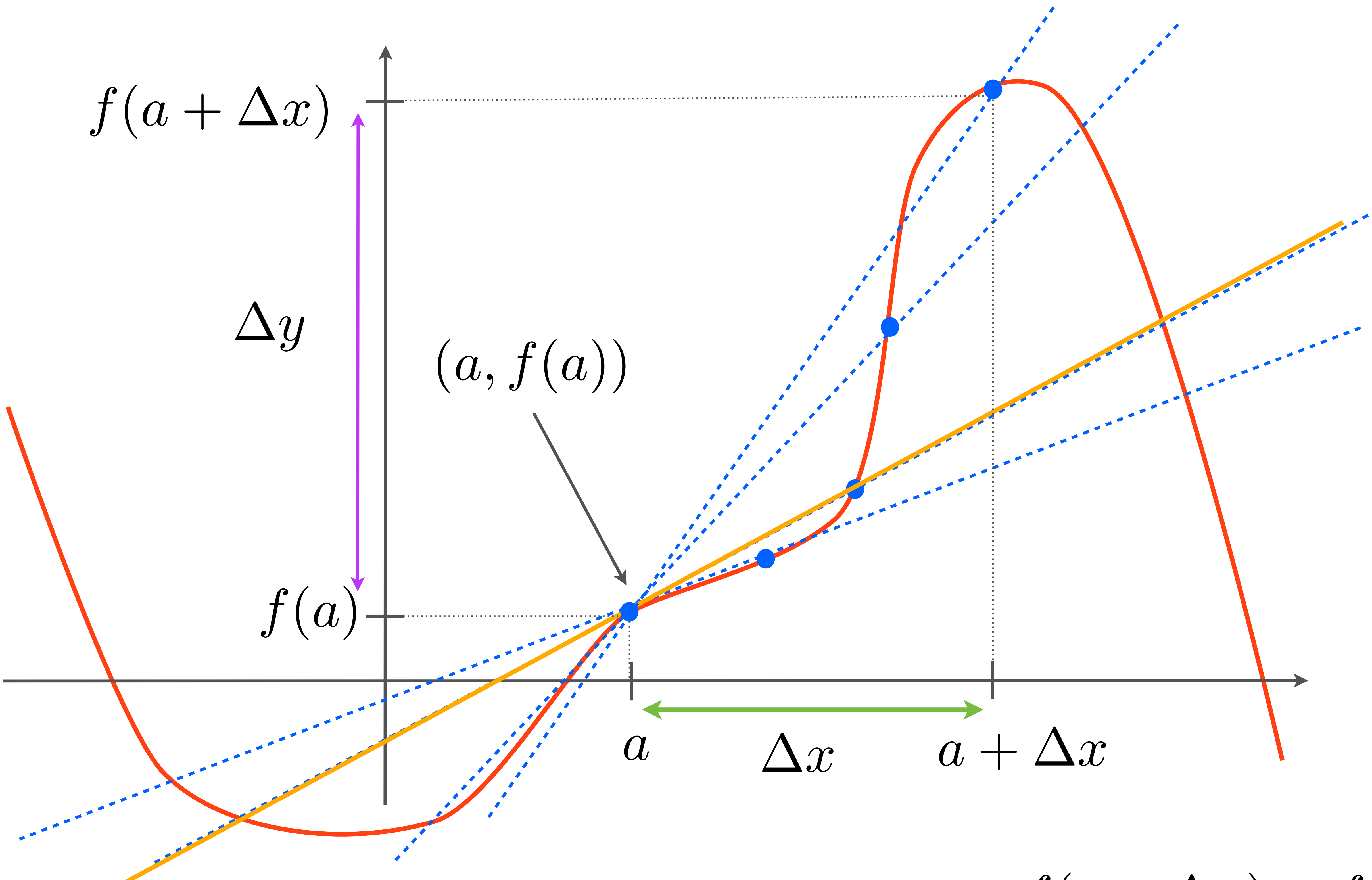
1.1 RÈGLE DE L'HÔPITAL

cours 1

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Révision du calcul différentiel
- ✓ Dérivée logarithmique
- ✓ Règle de l'Hôpital

La dérivée en un point est le taux de variation instantanée.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \qquad f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Formules de dérivation

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Dérivée de fonction simple

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$(e^x)' = e^x$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\arccos x)'$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = -(\operatorname{arccot} x)'$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -(\operatorname{arccsc} x)'$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Exemple

$$\left(\frac{\sin(\log_3 x)}{\arctan(x^2e^{4x})}\right)'$$

$$= \frac{(\sin(\log_3 x))'\arctan(x^2e^{4x}) - \sin(\log_3 x)(\arctan(x^2e^{4x}))'}{(\arctan(x^2e^{4x}))^2}$$

$$= \frac{(\cos(\log_3 x)(\log_3 x)')\arctan(x^2e^{4x}) - \sin(\log_3 x)\left(\frac{(x^2e^{4x})'}{1+(x^2e^{4x})^2}\right)}{(\arctan(x^2e^4x))^2}$$

$$= \frac{(\cos(\log_3 x)\frac{1}{x\ln 3})\arctan(x^2e^{4x}) - \sin(\log_3 x)\left(\frac{2xe^{4x}+4x^2e^{4x}}{1+(x^2e^{4x})^2}\right)}{(\arctan(x^2e^{4x}))^2}$$

Dérivée logarithmique.

Pour les fonctions de la forme

$$f(x)^{g(x)}$$

On peut utiliser l'égalité

$$x = e^{\ln x} \qquad\qquad x > 0$$

ainsi que les lois des log.

Exemple

$$(x^x)' = (e^{\ln x^{x}})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(x \ln x)'$$

$$= e^{x \ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = e^{x \ln x}(\ln x + 1)$$

$$= x^x(\ln x + 1)$$

Exemple

$$f(x) = \boxed{x^{\sin x}} = e^{\ln x^{\sin x}} = \boxed{e^{\sin x \ln x}}$$

$$f'(x) = e^{\sin x \ln x}(\sin x \ln x)'$$

$$= \boxed{e^{\sin x \ln x}}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \boxed{x^{\sin x}}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

Faites les exercices suivants

Faites #1 a) à e)

et

#2 a), b).

Limites et règle de l'Hôpital

Forme	Limite
$\dfrac{k}{\infty}$	0^{+}
$\dfrac{k}{-\infty}$	0^{-}
$\dfrac{k}{0^{+}}$	∞
$\dfrac{k}{0^{-}}$	$-\infty$
$\dfrac{k}{0}$	$\nexists$

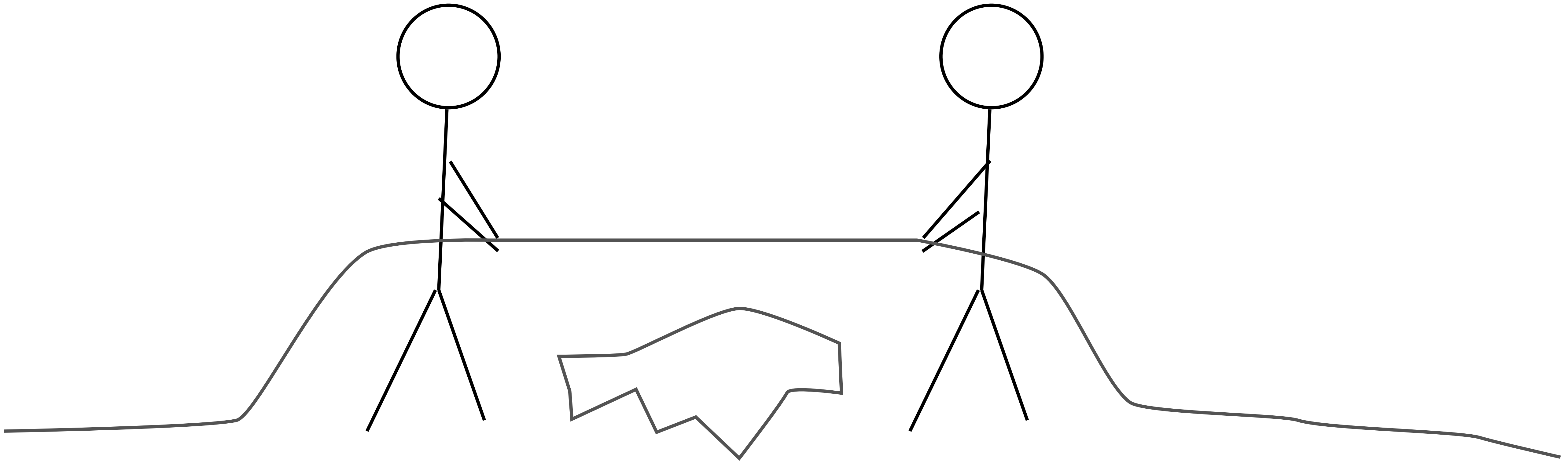
	Forme	Limite
	$\pm k + \infty$	∞
	$\pm k - \infty$	$-\infty$
	$k \cdot \infty$	∞
	$k(-\infty)$	$-\infty$
	∞^{k}	∞
$1 < k$	k^{∞}	∞
$0 < k < 1$	k^{∞}	0
	$(\infty)(\infty)$	∞
	∞^{∞}	∞

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = ?$$

$$\frac{0}{k} \to 0 \qquad \frac{k}{0^{\pm}} \to \pm\infty$$

Donc *f(x)* tire l'expression vers 0 tandis que *g(x)* tire vers ±∞



Exemple

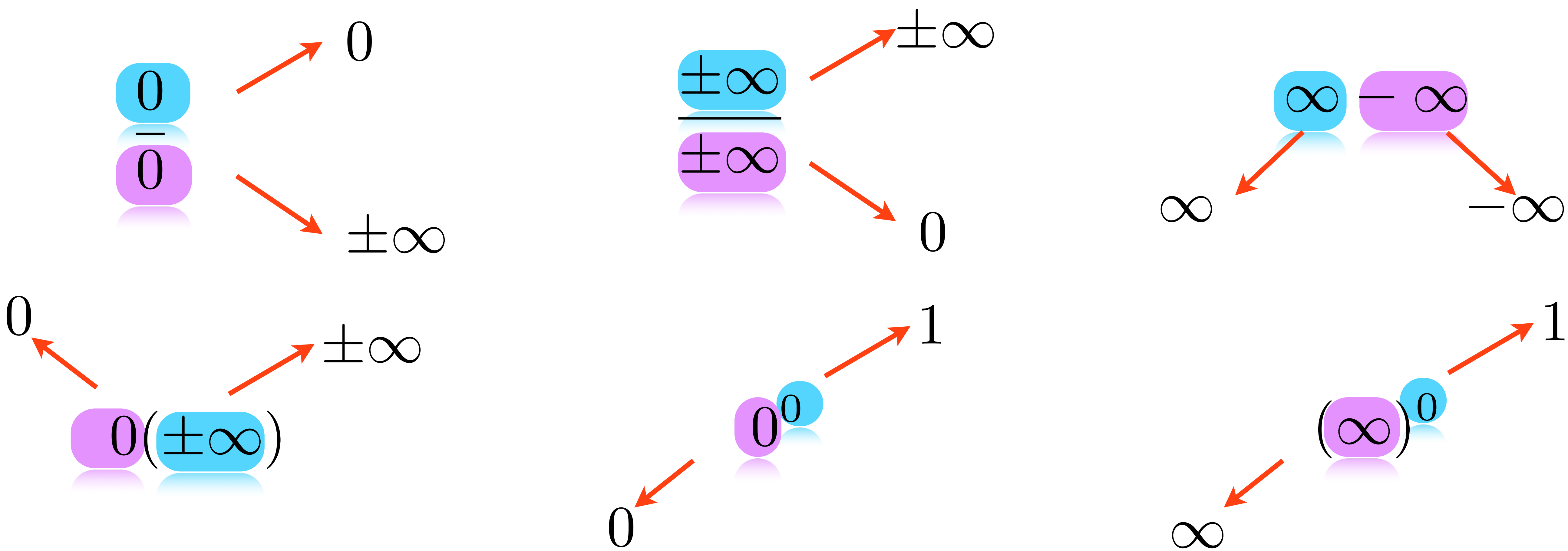
$$\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^2-4}^{0}}{\underbrace{x-2}_{\pm\infty}} = \lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{(x+2)}^{4}\overbrace{(x-2)}^{0}}{\underbrace{x-2}_{\pm\infty}} = \lim_{x\to 2} x+2 \quad = 4$$

Malheureusement, les outils à notre disposition pour lever les indéterminations sont essentiellement:

- Mise en évidence
- Division polynomiale
- Le conjugué
- Mettre sur le même dénominateur

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x} = ?$$

Les formes indéterminées



D'une certaine façon, lever une indétermination revient à déterminer laquelle des deux expressions va le plus vite vers sa limite

On peut donc s'attendre, dans une indétermination, à ce qu'il y ait un lien entre la limite d'un rapport de fonction et la limite du rapport de leurs dérivées.

Théorème

Soient $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions continues sur$]\ b, c\ [$ telles que

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = f(a)$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 = g(a)$ pour $a \in\ ]\ b, c\ [$

2) $f'(x)$ et $g'(x)$ sont continues en $x = a$

3) $g'(x) \neq 0$ $x \in\ ]\ b,c\ [\ \backslash\{a\}$

Alors $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \frac{x-a}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Théorème Soient $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions continues sur $]\, b, c\, [$ telles que

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 = f(a) \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 = g(a)$ pour $a \in]\, b, c\, [$

2) $f'(x)$ et $g'(x)$ sont continues en $x = a$

3) $g'(x) \neq 0 \quad x \in]\, b,c\, [\setminus \{a\}$

Alors $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} f'(x)}{\lim\limits_{x \to a} g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 2} 4x\sqrt{x} = 8\sqrt{2}$$

Exemple

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1}$$

Exemple

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1-e^x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Exemple

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Exemple

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \frac{4}{-1}$$

$$\cancel{= \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3}$$

NON!

La règle de l'Hôpital est valide seulement si on est dans une indétermination $\dfrac{0}{0}$

Remarque:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \neq \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Faites les exercices suivants

Faites # 3 a), b), c) e) et f)

La règle de l'Hôpital reste valide pour les indéterminations de la forme

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

La démonstration est similaire, mais légèrement plus technique.

$$\lim_{x\to a}\frac{\overset{\nearrow\ \pm\infty}{f(x)}}{\underset{\searrow\ \pm\infty}{g(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{\overset{\nearrow\ 0}{\frac{1}{g(x)}}}{\underset{\searrow\ 0}{\frac{1}{f(x)}}}$$

Exemple

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+1}{3x^2-4x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{6x-4}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Exemple

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin x\cos x}{1} = 0$$

Il arrive très souvent qu'on puisse, à l'aide de manipulation algébrique, mettre une indétermination sous la forme

$$\frac{0}{0} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

afin de pouvoir utiliser la règle de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to a} \overbrace{\frac{1}{\underbrace{f(x)}_{0}}}^{\pm\infty} - \overbrace{\frac{1}{\underbrace{g(x)}_{0}}}^{\pm\infty} = \lim_{x\to a} \frac{\overbrace{g(x) - f(x)}^{0}}{\underbrace{f(x)g(x)}_{0}}$$

Exemple

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x}{\cos x \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x + \sin x}{-\sin x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\sin x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x}{-\cos x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x + \sin x}$$

$$= \frac{0}{0 + 1 + 1} = 0$$

Une autre astuce pour ramener une forme indéterminée à une forme

$$\frac{0}{0} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

est de d'évaluer le logarithme de la limite.

$$A = \lim_{x \to a} \overset{0}{f(x)}^{\overset{0}{g(x)}}$$

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} \ln\left(f(x)^{g(x)}\right)$$

$$= \lim_{x \to a} g(x) \ln f(x) \qquad = \lim_{x \to a} \frac{\overset{-\infty}{\ln f(x)}}{\underset{\pm\infty}{\frac{1}{g(x)}}}$$

$$A = e^{\ln A}$$

Exemple

Posons $A = \lim_{x \to 0^+} (\sin x)^x$

et puisque $A = e^{\ln A}$, calculons

$$\ln A = \lim_{x \to 0^+} \ln\left((\sin x)^x\right) = \lim_{x \to 0^+} x \ln(\sin x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^2 \cos x}{\sin x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^+} -\frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^x = A = e^{\ln A} = e^{0} = 1$$

Faites les exercices suivants

#4 a) et b)

#5 a) et b)

6 a) et b)

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Révision des règles de dérivation
- ✓ Dérivée logarithmique $\qquad x = e^{\ln x}$
- ✓ Règle de l'Hôpital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Devoir: Section 1.1