4.4 FONCTION EXPONENTIELLE ET LOGARITHMIQUE

cours 26

Au dernier cours, nous avons vu

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\text{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(\text{arcsec}\, x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad (\text{arccsc}\, x)' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Les lois des exposants et des logarithmes.
- ✓ Les fonctions exponentielles
- ✓ Les fonctions logarithmiques

Légende de l'inventeur du jeu d'échecs.

				...	2^{10}	2^9	2^8
1	2	4	8	2^4	2^5	2^6	2^7

Pas de problème!

2^{63}	...						
				...	2^{10}	2^9	2^8
1	2	4	8	2^4	2^5	2^6	2^7

$$2^0 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{62} + 2^{63} = \sum_{i=0}^{63} 2^i = 2^{64} - 1$$

$$= 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

18 446 744 073 709 551 615 grains de riz !

Bah... c'est quoi... un millier de poches de riz ?

Si j'estime qu'il y a environ 100 grains par cm cube,

il y a donc 10^{15} grains par km cube.

Il faut donc environ 18 446 km cube de riz!

En prenant R = 6 367,5 km comme rayon de la Terre

$$\frac{4\pi}{3}((R+h)^3 - R^3)$$

Je trouve $h \approx 3{,}62$ cm

Donc la quantité de riz nécessaire couvrirait la surface de la Terre d'une couche d'environ 3,62 cm de riz!

Propriétés des exposants.

Soient $a,b \in \mathbb{R}$ et $n,m \in \mathbb{N}$

1. $a^0 = 1$

2. $a^1 = a$

3. $a^n a^m = a^{n+m}$

Justification: $$a^n a^m = \underbrace{(a \ldots a)}_{n}\underbrace{(a \ldots a)}_{m} = \underbrace{(a \ldots a)}_{n+m}$$

4. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

Propriétés des exposants.

5. $(a^n)^m = a^{nm}$

Justification: $$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a \ldots a)}_{n} \ldots \underbrace{(a \ldots a)}_{n}}_{m} = \underbrace{(a \ldots a)}_{nm}$$

6. $a^n b^n = (ab)^n$

Justification: $$a^n b^n = \underbrace{(a \ldots a)}_{n} \underbrace{(b \ldots b)}_{n} = \underbrace{(ab) \ldots (ab)}_{n}$$

On définit $\quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$$a^{\frac{1}{n}} = b \Longleftrightarrow b^n = a$$

L'utilisation d'exposant fractionnaire pour les racines n-ième est cohérent avec les propriétés des exposants.

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}n} = a^1 = a$$

Naturellement, pour *n* pair, il faut que $a > 0$

On peut donc définir les exposants fractionnaires comme

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

On aimerait définir une fonction

$$f(x) = a^x$$

Pour que cette fonction ait un sens pour toute valeur de x

il faut que $a > 0$

De plus, pour obtenir une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

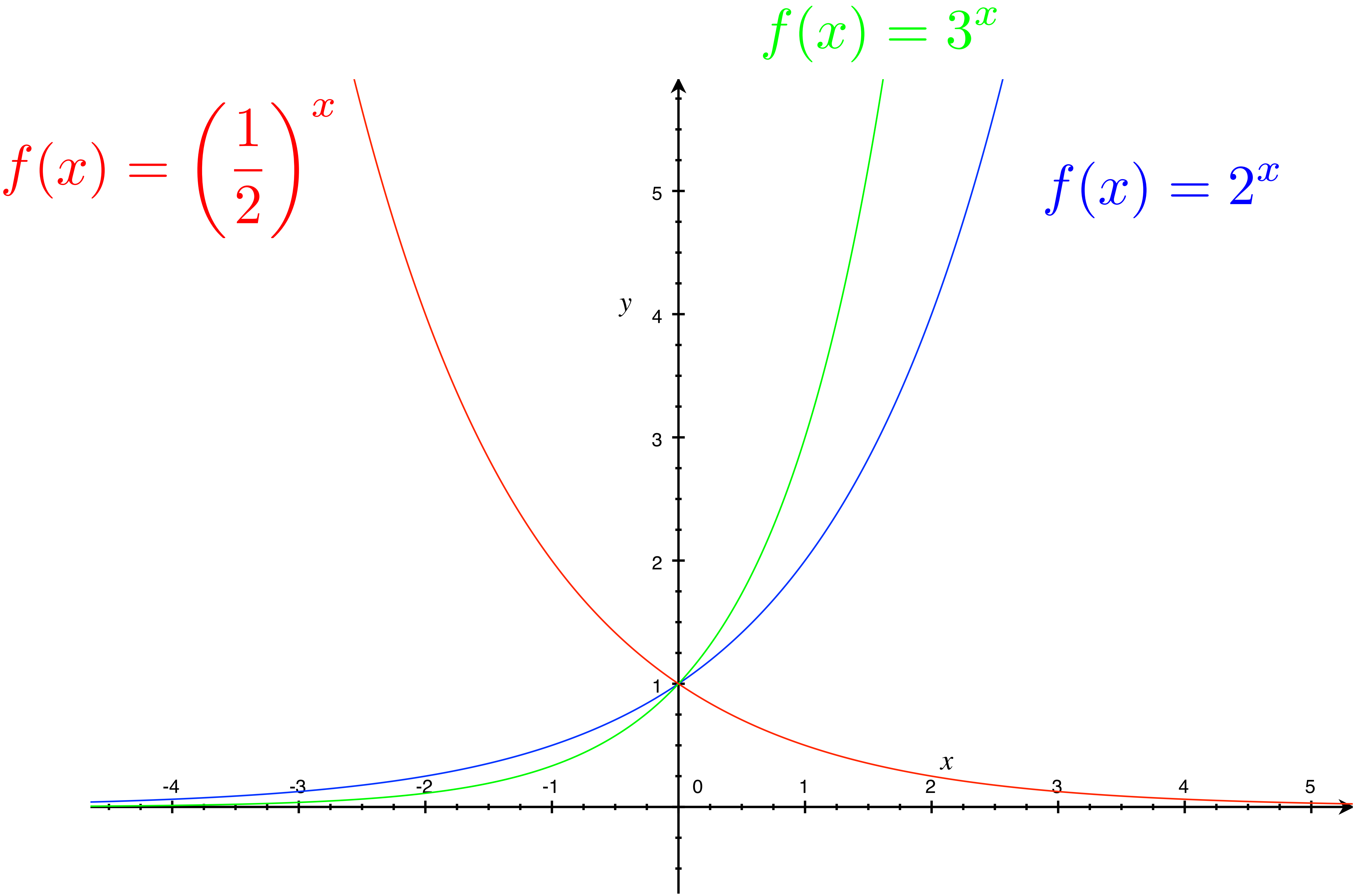
Il faut donner un sens à a^r avec $r \in \mathbb{R}$

Exemple

$$a^{2,4385\ldots} = a^{2+\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\ldots}$$

$$= a^2 a^{\frac{4}{10}} a^{\frac{3}{10^2}} a^{\frac{8}{10^3}} a^{\frac{5}{10^4}} \ldots$$

Vérifier que ce produit infini tend bien vers un nombre dépasse le cadre du cours.



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$f(x) = 3^x$
$f(x) = 2^x$
y
x
5
4
3
2
1
0
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

Logarithme

On définit $\log_a b$ comme l'inverse de l'exposant.

$$\log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b$$

Exemple $\log_2 8 = 3$ car $2^3 = 8$

Notation:

$$\log_{10} a = \log a$$

$$\log_e a = \ln a$$

$$e = 2{,}718281828459\ldots$$

Propriétés des logarithmes

1. $\log_a 1 = 0$

Justification: $a^0 = 1$

2. $\log_a a = 1$

Justification: $a^1 = a$

3. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

Justification:

$\log_a(bc) = n \iff a^n = bc$

$\log_a b = m \iff a^m = b$

$\log_a c = r \iff a^r = c$

$n = m + r$

$a^n = bc = a^m a^r = a^{m+r}$

4. $\log_a(b^n) = n\log_a b$

Justification:

$$m = nr$$

$$\log_a(b^n) = m \iff a^m = b^n$$

$$a^m = b^n = (a^r)^n = a^{nr}$$

$$\log_a(b) = r \iff a^r = b$$

5. $\log_a b \log_b c = \log_a c$

Justification:

$$r = nm$$

$$\log_a b = n \iff a^n = b$$

$$a^r = c = b^m = (a^n)^m = a^{nm}$$

$$\log_b c = m \iff b^m = c$$

$$\log_a c = r \iff a^r = c$$

Remarque: $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b} = \dfrac{\log c}{\log b} = \dfrac{\ln c}{\ln b}$

Formule de changement de base

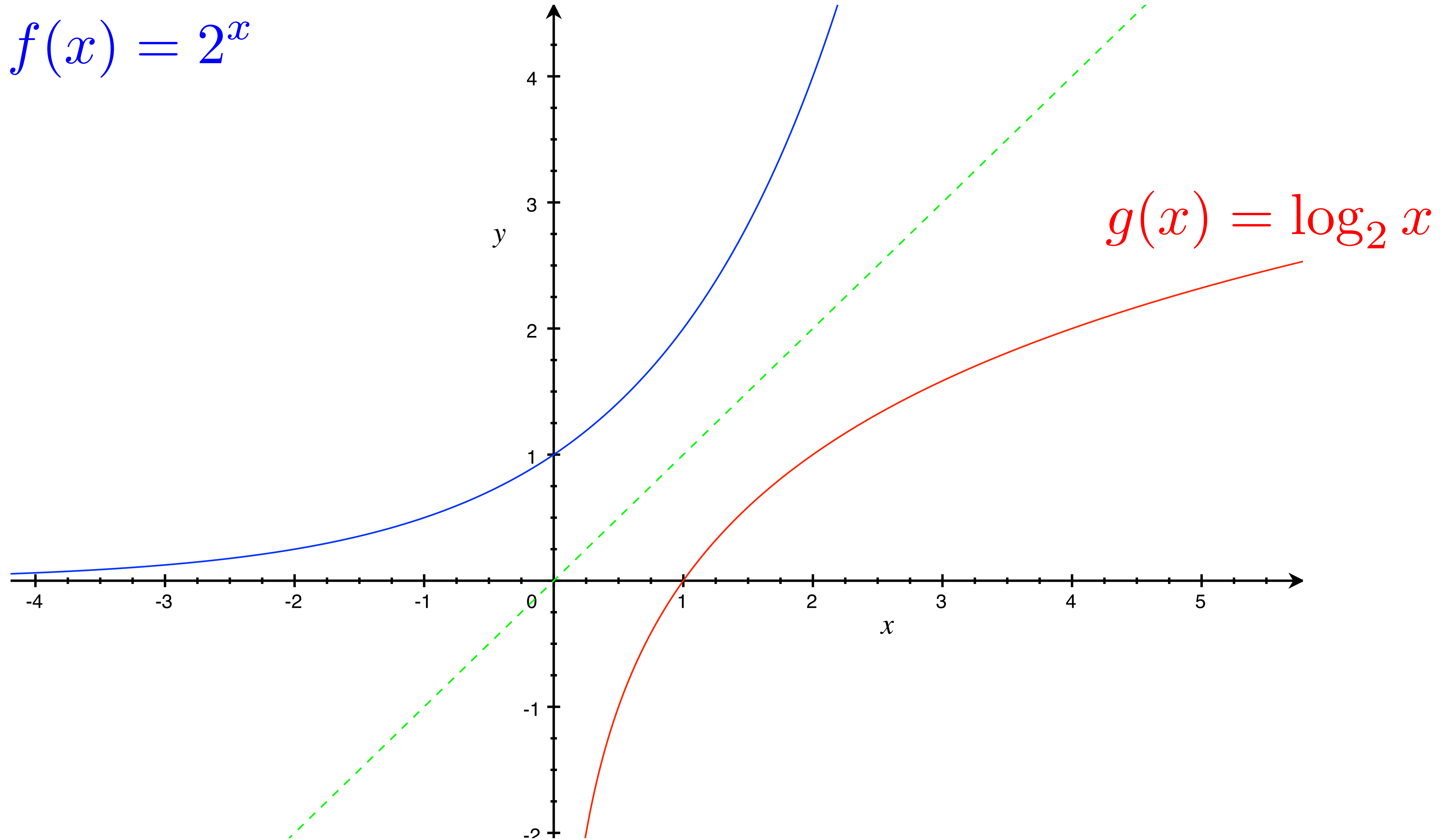
$$\log_a a^n \quad = n \log_a a \quad = n$$

$$\log_a n = r \quad \Longleftrightarrow a^r = n$$

$$a^{\log_a n} = a^r = n$$

On a donc la fonction inverse de la fonction exponentielle

$$f(x) = a^x \qquad\qquad f^{-1}(x) = \log_a x$$



Faites les exercices suivants

21 et 22

Aujourd'hui, nous avons vu

$$f(x) = a^x$$

$$f(x) = \log_a x$$

Devoir: # 21 à 23