

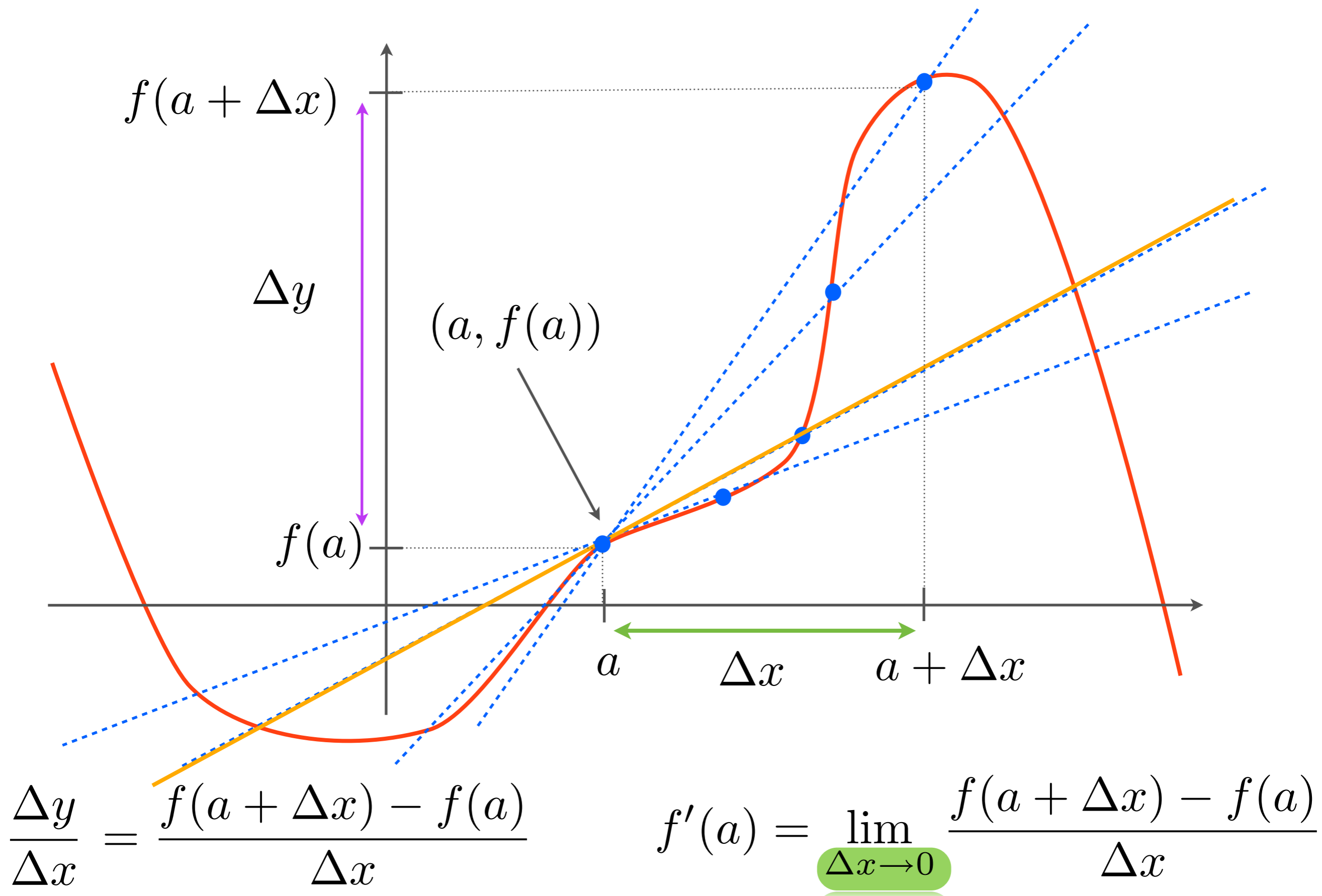
1.1 RÈGLE DE L'HÔPITAL

cours 1

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Révision du calcul différentiel
- ✓ Dérivée logarithmique
- ✓ Règle de l'Hôpital

La dérivée en un point est le taux de variation instantanée.



Formules de dérivation

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Dérivée de fonction simple

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\operatorname{csc}^2 x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\operatorname{csc} x)' = -\operatorname{csc} x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\arccos x)'$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = -(\operatorname{arccot} x)'$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -(\operatorname{arcsc} x)'$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Exemple

$$\left(\frac{\sin(\log_3 x)}{\arctan(x^2 e^{4x})} \right)'$$

$$= \frac{(\sin(\log_3 x))' \arctan(x^2 e^{4x}) - \sin(\log_3 x) (\arctan(x^2 e^{4x}))'}{(\arctan(x^2 e^{4x}))^2}$$

$$= \frac{(\cos(\log_3 x) (\log_3 x)') \arctan(x^2 e^{4x}) - \sin(\log_3 x) \left(\frac{(x^2 e^{4x})'}{1 + (x^2 e^{4x})^2} \right)}{(\arctan(x^2 e^{4x}))^2}$$

$$= \frac{(\cos(\log_3 x) \frac{1}{x \ln 3}) \arctan(x^2 e^{4x}) - \sin(\log_3 x) \left(\frac{2x e^{4x} + 4x^2 e^{4x}}{1 + (x^2 e^{4x})^2} \right)}{(\arctan(x^2 e^{4x}))^2}$$

Dérivée logarithmique.

Pour les fonctions de la forme

$$f(x)^{g(x)}$$

On peut utiliser l'égalité

$$x = e^{\ln x} \quad x > 0$$

ainsi que les lois des log.

Exemple

$$\begin{aligned} (x^x)' &= (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' \\ &= e^{x \ln x} \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) = e^{x \ln x} (\ln x + 1) \\ &= x^x (\ln x + 1) \end{aligned}$$

Exemple

$$f(x) = x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x}$$

$$f'(x) = e^{\sin x \ln x} (\sin x \ln x)'$$

$$= e^{\sin x \ln x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

Faites les exercices suivants

Faites #1 a) à e)

et

#2 a), b).

Limites et règle de l'Hôpital

Forme	Limite		Forme	Limite
$\frac{k}{\infty}$	0^+		$\pm k + \infty$	∞
$\frac{k}{-\infty}$	0^-		$\pm k - \infty$	$-\infty$
$\frac{k}{0^+}$	∞		$k \cdot \infty$	∞
$\frac{k}{0^-}$	$-\infty$	$1 < k$	$k(-\infty)$	$-\infty$
$\frac{k}{0}$	\nexists	$0 < k < 1$	∞^k	∞
			k^∞	∞
			k^∞	0
			$(\infty)(\infty)$	∞
			∞^∞	∞

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

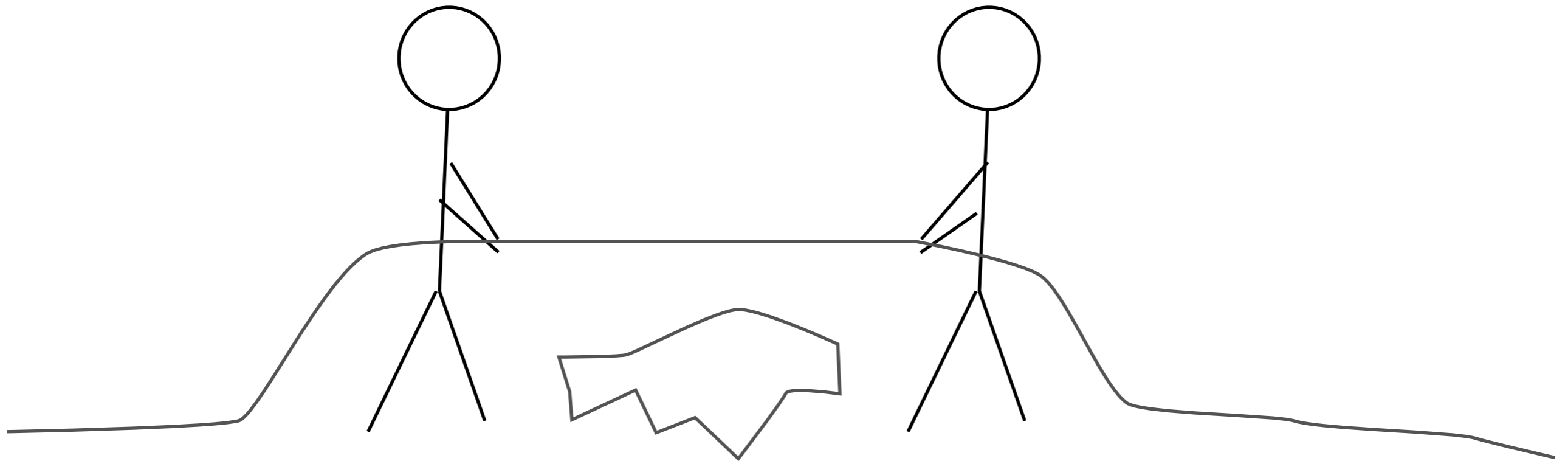
$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = ?$$

$$\frac{0}{k} \rightarrow 0$$

$$\frac{k}{0^\pm} \rightarrow \pm\infty$$

Donc $f(x)$ tire l'expression vers 0 tandis que $g(x)$ tire vers $\pm\infty$



Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$

Diagram illustrating the simplification of the limit expression. Red arrows indicate the following mappings:

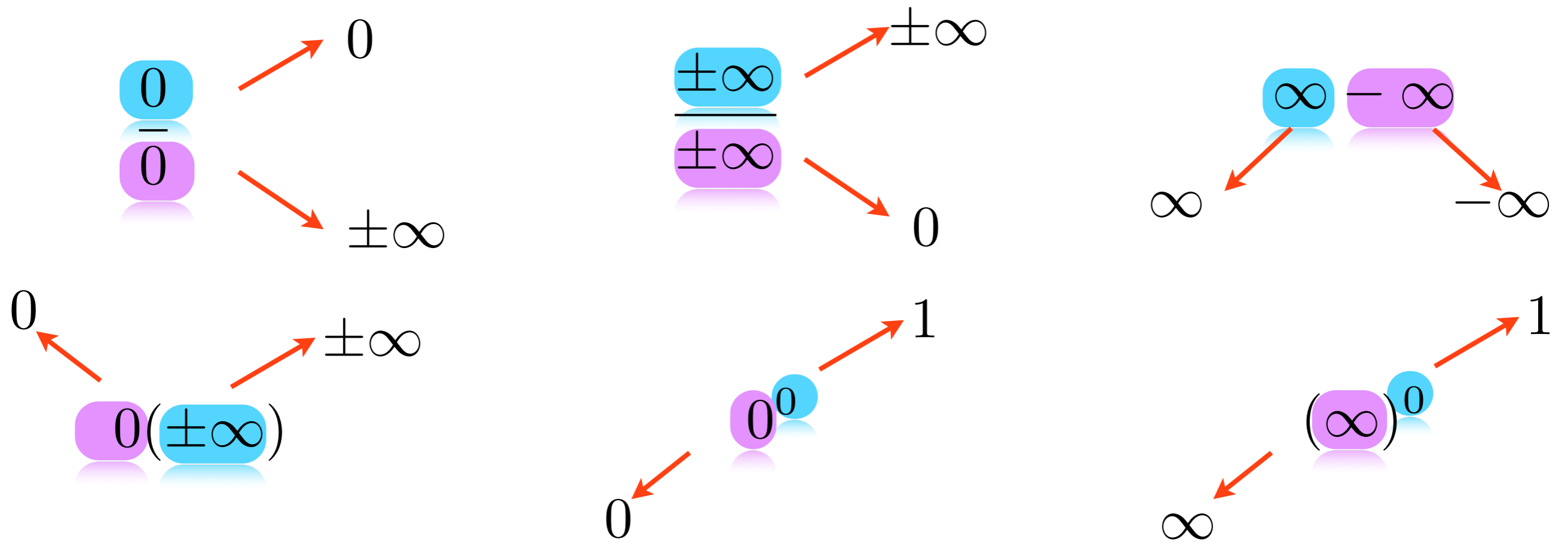
- From the original expression to the factored form: 0 (numerator) and $\pm\infty$ (denominator).
- From the factored form to the simplified form: 4 (numerator) and $\pm\infty$ (denominator).
- From the simplified form to the final result: 0 (numerator) and $\pm\infty$ (denominator).

Malheureusement, les outils à notre disposition pour lever les indéterminations sont essentiellement:

- Mise en évidence
- Division polynomiale
- Le conjugué
- Mettre sur le même dénominateur

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = ?$$

Les formes indéterminées



D'une certaine façon, lever une indétermination revient à déterminer laquelle des deux expressions va le plus vite vers sa limite

On peut donc s'attendre, dans une indétermination, à ce qu'il y ait un lien entre la limite d'un rapport de fonction et la limite du rapport de leurs dérivées.

Théorème

Soient $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions continues sur $]b, c[$ telles que

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a)$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = g(a)$ pour $a \in]b, c[$

2) $f'(x)$ et $g'(x)$ sont continues en $x = a$

3) $g'(x) \neq 0$ $x \in]b, c[\setminus \{a\}$

Alors
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \frac{x - a}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{aligned}$$

Théorème

Soient $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions continues sur $]b, c[$ telles que

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a)$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = g(a)$ pour $a \in]b, c[$

2) $f'(x)$ et $g'(x)$ sont continues en $x = a$

3) $g'(x) \neq 0$ $x \in]b, c[\setminus \{a\}$

Alors
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Example

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 2} 4x\sqrt{x} = 8\sqrt{2}$$

Example

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1}$$

Example

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - e^x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Example

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \frac{4}{-1}$$

~~$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2} = 3$$~~

NON!

La règle de l'Hôpital est valide seulement si on est dans une indétermination $\frac{0}{0}$

Remarque:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \neq \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Faites les exercices suivants

Faites # 3 a), b), c) e) et f)

La règle de l'Hôpital reste valide pour les indéterminations de la forme

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

La démonstration est similaire, mais légèrement plus technique.

The diagram illustrates the transformation of an indeterminate form. On the left, the limit $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ is shown. The numerator $f(x)$ is highlighted in a light blue rounded rectangle, and the denominator $g(x)$ is highlighted in a light purple rounded rectangle. Two red arrows point from these boxes to $\pm\infty$ above and below the fraction, respectively. This is followed by an equals sign and the transformed limit $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$. The numerator $\frac{1}{g(x)}$ is highlighted in a light purple rounded rectangle, and the denominator $\frac{1}{f(x)}$ is highlighted in a light blue rounded rectangle. Two red arrows point from these boxes to 0 above and below the fraction, respectively.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

Example

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 4x + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{6x - 4}$$

$$\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Example

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \sin x \cos x}{1} = 0$$

Il arrive très souvent qu'on puisse, à l'aide de manipulation algébrique, mettre une indétermination sous la forme

$$\frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

afin de pouvoir utiliser la règle de l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - f(x)}{f(x)g(x)}$$

The diagram illustrates the transformation of the limit expression. On the left, the expression $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}$ is shown. The numerators '1' are highlighted in blue boxes, and the denominators $f(x)$ and $g(x)$ are highlighted in purple boxes. Red arrows point from the '1's to $\pm\infty$ and from the $f(x)$ and $g(x)$ boxes to 0. A minus sign is between the two fractions. This is equal to the limit of a single fraction $\frac{g(x) - f(x)}{f(x)g(x)}$ as $x \rightarrow a$. The numerator $g(x) - f(x)$ and denominator $f(x)g(x)$ are highlighted in purple boxes. Red arrows point from the numerator to 0 and from the denominator to 0.

Example

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \cos x}{\cos x \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}$$

$$\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \sin x + \sin x}{- \sin x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \cos x}$$

$$\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{- \sin x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \cos x}{- \cos x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin x + \sin x}$$

$$= \frac{0}{0 + 1 + 1} = 0$$

Une autre astuce pour ramener une forme indéterminée à une forme

$$\frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

est de d'évaluer le logarithme de la limite.

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{f(x)}_{0} \underbrace{g(x)}_{0}$$

$$\begin{aligned} \ln A &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \ln \left(f(x)^{g(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\quad} -\infty$
 $\xrightarrow{\quad} \pm\infty$

$$A = e^{\ln A}$$

Exemple

$$\text{Posons } A = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$$

et puisque $A = e^{\ln A}$, calculons

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln ((\sin x)^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln (\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}$$

$$\stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2 \cos x}{\sin x}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = A = e^{\ln A} = e^0 = 1$$

Faites les exercices suivants

#4 a) et b)

#5 a) et b)

6 a) et b)

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Révision des règles de dérivation

✓ Dérivée logarithmique $x = e^{\ln x}$

✓ Règle de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Devoir:

Section 1.1