2 Taux de variation et dérivée

2.1 Taux de variation et dérivée en un point

Q.2.1

Calculer le taux de variation moyen $\mathrm{TVM}_{[2;4]}f(x)$ pour les fonctions suivantes.

a) $f(x) = 2x - 1$
b) $f(x) = 3x^2$
c) $f(x) = 5$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$
e) $f(x) = \sqrt{x+5}$

Q.2.2

Soit la fonction $y = x^3$. Calculer le taux de variation moyen de y sur l'intervalle demandé.

a) $[2; 4]$.
b) $[2; 3]$.
c) $[2; 2{,}1]$.
d) $[2; 2{,}01]$.
e) $[2; 2{,}001]$.

Q.2.3

Identifier la valeur de h (ou Δx) pour chacun des cas de la question précédente.

Q.2.4

Selon le numéro 2, vers quel nombre semble s'approcher le taux de variation de $y = x^3$ entre 2 et $2 + h$ lorsque h diminue ?

Q.2.5

Utiliser la définition de la dérivée pour calculer $f'(2)$ si $f(x) = x^3$.

Q.2.6

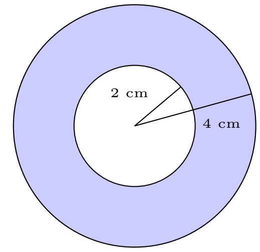
Soit la fonction $f(x) = x^3 - x$

a) Calculer $\mathrm{TVM}_{[2;4]}f(x)$.
b) Calculer $\mathrm{TVM}_{[2;b]}f(x)$.
c) Calculer $\mathrm{TVM}_{[2;2+h]}f(x)$.
d) Calculer $f'(2)$ en utilisant le résultat trouvé en (b).
e) Calculer $f'(2)$ en utilisant le résultat trouvé en (c).

Q.2.7

La fonction donnant l'aire d'un cercle (en centimètres carrés) par rapport à son rayon (en centimètres) est $A(r) = \pi r^2$

a) Quelle est la variation de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ? Bien indiquer les unités.
b) Quelle est le taux de variation moyen de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ? Bien indiquer les unités.
c) Quelle est le taux de variation instantané de l'aire du cercle lorsque le rayon est de 4 cm ? Bien indiquer les unités.



Q.2.8

Supposons que durant les deux premières années de sa vie, la masse (en kilogrammes) d'un bébé en fonction du temps t (en mois) écoulé depuis sa naissance est donnée par la fonction $m(t) = \sqrt{12 + 7t}$.

a) Quelle est la masse du bébé à sa naissance ?
b) Évaluer l'expression $\dfrac{m(8) - m(5)}{3}$ et en donner un interprétation.
c) Quel est le taux de croissance instantané de la masse du bébé lorsque celui-ci est âgé de 9 mois ? Interpréter.
d) Le bébé grossit-il plus rapidement à 3 mois ou à 9 mois ?

Q.2.9

Calculer

a) $f'(3)$ pour $f(x) = 12$.
b) $f'(1)$ pour $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$.
c) $f'(-1)$ pour $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$.
d) $f'(-3)$ pour $f(x) = \sqrt{6-x}$.
e) $f'(0)$ pour $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2+x}}$.

2.2 Linéarisation et fonction dérivée

Q.2.10

Trouver l'équation de la droite qui donne une bonne approximation de la fonction spécifiée autour du point spécifié.

a) $f(x) = x^2 - 1$ autour de $x = 1$
b) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ autour de $x = -2$
c) $f(x) = \sqrt{4-x}$ autour de $x = -1$

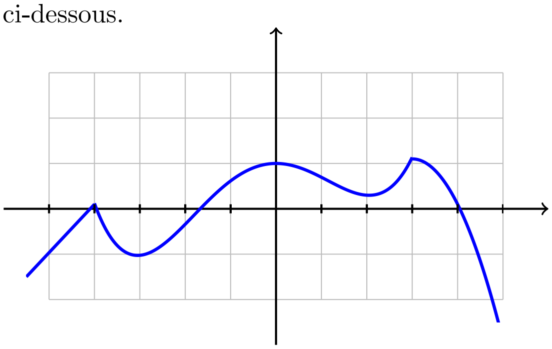
Q.2.11

Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la définition.

a) $g(x) = \sqrt{x+3}$
b) $h(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$

Q.2.12

Considérons la fonction $f(x)$ dont le graphique est représenté ci-dessous.



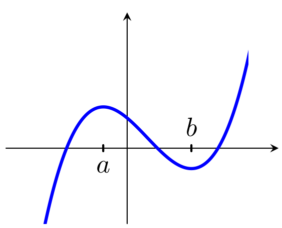
a) Pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée de cette fonction est-elle nulle ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) de x cette fonction n'est-elle pas dérivable ?

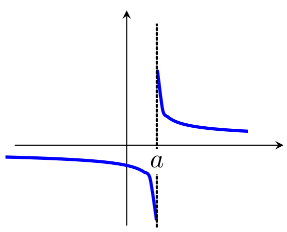
c) La dérivée de cette fonction est-elle plus grande en $x = -1$ ou en $x = 1$?

Q.2.13

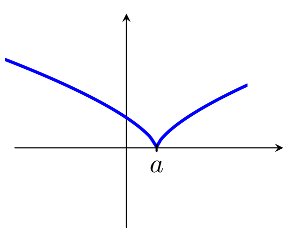
Associer chacune des fonctions suivantes à sa dérivée.



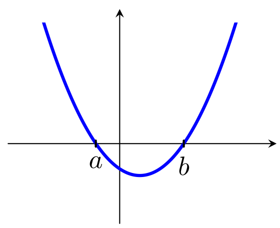
a)



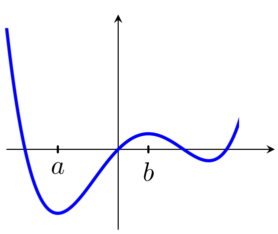
i)



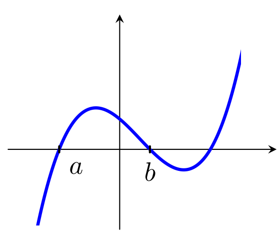
b)



ii)



c)



iii)

Q.2.14

Utiliser le triangle de Pascal pour développer les polynômes suivants.

a) $(x+y)^3$

b) $(x+2)^5$.

c) $(1-r)^6$.

d) $(2x^2-3)^4$.

Q.2.15

Trouver la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = x^9$

b) $f(x) = x^{\frac{7}{4}}$

c) $y = \dfrac{1}{x^6}$

d) $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

e) $u = \sqrt[5]{x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

2.3 Formules de dérivation

Q.2.16

Trouver la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 4$

b) $v(t) = t$

c) $h(x) = 5x^3$

d) $x(t) = \dfrac{3t}{4}$

e) $y = -\dfrac{9}{5\sqrt[4]{x}}$

f) $x(r) = \dfrac{5}{8r}$

g) $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + 9x - 1$

h) $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - 5x^7 + \dfrac{1}{6x^3} - \dfrac{3}{4}$

i) $f(x) = \left(x^2-3\right)(4x+1)$

j) $y = 5\left(2-x^3\right)^2$

k) $f(x) = (3x+1)^3$

l) $g(t) = 4\left(\dfrac{3}{t^2}+1\right)\left(1-t^3\right)$

m) $h(r) = \sqrt[3]{r^2}\left(3r^2+1\right)$

Q.2.17

Donner la dérivée de chacune des fonctions au point indiqué.

a) $f(x) = 3x+1$ au point $(2,7)$.

b) $s(t) = -t^3 + 2t^2 + 3t - 2$ au point $(-1,-2)$.

c) $y = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{4}{5x^2}$ au point $(1, -\frac{2}{15})$.

d) $f(t) = \dfrac{t^3-4t}{2}$ au point $(k, f(k))$.

Q.2.18

Pour quelle(s) valeur(s) de x la courbe décrite par la fonction $f(x)$ admet-elle une tangente horizontale

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Q.2.19

Pour quelle(s) valeur(s) de x, la courbe définie par $f(x) = x^{-2}$ admet une droite tangente parallèle à la droite d'équation $y = x/4 - 1$?

$$\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2$$

Q.2.20

Pour quelle(s) valeur(s) de x, la courbe définie par $f(x) = x^3 - 3x$ admet une droite tangente perpendiculaire à la droite d'équation $y = 3x/5 - 1$?

$$\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = -1$$

Q.2.21

On projette verticalement vers le haut un objet. La hauteur (en mètres) de l'objet t secondes après avoir été lancé est donnée par la fonction $h(t) = 50 + 15t - 4{,}9t^2$.

a) À quelle hauteur l'objet se trouve-t-il au moment où il est lancé ?

b) Quelle est la vitesse initiale de l'objet ?

c) Quelle est la vitesse de l'objet lorsqu'il atteint la hauteur de 60 m lors de sa montée ?

d) Sachant qu'il commencera à descendre au moment où sa vitesse est nulle, quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet ?

e) À quelle vitesse l'objet touchera-t-il le sol ?

f) Trouver mathématiquement l'accélération de cet objet au temps t.

Q.2.22

Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la règle de dérivation du produit.

a) $y = (3x+1)\left(2-5x^3\right)$.

b) $x(t) = \left(\sqrt{t}-t\right)\left(4t^3-2t^2+5\right)$.

c) $f(x) = x^3\left(5x^2-4\right)\left(3-x^4\right)$.

d) $y = x(3x-1)-(2x-5)\left(4-3x^2\right)$.

Q.2.23

Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la règle de dérivation du quotient.

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

b) $y = \dfrac{2x^4}{x^4+1}$.

c) $d(t) = \dfrac{4t^2-5}{5-4t^3}$.

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$.

Q.2.24

Donner la dérivée de chacune des fonctions au point indiqué.

a) $f(x) = \dfrac{-x^2+6x+2}{2-3x}$ au point $(0{,}1)$.

b) $y = \left(t^2-3t-2\right)\left(\sqrt{t}+2t\right)$ au point $(1, -12)$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^7-1} - \dfrac{1}{9-x^2}$ au point $(-1, -\dfrac{5}{8})$.

Q.2.25

Soient u, v et w des fonctions dérivables de x. Montrer que $\dfrac{d}{dx}(uvw) = uv\dfrac{dw}{dx} + uw\dfrac{dv}{dx} + vw\dfrac{du}{dx}$.

Q.2.26

Montrer qu'aucune droite de pente 1 n'est tangente à la courbe de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Q.2.27

Il y a deux droites passant par le point $(4{,}20)$ qui sont tangentes à la courbe décrite par la fonction $f(x) = 8x - x^2$. Trouver les équations de ces droites.

Q.2.28

Le coût unitaire moyen M pour fabriquer un certain nombre d'unités d'un produit dans une manufacture est donné par $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, où x est le nombre d'unités fabriquées et $C(x)$, le coût total pour fabriquer ces x unités.

a) Calculer $M'(x)$.

b) Évaluer $C'(x)$ lorsque $M'(x) = 0$.

Q.2.29

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \dfrac{x^n}{x^n-1}$

b) $y = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x^2}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x}(10-x)}{x^3-8}$

d) $y = \dfrac{4x^3-x^2}{(x+1)\sqrt[4]{x}}$

2.4 Dérivée de fonctions composées

Q.2.30

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $g(t) = \left(1-5t^4\right)^{10}$

b) $y = \left(5x^2-3x+2\right)^{\frac{7}{2}}$

c) $f(x) = \sqrt{x^5+1}$

d) $g(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$

e) $x(t) = \sqrt{\dfrac{mt}{1+t}}$

f) $f(x) = 5\sqrt[3]{8-x}$

Q.2.31

Calculer $\dfrac{dy}{dt}$ et simplifier vos réponses.

a) $y = x^4+2$ et $x = 3-4t^3$

b) $y = \sqrt[3]{x^4}$ et $x = t^2+9$

c) $y = x^6-6x$ et $x = \sqrt{t}$

Q.2.32

Soit $y = \sqrt{x}$, $x = 6t^2-5t$ et $z = \dfrac{1}{y}$.

Calculer :

a) $\dfrac{dx}{dt}$ et $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2}$

b) $\dfrac{dz}{dy}$ et $\left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{y=-3}$

c) $\dfrac{dy}{dt}$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=-1}$

d) $\dfrac{dz}{dx}$ et $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=\frac{1}{9}}$

Q.2.33
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \left[\left(x^3+2x\right)^4 + 3x\right]^5$

b) $y = (3x+4)^{14}\left(x^2-2\right)^{18}$

c) $f(t) = \sqrt{(2t+\pi)^3(2-5t)}$

d) $y = \dfrac{\left(2x^3+1\right)^3}{\sqrt{x+3}}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+\sqrt{3x+1}}$

Q.2.34
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y(x) = \sqrt{1-\sqrt{1+x^2}}$

b) $y(x) = \left(4+(2-x^3)^2\right)^4$

2.5 Dérivée implicite et d'ordre supérieur

Q.2.35
Déterminer, parmi les équations suivantes, celles qui définissent une fonction implicite.

a) $y = \dfrac{3t+1}{4t}$

b) $y = \dfrac{3y+1}{4x}$

c) $x^2+5x+6 = y$

d) $xy^2+5y^2 = 3x+y$

Q.2.36
Calculer :

a) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^2y^2+x^3y = 6x$.

b) $\dfrac{dx}{dy}$ si $x^3-4y^3 = 5x^2+6y^3$.

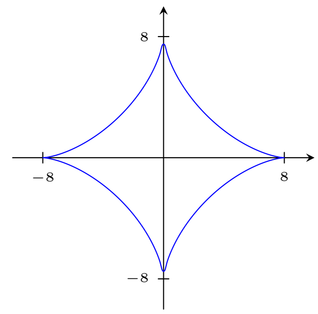
c) $\dfrac{dx}{dt}$ si $\sqrt{x^2+t^2} = 2t^2+4$.

d) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x = \dfrac{3y-y^2}{2y+3}$.

Q.2.37
Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe décrite par l'équation $x^3+y^3 = 2xy$ au point (1,1).

Q.2.38
Soit le cercle d'équation $x^2+y^2 = r^2$ (cercle de rayon r centré à l'origine). Montrer que la droite passant par l'origine et un point (x_0,y_0) situé sur la circonférence du cercle est toujours perpendiculaire à la droite tangente au cercle en ce point (x_0,y_0).

Q.2.39
Trouver la pente de la droite tangente à l'astéroïde $x^{2/3}+y^{2/3} = 4$, illustrée ci-dessous, au point $\left(1,-3\sqrt{3}\right)$.



Q.2.40

a) $f^{(4)}(x)$, si $f(x) = x^5+7x$.

b) $y^{(9)}$, si $y = x^7$.

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \left(x^3+1\right)^5$.

d) $f''(1)$, si $f(x) = \dfrac{4x^5-2x}{x^3}$.

e) $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=4}$, si $y = \sqrt{x^7}-3x$.

f) $f^{(5)}(x)$, si $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$.

2.6 Exercices récapitulatifs

Q.2.41
En utilisant la définition de la dérivée, évaluer les expressions demandées pour la fonction donnée.

a) $f(x) = 2x^2-x$; $f'(2)$.

b) $x(t) = at^2+bt+c$; $\dfrac{dx}{dt}$.

c) $y = \sqrt{x^2+1}$; $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$.

d) $g(x) = \dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{3x^2}$; $g'(x)$.

e) $h(x) = \dfrac{-4x}{\sqrt{1-5x}}$; $h'(0)$.

Q.2.42
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \dfrac{7}{4x^{\frac{3}{4}}}-\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+4^4$

b) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{\sqrt[5]{x}}{8}$

c) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^3+2}$

d) $y = \left(x^3-1\right)^7$

e) $y = x^2+\sqrt{3x-1}$

f) $y = x^2\sqrt{3x-1}$

g) $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$

h) $y = (2-x)^5(7x+3)$

i) $y = 5\sqrt[3]{2x^2+5x+7}$

j) $y = 7\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)$

Q.2.43

La droite $y = 4x - 17$ est-elle tangente à la courbe de $f(x) = x^2 - 2x - 8$? Si oui, déterminer le point de tangence.

Q.2.44

Soit la fonction $f(x) = (4x-9)^2 + 3$. Déterminer la ou les valeurs de a telles que la droite tangente à la courbe de f en $x = a$ et les axes forment un triangle isocèle.

Q.2.45

Lors d'un test de collision, une voiture se déplace en ligne droite vers un mur situé à 90 m du point de départ de la voiture. La position s de la voiture (en mètres) à partir de son point de départ t secondes après son départ est donnée par $s(t) = 4t + \dfrac{t^2}{2}$.

a) À quelle distance du mur la voiture se trouve-t-elle 2 s après son départ ?

b) Quelle est sa vitesse 2 s après son départ ?

c) À quelle distance du mur la voiture se trouve-t-elle lorsque sa vitesse est de 30 km/h ?

d) Combien de temps lui faut-il avant d'entrer en collision avec le mur ?

e) Quelle est sa vitesse lors de l'impact ?

f) Quelle est son accélération au moment de l'impact ?

Q.2.46

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \left(x^2+3\right)^4\left(2x^3-5\right)^3$

b) $y = \left[\left(x^2-5\right)^8 + x^7\right]^{18}$

c) $y = 5(x-7)\sqrt{x-1}$

d) $y = x^2\left(x^3+2\right)^5$

Q.2.47

Calculer $\dfrac{dy}{dx}$ pour chacune des équations suivantes.

a) $2x^2 + 3xy - y^2 = 1$

b) $3x^2y^3 + 5x = 3 - 5y^3$

c) $\dfrac{1}{x} - 3xy = \dfrac{1}{y}$

d) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x-y}{x+y}$

Q.2.48

Pour chacune des équations suivantes, calculer la pente de la tangente à la courbe au point donné.

a) $4x^2 + 9y^2 = 40$ au point $(-1, -2)$

b) $x^2y^2(1+xy) + 4 = 0$ au point $(1, -2)$

Q.2.49

Supposons que u et v sont toutes deux des fonctions de x.

a) Montrer que $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$.

b) Trouver une formule pour $(uv)'''$.

c) Sans trop de calculs, trouver une formule pour $\dfrac{d^6(uv)}{dx^6}$.

Q.2.50

Trouver la valeur de k pour que la courbe d'équation $y = -x^2 + kx$ soit tangente à la droite $y = x + 4$.
Indice : D'abord faire un dessin de la situation puis se demander quelles sont les conditions pour qu'elle soit possible.

Q.2.51

À l'aide de la formule généralisée du produit de n fonctions $(f_1 \cdots f_n)' = f_1'f_2\cdots f_n + f_1f_2'f_3\cdots f_n + \cdots + f_1\cdots f_{n-1}f_n'$ montrer la règle de dérivation de $f(x) = x^n$.

Q.2.52

Nous avons montré en classe que $(x^n)' = nx^{n-1}$ était valide lorsque n est un entier naturel.

a) En utilisant la formule de la dérivée du quotient, montrer que cette formule est valide lorsque n est négatif (donc si $n = -k$ avec k positif.)

b) En utilisant la dérivée implicite, montrer que cette formule est valide lorsque n est une fraction du type $\dfrac{1}{k}$ avec k naturel.

c) Montrer ensuite à l'aide de la dérivée d'une fonction composée que la formule est valide lorsque n est une fraction $\dfrac{a}{b}$.

Q.2.53

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \dfrac{1+\frac{4}{x}}{4+\frac{1}{x}}$

b) $y = \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

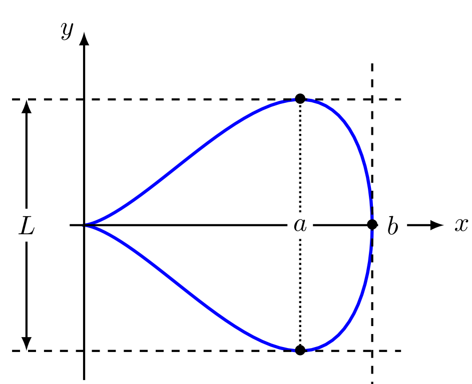
c) $y = x^4\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^2}}$

Q.2.54

✠ Considérons la courbe Γ définie par l'équation implicite

$$y^2 = 4x^3(1-x)$$



a) Déterminer la dérivée $\dfrac{dy}{dx}$.

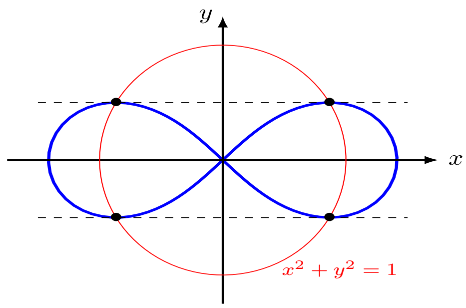
b) Pour quelle valeur $x = b$, la tangente à la courbe Γ est-elle verticale ?

c) Déterminer la largeur L du coeur.

Q.2.55

✠✠ Considérons la courbe Γ définie par l'équation implicite

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$



a) Déterminer la dérivée $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Montrer que les tangentes à la courbe Γ sont horizontales aux points d'intersections avec le cercle unitaire.

c) Déterminer les points où les tangentes à la courbe Γ sont horizontales.

Réponses aux exercices

R.2.1

a) 2
b) 18
c) 0
d) 1
e) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$

R.2.2

a) $\dfrac{4^3-2^3}{4-2}=28$
b) 19
c) $12{,}61$
d) $12{,}0601$
e) $12{,}006001$

R.2.3

a) 2 b) 1 c) $0{,}1$ d) $0{,}01$ e) $0{,}001$

R.2.4 12

R.2.5 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2^3}{x-2}=12$

R.2.6

a) 27
b) $\dfrac{b^3-b-6}{b-2}=b^2+2b+3$
c) $\dfrac{(2+h)^3-(2+h)-(6)}{h}=12+6h+h^2-1$
d) $f'(2)=\lim\limits_{b\to 2}\big(b^2+2b+3\big)=11.$
e) $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\big(12+6h+h^2-1\big)=11$

R.2.7

a) 12π cm^2 b) 6π cm c) 8π cm

R.2.8

a) $\sqrt{12}$ kg
b) Entre l'âge de 5 mois et 8 mois, la masse de ce bébé a augmenté à un taux moyen de $\dfrac{\sqrt{68}-\sqrt{47}}{3}$ kg/mois $\simeq 0{,}4635$ kg/mois.
c) À l'âge d'exactement 9 mois, le bébé grossit à un taux de $m'(9)=\dfrac{7}{2\sqrt{75}}$ kg/mois.
d) À 3 mois, car $m'(3)>m'(9)$.

R.2.9

a) 0 b) 3 c) $-\dfrac{2}{9}$ d) $-\dfrac{1}{6}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

R.2.10

a) $y=2x-2$
b) $y=-\dfrac{1}{2}x-2$
c) $y=-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}x+\dfrac{9\sqrt{5}}{10}$

R.2.11

a) $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$ b) $h'(x)=\dfrac{2}{(x+5)^2}$

R.2.12

a) $x\in\{-3{,}0{,}2\}$ b) $x\in\{-4{,}3\}$ c) En $x=-1$.

R.2.13

a) ii) b) i) c) iii)

R.2.14

a) $x^3+3yx^2+3y^2x+y^3$
b) $x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32.$
c) $r^6-6r^5+15r^4-20r^3+15r^2-6r+1.$
d) $16x^8-96x^6+216x^4-216x^2+81.$

R.2.15

a) $\dfrac{dy}{dx}=9x^8$
b) $f'(x)=\dfrac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}$
c) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-6}{x^7}$
d) $g'(t)=\dfrac{-1}{2\sqrt{t^3}}$
e) $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$
f) $f'(x)=\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

R.2.16

a) $f'(x)=0$
b) $v'(t)=1$
c) $h'(x)=15x^2$
d) $x'(t)=\dfrac{3}{4}$
e) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9}{20\sqrt[4]{x^5}}$
f) $x'(r)=-\dfrac{5}{8r^2}$
g) $f'(x)=24x^2-8x+9$
h) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-8}{3\sqrt[3]{x^5}}-35x^6-\dfrac{1}{2x^4}$
i) $f'(x)=12x^2+2x-12$
j) $\dfrac{dy}{dx}=-30x^2\left(2-x^3\right)$
k) $f'(x)=81x^2+54x+9$
l) $g'(t)=-12t^2-12-\dfrac{24}{t^3}$
m) $h'(r)=\dfrac{8r^2+2/3}{\sqrt[3]{r}}$

R.2.17

a) 3 b) -4 c) $\dfrac{14}{15}$ d) $\dfrac{3k^2}{2}-2$

R.2.18

a) $x = \dfrac{2}{3}$

b) $x = -2$ et $x = 1$

c) $x = -1$ et $x = 1$

R.2.19

On doit avoir $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3} = \dfrac{1}{4}$, donc $x = -2$

R.2.20

On doit avoir $f'(x) = 3x^2 - 3 = \dfrac{-5}{3}$, donc

$$x = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x = \frac{2}{3}$$

R.2.21

a) 50 m

b) 15 m/s

c) $\sqrt{29}$ m/s $\approx$ 5,39 m/s

d) 61,48 m

e) environ 34,71 m/s

f) $h''(t) = -9{,}8$ m/s^2

R.2.22

a) $\dfrac{dy}{dx} = -60x^3 - 15x^2 + 6$

b) $x'(t) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}} - 1\right)\left(4t^3 - 2t^2 + 5\right) + \left(\sqrt{t} - t\right)\left(12t^2 - 4t\right) = 14\sqrt{t^5} - 5\sqrt{t^3} + \dfrac{5}{2\sqrt{t}} - 16t^3 + 6t^2 - 5.$

c) $f'(x) = -45x^8 + 28x^6 + 75x^4 - 36x^2$

d) $\dfrac{dy}{dx} = 18x^2 - 24x - 9$

R.2.23

a) $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}.$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x^3}{\left(x^4+1\right)^2}.$

c) $d'(t) = \dfrac{4t\left(4t^3 - 15t + 10\right)}{\left(5 - 4t^3\right)^2}.$

d) $f'(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}(1-x)^2}.$

R.2.24

a) $f'(0) = \dfrac{9}{2}$

b) $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1} = -13$

c) $f'(-1) = -\dfrac{110}{64}$

R.2.25 Laissé à l'étudiant. Incice : que faites vous losrque vous multipliez 3 nombres ensemble ?

R.2.26 Laissé à l'étudiant. Il faut montrer que la dérivée de f est différente de 1 pour toute valeur de x.

R.2.27 Indice : Travailler avec une droite de paramètres a et b. S'arranger pour que la droite passe par le point voulu. Chercher ce qui doit se produire au point de tangence (lui donner un nom peut servir) pour que la droite soit tangente à la courbe. Les droites : $y = 4x + 4$ et$y = -4x + 36$.

R.2.28

a) $M'(x) = \dfrac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$ (on ne peut aller plus loin car $C(x)$ est inconnu)

b) $\left.C'(x)\right|_{M'(x)=0} = \dfrac{C(x)}{x} = M(x)$

R.2.29

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-nx^{n-1}}{\left(x^n - 1\right)^2}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{x+2}{x^3} = -\dfrac{4x^2 + 5x + 2}{x^3(x+1)^2}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^4 - 50x^3 + 24x - 80}{2\sqrt{x}\left(x^3 - 8\right)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\left(28x^2 + 41x - 7\right)}{4(x+1)^2}$

R.2.30

a) $g'(t) = -200t^3\left(1 - 5t^4\right)^9$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{7}{2}\left(5x^2 - 3x + 2\right)^{\frac{5}{2}}(10x - 3)$

c) $f'(x) = \dfrac{5x^4}{2\sqrt{x^5 + 1}}$

d) $g'(x) = -\dfrac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$

e) $x'(t) = \dfrac{m}{2(1+t)^2}\sqrt{\dfrac{1+t}{mt}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m}{t(1+t)^3}}$

f) $f'(x) = \dfrac{-5}{3\sqrt[3]{(8-x)^2}}$

R.2.31

a) $\dfrac{dy}{dt} = (4x^3)(-12t^2) = -48t^2(3 - 4t^3)^3$

b) $\dfrac{dy}{dt} = \left(\dfrac{4}{3}x^{1/3}\right)(2t) = \dfrac{8t\left(\sqrt[3]{t^2 + 9}\right)}{3}$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \left(6x^5 - 6\right)\left(\dfrac{1}{2}t^{-1/2}\right) = \dfrac{3\left(\sqrt{t^5} - 1\right)}{\sqrt{t}}$

R.2.32

a) $\dfrac{dx}{dt} = 12t - 5$ et $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 19$

b) $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ et $\left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{y=-3} = -\dfrac{1}{9}$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{12t-5}{2\sqrt{6t^2-5t}}$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=-1} = -\dfrac{17}{2\sqrt{11}}$

d) $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ et $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=\frac{1}{9}} = -\dfrac{27}{2}$

R.2.33

a) $\dfrac{dy}{dx} = 5\left[\left(x^3+2x\right)^4+3x\right]^4\left(4\left(x^3+2x\right)^3\left(3x^2+2\right)+3\right)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 6\left(3x+4\right)^{13}\left(x^2-2\right)^{17}\left(25x^2+24x-14\right)$

c) $f'(t) = \left(6-20t-\dfrac{5\pi}{2}\right)\sqrt{\dfrac{2t+\pi}{2-5t}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(2x^3+1\right)^2\left(34x^3+108x^2-1\right)}{2\sqrt{(x+3)^3}}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{3x+1}}}\left(2x+\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}\right)$

R.2.34

a)

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{d}{dx}\Big(1-(1+x^2)^{1/2}\Big)^{1/2}\\
&= (1/2)\Big(1-(1+x^2)^{1/2}\Big)^{-1/2}\frac{d}{dx}\Big(1-(1+x^2)^{1/2}\Big)\\
&= (1/2)\Big(1-(1+x^2)^{1/2}\Big)^{-1/2}\Big(0-\frac{d}{dx}(1+x^2)^{1/2}\Big)\\
&= (-1/4)\Big(1-(1+x^2)^{1/2}\Big)^{-1/2}(1+x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(1+x^2)\\
&= (-1/4)\Big(1-(1+x^2)^{1/2}\Big)^{-1/2}\Big((1+x^2)^{-1/2}\Big)(2x)\\
&= \frac{-x}{2\sqrt{1-\sqrt{1+x^2}}\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{d}{dx}\Big(4+(2-x^3)^2\Big)^4\\
&= 4\Big(4+(2-x^3)^2\Big)^3\frac{d}{dx}\Big(4+(2-x^3)^2\Big)\\
&= 4\Big(4+(2-x^3)^2\Big)^3\Big(0+\frac{d}{dx}(2-x^3)^2\Big)\\
&= 4\Big(4+(2-x^3)^2\Big)^3\Big(2(2-x^3)\frac{d}{dx}(2-x^3)\Big)\\
&= 4\Big(4+(2-x^3)^2\Big)^3\Big(2(2-x^3)(-3x^2)\Big)\\
&= -24x^2\Big(4+(2-x^3)^2\Big)^3(2-x^3)
\end{aligned}$$

R.2.35 b et d

R.2.36

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6-2xy^2-3x^2y}{2x^2y+x^3}$

b) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{30y^2}{3x^2-10x}$

c) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4t\sqrt{x^2+t^2}-t}{x}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2y+3)^2}{9-6y-2y^2}$ ou $\dfrac{2y+3}{3-2x-2y}$

R.2.37 $y=-x+2$

R.2.38 Laissé à l'étudiant. Utiliser le fait que le produit des pentes doit Ítre de -1.

R.2.39 $\sqrt{3}$

R.2.40

a) $f^{(4)}(x) = 120x$

b) $y^{(9)} = 0$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} = 30x\left(x^3+1\right)^3\left(7x^3+1\right)$

d) $f''(1) = -4$

e) $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=4} = \dfrac{105}{4}$

f) $f^{(5)}(x) = -\dfrac{15120}{x^{10}}$

R.2.41

a) 7

b) $2at+b$

c) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{-2x+2}{3x^3}$

e) -4

R.2.42

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-21}{16x^{\frac{7}{4}}} - x^{\frac{3}{2}}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4}} + \dfrac{1}{40\sqrt[5]{x^4}}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x^4+2x^3-3x^2+4x-2}{\left(x^3+2\right)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = 21x^2\left(x^3-1\right)^6$

e) $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{15x^2-4x}{2\sqrt{3x-1}}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{x}+2}{2x^2}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = (2-x)^4(-42x-1)$

i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{20x+25}{3\sqrt[3]{\left(2x^2+5x+7\right)^2}}$

j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-112x}{\left(x^2-4\right)^2}$

R.2.43 Oui, au point (3, – 5).

R.2.44 $a = \dfrac{71}{32}$ ou $a = \dfrac{73}{32}$.

R.2.45

a) 80 m
b) 6 m/s (21,6 km/h)
c) 63,27 m
d) 10 s
e) 14 m/s (50,4 km/h)
f) 1 m/s^2 (12,96 km/h^2)

R.2.46

a) $\dfrac{dy}{dx} = 2x\left(x^2+3\right)^3\left(2x^3-5\right)^2\left(17x^3+27x-20\right)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 18\left[\left(x^2-5\right)^8+x^7\right]^{17}\left(16x\left(x^2-5\right)^7+7x^6\right)\right)$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{15x-45}{2\sqrt{x-1}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \left(x^3+2\right)^4\left(17x^4+4x\right)$

R.2.47

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x+3y}{2y-3x}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{6xy^3+5}{15y^2+9x^2y^2}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+3x^2y^3}{x^2-3x^3y^2}$ ou $\dfrac{1+6xy^2}{1-6x^2y}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

R.2.48

a) $-\dfrac{2}{9}$
b) 2

R.2.49

a) Laissé à l'étudiant.
b) Laissé à l'étudiant.
c) Si vous n'arrivez pas facilement, calculer $\dfrac{d^4}{dx^4}(uv)$.

R.2.50 $k = -3$ ou $k = 5$

R.2.51 Laissé à l'étudiant. Une preuve rigoureuse nécessiterait la méthode d'induction, mais vous pouvez trouver l'idée.

R.2.52 Laissé à l'étudiant.

R.2.53

a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{15}{(4x+1)^2}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^2+1}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^3\left(10x^2-x-10\right)}{5\sqrt[5]{(x+1)^4(x-1)^6}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-4}{3\sqrt[3]{x^7(1-x)}}$

R.2.54

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x^2(4x-3)}{y}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x^2(4x-3)}{y} = 0$ si $x = \dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x^2(4x-3)}{y}$ n'existe pas si $y = 0$ donc $x = 1$.

d) La largeur est $L = 2\sqrt{27/128}$

R.2.55 **Indice :** Utiliser le changement de variable

$$x^2+y^2=r^2$$

dans l'expression $\dfrac{dy}{dx}$ pour déterminer les zéros de la dérivée.

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(1-(x^2+y^2)}{y(x^2+y^2+1)}$

b) En substituant, $x^2+y^2=r^2$ dans $\dfrac{dy}{dx}$, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1-r^2}{y(r^2+1)}$$

donc $y' = 0$ si $r^2 = \pm 1$

c) En substituant, $x^2 = 1-y^2$ dans Γ, on obtient

$$1 = 2(1-2y^2), \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{2}$$

On conclut ainsi que $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ puisque ce point est sur le cercle unitaire.