

# 4.1 TRIGONOMÉTRIE

Cours 23

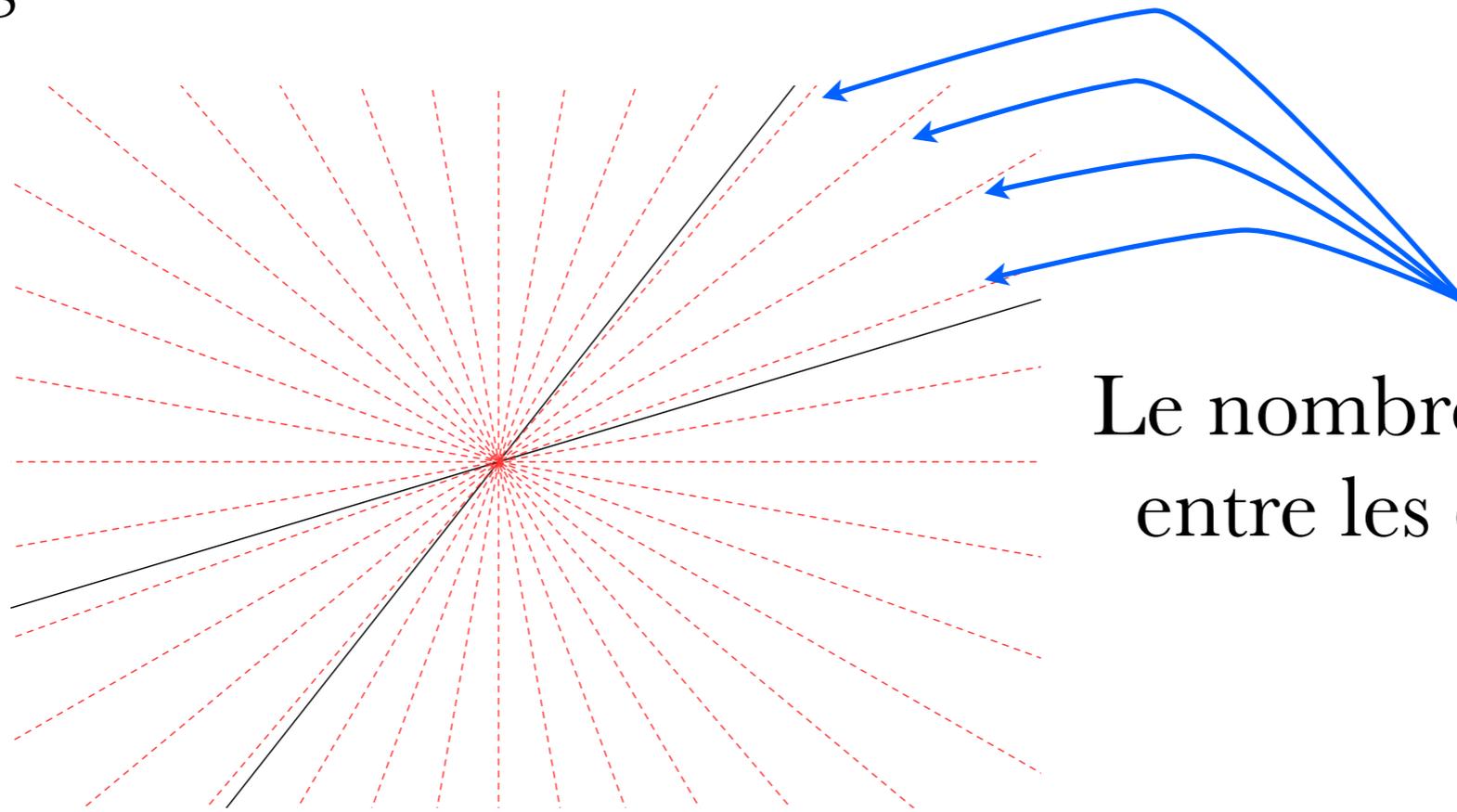
Aujourd'hui, nous allons voir

la trigonométrie

# Angle

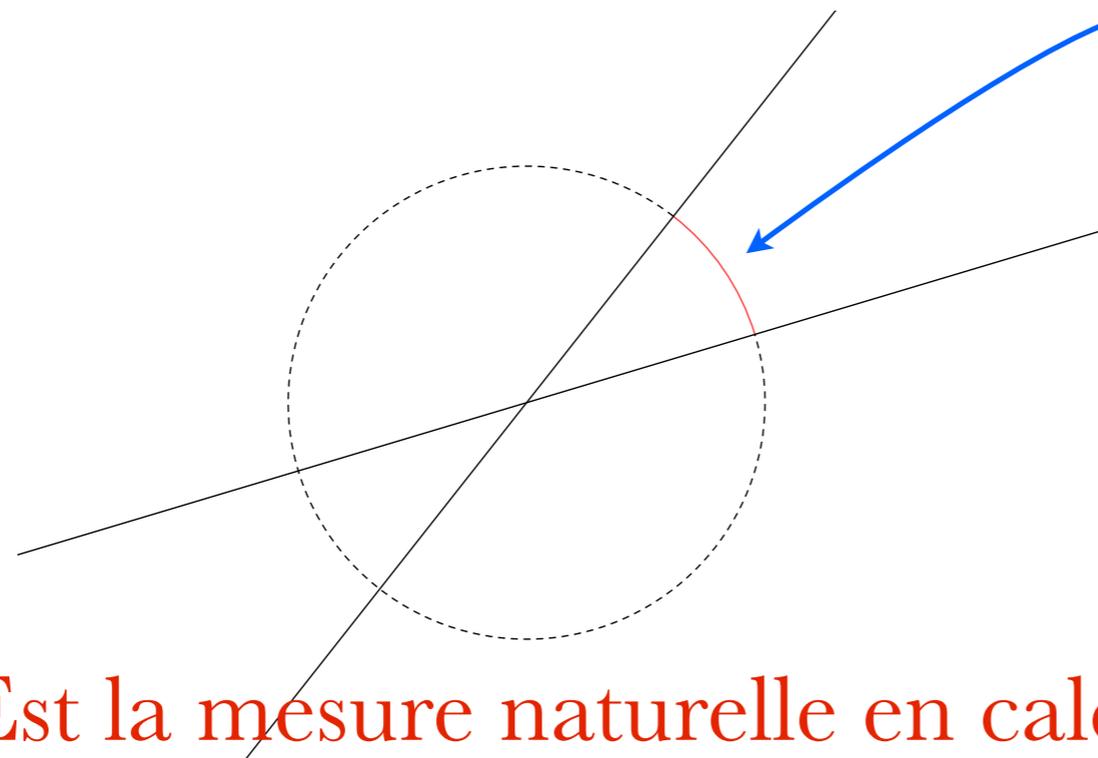
Un angle est une mesure de l'ouverture entre deux droites.

Degré



Le nombre de 360-ième  
entre les deux droites.

Radian

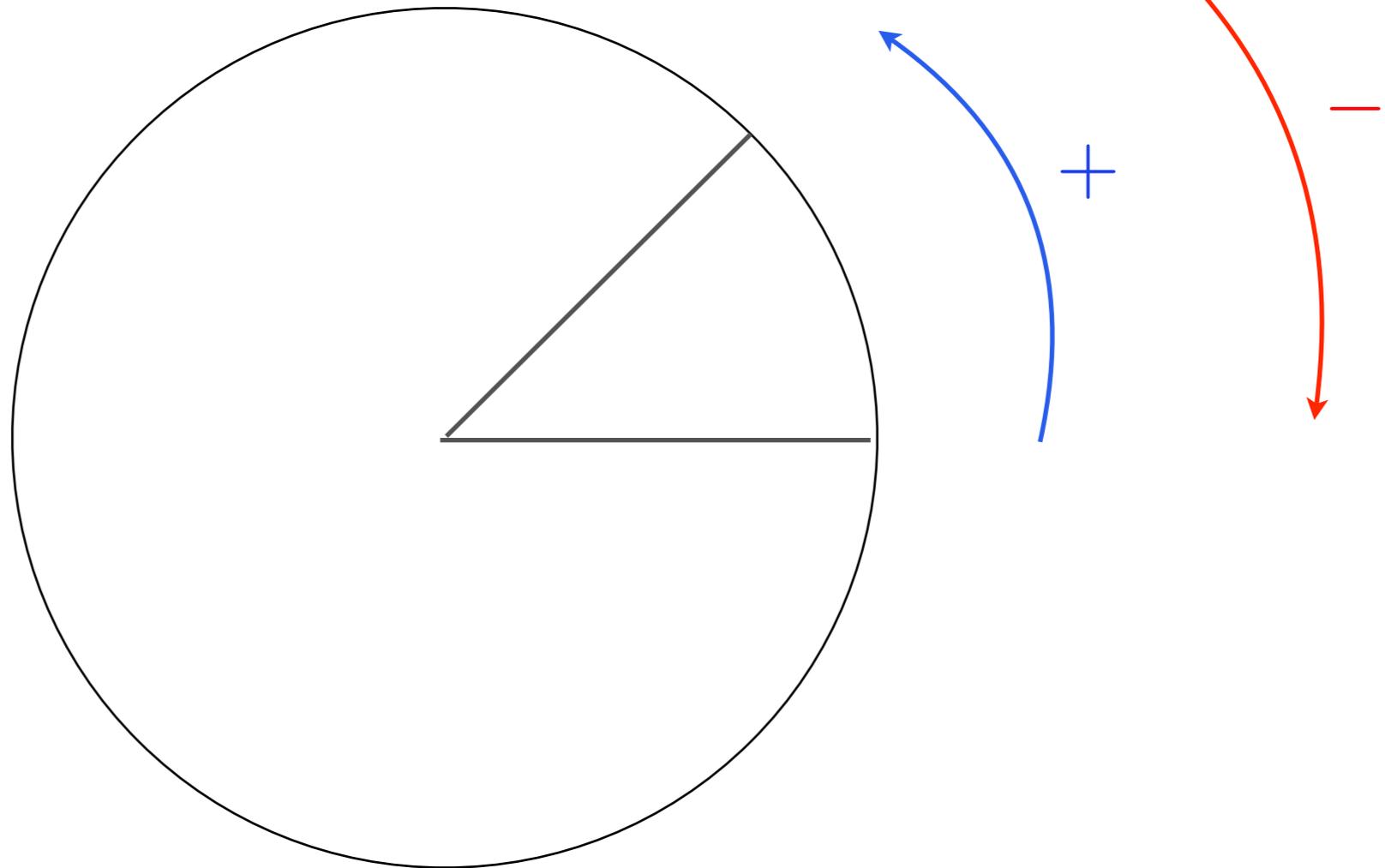


La longueur de l'arc sur  
un cercle de rayon 1.

Est la mesure naturelle en calcul différentiel.

On attribue un signe à un angle

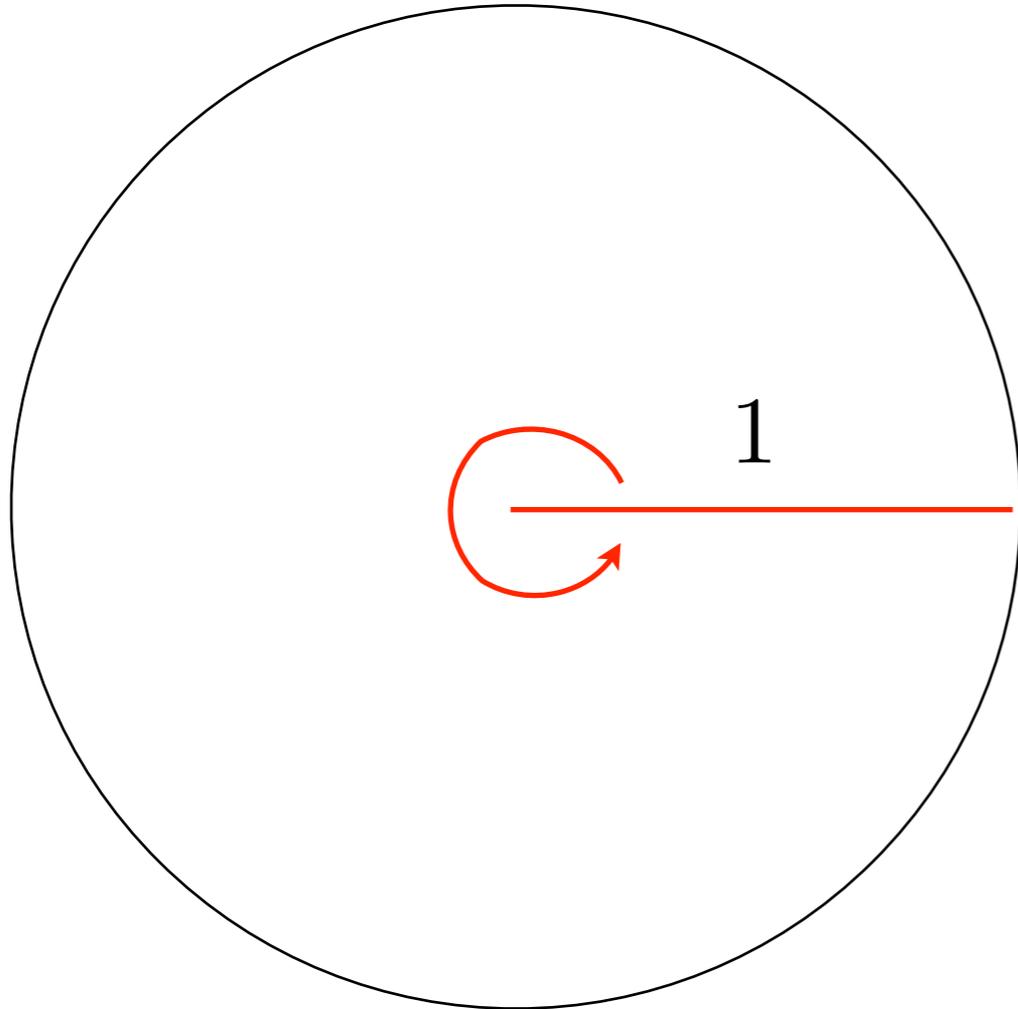
Positif si on tourne dans le sens antihoraire



Négatif si on tourne dans le sens horaire

Par contre il est souvent plus parlant de mesurer les angles en terme de proportion d'un tour

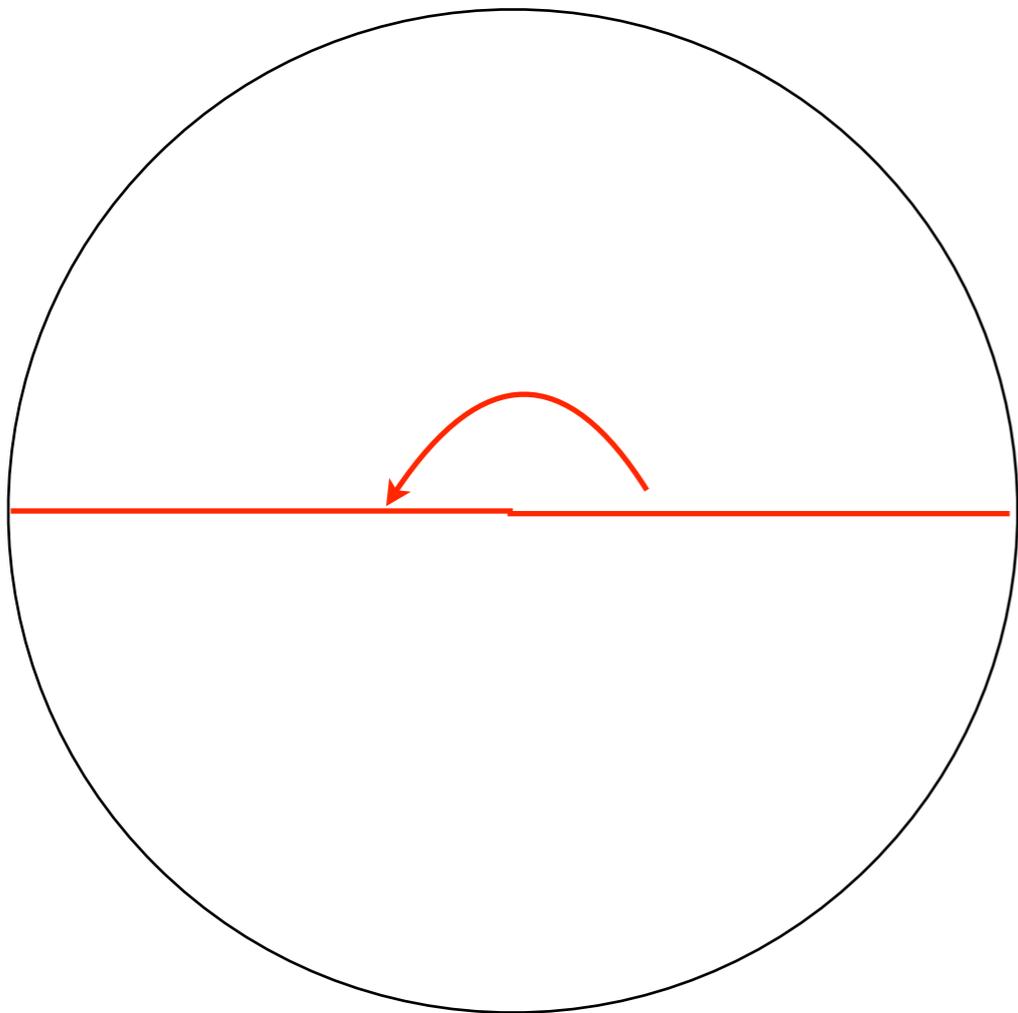
1 tour



Degré:  $360^\circ$

Radian:  $\text{circ} = 2\pi r = 2\pi$

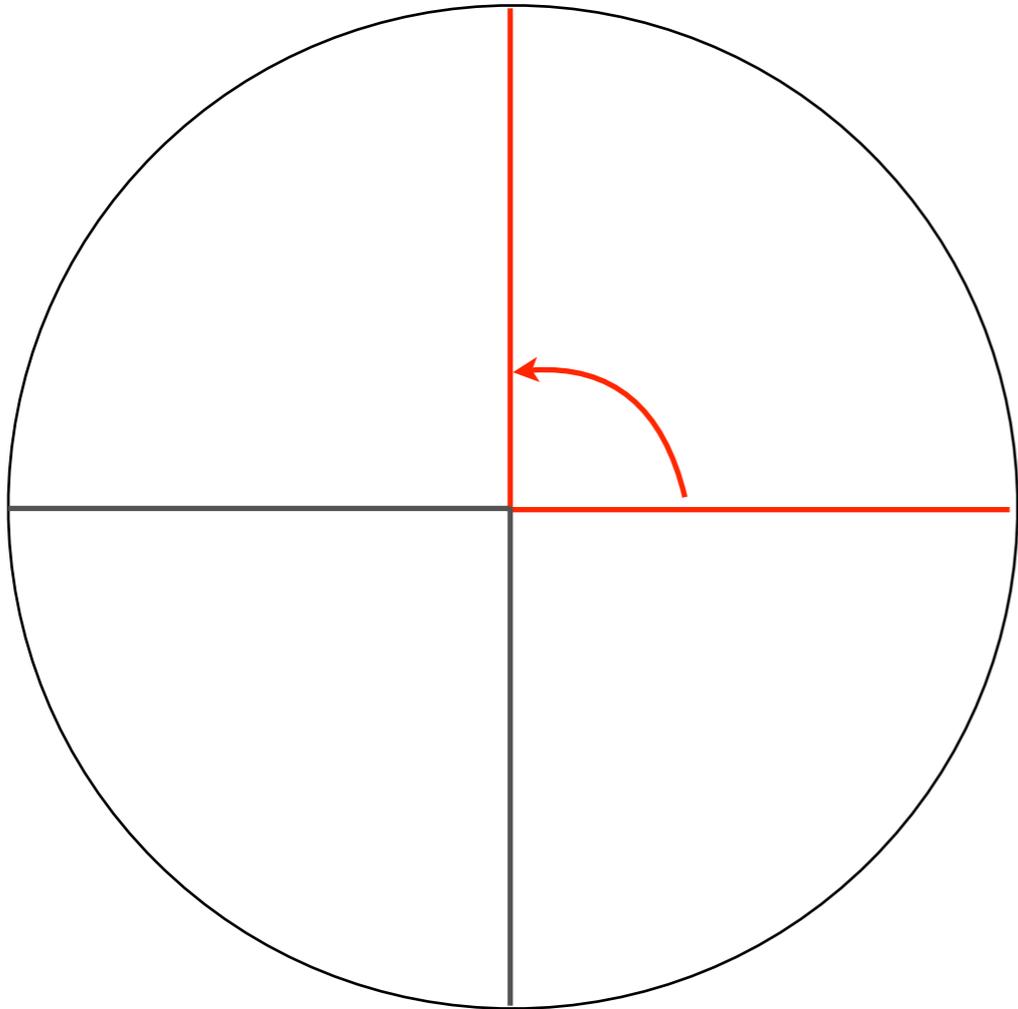
$\frac{1}{2}$  tour



Degré:  $\frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$

Radian:  $\frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$

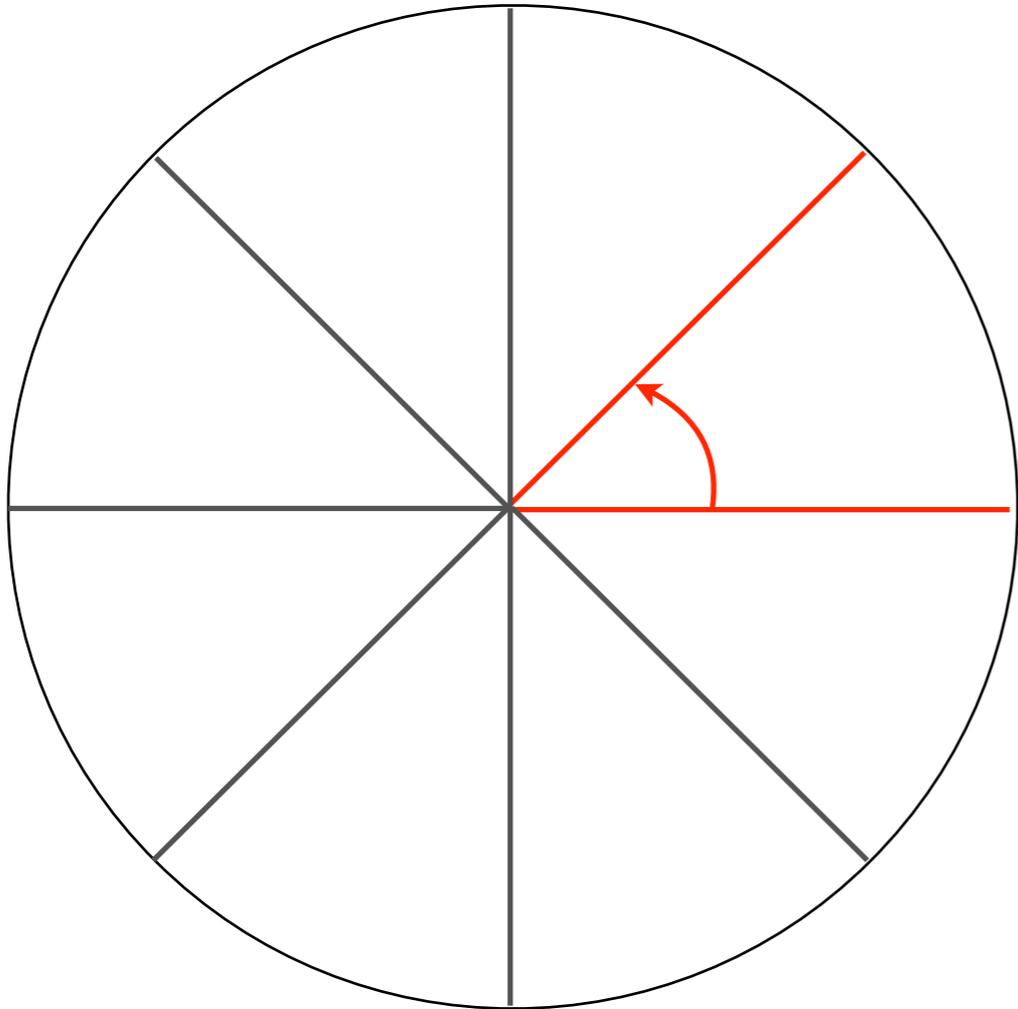
$\frac{1}{4}$  tour



Degré:  $\frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$

Radian:  $\frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$

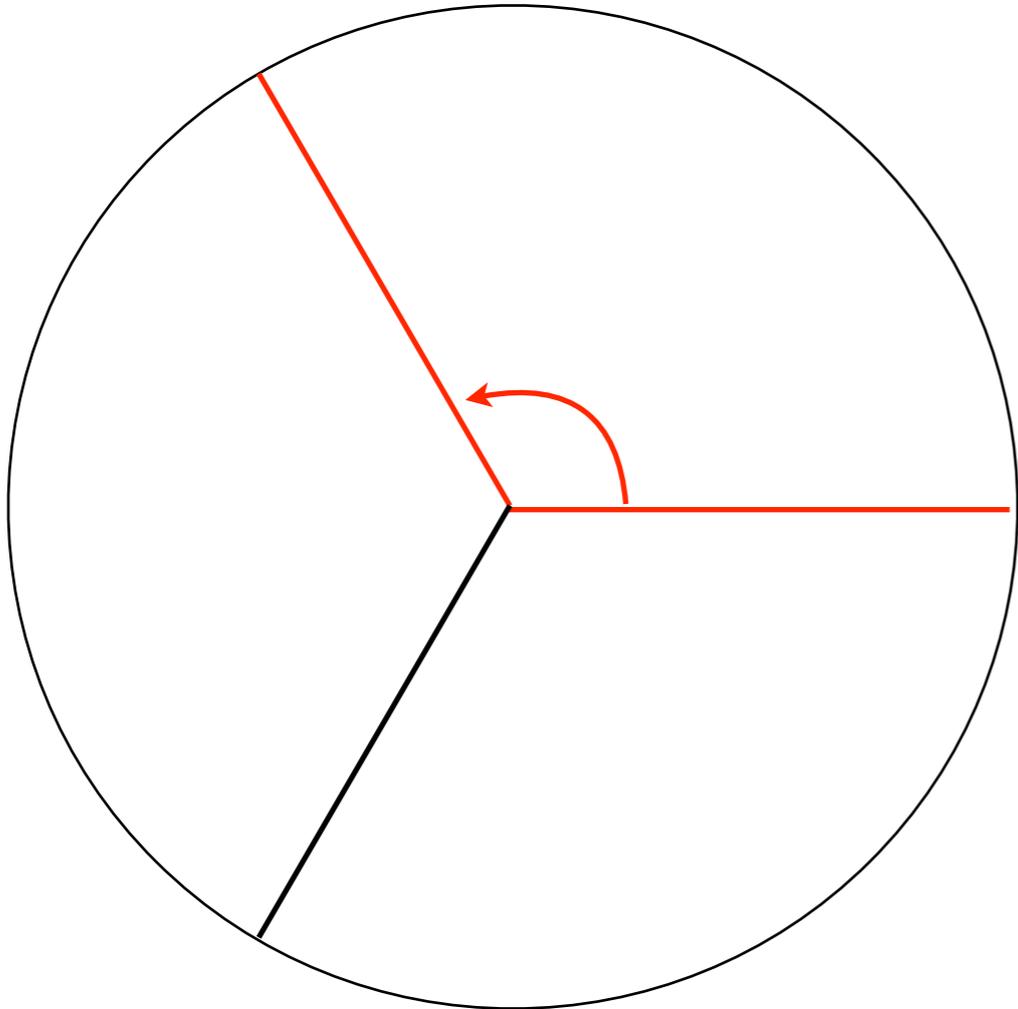
$\frac{1}{8}$  tour



Degré:  $\frac{1}{8} \times 360^\circ = 45^\circ$

Radian:  $\frac{1}{8} \times 2\pi = \frac{\pi}{4}$

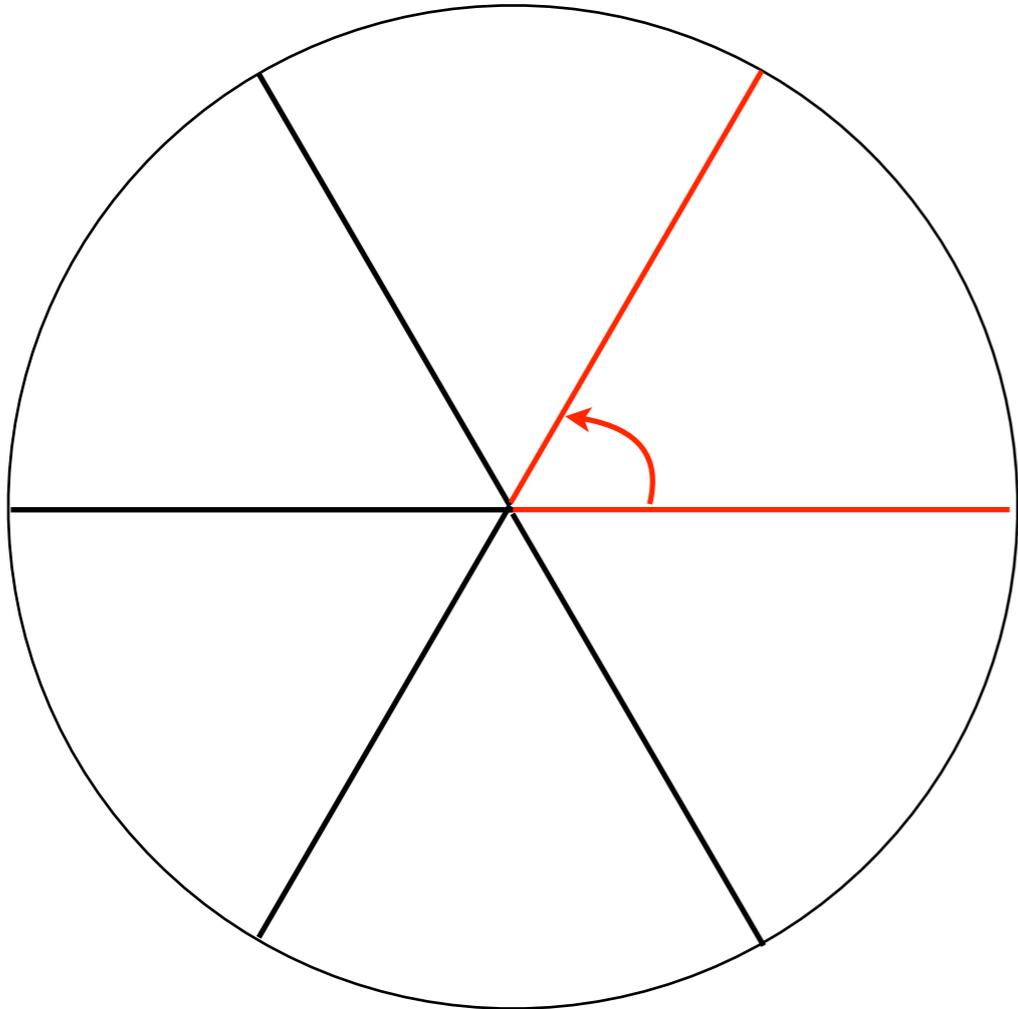
$\frac{1}{3}$  tour



Degré:  $\frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$

Radian:  $\frac{1}{3} \times 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

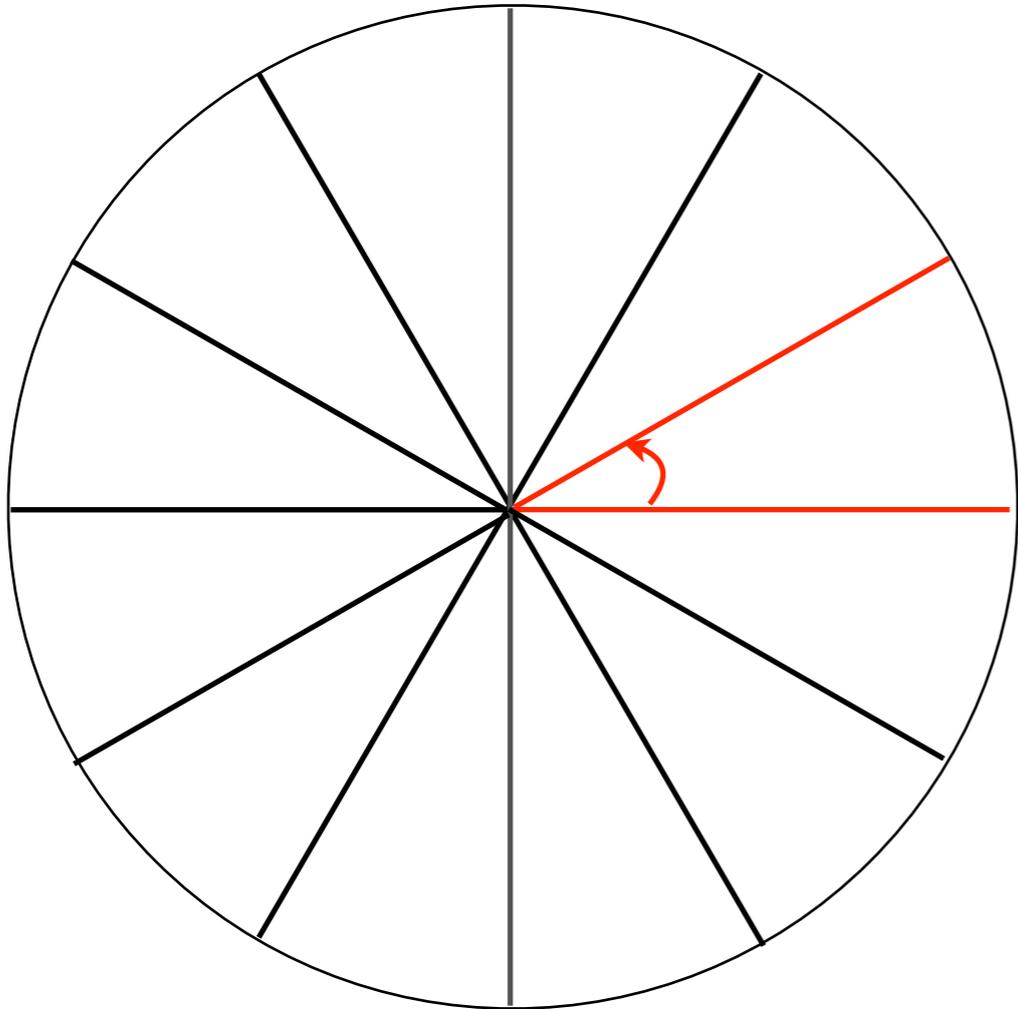
$\frac{1}{6}$  tour



Degré:  $\frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$

Radian:  $\frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$

$\frac{1}{12}$  tour



Degré:  $\frac{1}{12} \times 360^\circ = 30^\circ$

Radian:  $\frac{1}{12} \times 2\pi = \frac{\pi}{6}$

Donc si  $p$  est la proportion d'un tour

$$\theta_{\text{deg}} = p \times 360 \qquad \theta_{\text{rad}} = p \times 2\pi$$

$$\frac{\theta_{\text{deg}}}{360} = p \qquad \frac{\theta_{\text{rad}}}{2\pi} = p$$

$$\frac{\theta_{\text{deg}}}{360} = \frac{\theta_{\text{rad}}}{2\pi}$$

$$\theta_{\text{deg}} = \frac{\theta_{\text{rad}} \times 360}{2\pi} = \frac{\theta_{\text{rad}} \times 180}{\pi}$$

$$\theta_{\text{rad}} = \frac{\theta_{\text{deg}} \times 2\pi}{360} = \frac{\theta_{\text{deg}} \times \pi}{180}$$

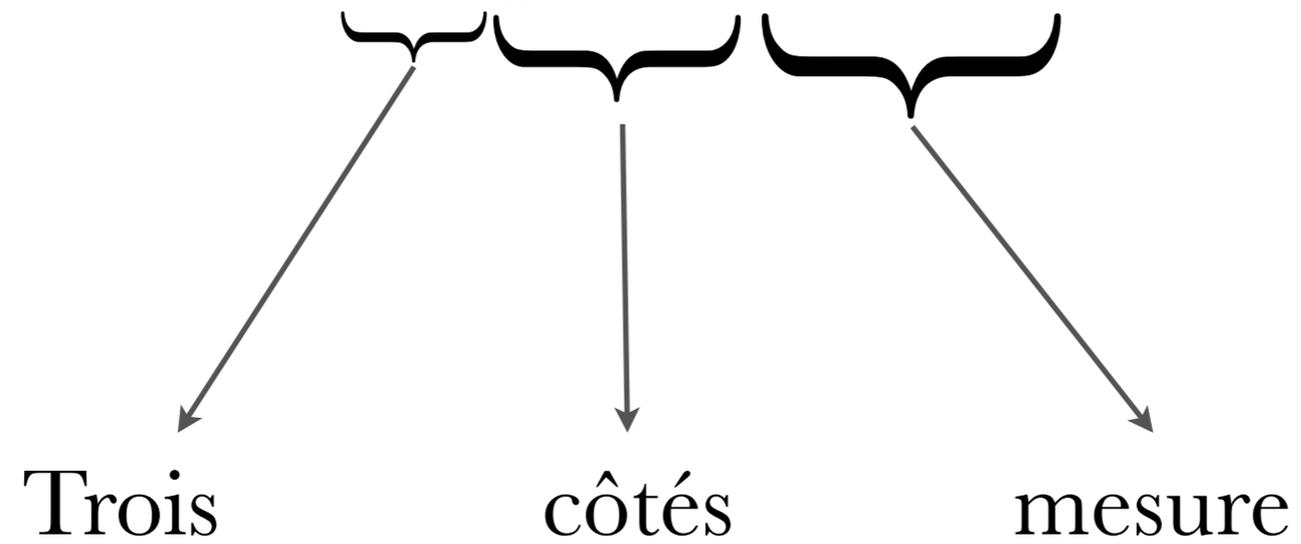
## Example

$$\theta_{\text{rad}} = \frac{150^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{15}{18} \times \pi = \frac{5}{6} \times \pi = \frac{5\pi}{6}$$

## Example

$$\begin{aligned}\theta_{\text{deg}} &= \frac{\frac{4\pi}{3} \times 180^\circ}{\pi} = \frac{4\pi}{3} \times \frac{1}{\pi} \times 180^\circ \\ &= \frac{4 \times 180^\circ}{3} \\ &= 4 \times 60^\circ \\ &= 240^\circ\end{aligned}$$

# Trigonométrie



La trigonométrie sert à mesurer les côtés d'un triangle.

Commençons par un triangle rectangle.

Que sait-on sur les triangles?

Somme des angles est  $180^\circ$ .

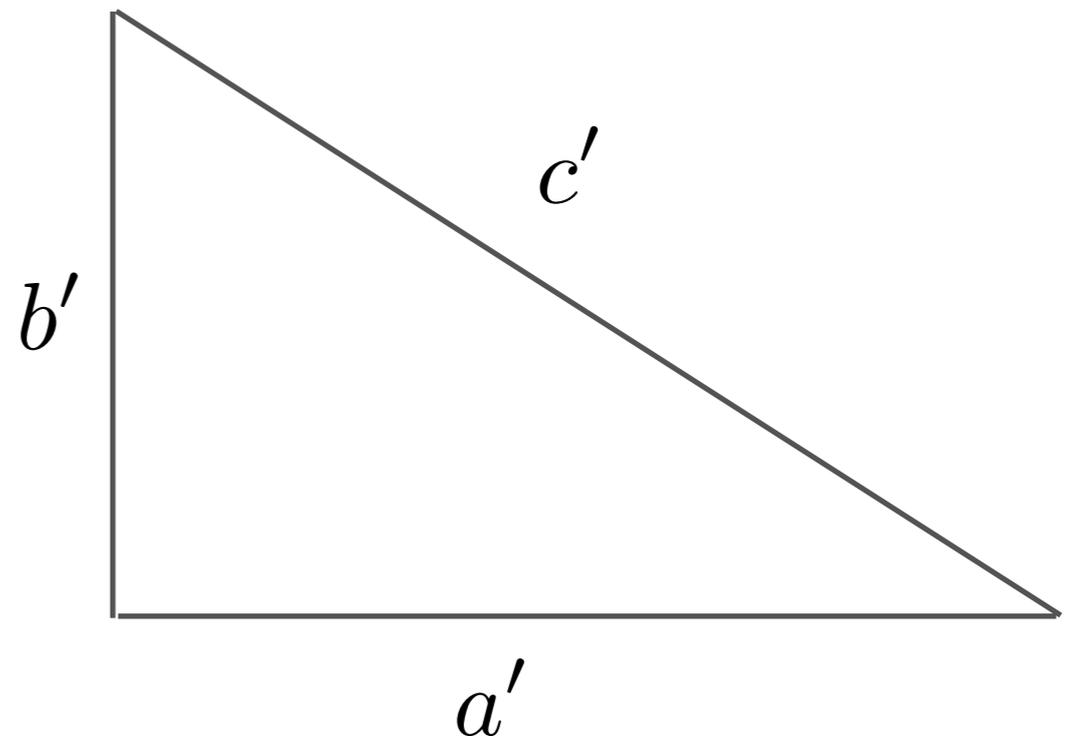
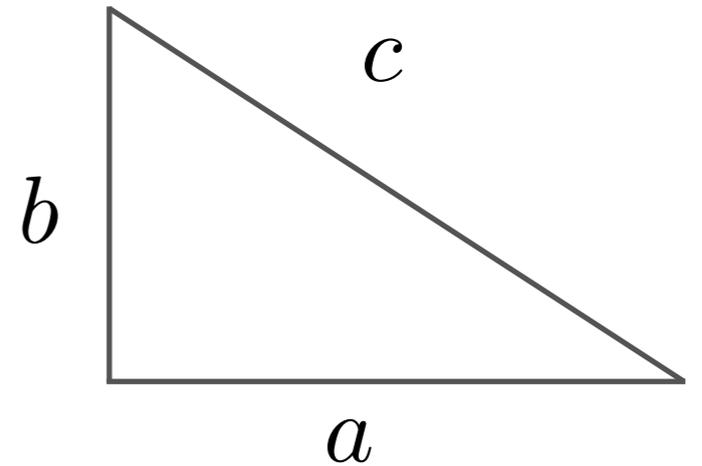
Le théorème de Pythagore

$$a^2 + b^2 = c^2$$

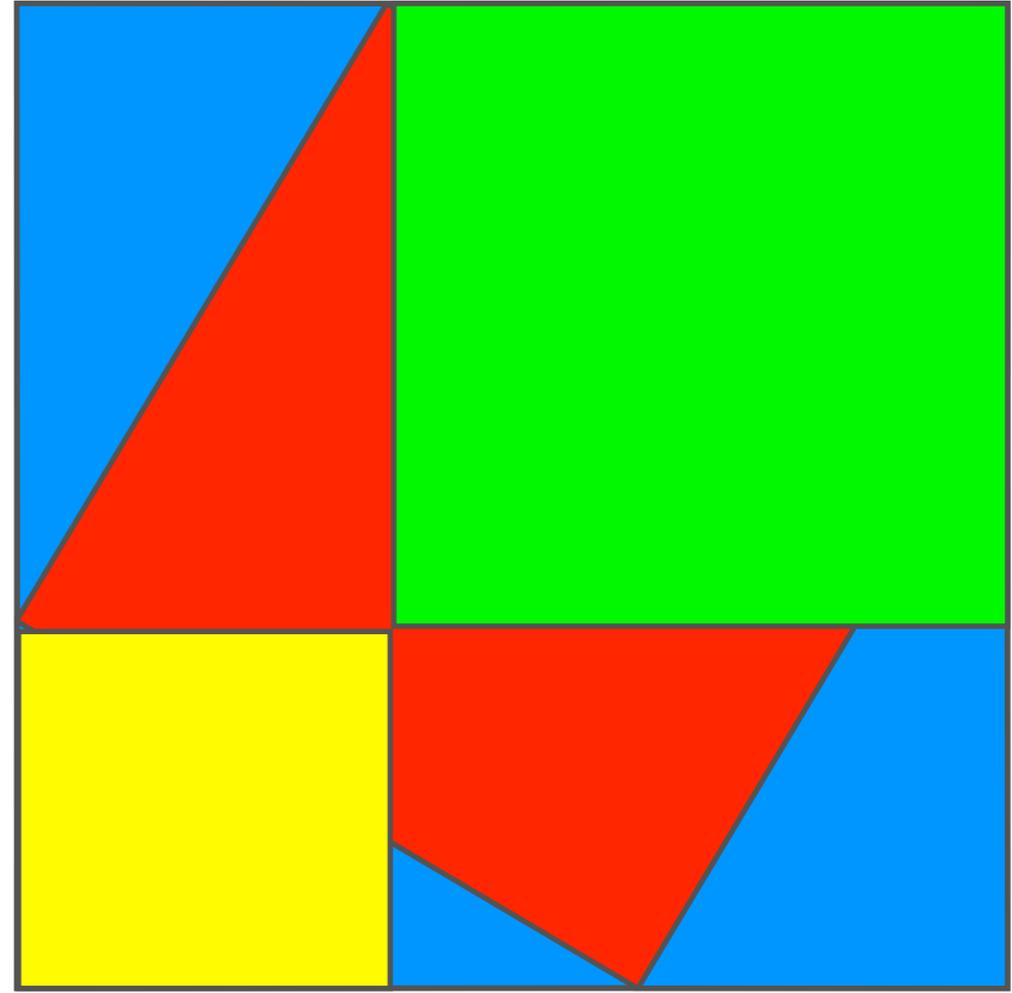
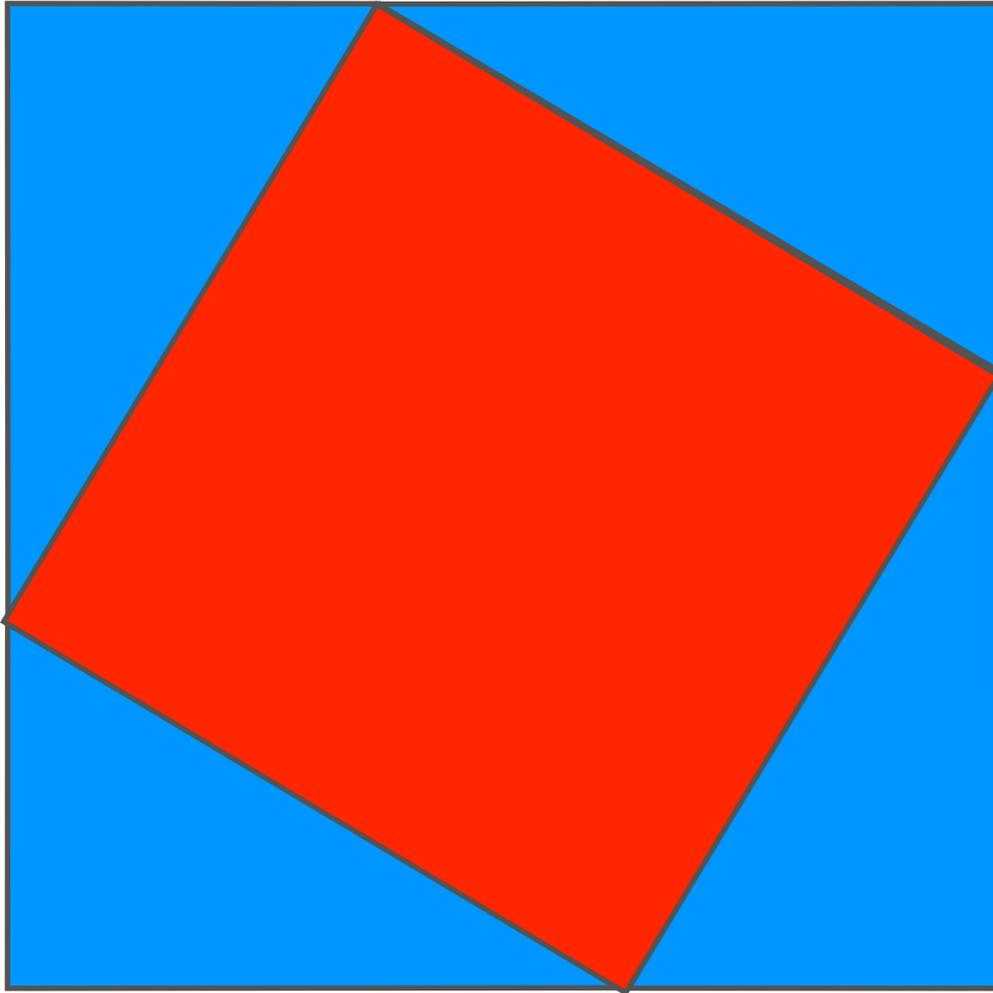
Le théorème de Thalès

Les rapports de côtés homologues de triangles semblables sont égaux

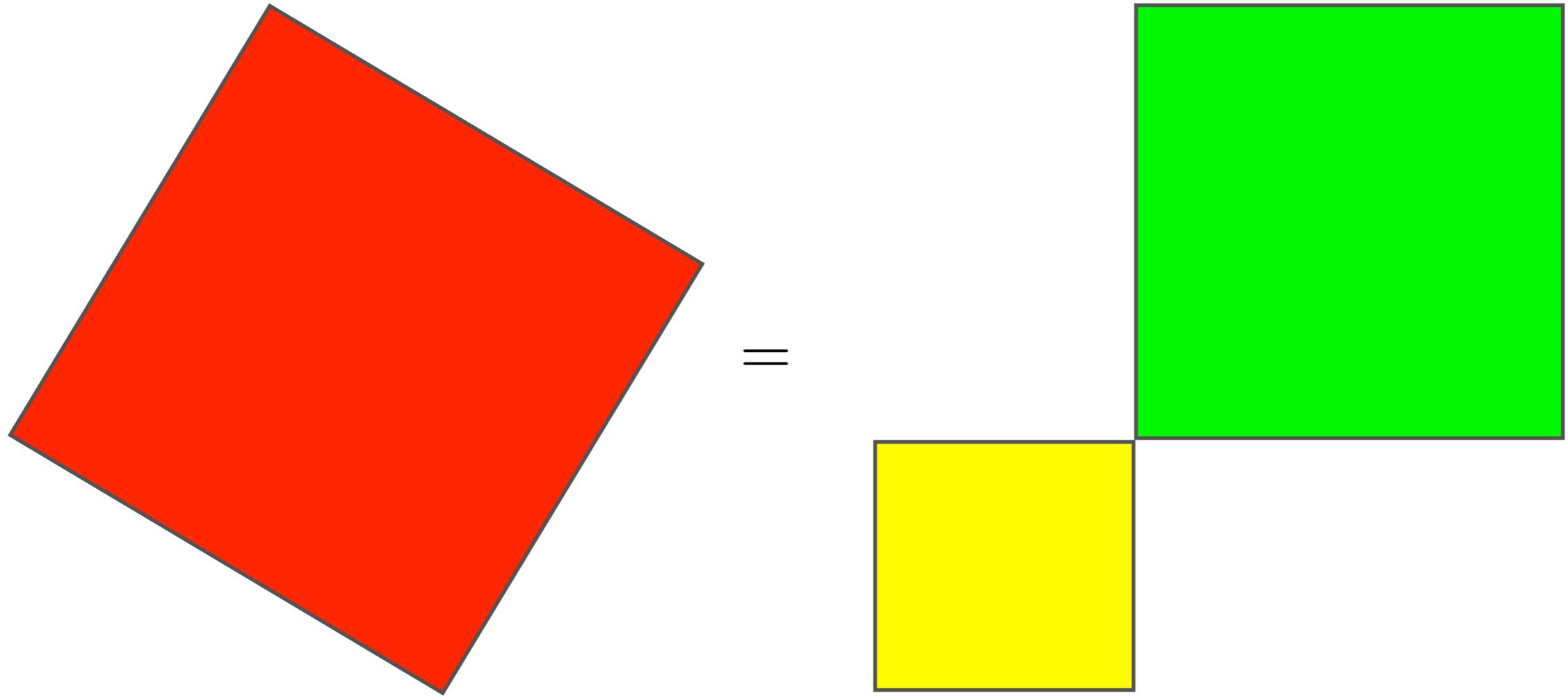
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$



# Théorème de Pythagore

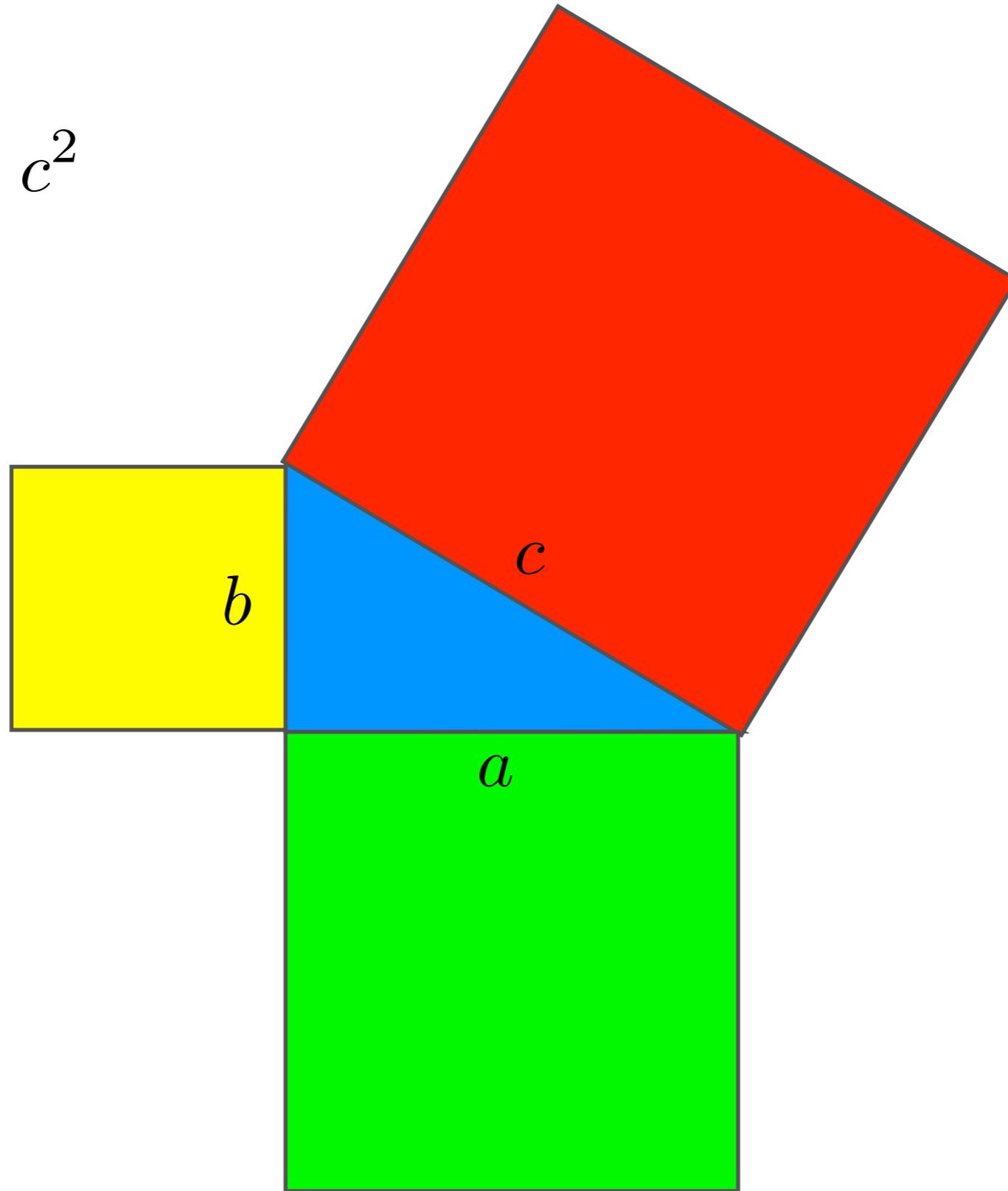


# Théorème de Pythagore

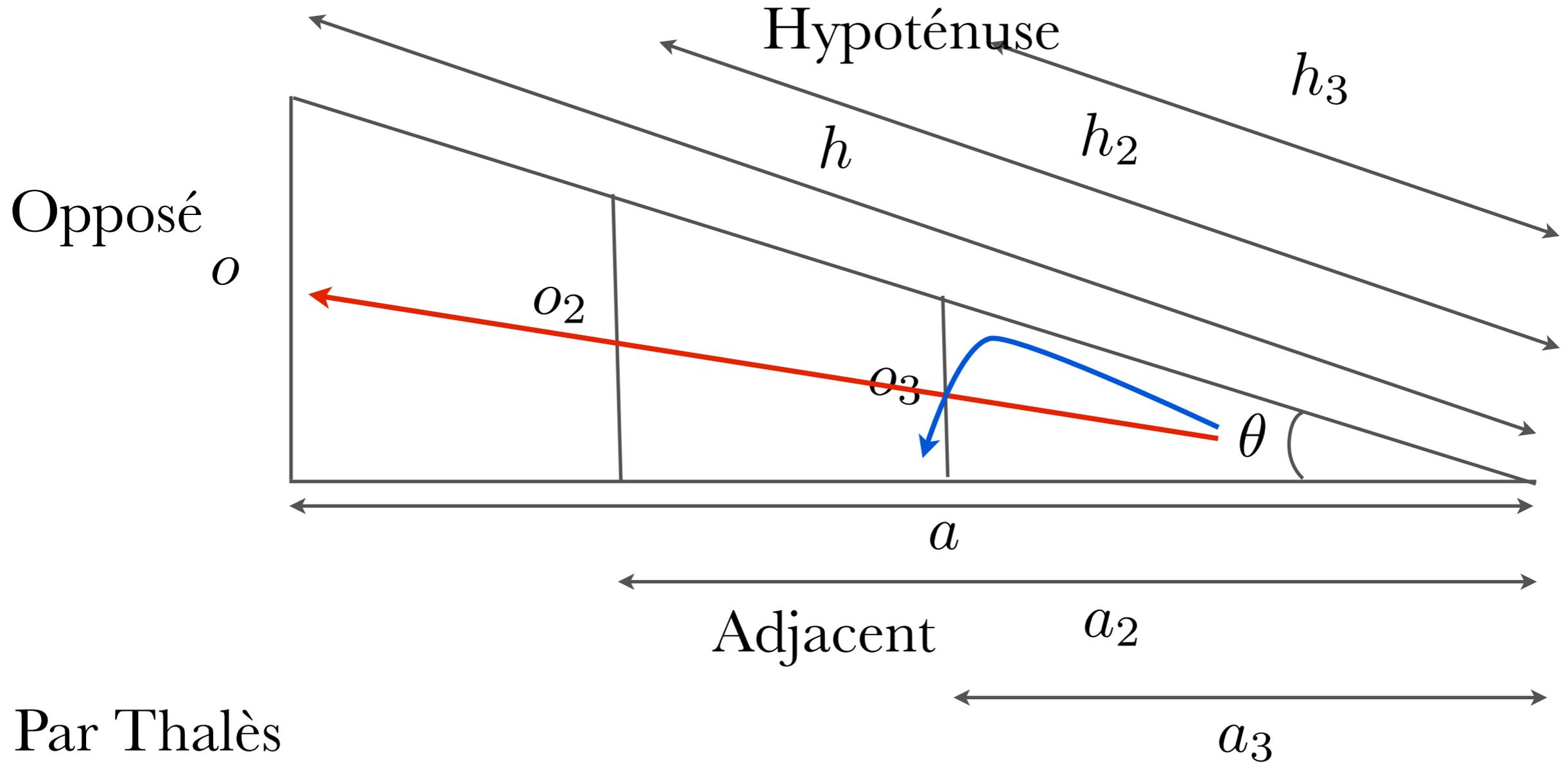


# Théorème de Pythagore

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Si on a un triangle rectangle et qu'on fixe un angle



Par Thalès

$$\frac{a}{h} = \frac{a_2}{h_2} = \frac{a_3}{h_3}$$

$$\frac{o}{a} = \frac{o_2}{a_2} = \frac{o_3}{a_3}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{h_2}{a_2} = \frac{h_3}{a_3}$$

$$\frac{o}{h} = \frac{o_2}{h_2} = \frac{o_3}{h_3}$$

$$\frac{a}{o} = \frac{a_2}{o_2} = \frac{a_3}{o_3}$$

$$\frac{h}{o} = \frac{h_2}{o_2} = \frac{h_3}{o_3}$$

Ces rapports ne dépendent que de l'angle  $\theta$

Et ils portent des noms.

$$\cos \theta = \frac{a}{h} = \frac{a_2}{h_2} = \frac{a_3}{h_3}$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta = \frac{h}{a} = \frac{h_2}{a_2} = \frac{h_3}{a_3}$$

$$\sin \theta = \frac{o}{h} = \frac{o_2}{h_2} = \frac{o_3}{h_3}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} = \csc \theta = \frac{h}{o} = \frac{h_2}{o_2} = \frac{h_3}{o_3}$$

$$\tan \theta = \frac{o}{a} = \frac{o_2}{a_2} = \frac{o_3}{a_3}$$

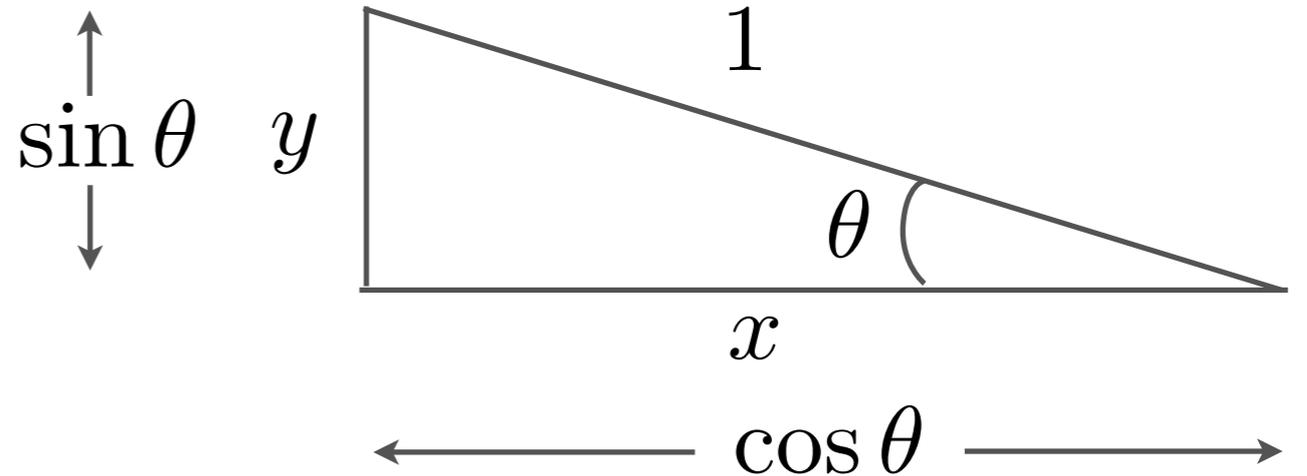
$$\frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta = \frac{a}{o} = \frac{a_2}{o_2} = \frac{a_3}{o_3}$$

**SOH** **CAH** **TOA**

Puisque les rapports trigonométriques dépendent que de l'angle aussi bien prendre un triangle dont un des côtés est simple.

$$\frac{x}{1} = \cos \theta = x$$

$$\frac{y}{1} = \sin \theta = y$$



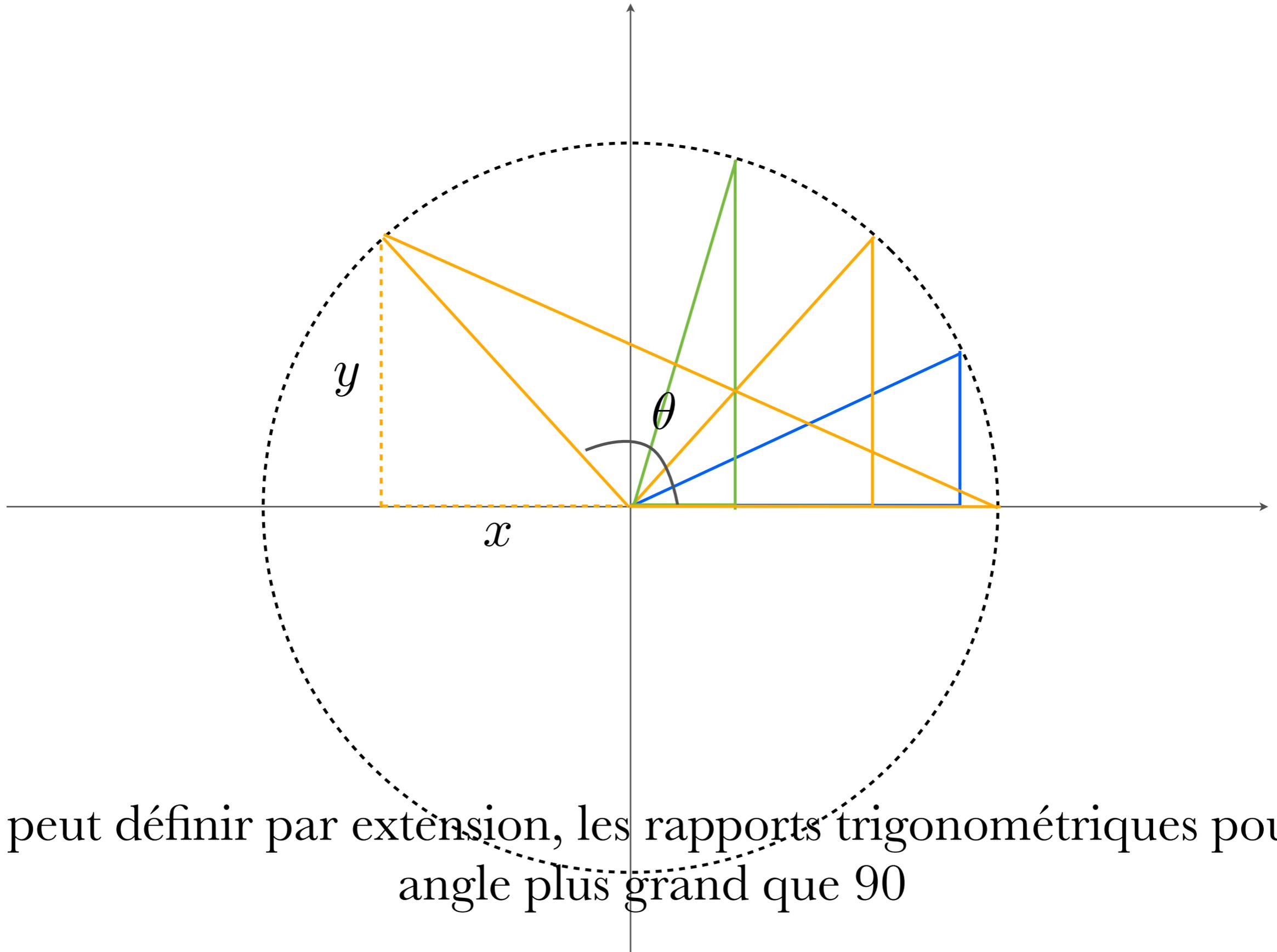
Donc les longueurs des côtés d'un triangle d'hypoténuse 1 sont le sinus et le cosinus de l'angle.

En prime, on a l'identité trigonométrique suivante:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

Si on regarde tous les triangles rectangles d'hypoténuse 1  
L'hypoténuse est un rayon d'un cercle de rayon 1



On peut définir par extension, les rapports trigonométriques pour un angle plus grand que 90

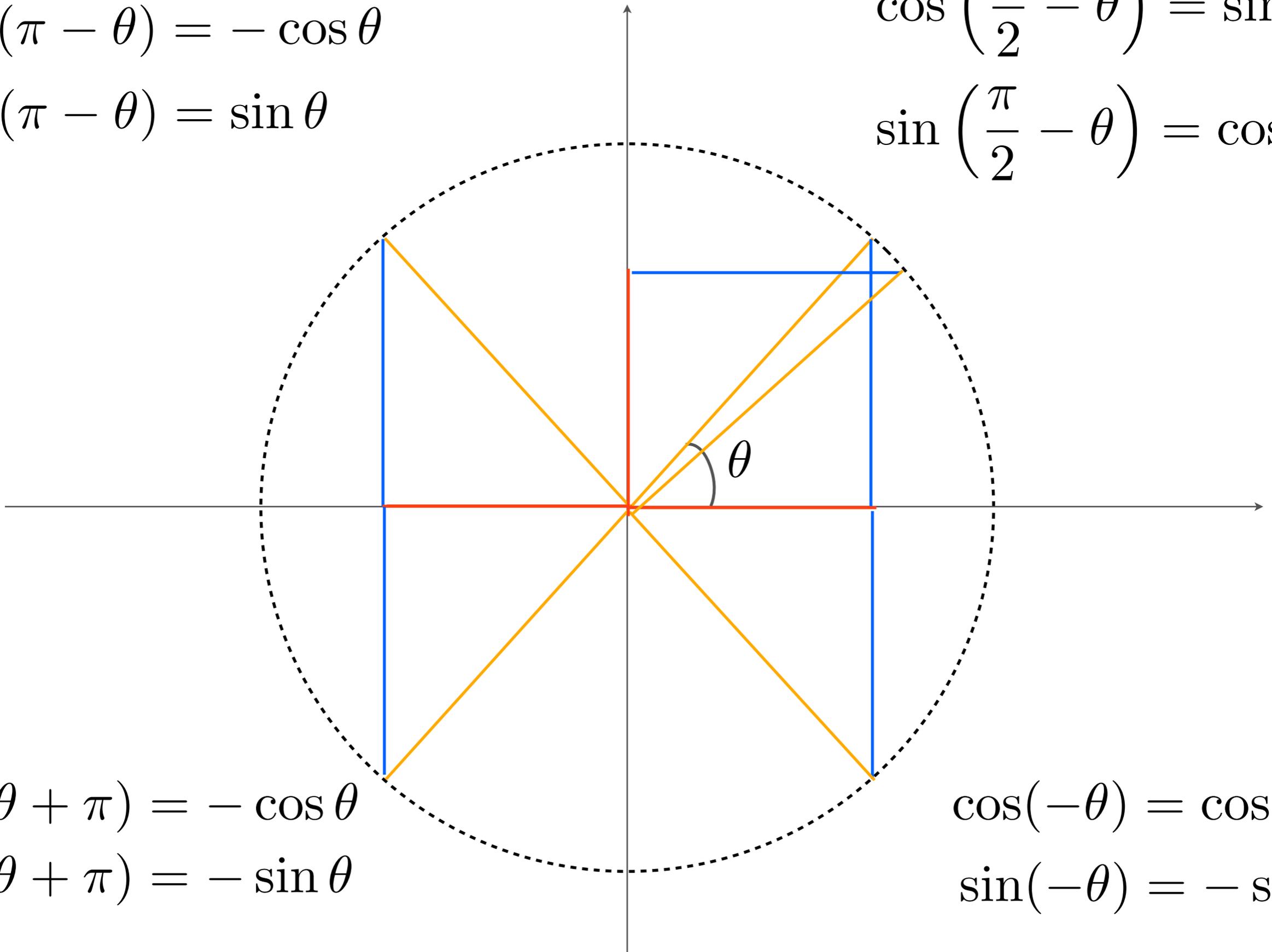
# Quelques symétries

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$



$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

Les coordonnées d'un point sur le cercle unité sont:

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

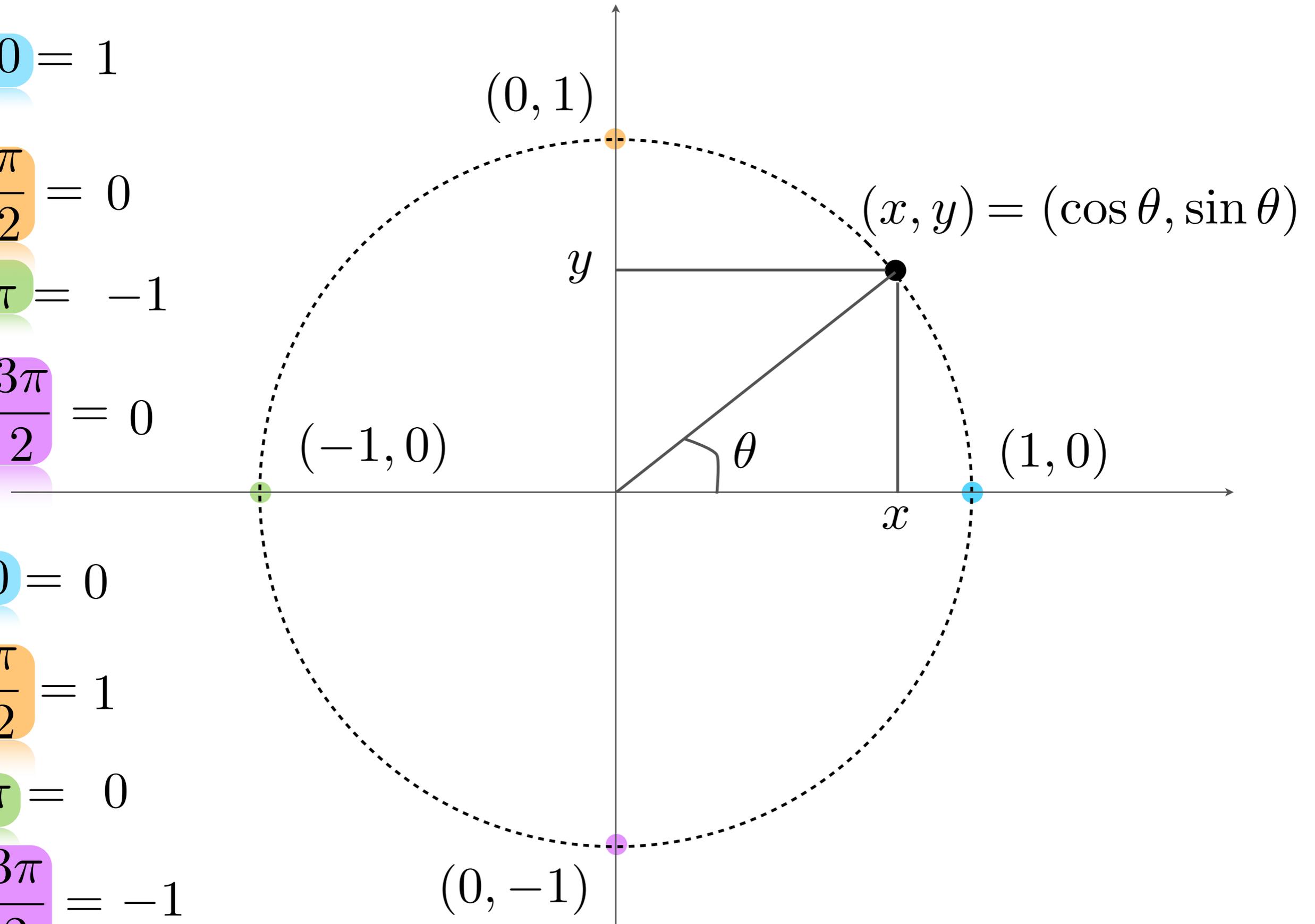
$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\sin 0 = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin \pi = 0$$

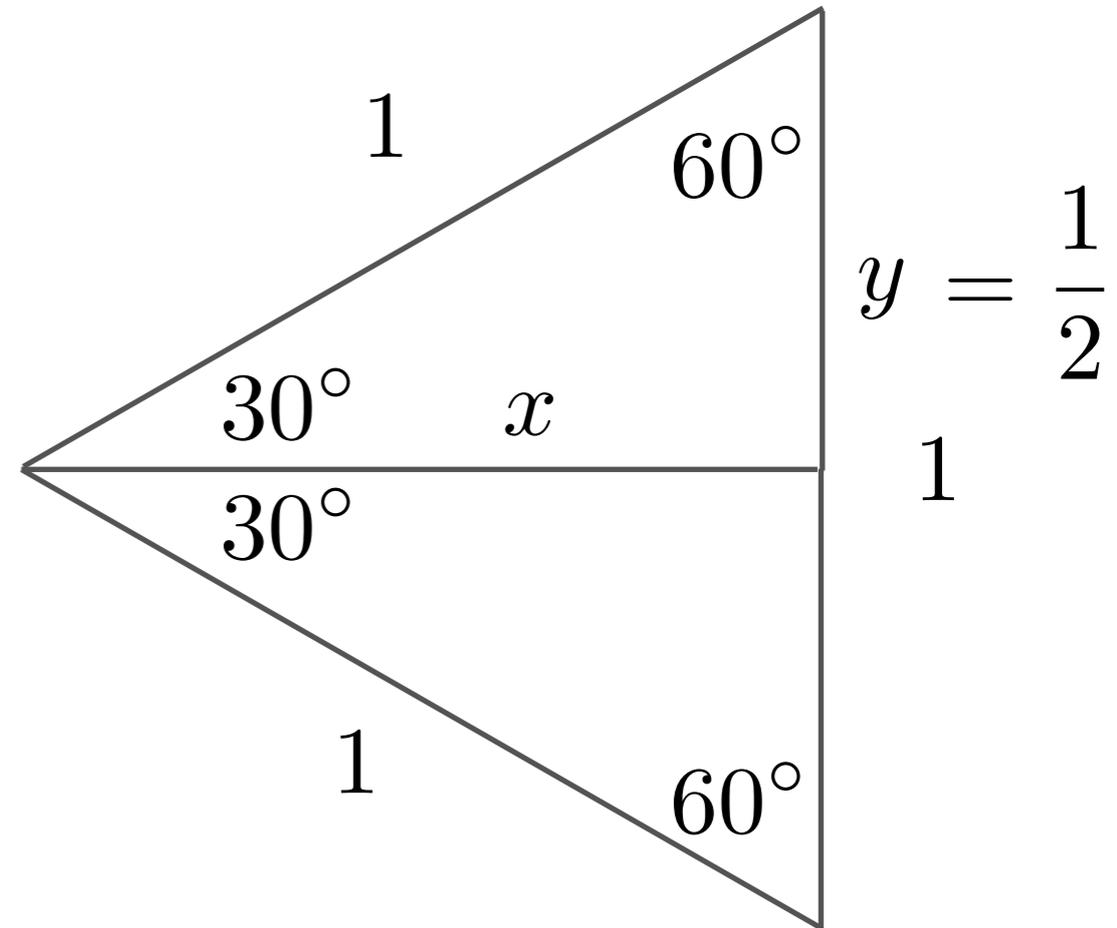
$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$$



Il suffit de connaître le sin et le cos de deux autres angles pour retrouver tout le cercle trigonométrique.

$$\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$



Avec Pythagore

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Un triangle équilatéral !

$$\cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

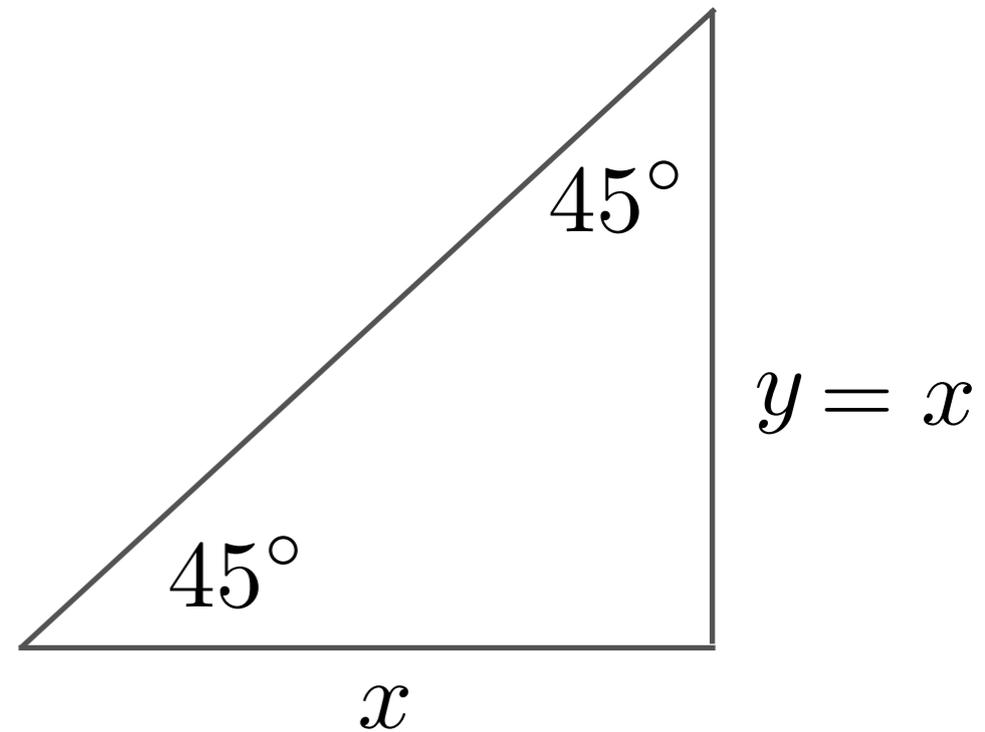
$$\sin 45^\circ = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Avec Pythagore

$$x^2 + x^2 = 1$$

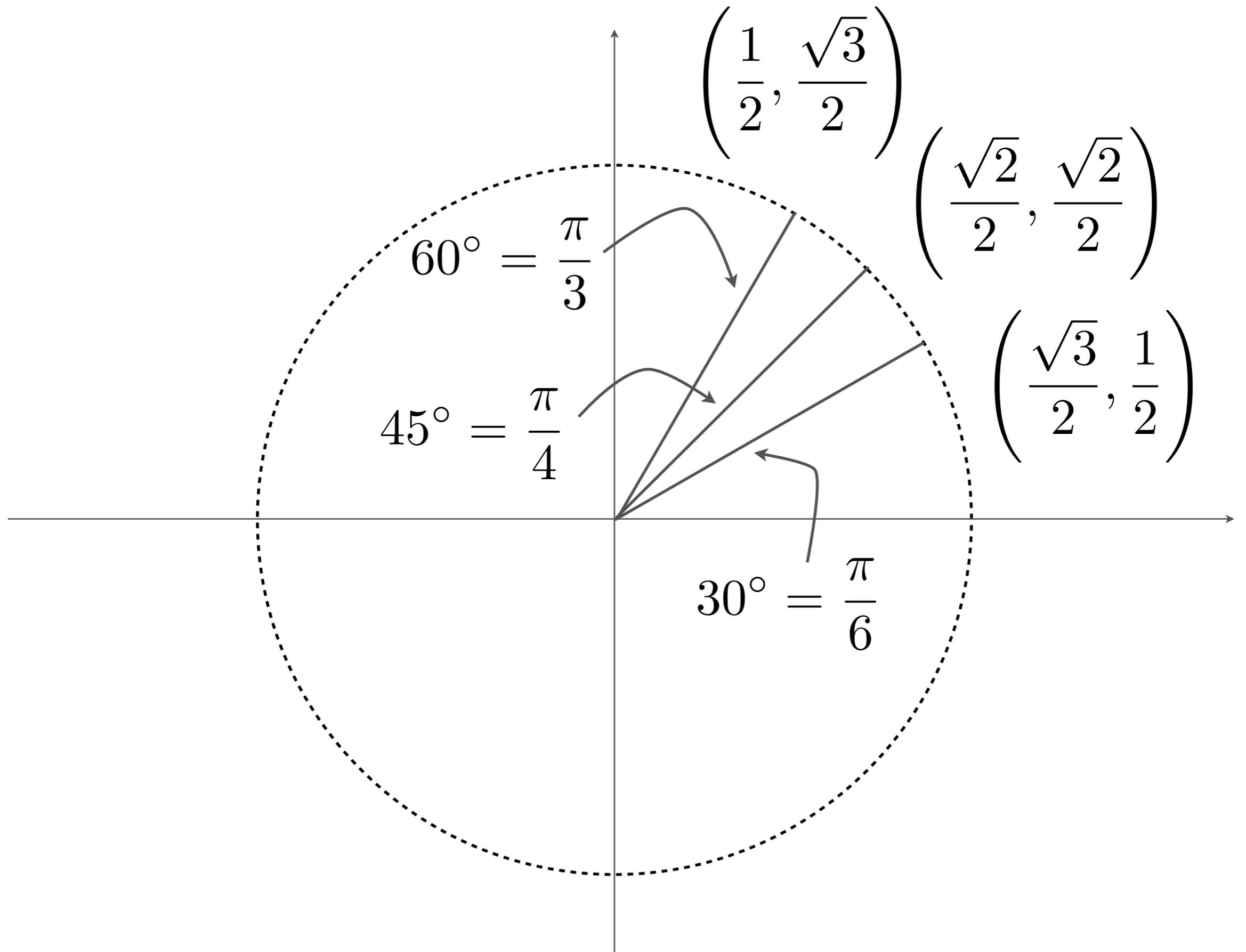
$$2x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



C'est un triangle isocèle

# Les angles remarquables



Faites les exercices suivants

# 1 à 7

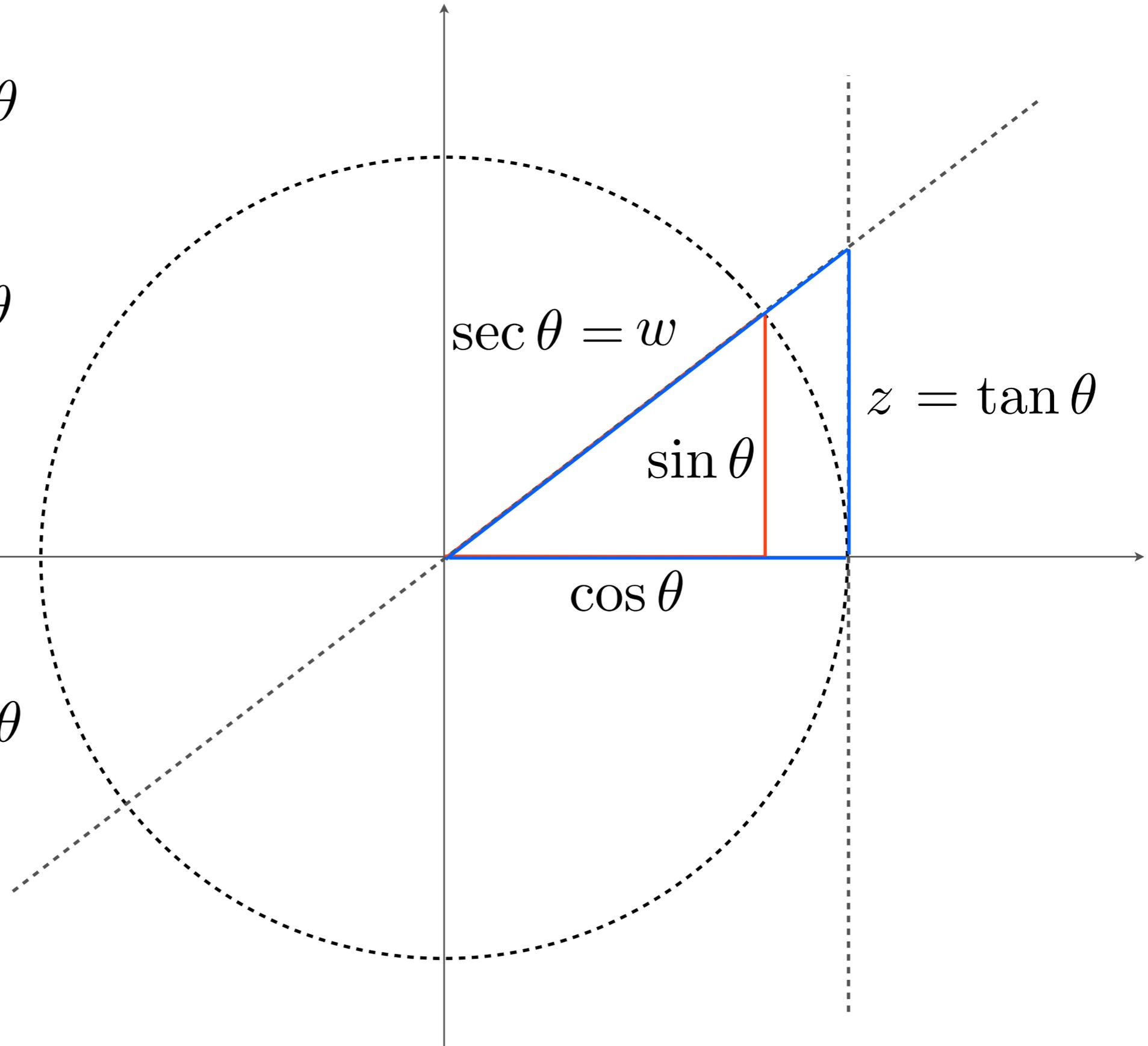
Pourquoi les mathématiciens utilisent-ils le terme «tangente» et «sécante» pour désigner deux concepts différent?

$$\frac{z}{1} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\frac{w}{1} = \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$$

On a gratis que

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

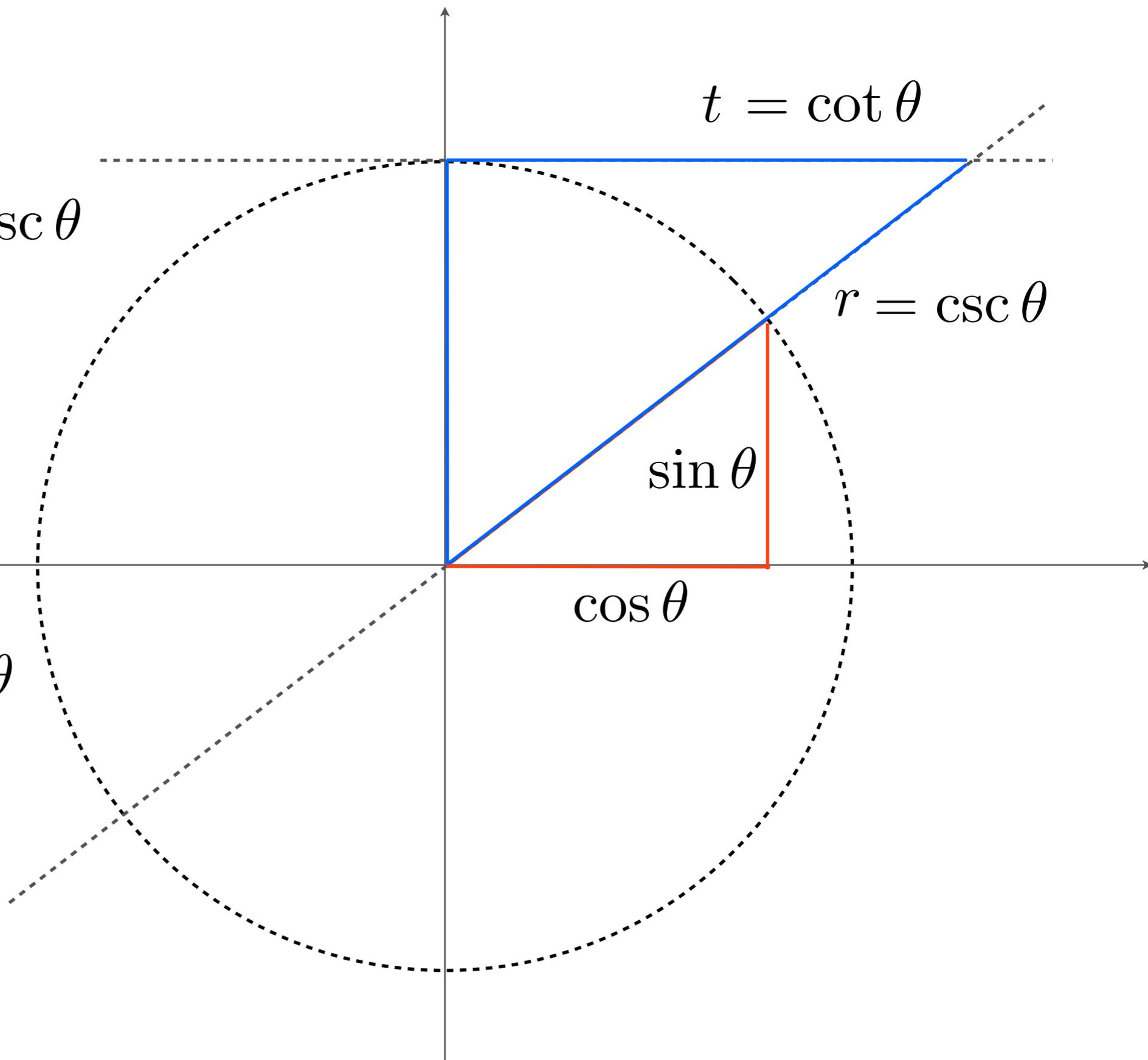


$$\frac{t}{1} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

$$\frac{r}{1} = \frac{1}{\sin \theta} = \csc \theta$$

On a par Pythagore

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

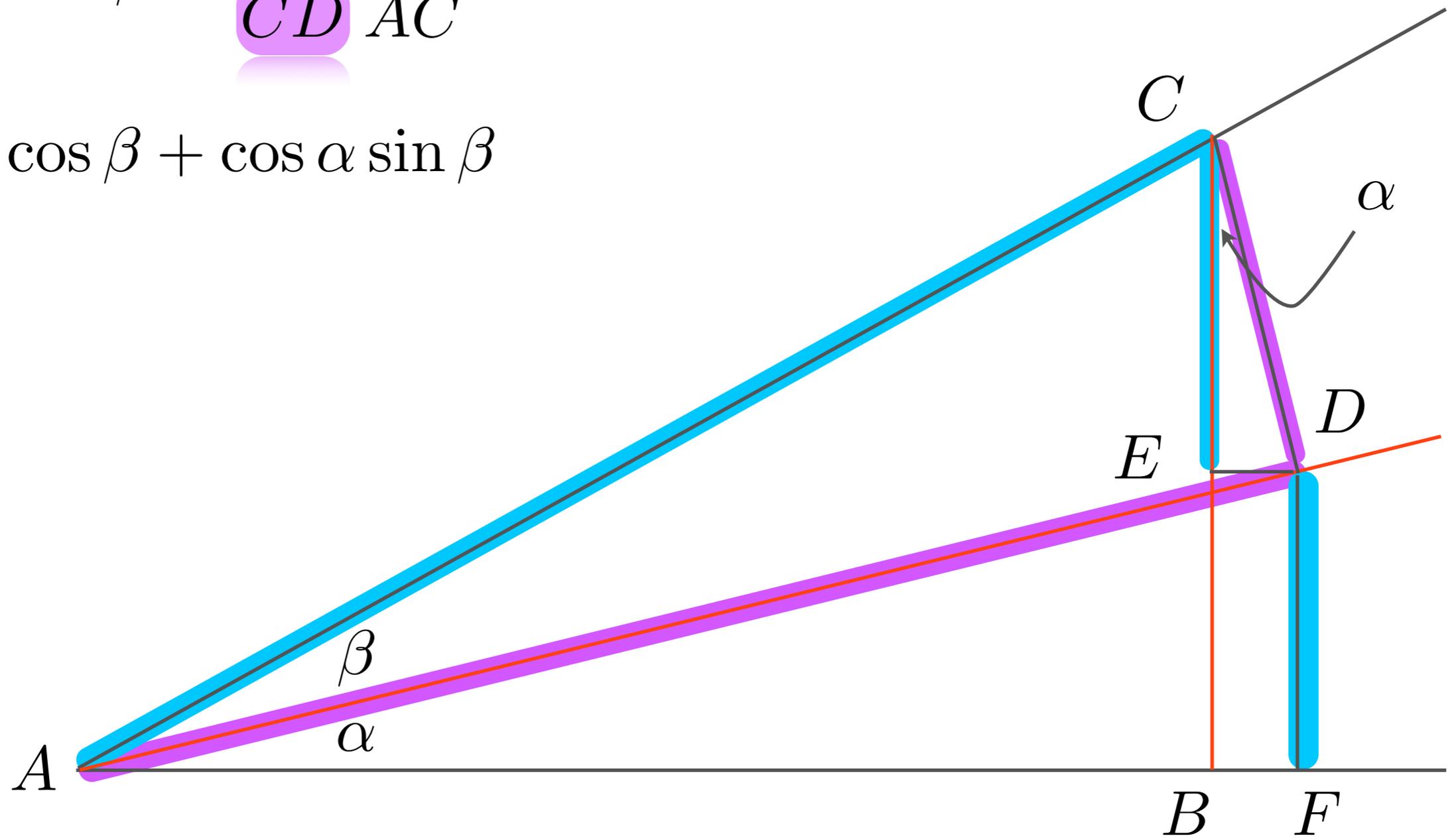


$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BC}{AC} = \frac{BE + EC}{AC} = \frac{BE}{AC} + \frac{EC}{AC} = \frac{DF}{AC} + \frac{EC}{AC}$$

$$= \frac{DF}{AD} \frac{AD}{AC} + \frac{EC}{AC} = \sin \alpha \cos \beta + \frac{EC}{AC}$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \frac{EC}{CD} \frac{CD}{AC}$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

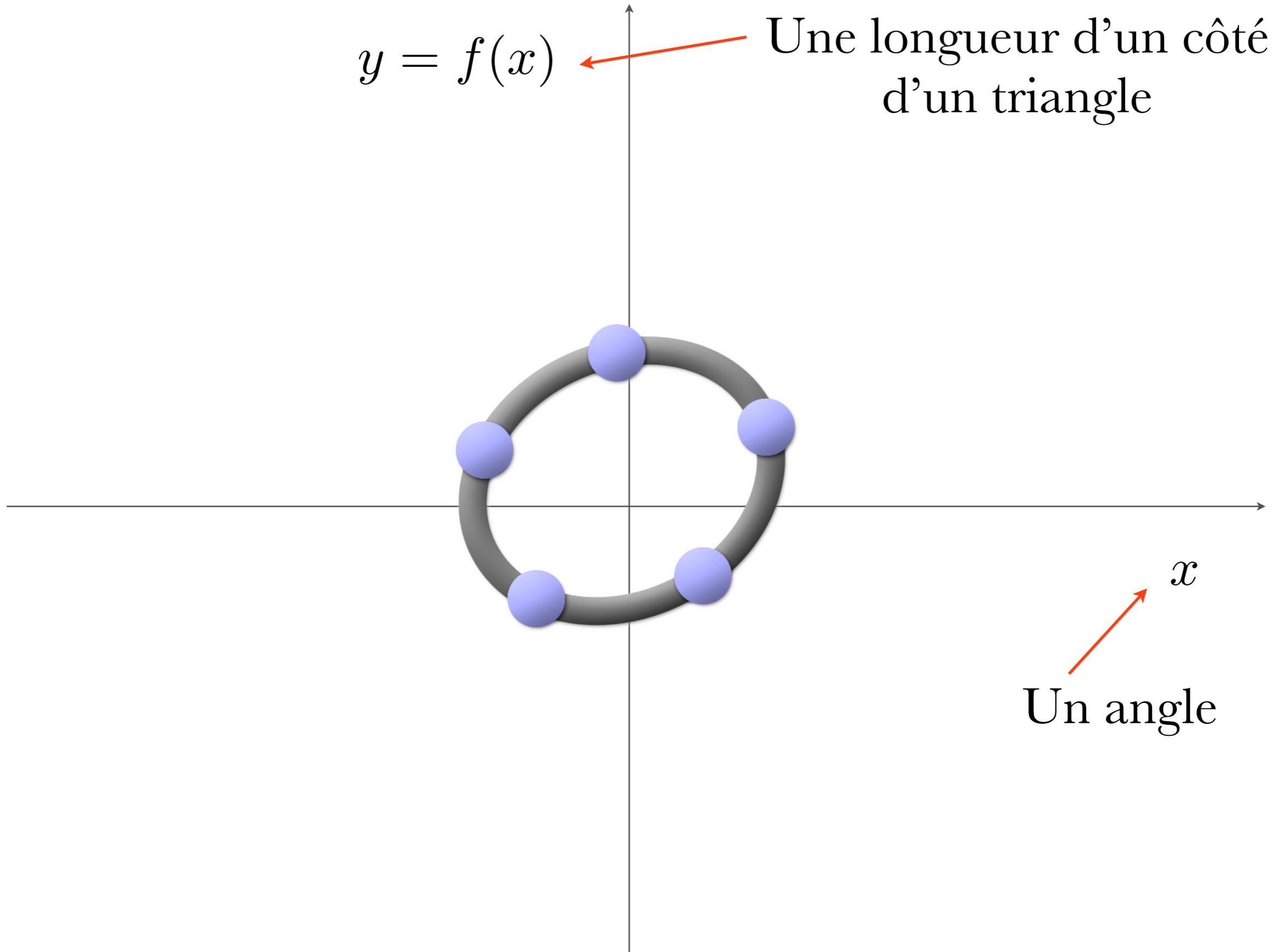




# Fonctions trigonométriques

$$y = f(x)$$

Une longueur d'un côté  
d'un triangle



Un angle

Faites les exercices suivants

# 8 à 10

# Aujourd'hui, nous avons vu

## SOH CAH TOA

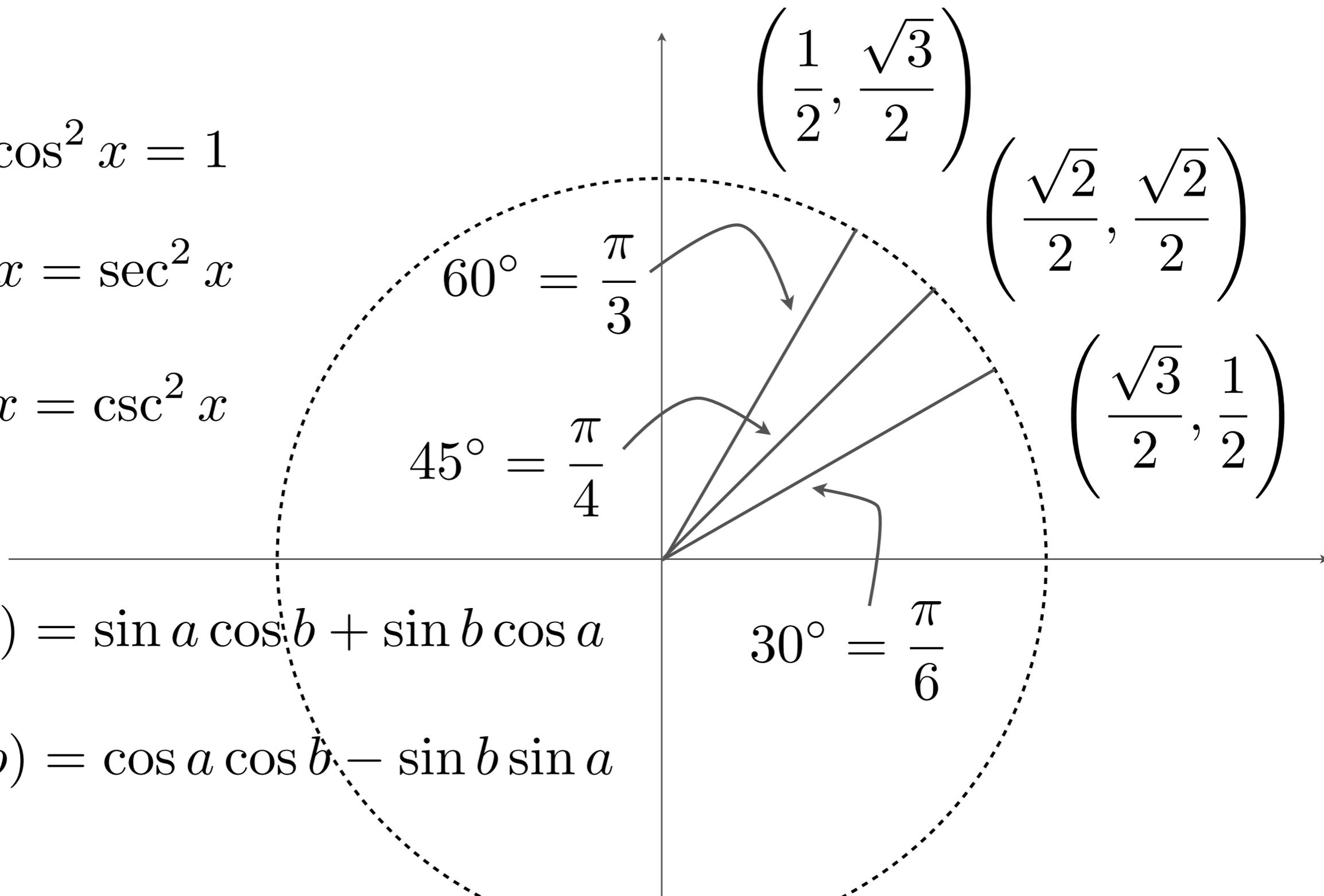
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin b \sin a$$



**Devoir:**

Section 4.1 # 1 à 10