Solutions de l'examen 3
201-NYA Calcul Différentiel
Professeur : Dimitri Zuchowski

Je n'ai pas mis les graphes de l'examen. Si vous n'êtes pas capable de les trouver, venez me voir.

Question 1.

$f(x) \to$ pointilé, $f'(x) \to$ pleine et $f''(x) \to$ "traitillé'.'

Question 2.

Question 3.

On a que $\text{dom}(f) = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

$f'(x) = \dfrac{3}{2}(2x^2 - x^4)^{-\frac{1}{2}}(4x - 4x^3) = \dfrac{6(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}}$, d'où,

x	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$
$f(x)$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

Question 4.

$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 8 + 5(2-x)^{\frac{2}{3}}$, $f''(x) = \dfrac{-10}{3(2-x)^{\frac{1}{3}}}$.

x		2	
f''	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	inf.	$\cup$

Question 5.

a) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x^4 + 4x^3 + 10 = \infty$ donc il n'y a pas d'asymptote.
$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3)$ d'où les pt. cr. sont $x = 0$ et $x = -3$.
$f''(x) = 12x^2 + 24x = 12x(x+2)$ d'où les pt. cr. sont $x = 0$ et $x = -2$.

x	$-\infty$		-3		-2		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow\cup$	min	$\nearrow\cup$	inf.	$\nearrow\cap$	inf.	$\nearrow\cup$	

b) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$, $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{32}{(x^2-4)^2} = \infty = \lim_{x\to 2} \frac{32}{(x^2-4)^2}$ donc il y a des asymptotes verticales en $x = -2, 2$.

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{32}{(x^2-4)^2} = 0$ donc il y a une asymptote horizontale en $y = 0$.

$f'(x) = \dfrac{-128x}{(x^2-4)^3}$, d'où les pt. cr. sont $x = -2, 0, 2$

$f''(x) = -128\left(\dfrac{(x^2-4)^3 - 6x^2(x^2-4)^2}{(x^2-4)^6}\right) = -128\left(\dfrac{(x^2-4) - 6x^2}{(x^2-4)^4}\right) = 128\left(\dfrac{5x^2+4}{(x^2-4)^4}\right)$, d'où les pt. cr. sont $x = -2, 2$.

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$		$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	
$f''(x)$		$+$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow\cup$	$\nexists$	$\searrow\cup$	min.	$\nearrow\cup$	$\nexists$	$\searrow\cup$	0

Question 6.

Puisque $f''(x)$ est toujours positive, la fonction est toujours croissante. Elle ne peut donc pas avoir de min. ni de max.

Question 7.

On veux optimiser l'aire du terrain rectangulaire et donc $A = xy$. Mais on a que le périmètre du terrain est de 400m d'où $400 = 2x + 2\pi\left(\dfrac{y}{2}\right)$ et donc $y = \dfrac{400-2x}{\pi}$.
La fonction d'aire devient $A(x) = x\left(\frac{400-2x}{\pi}\right)$.
$A'(x) = \frac{400-4x}{\pi}$. Le point critique est $x = 100$ et c'est un maximum car $A''(x) = -\frac{4}{\pi}$ est négatif. Finalement le terrain doit avoir comme dimension $x = 100$ et $y = \frac{200}{\pi}$