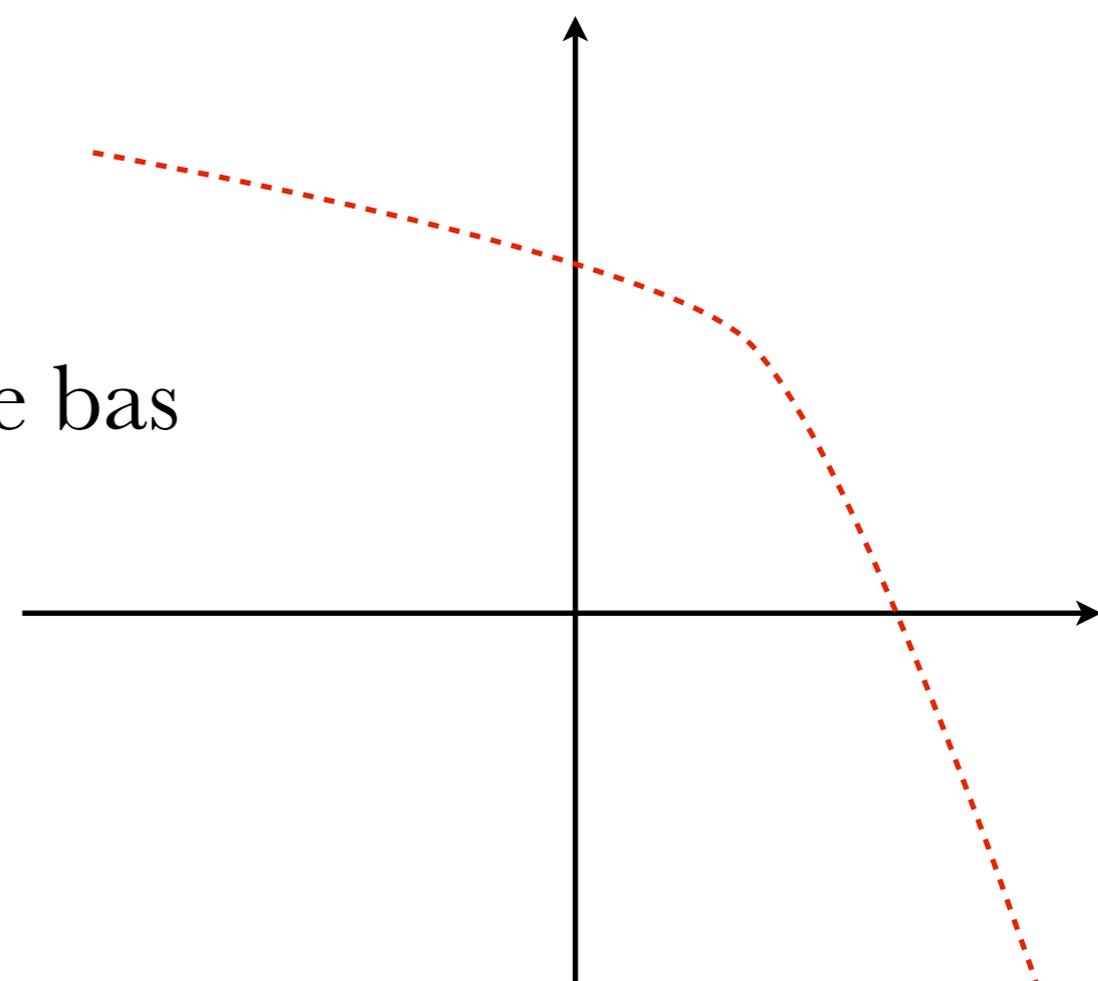


Concave vers le haut

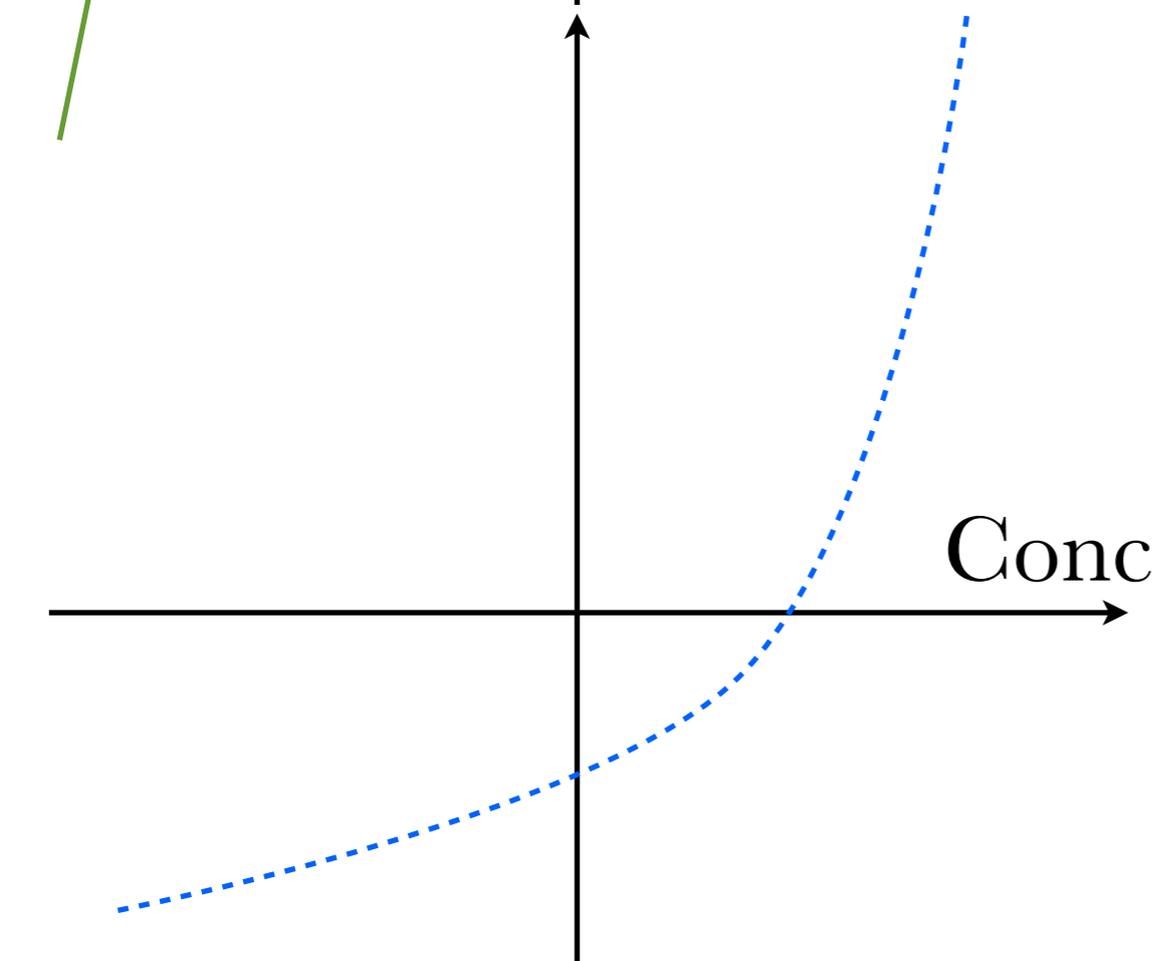




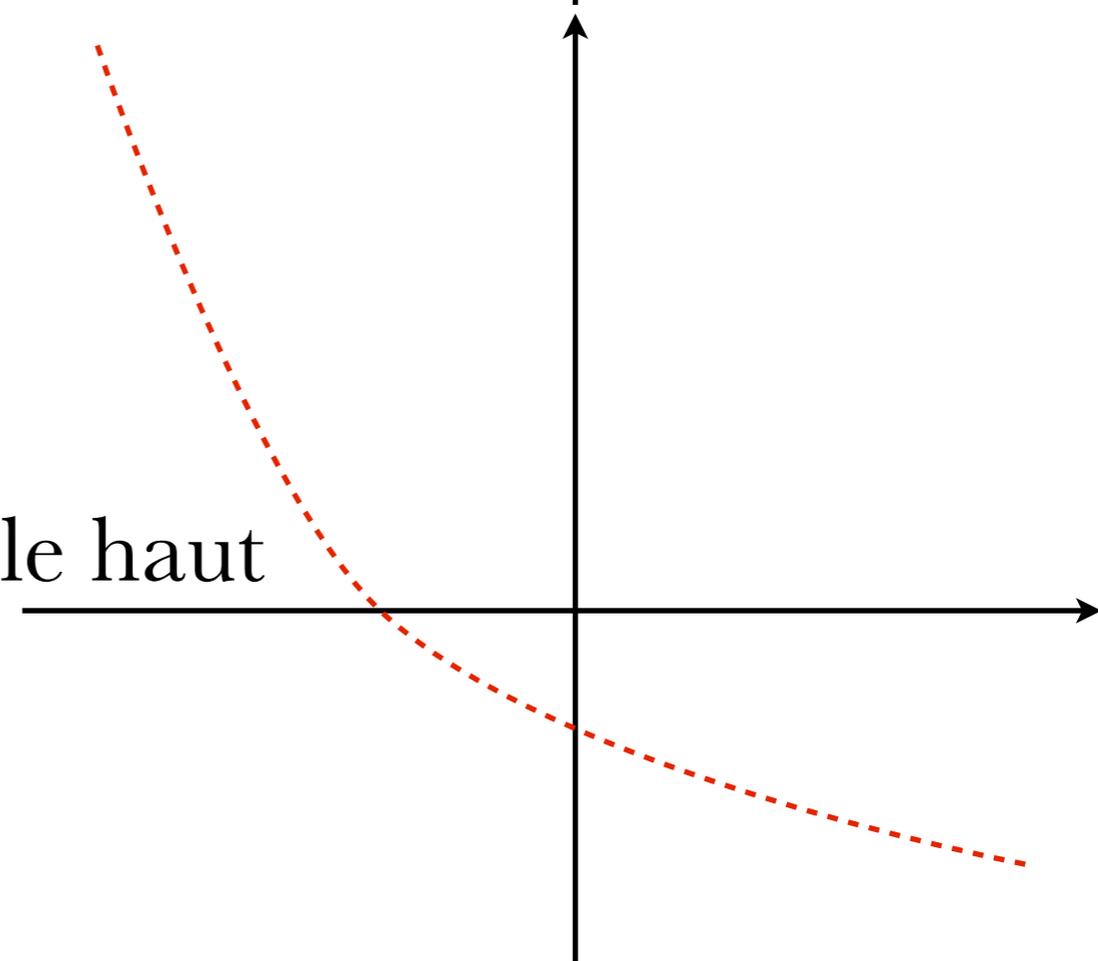
Concave vers le bas

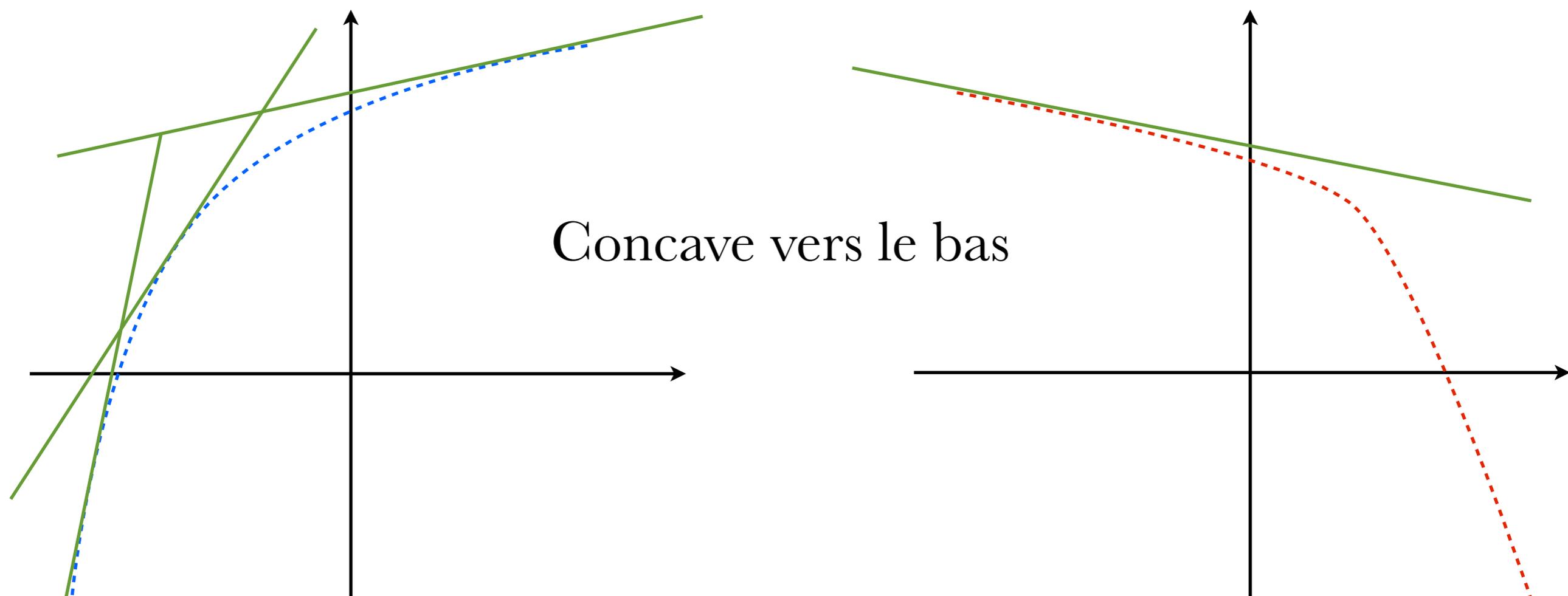


Regardons la dérivée dans chacun des cas.



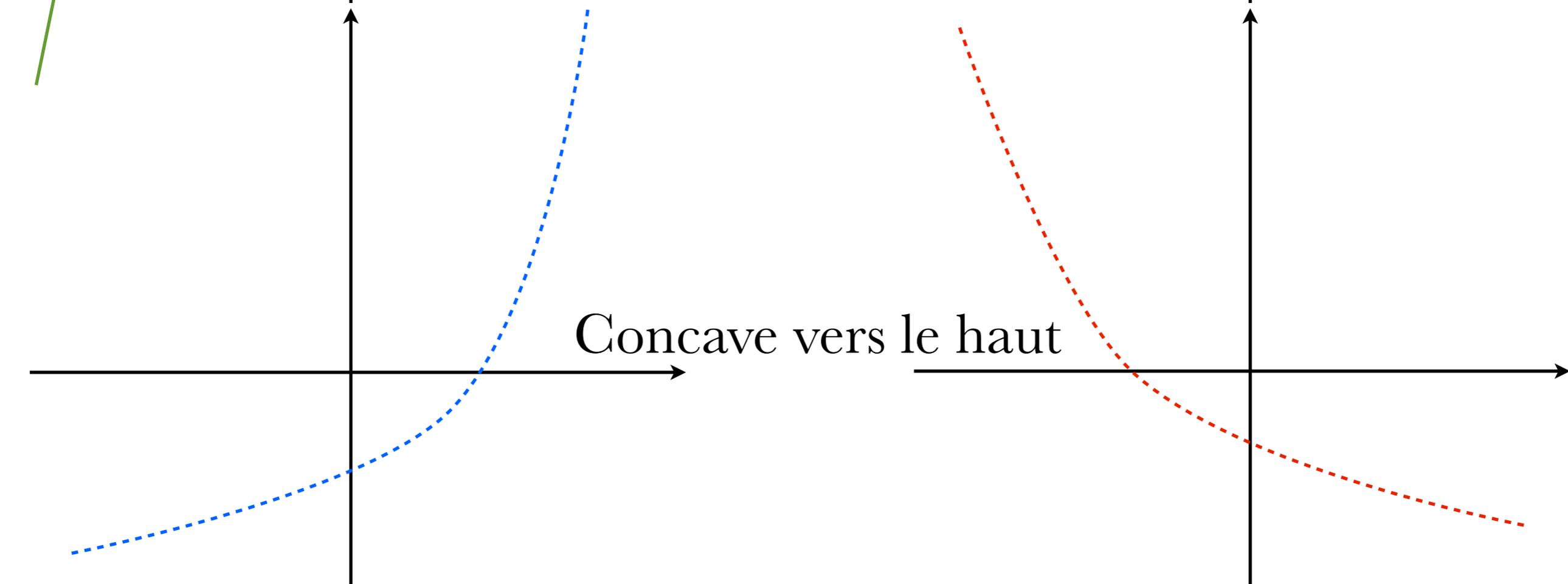
Concave vers le haut



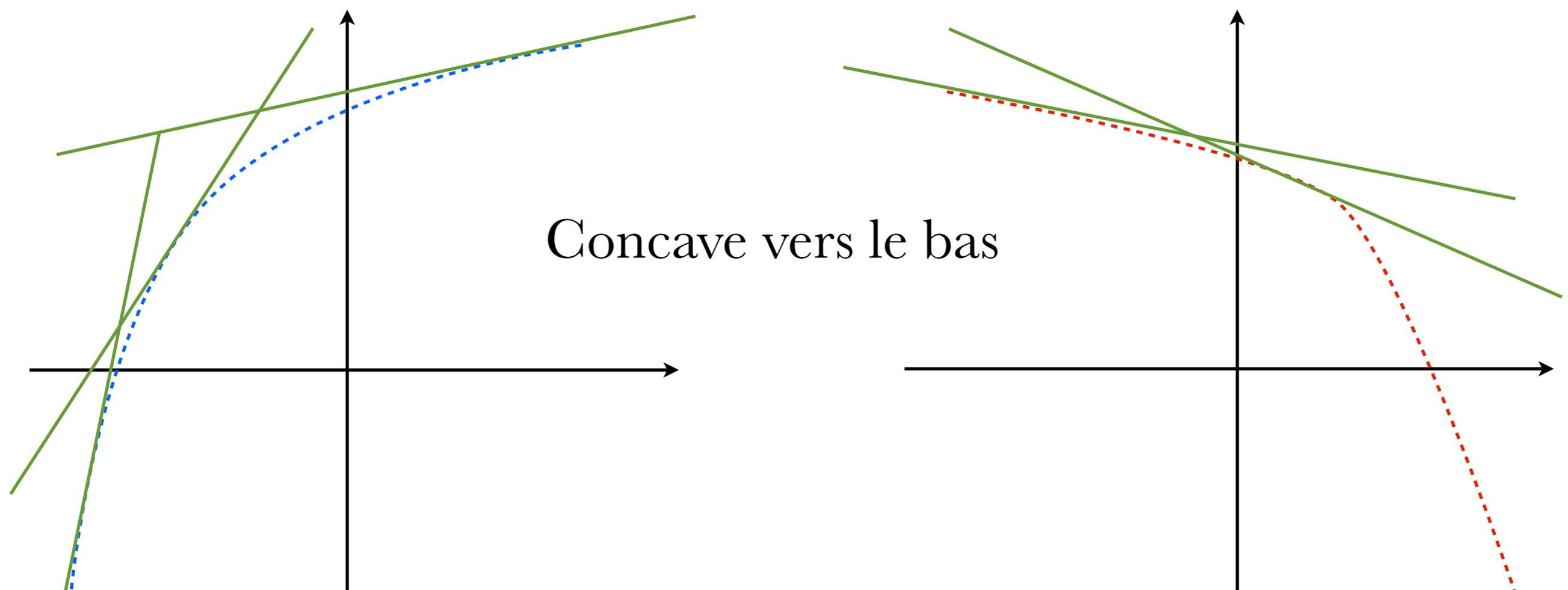


Concave vers le bas

Regardons la dérivée dans chacun des cas.

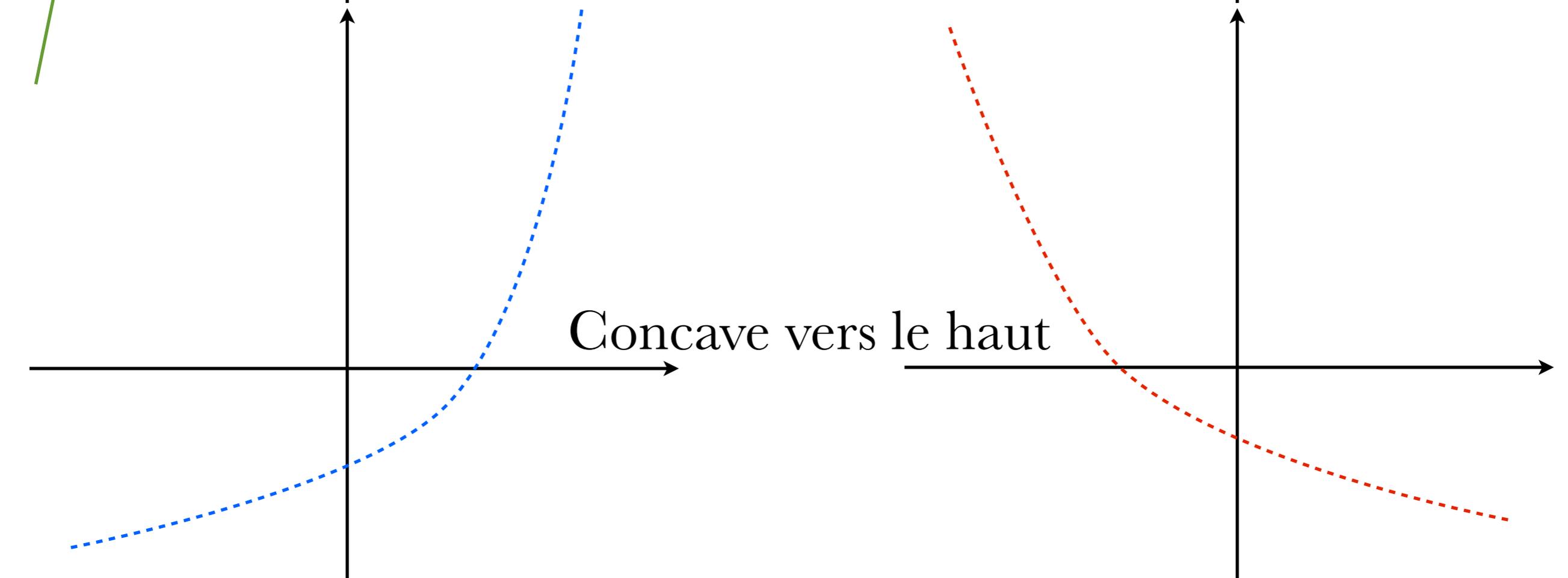


Concave vers le haut



Concave vers le bas

Regardons la dérivée dans chacun des cas.

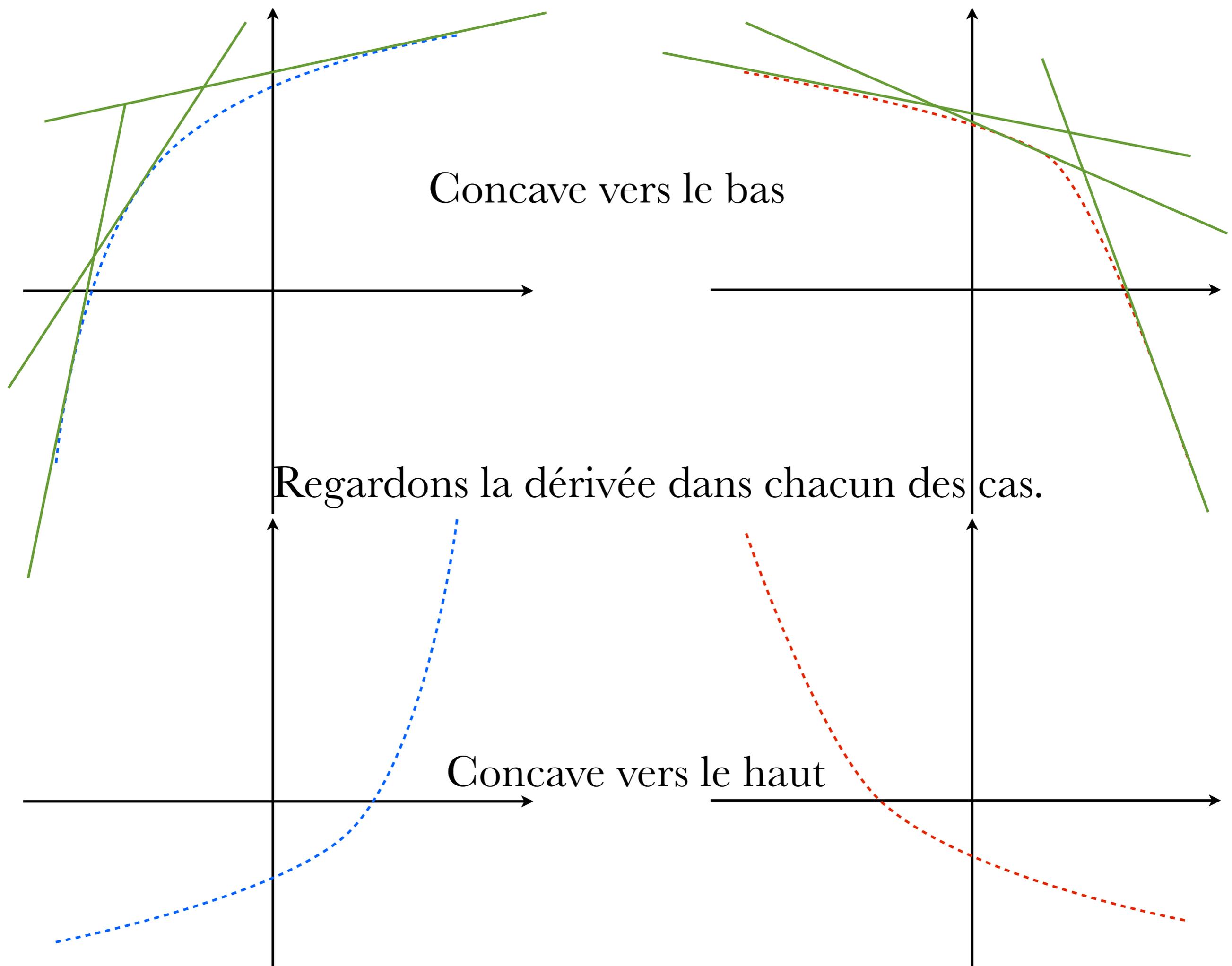


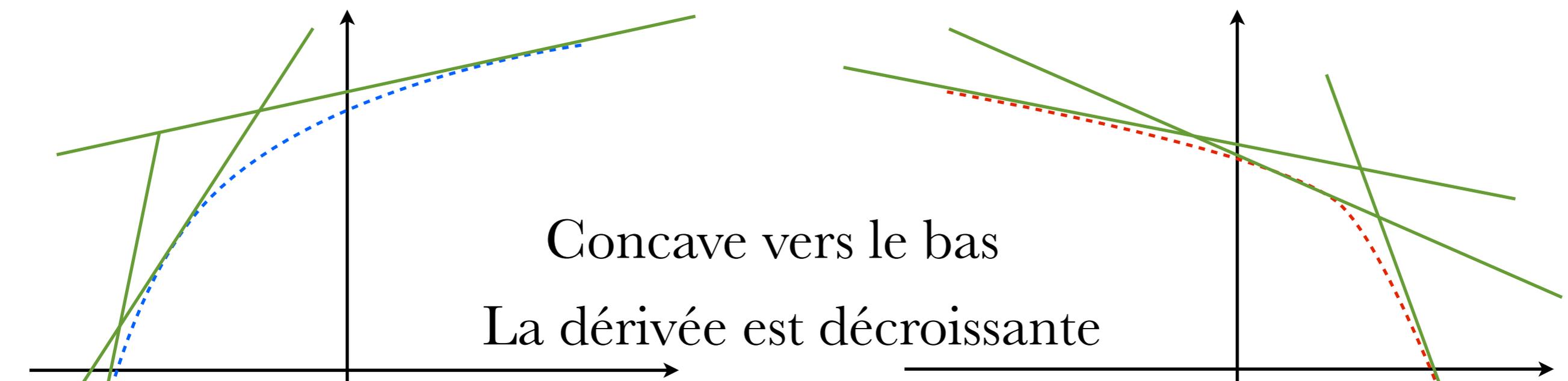
Concave vers le haut

Concave vers le bas

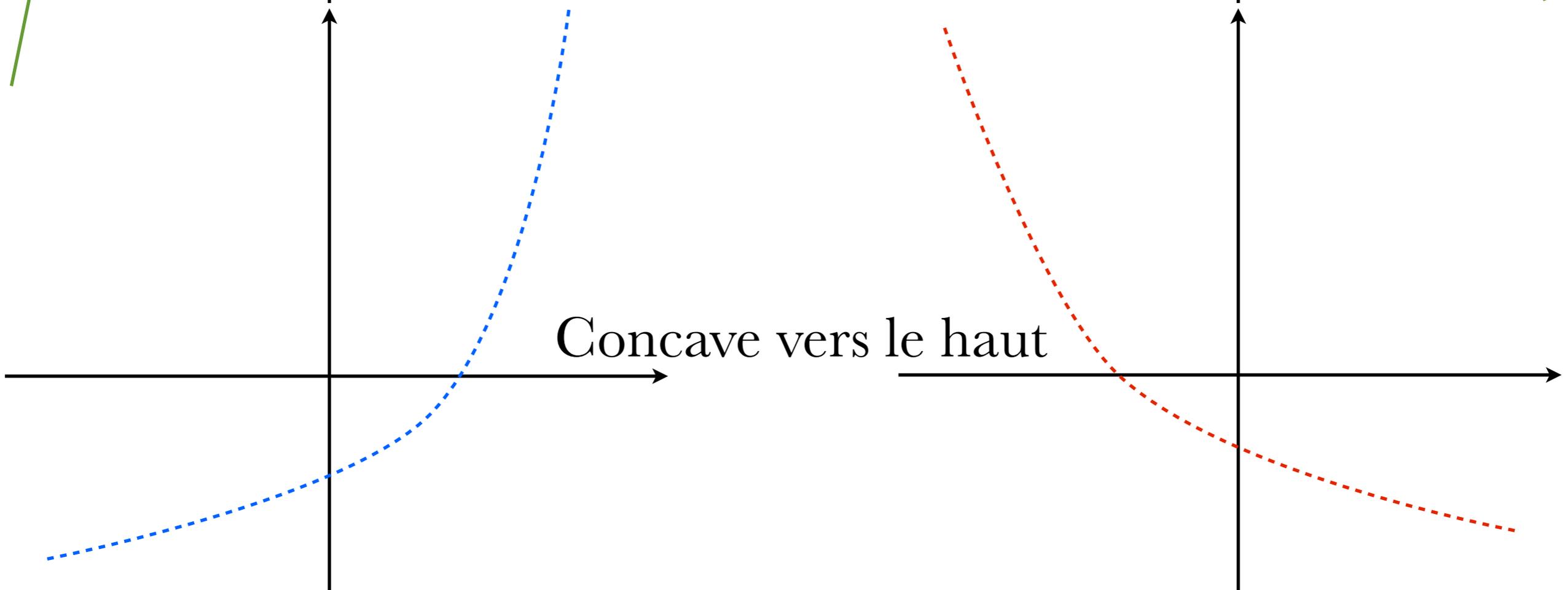
Regardons la dérivée dans chacun des cas.

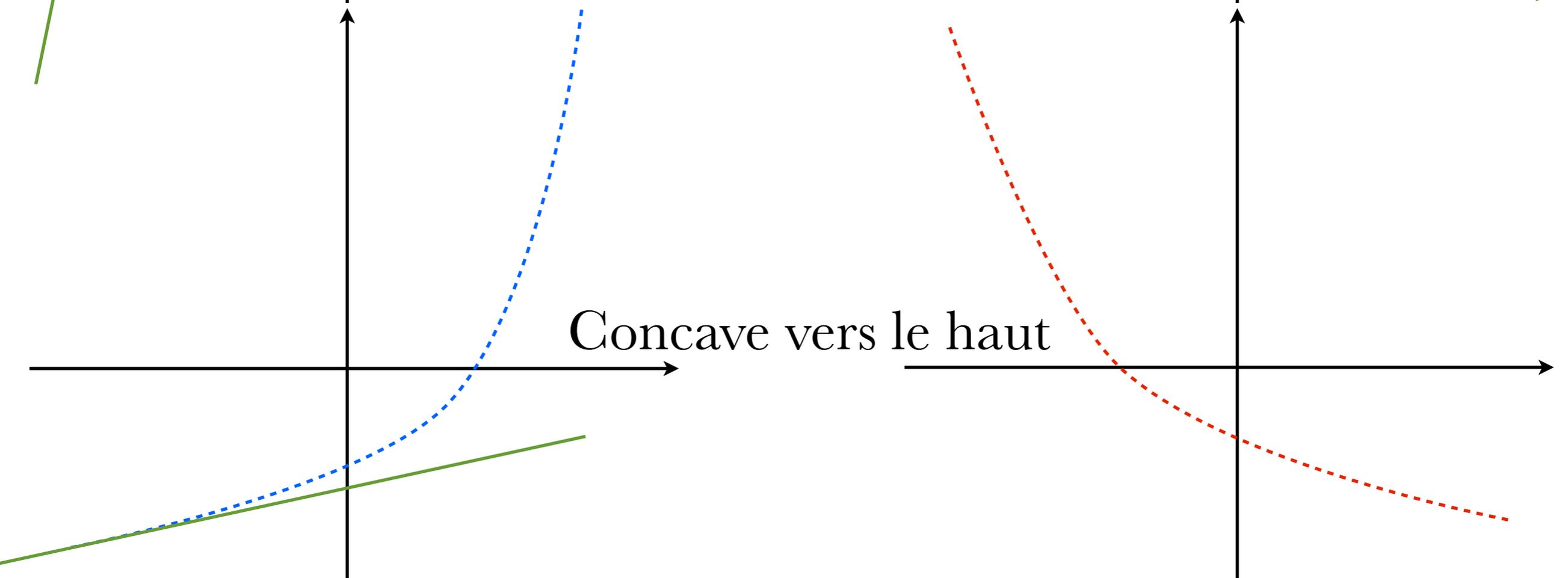
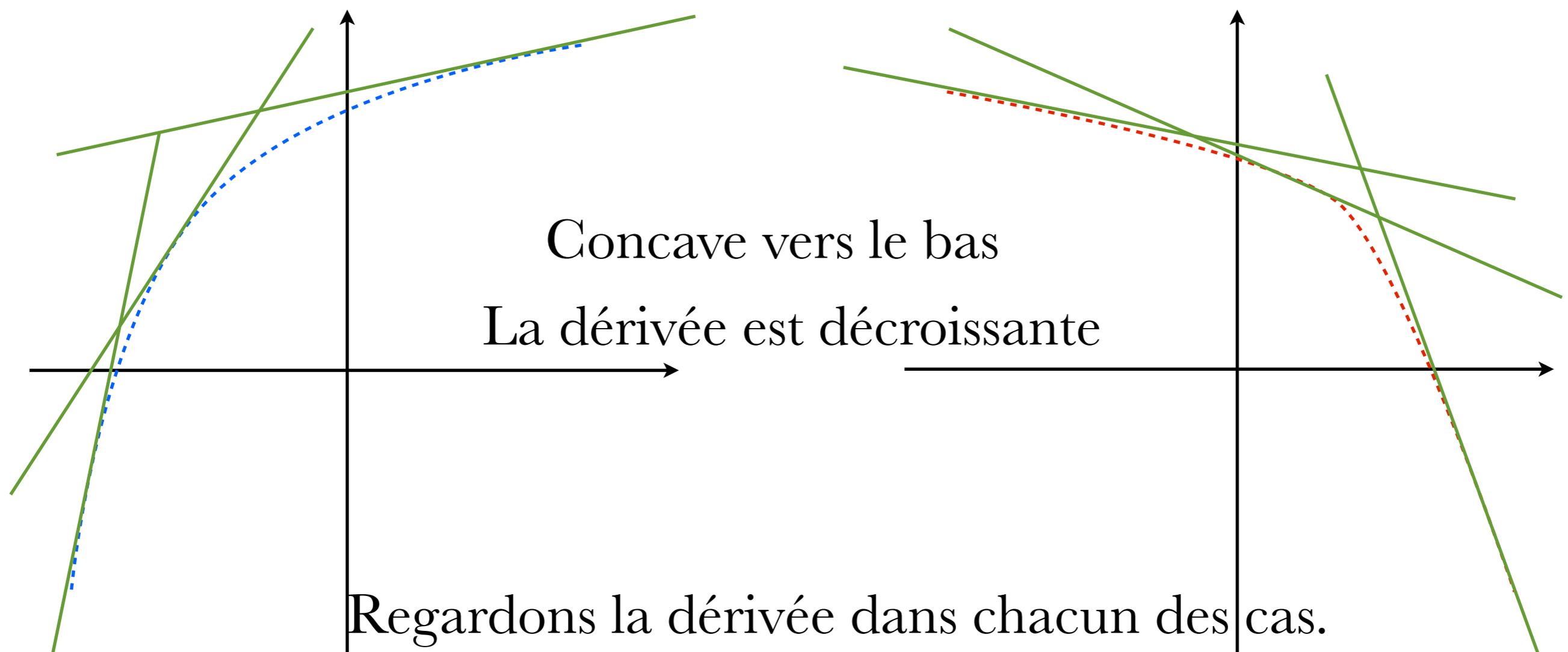
Concave vers le haut

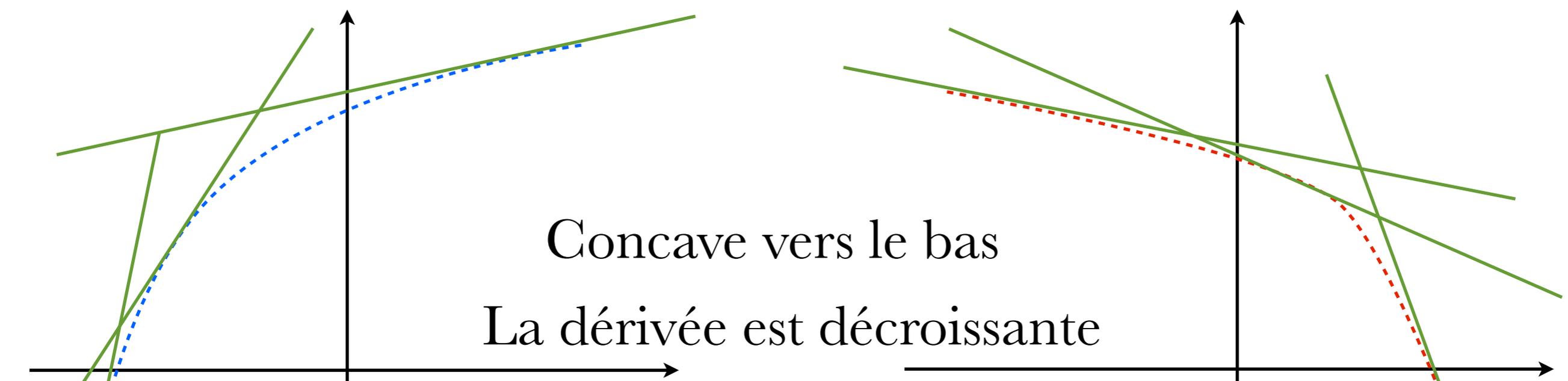




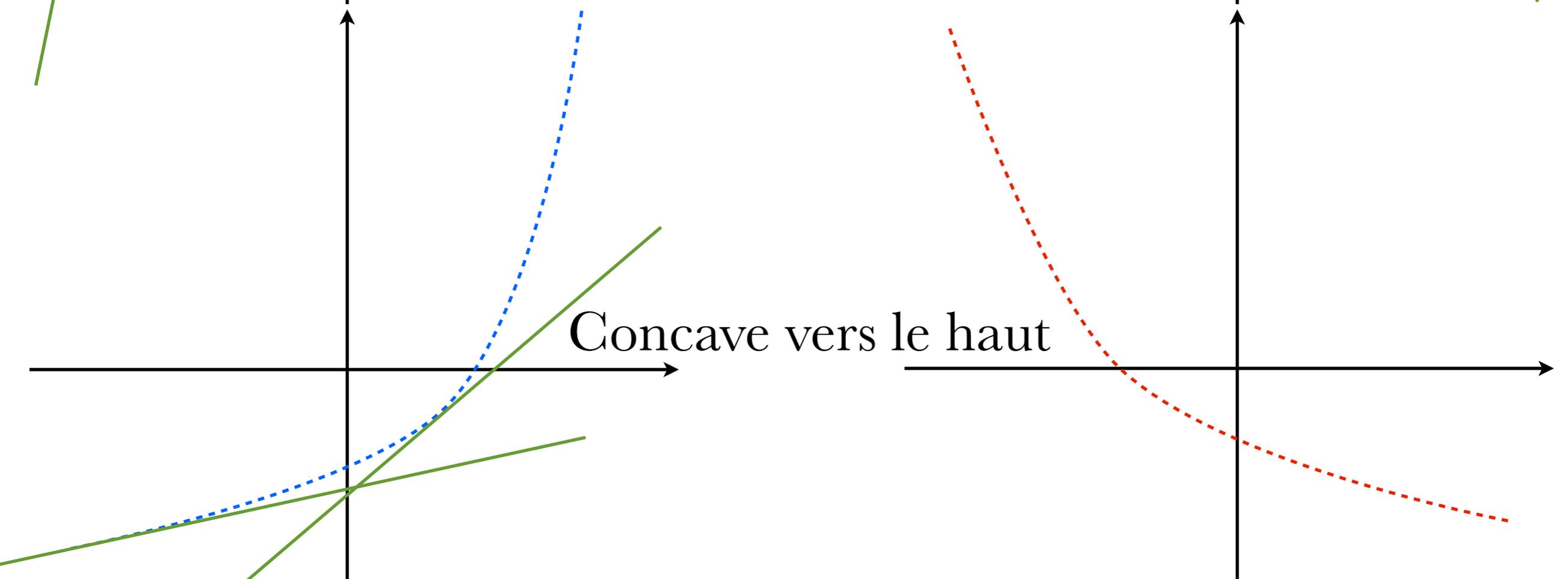
Regardons la dérivée dans chacun des cas.

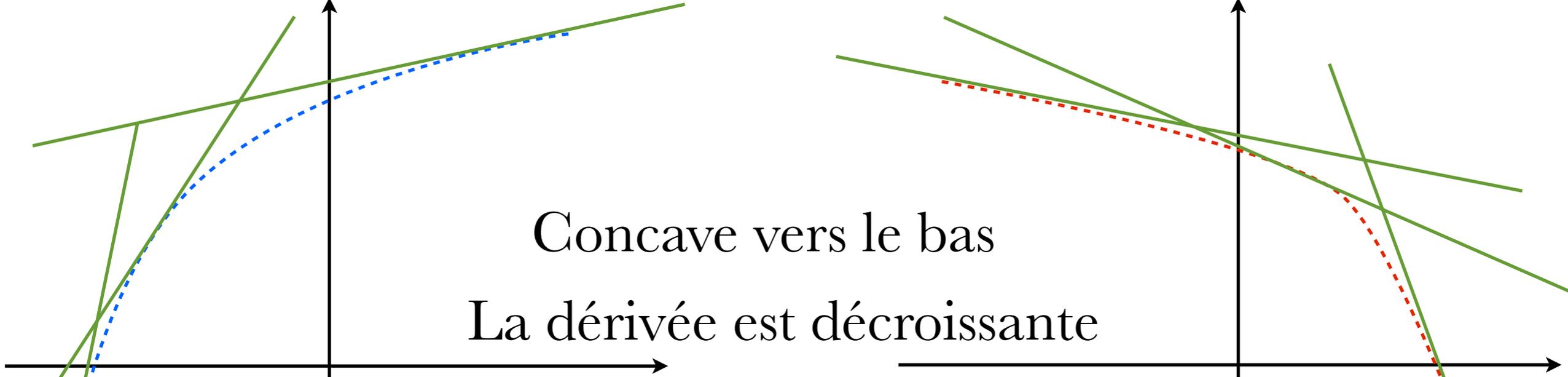




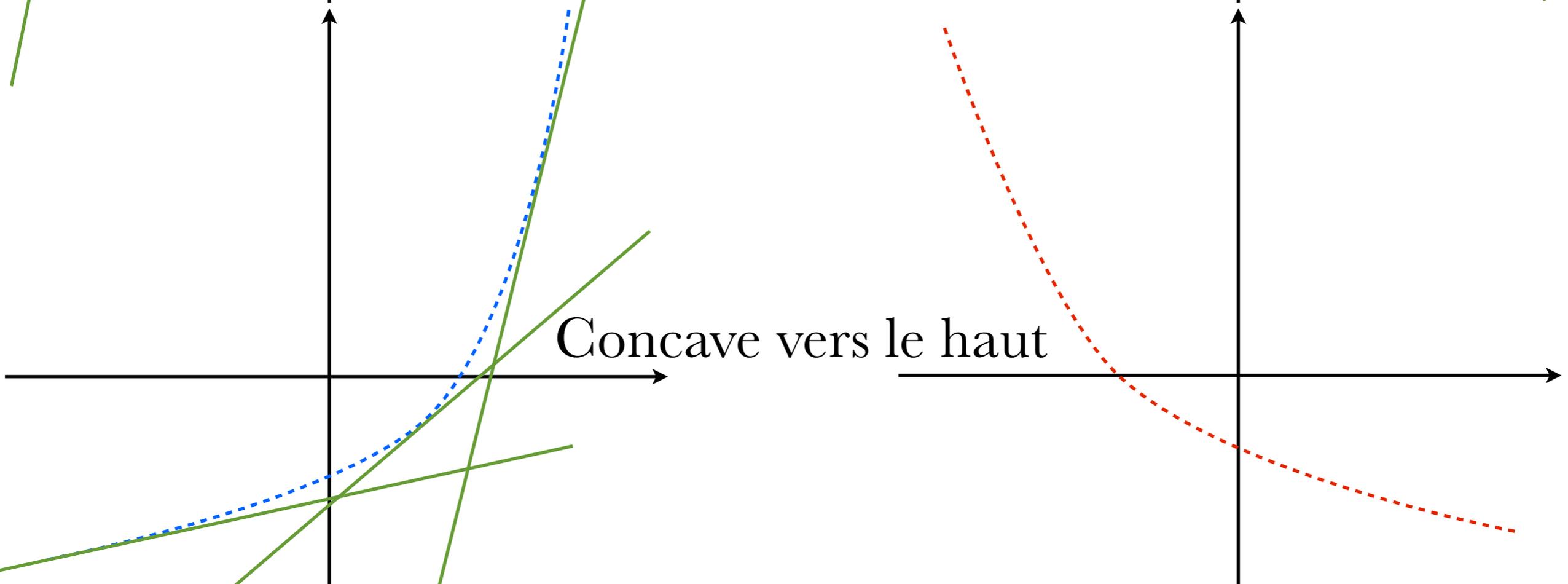


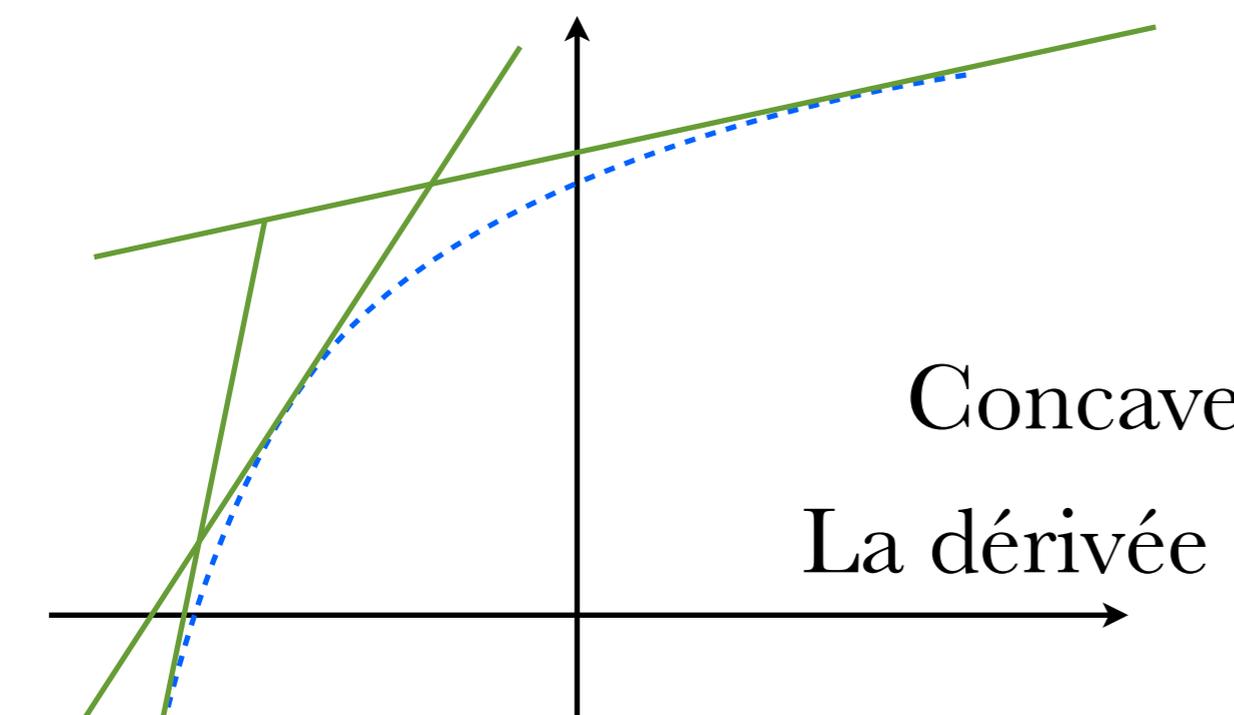
Regardons la dérivée dans chacun des cas.





Regardons la dérivée dans chacun des cas.

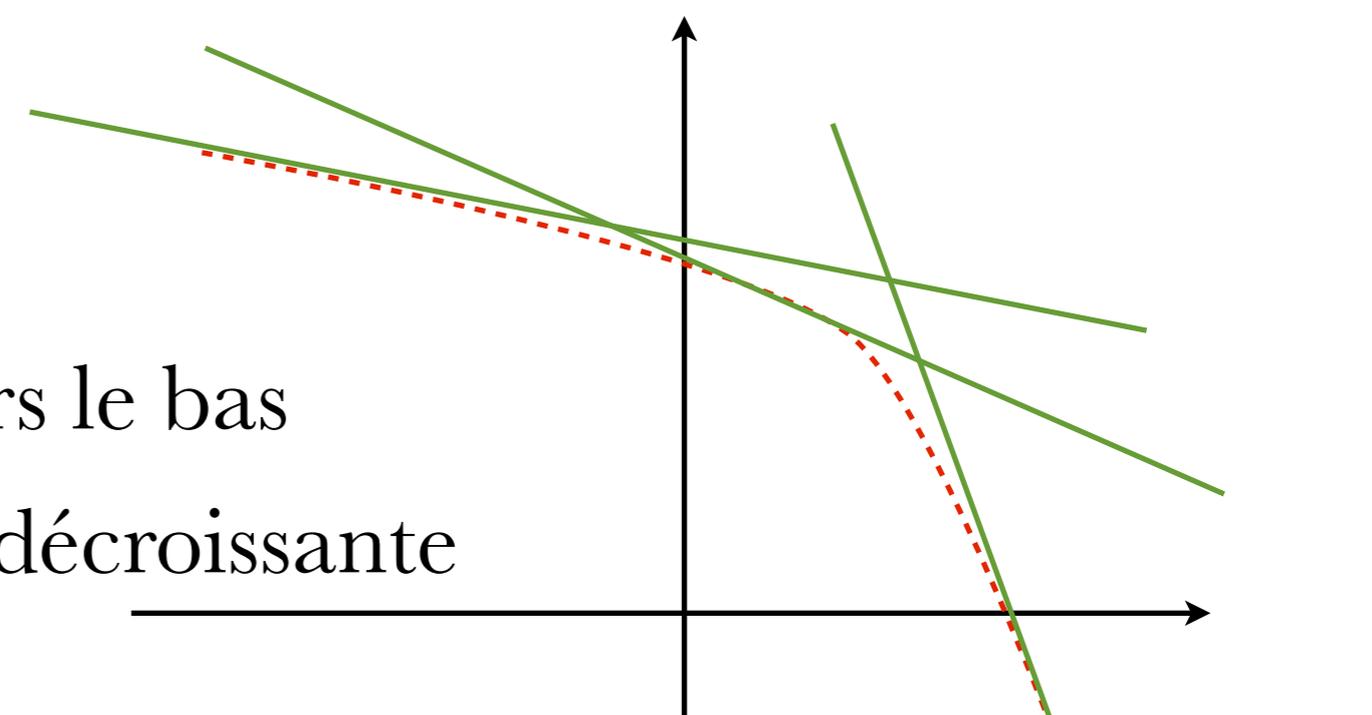




Concave vers le bas  
La dérivée est décroissante

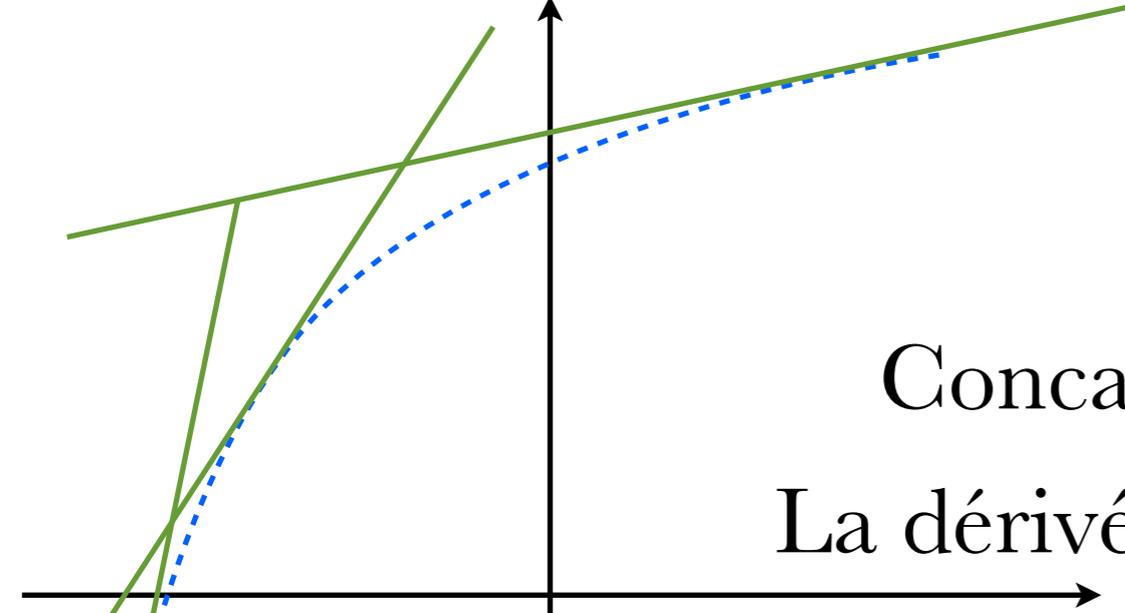
The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A blue dashed curve is concave down, starting from the bottom left and moving towards the top right. A green secant line connects two points on the curve. A blue dashed tangent line is drawn at the point where the secant line intersects the curve, showing that the slope of the tangent line is decreasing as the x-value increases.

Regardons la dérivée dans chacun des cas.



Concave vers le haut

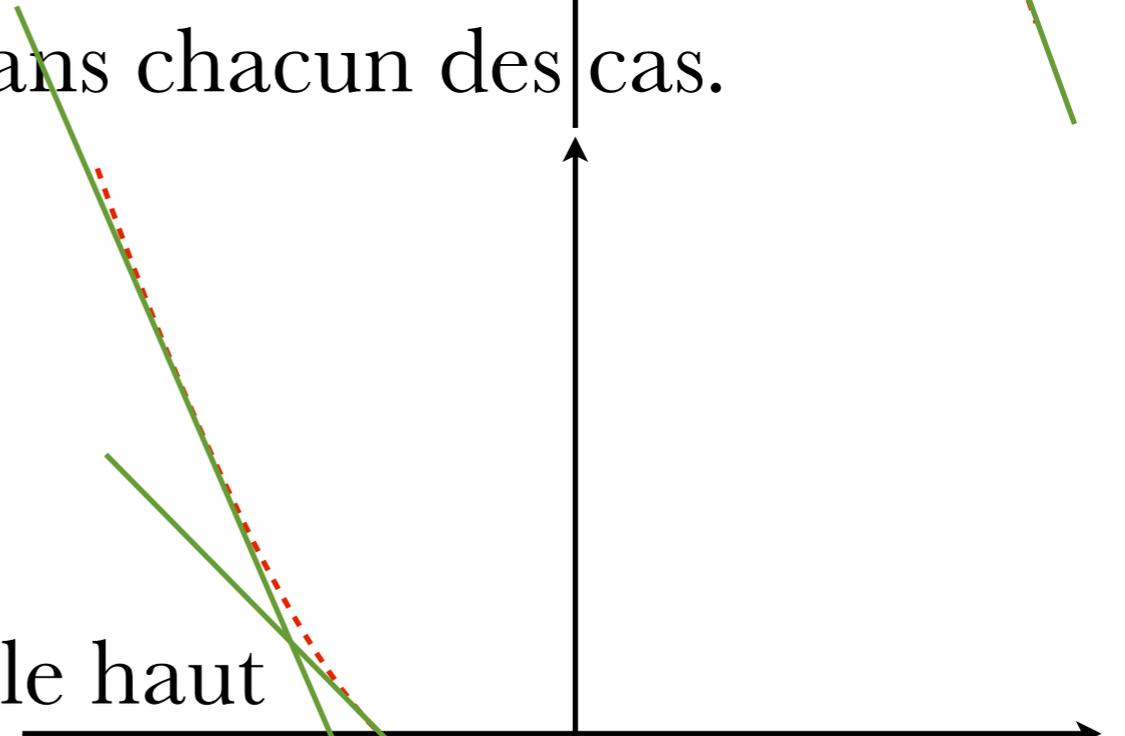
The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A red dashed curve is concave up, starting from the top left and moving towards the bottom right. A green secant line connects two points on the curve. A red dashed tangent line is drawn at the point where the secant line intersects the curve, showing that the slope of the tangent line is increasing as the x-value increases.



Concave vers le bas  
La dérivée est décroissante

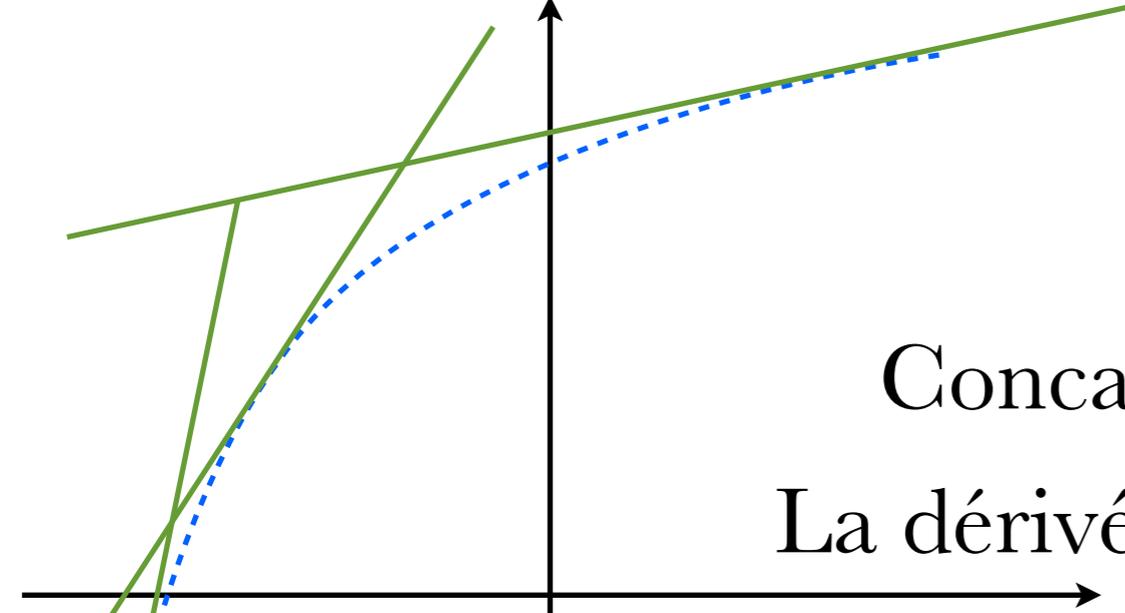
The graph shows a coordinate system with a blue dashed curve that is concave down. A green secant line connects two points on the curve. A blue dashed tangent line is drawn at the point where the secant line intersects the curve, illustrating that the slope of the secant is greater than the slope of the tangent at that point.

Regardons la dérivée dans chacun des cas.



Concave vers le haut

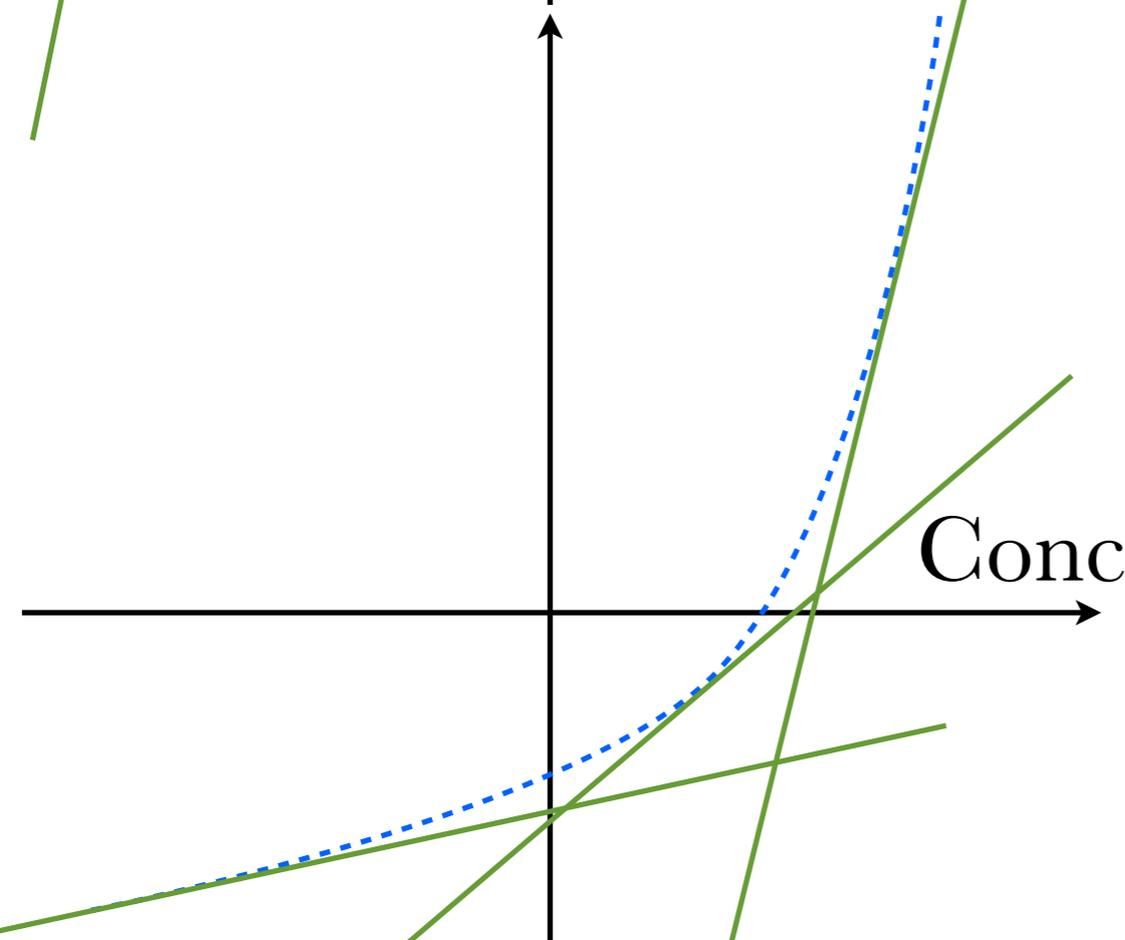
The graph shows a coordinate system with a red dashed curve that is concave up. A green secant line connects two points on the curve. A red dashed tangent line is drawn at the point where the secant line intersects the curve, illustrating that the slope of the secant is less than the slope of the tangent at that point.



Concave vers le bas  
La dérivée est décroissante

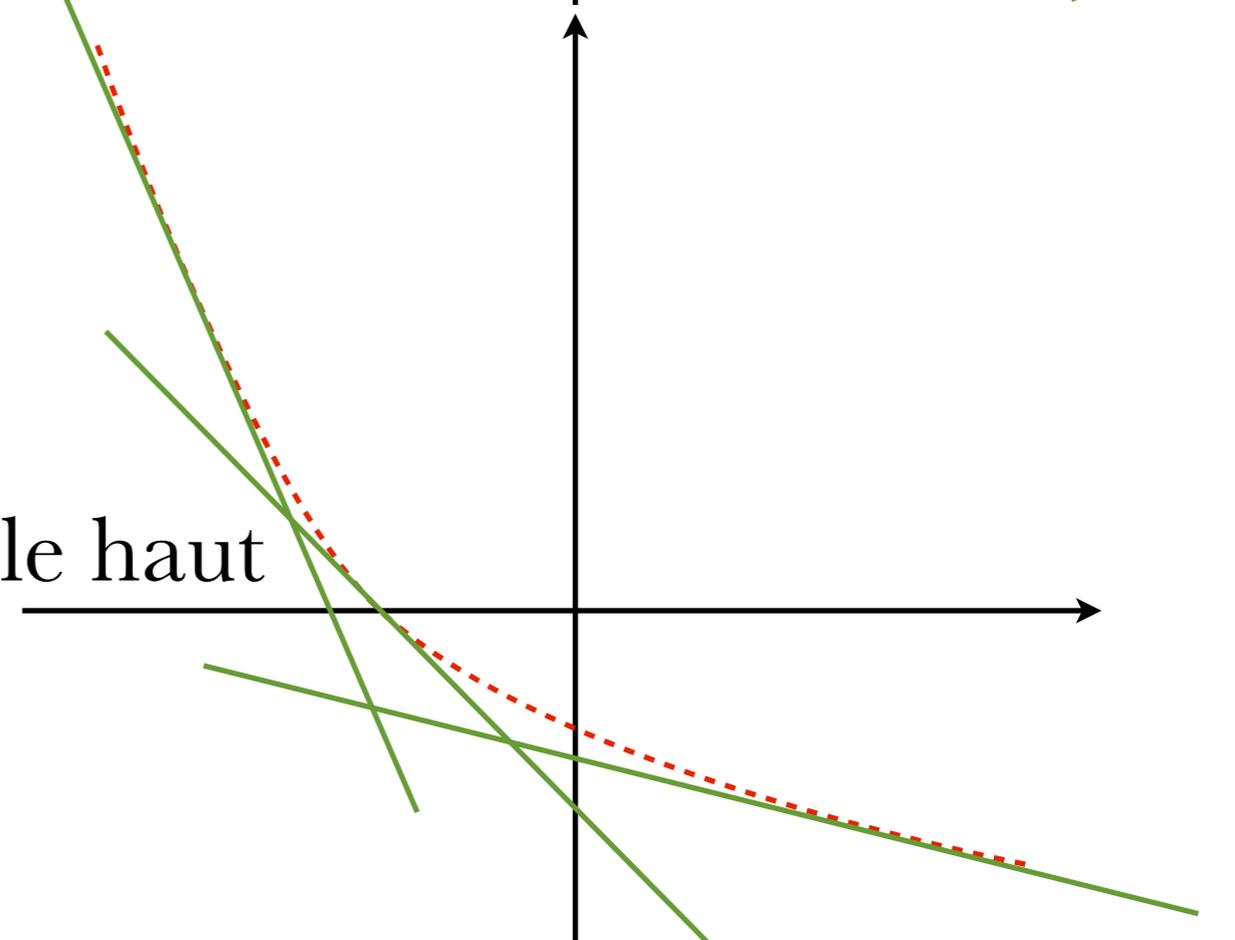
The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A blue dashed curve is concave down, starting from the bottom left and moving towards the top right. A green secant line connects two points on the curve. A blue dashed tangent line is drawn at the point where the secant line intersects the curve, showing that the slope of the tangent line is decreasing as it moves from left to right.

Regardons la dérivée dans chacun des cas.



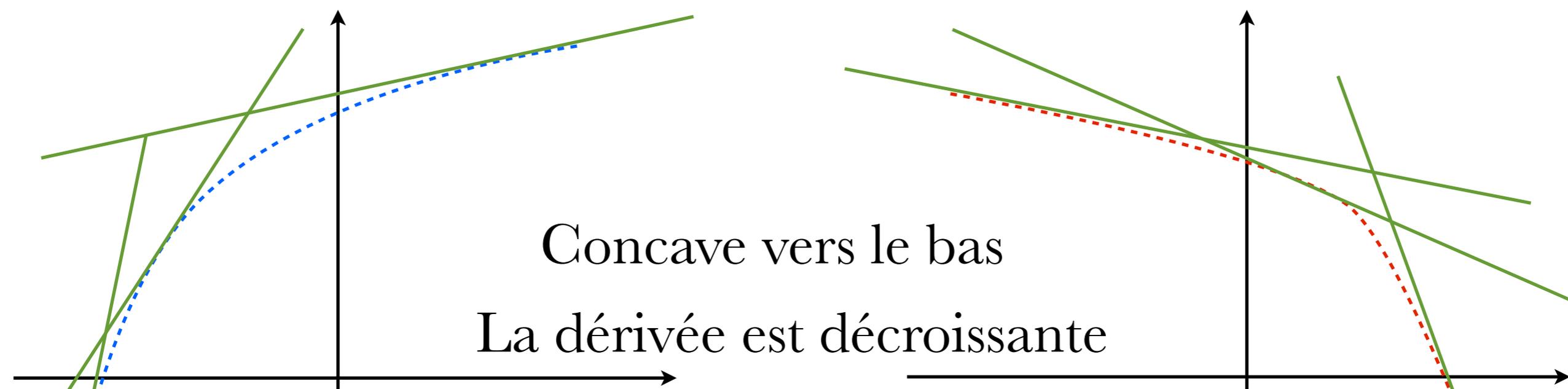
Concave vers le haut

The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A blue dashed curve is concave up, starting from the bottom left and moving towards the top right. A green secant line connects two points on the curve. A blue dashed tangent line is drawn at the point where the secant line intersects the curve, showing that the slope of the tangent line is increasing as it moves from left to right.

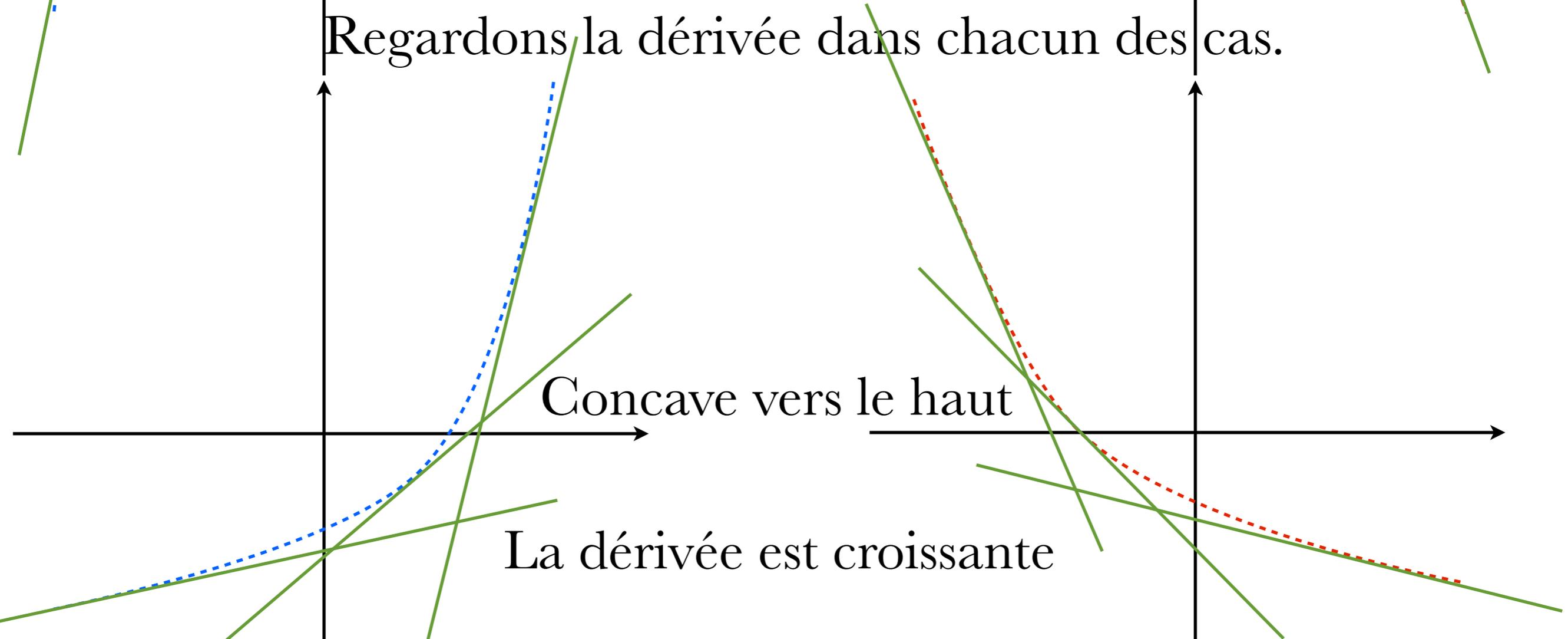


Concave vers le bas

The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A red dashed curve is concave down, starting from the top left and moving towards the bottom right. A green secant line connects two points on the curve. A red dashed tangent line is drawn at the point where the secant line intersects the curve, showing that the slope of the tangent line is decreasing as it moves from left to right.



Regardons la dérivée dans chacun des cas.



Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas

Concave vers le haut

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas  $\implies f'(x)$  décroissante

Concave vers le haut

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas  $\implies f'(x)$  décroissante

Concave vers le haut  $\implies f'(x)$  croissante

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas  $\implies f'(x)$  décroissante  $\implies f''(x) \leq 0$

Concave vers le haut  $\implies f'(x)$  croissante

Comment faire pour déterminer si une fonction est concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné?

Concave vers le bas  $\implies f'(x)$  décroissante  $\implies f''(x) \leq 0$

Concave vers le haut  $\implies f'(x)$  croissante  $\implies f''(x) \geq 0$

Faites les exercices suivants

Section 3.2 # 24 à 28

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

Définition

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

### Définition

Les **points critiques** d'une fonction  $f'(x)$  sont les valeurs de  $x$  tel que

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

### Définition

Les **points critiques** d'une fonction  $f'(x)$  sont les valeurs de  $x$  tel que

$$f''(a) = 0$$

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

### Définition

Les **points critiques** d'une fonction  $f'(x)$  sont les valeurs de  $x$  tel que

$$f''(a) = 0$$

ou

Donc pour trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas, il faut trouver les endroits où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.

Ce qui nous amène à parler des points critiques non pas de la fonction mais de sa dérivée.

### Définition

Les **points critiques** d'une fonction  $f'(x)$  sont les valeurs de  $x$  tel que

$$f''(a) = 0$$

ou

$$a \notin \text{dom}(f''(x))$$

## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x$$

## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4$$

## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

		0	

## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

		0	
$f''(x)$			

## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

		0	
$f''(x)$	-		

## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

		0	
$f''(x)$	-		+

## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+

## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+

## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+

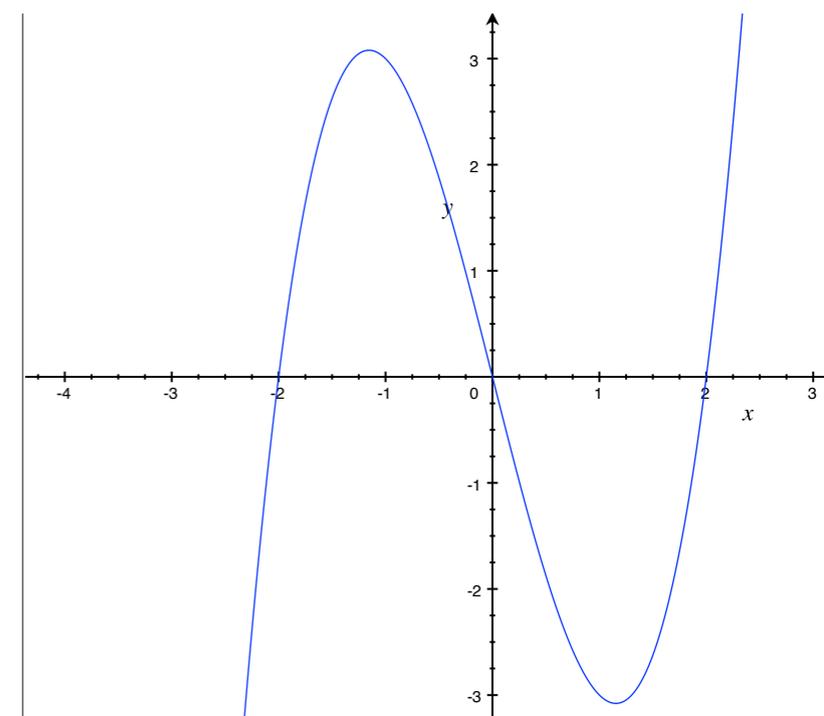
## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+



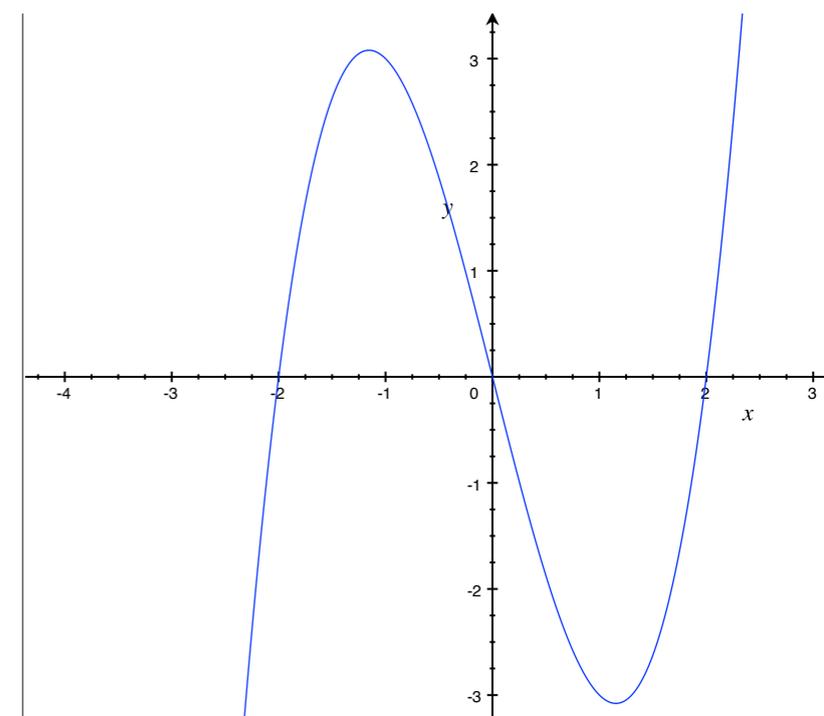
## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+



Petit truc pour se souvenir

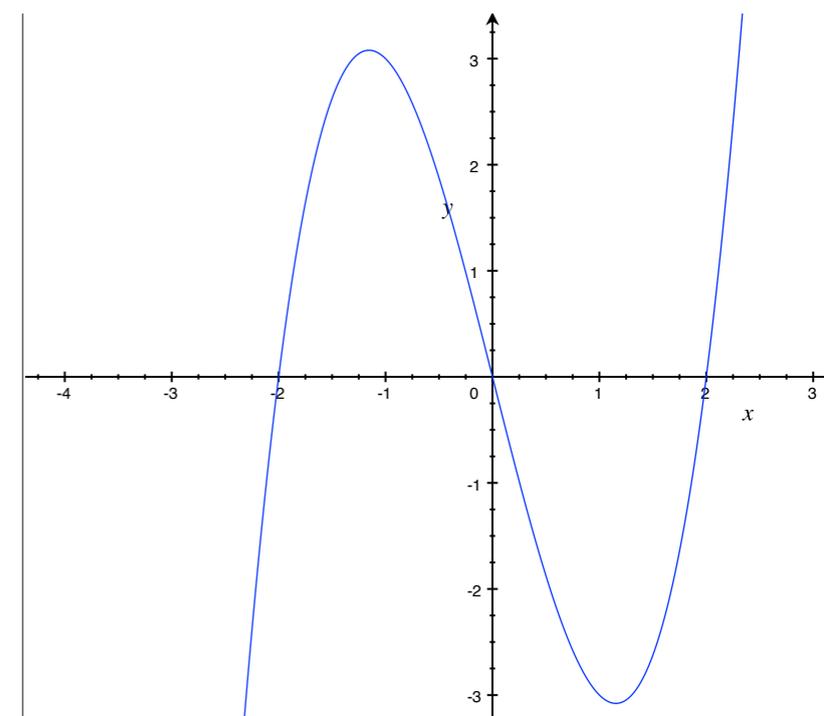
## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

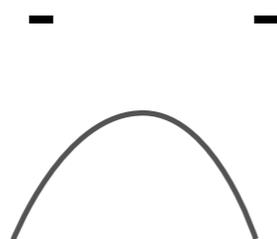
$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+



Petit truc pour se souvenir



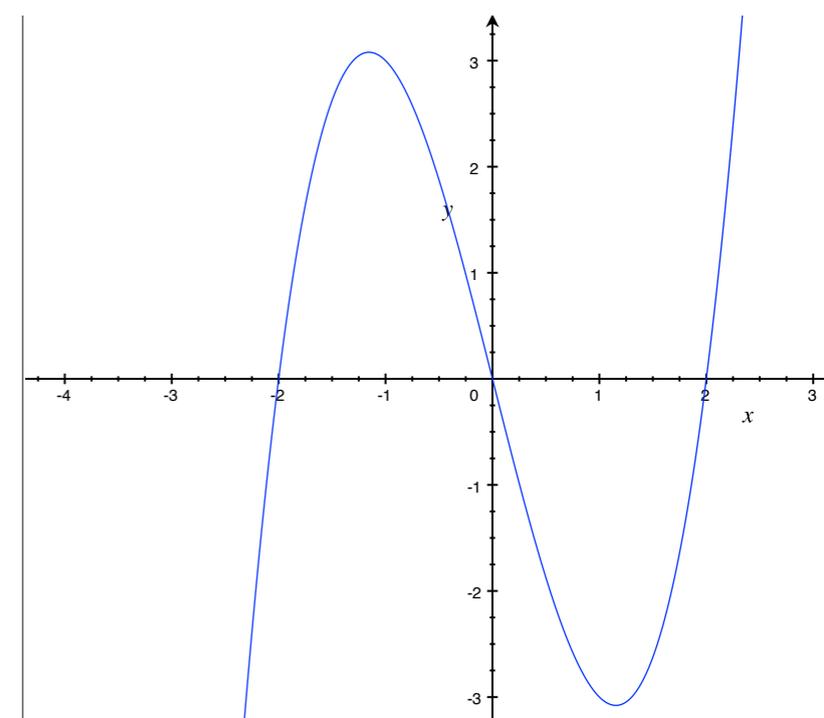
## Exemple

Trouver les intervalles où la fonction est concave vers le haut et où elle est concave vers le bas.

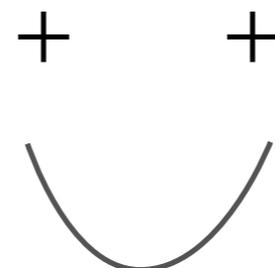
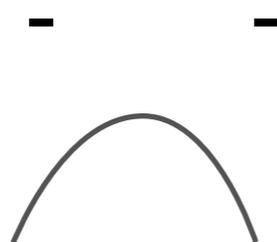
$$f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f''(x) = 6x$$

Le point critique de  $f'(x)$  est  $x = 0$

		0	
$f(x)$			
$f''(x)$	-		+



Petit truc pour se souvenir



## Définition

On nomme les endroits où il y a un changement de concavité, un **point d'inflexion**.

## Définition

On nomme les endroits où il y a un changement de concavité, un **point d'inflexion**.

Remarque:

## Définition

On nomme les endroits où il y a un changement de concavité, un **point d'inflexion**.

## Remarque:

Un peu comme avec les extrémum relatif, les points critique de  $f'(x)$  sont de bon candidats à être des point d'inflexion mais n'en sont pas nécessairement.

Exemple

Example

$$f(x) = x^3$$

## Example

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

## Example

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

## Example

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

## Example

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

## Example

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g''(x) = 12x^2$$

## Exemple

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g''(x) = 12x^2$$

Le seul point critique de  $f'(x)$  et  $g'(x)$  est  $x = 0$

## Exemple

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

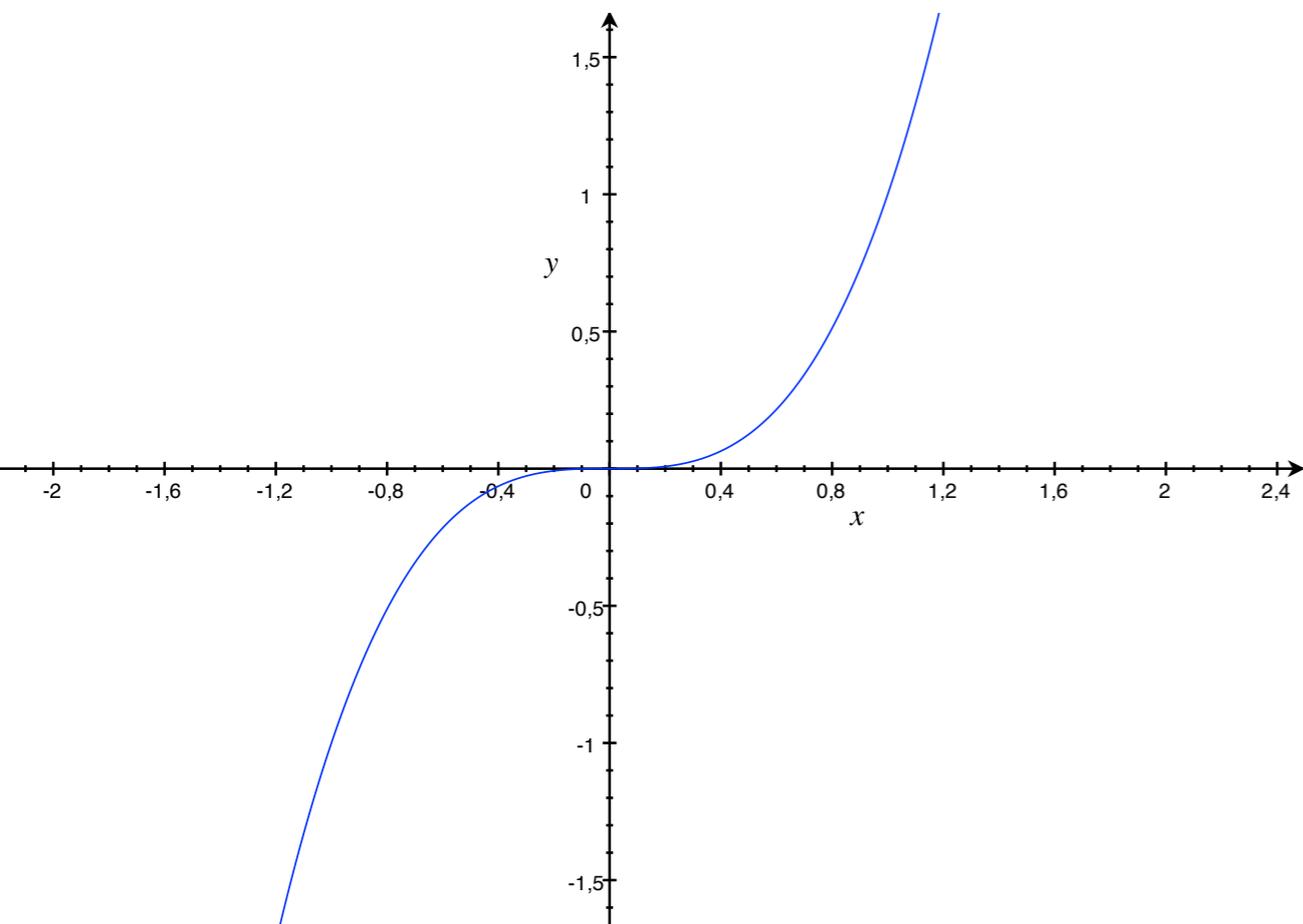
$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g''(x) = 12x^2$$

Le seul point critique de  $f'(x)$  et  $g'(x)$  est  $x = 0$



# Exemple

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

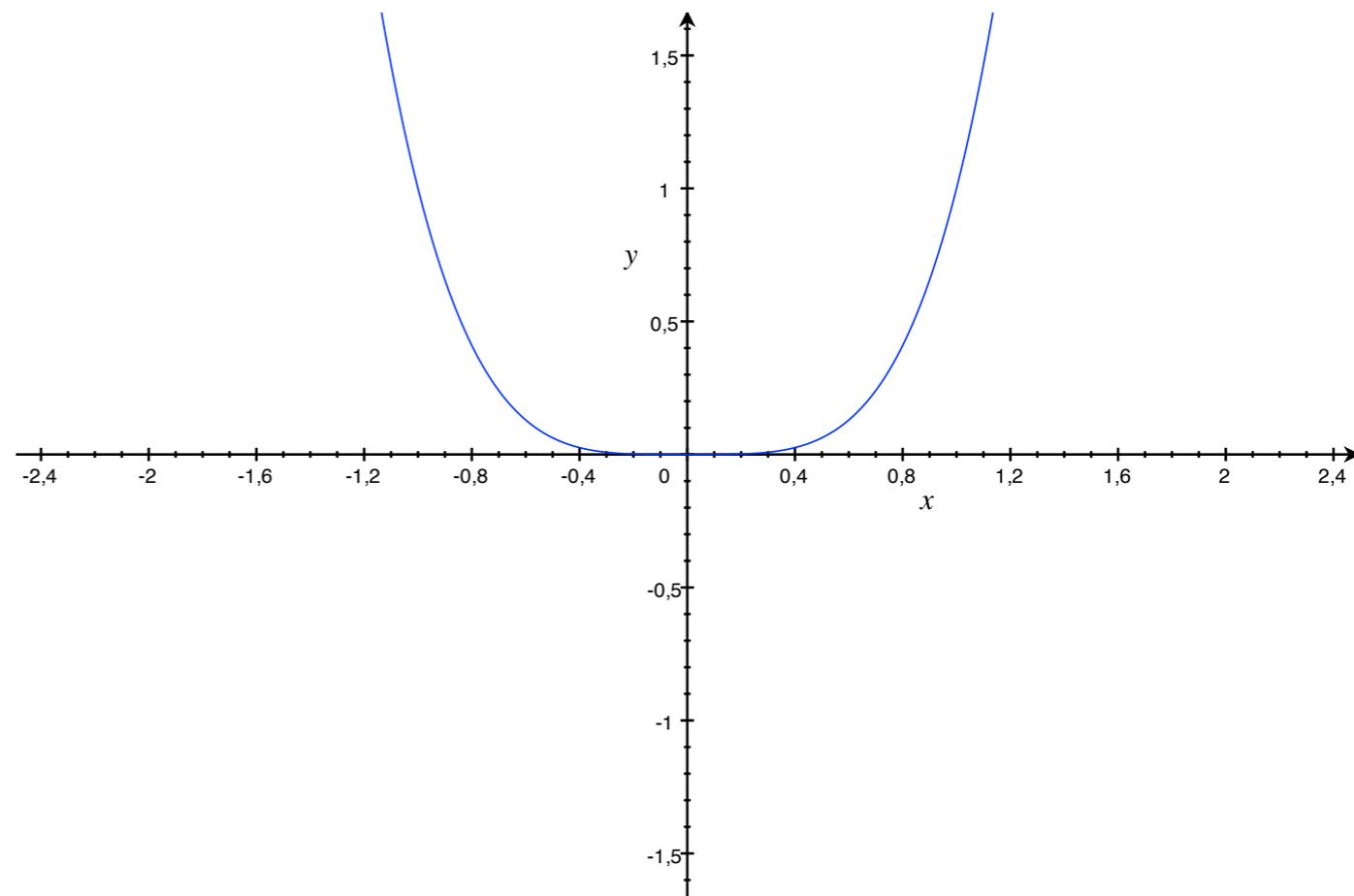
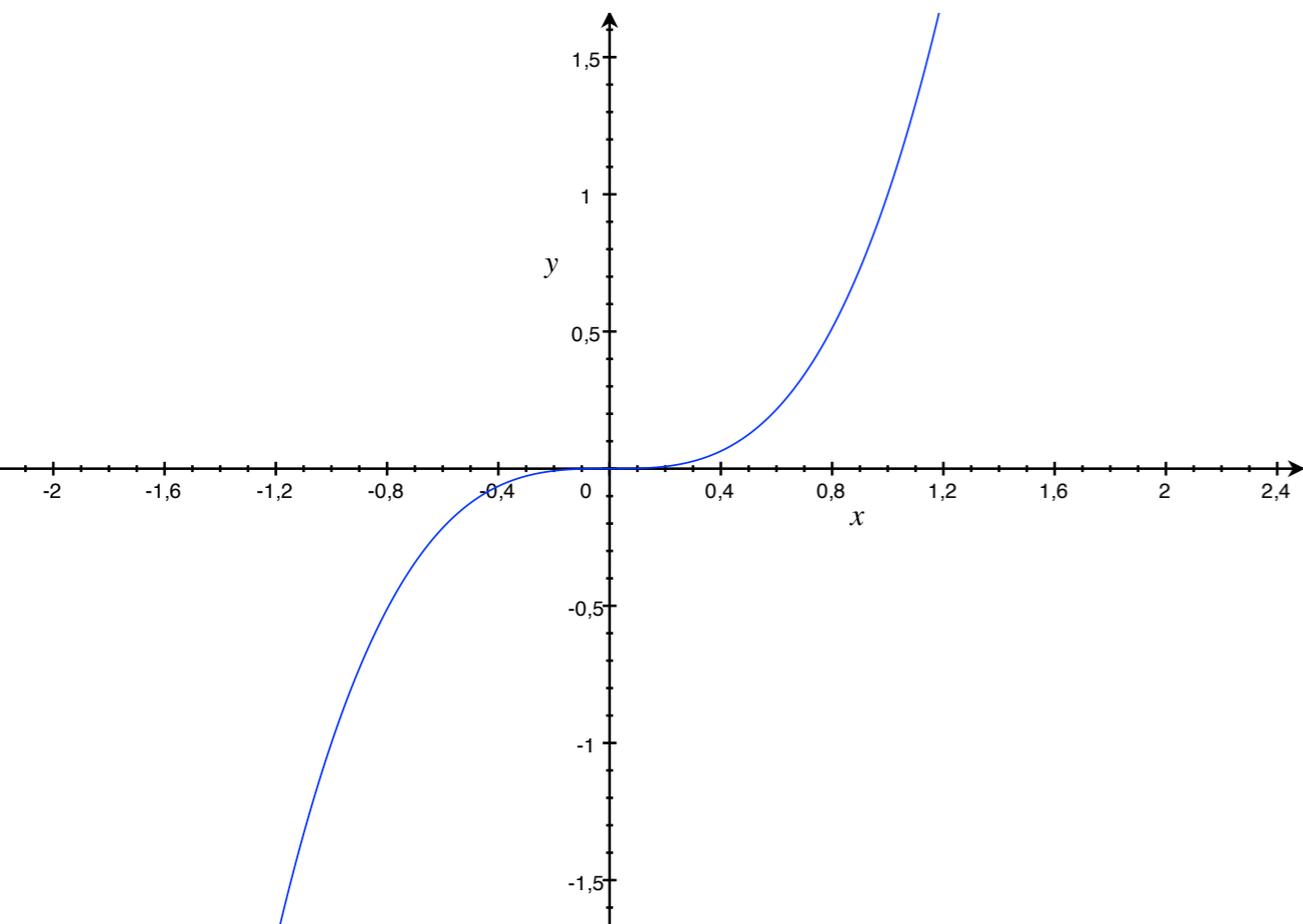
$$f''(x) = 6x$$

$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g''(x) = 12x^2$$

Le seul point critique de  $f'(x)$  et  $g'(x)$  est  $x = 0$



# Exemple

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

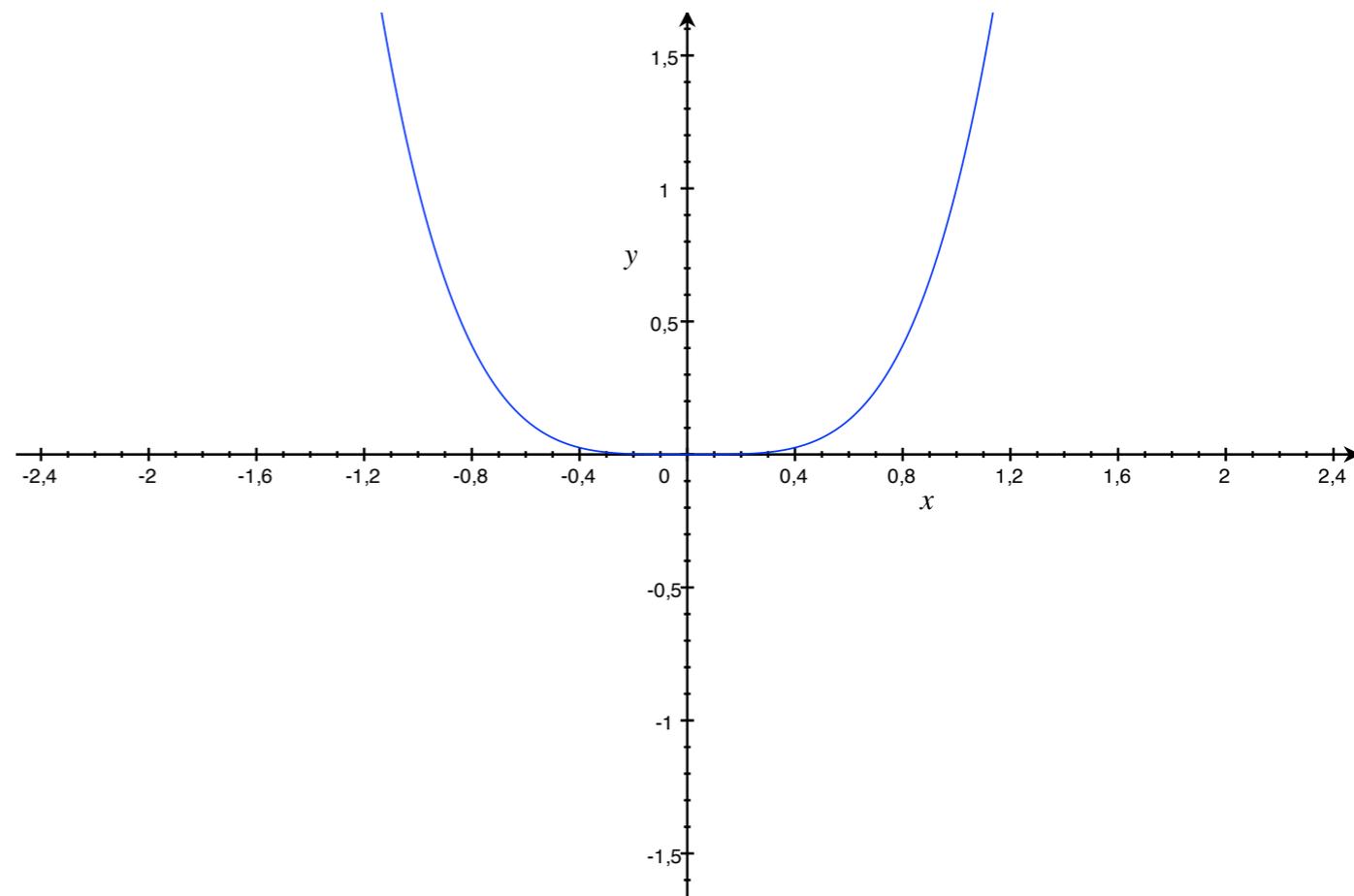
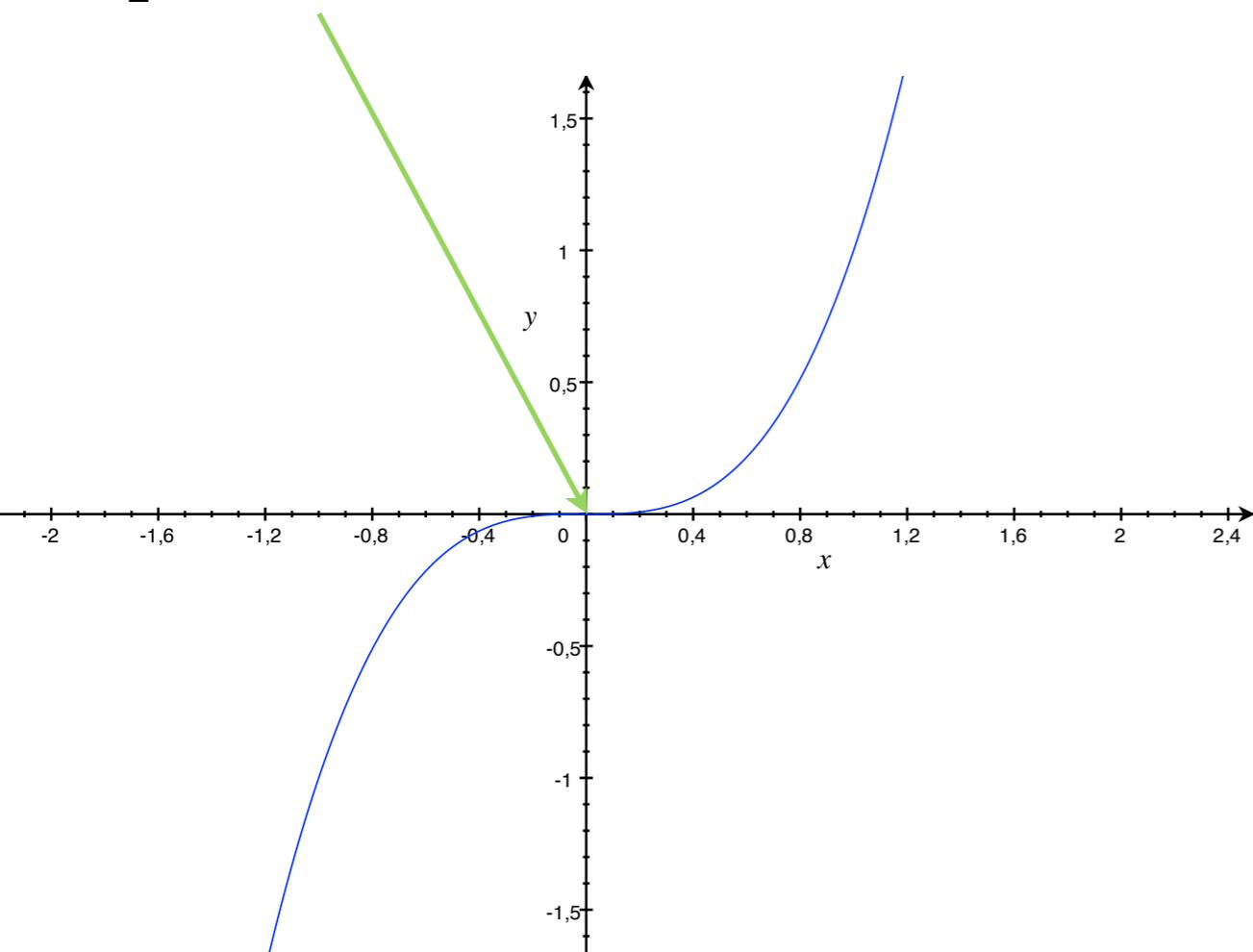
$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g''(x) = 12x^2$$

Le seul point critique de  $f'(x)$  et  $g'(x)$  est  $x = 0$

point d'inflexion



# Exemple

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

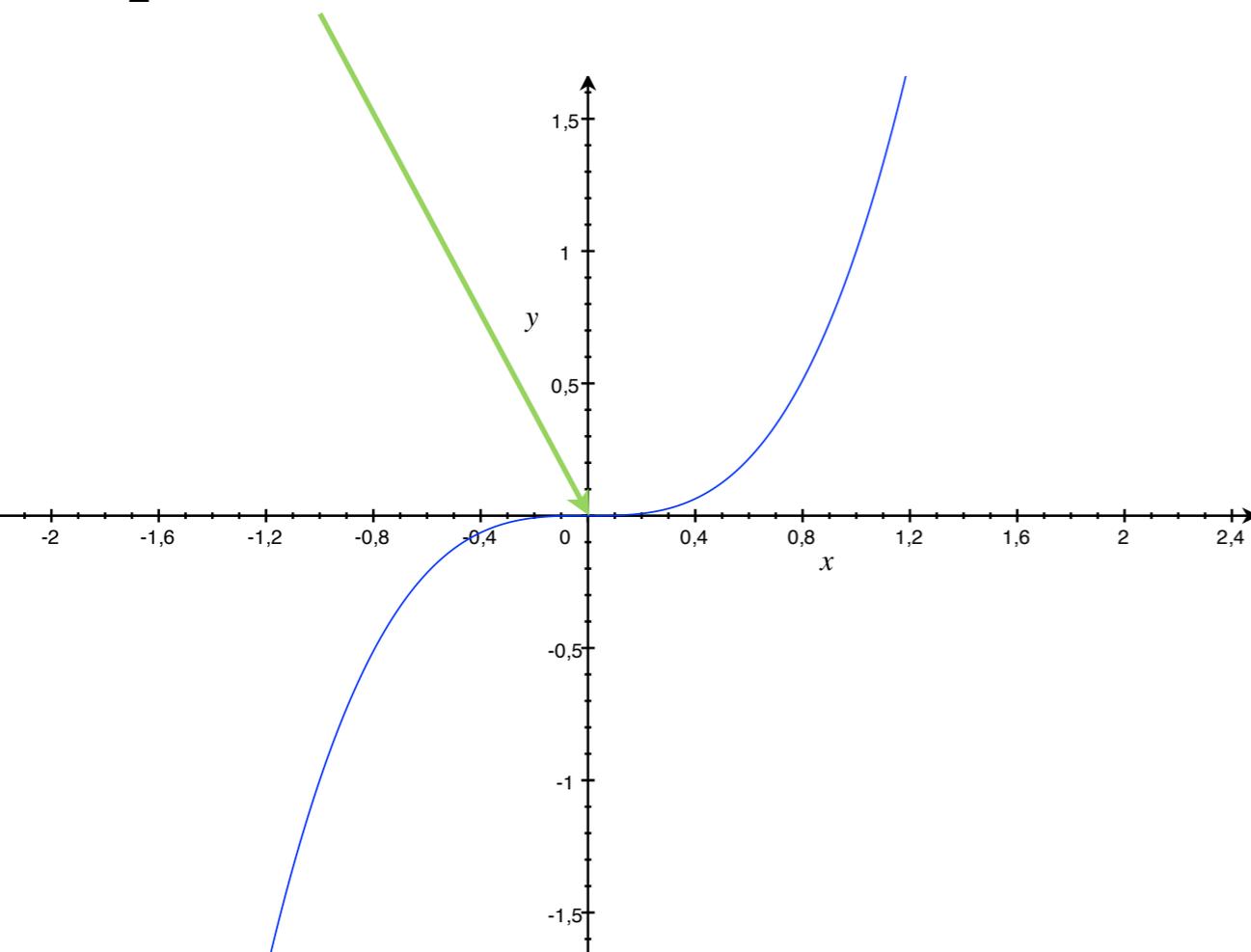
$$g(x) = x^4$$

$$g'(x) = 4x^3$$

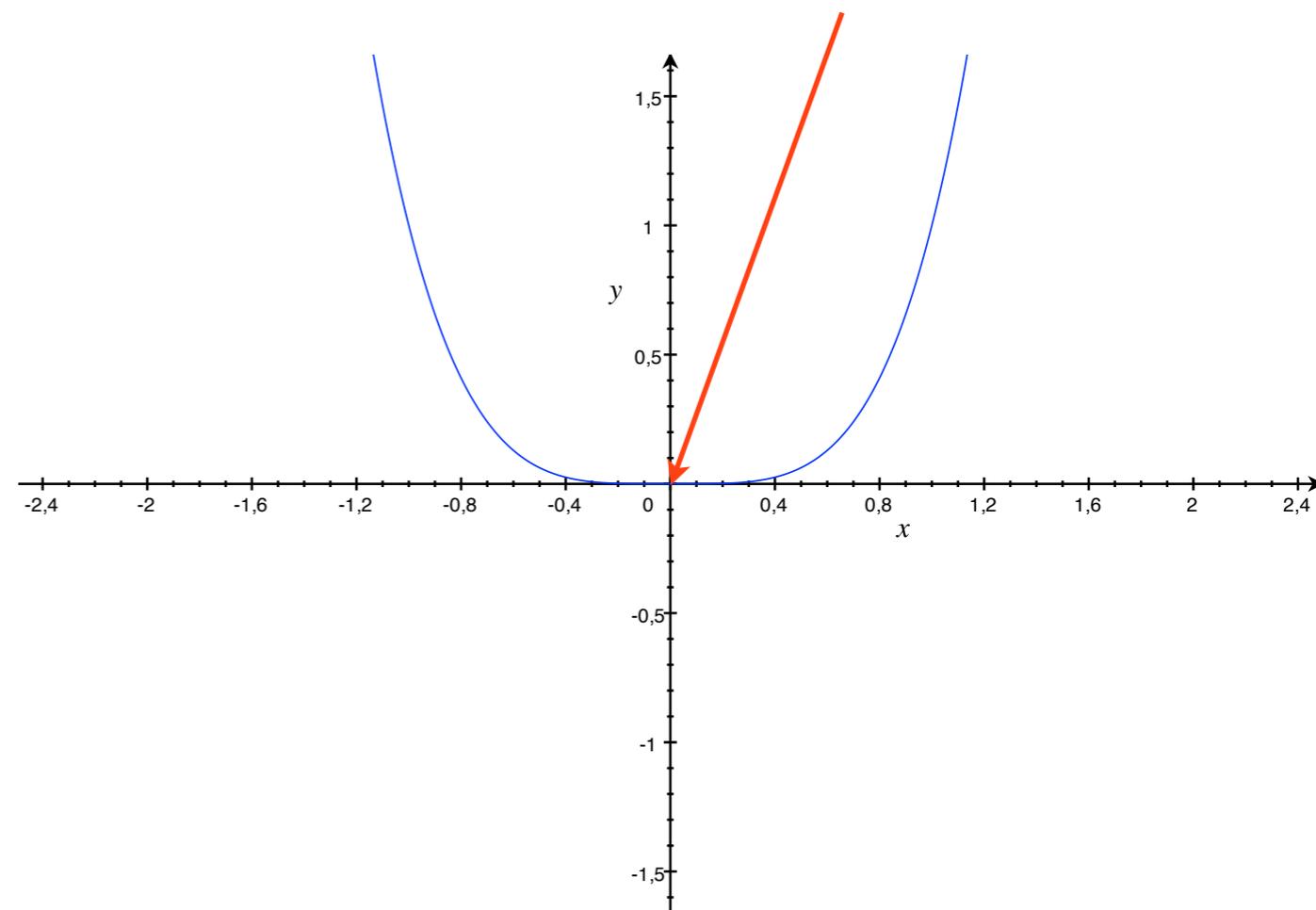
$$g''(x) = 12x^2$$

Le seul point critique de  $f'(x)$  et  $g'(x)$  est  $x = 0$

point d'inflexion



pas un point d'inflexion



Faites les exercices suivants

Section 3.2 # 29

Aujourd'hui, nous avons vu

un projet de loi sur la protection des données

# Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Concavité et le lien avec la dérivée seconde

# Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Concavité et le lien avec la dérivée seconde

Devoir:

Section 3.3 # 24 à 29