1.2 INTÉGRALE INDÉFINIE

cours 2

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Révision des règles de dérivation
- ✓ Dérivée logarithmique $\qquad x = e^{\ln x}$
- ✓ Règle de l'Hôpital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ La primitive d’une fonction
- ✓ L’intégrale indéfinie
- ✓ Calcul d’intégrale simple

Dans le cours de calcul différentielle nous avons vu

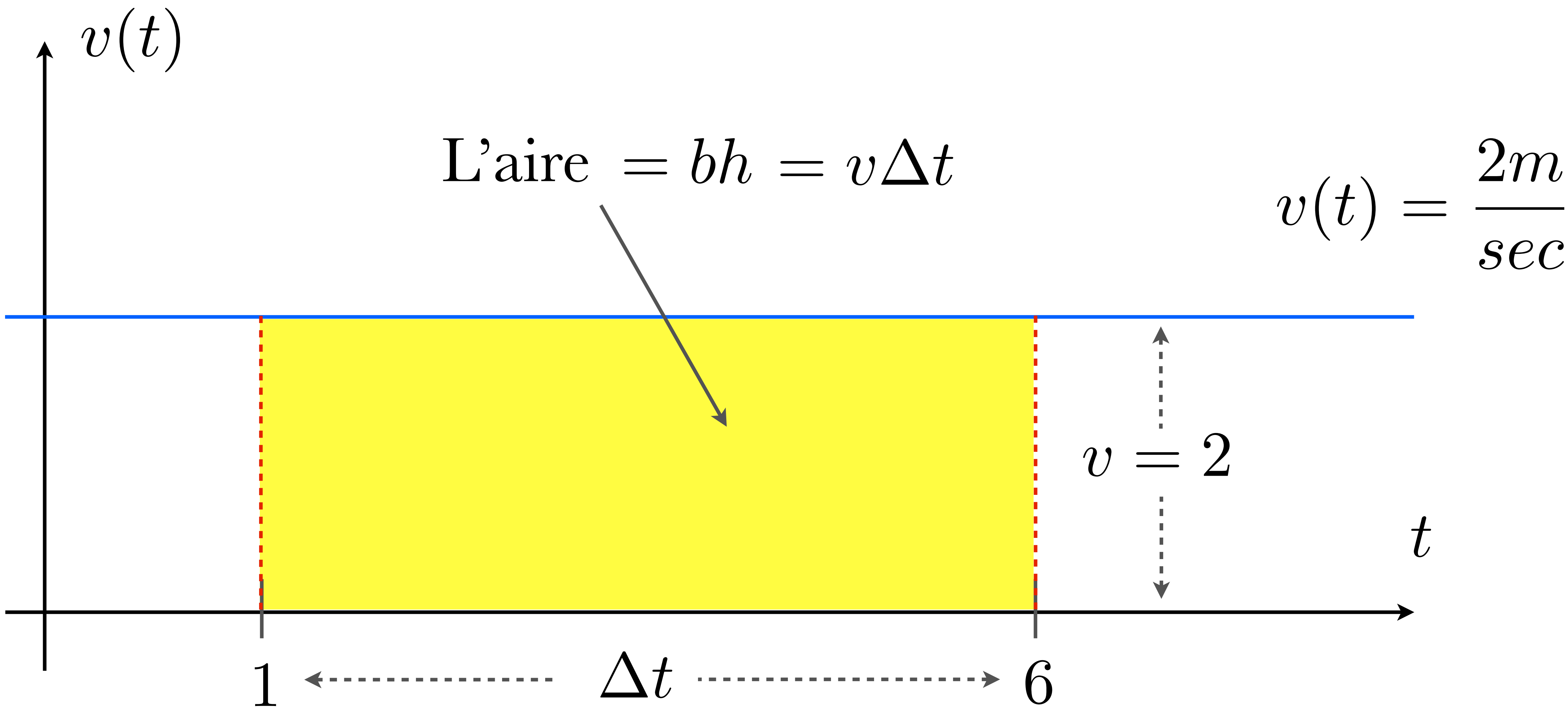
$$f(x) \longrightarrow f'(x)$$

Une fonction

Une fonction qui donne la pente de la droite tangente en un point de la fonction

Dans la cas où la fonction représentait la position par rapport au temps, la dérivée correspondait à la vitesse.

Prenons l'exemple d'une particule qui se déplace à vitesse constante.



Pour connaître le déplacement

$$v\Delta t = \frac{2m}{sec}(6sec - 1sec)$$

$$= \frac{2m}{sec}5sec \quad = 10m$$

Mais si on connaissait la position en fonction du temps on pourrait aussi trouver le déplacement.

$$p(t) \qquad\qquad p'(t) = v(t) = \frac{2m}{sec}$$

Quelle fonction donne une constante une fois dérivée?

$$p(t) = \frac{2m}{sec}t \qquad \text{mais aussi} \qquad p(t) = \frac{2m}{sec}t + 1m$$

$$\text{et aussi} \qquad p(t) = \frac{2m}{sec}t + 2m \qquad \text{etc.}$$

Or pour trouver le déplacement entre 1 sec et 6 sec on fait

$$p(6) - p(1) = \left(\frac{2m}{sec}6sec + 1m\right) - \left(\frac{2m}{sec}1sec + 1m\right)$$

$$= 12m + \cancel{1m} - 2m - \cancel{1m} = 10m$$

Il semble donc y avoir un lien entre
trouver l’aire sous une courbe et
trouver une fonction qui une fois dérivée
donne la fonction de départ.

Nous allons passer une bonne partie de la session à mieux comprendre ce lien.

Définition

On dit que la fonction $F(x)$ est une primitive de la fonction $f(x)$ si

$$F'(x) = f(x)$$

Trouver une primitive d'une fonction revient à faire le processus inverse de la dérivée

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, shift left] & F'(x) = f(x) \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ alors

$$G(x) = F(x) + C$$

où C est une constante,

est aussi une primitive de $f(x)$ car

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

Inversement

Si $F(x)$ et $G(x)$ sont deux primitives de $f(x)$ alors

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$H(x) = C \qquad G(x) = F(x) + C$$

Faites les exercices suivants

Faites #7

Donc, si on trouve une primitive d'une fonction, on les connaît toutes et elles diffèrent d'une constante.

Définition On nomme l'ensemble de toutes les primitives d'une fonction, l'intégrale indéfinie de la fonction et on la note

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Remarque: Cette notation semble pour le moment arbitraire, mais nous verrons bientôt pourquoi on met.

Pour le moment, le « *dx* » sert surtout à indiquer la variable.

Remarque:

Il y a un léger problème à définir l'intégrale indéfinie d'une fonction qui n'est pas continue.

On sous entend donc que l'égalité

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

est vrai seulement sur les intervalles où la fonction $f(x)$ est continue.

Voyons voir si on peut trouver l'intégrale indéfinie des fonctions de bases .

$f(x) = x^n$ $f(x) = e^x$ $f(x) = \ln x$

$f(x) = \sin x$ $f(x) = \tan x$ $f(x) = \sec x$

$f(x) = \cos x$ $f(x) = \cot x$ $f(x) = \csc x$

$f(x) = \arcsin x$ $f(x) = \arctan x$ $f(x) = \text{arcsec } x$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

car $$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \left(\frac{1}{(n+1)} x^{n+1}\right)' + 0$$

$$= \frac{1}{\cancel{(n+1)}} \cancel{(n+1)} x^{n+1-1} = x^n$$

Exemple $$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

Exemple $$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx = \int x^{-\frac{3}{5}}\, dx = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + C = \frac{5\sqrt[5]{x^2}}{2} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx \qquad\qquad \mathrm{dom}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

si $\quad x > 0 \qquad \displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$

si $\quad x < 0 \qquad \displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(-x) + C$

car $\qquad \displaystyle(\ln(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

On peut donc dire que $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$

Mais il faut garder en tête que cette égalité n'a pas de sens pour tout intervalle contenant 0.

$$\int \cos x \; dx = \sin x + C \qquad \text{car} \qquad (\sin x + C)' = \cos x$$

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + C \qquad \text{car} \qquad (-\cos x + C)' = -(-\sin x) = \sin x$$

$$\int a^x \; dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \text{car} \qquad \left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a}\,(a^x)' = \frac{1}{\cancel{\ln a}}\,(a^x \cancel{\ln a})$$

$$\int e^x \; dx = e^x + C$$

Malheureusement, on ne peut pas tirer grand-chose des autres formules de dérivation.

$$\int \sec^2 x \ dx = \tan x + C \qquad \int \sec x \tan x \ dx = \sec x + C$$

$$\int \csc^2 x \ dx = -\cot x + C \qquad \int \csc x \cot x \ dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \ dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \ dx = \operatorname{arcsec} \ x + C$$

Mais c'est quand même pratique de connaître ces intégrales.

Voyons voir si on peut trouver l'intégrale indéfinie des fonctions de bases .

$f(x) = x^n$

$f(x) = e^x$

$f(x) = \ln x$?

$f(x) = \sin x$

$f(x) = \tan x$?

$f(x) = \sec x$?

$f(x) = \cos x$

$f(x) = \cot x$?

$f(x) = \csc x$?

$f(x) = \arcsin x$?

$f(x) = \arctan x$?

$f(x) = \text{arcsec}\ x$?

Peut-on trouver des règles d'intégration équivalentes aux règles de dérivation ?

$$(kf(x))' = kf'(x) \qquad \int kf(x)\ dx$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \qquad \int f(x) + g(x)\ dx$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \int f(x)g(x)\ dx$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad \int \frac{f(x)}{g(x)}\ dx$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \qquad \int f(g(x))\ dx$$

Théorème

$$\int kf(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$$

Preuve:

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$

c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$

$$k\int f(x)\ dx = k\left(F(x) + C\right)$$

$$\left(k\left(F(x) + C\right)\right)' = \left(kF(x) + kC\right)' = \left(kF(x)\right)' + 0$$

$$= k(F(x))' = kf(x)$$

Donc $\displaystyle\int kf(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$

Théorème $$\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

Preuve:

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$

et $G(x)$ une primitive de $g(x)$

$$F'(x) = f(x) \qquad\qquad G'(x) = g(x)$$

$$\int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx = (F(x) + C_1) + (G(x) + C_2)$$

$$[(F(x) + C_1) + (G(x) + C_2)]' = (F'(x) + 0) + (G'(x) + 0)$$

$$= f(x) + g(x)$$

Donc $$\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

Exemple

$$\int x^3 - 4x^2 + 3\sqrt[5]{x}\ dx = \int x^3\ dx + \int -4x^2\ dx + \int 3\sqrt[5]{x}\ dx$$

$$= \int x^3\ dx - 4\int x^2\ dx + 3\int \sqrt[5]{x}\ dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \boxed{C_1} - 4\frac{x^3}{3} + \boxed{C_2} + 3\frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + \boxed{C_3}$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^{\frac{6}{5}}}{2} + \boxed{C}$$

Faites les exercices suivants

Calculer les intégrales suivantes

1) $$\int 4x^3 - \frac{5}{x^2} - \sin x \; dx$$

2) $$\int \frac{x^3 - \sqrt{x} - 1}{x^2} \; dx$$

3) $$\int \frac{\sin x + 1}{1 - \sin^2 x} \; dx$$

Peut-on trouver des règles d'intégration équivalentes aux règles de dérivation ?

$$(kf(x))' = kf'(x) \qquad \int kf(x)\ dx$$

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \qquad \int f(x)+g(x)\ dx$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad \int f(x)g(x)\ dx \quad ?$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad \int \frac{f(x)}{g(x)}\ dx \quad ?$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \qquad \int f(g(x))\ dx \quad ?$$

$$\int \sec x \; dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

Est-ce vrai?

On n'est peut-être pas capable de calculer certaines intégrales, mais on peut toujours se vérifier!

$$\big(\ln |\sec x + \tan x| + C \big)' = \frac{(\sec x + \tan x)'}{\sec x + \tan x}$$

$$= \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x \cancel{(\tan x + \sec x)}}{\cancel{\sec x + \tan x}}$$

$$= \sec x$$

$$\int \tan x \; dx \;\; = -\ln|\cos x| + C \;\; = \ln|\cos x^{-1}| + C$$

$$= \ln|\sec x| + C$$

On peut aussi procéder à tâtons.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Comment obtient-on un dénominateur en dérivant ?

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln \cos x)' = \frac{1}{\cos x}(\cos x') \;\; = \frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$(-\ln \cos x)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} \;\; = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Voyons voir si on peut trouver l'intégrale définie
des fonctions de bases .

$f(x) = x^n$	$f(x) = e^x$	$f(x) = \ln x$
$f(x) = \sin x$	$f(x) = \tan x$	$f(x) = \sec x$
$f(x) = \cos x$	$f(x) = \cot x$	$f(x) = \csc x$
$f(x) = \arcsin x$	$f(x) = \arctan x$	$f(x) = \text{arcsec}\ x$

Vous pouvez vous inspirer de ce que je viens juste de faire pour

Faites les exercices suivants

#9, 10, 11 (a), b) et c))

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Primitive
- ✓ Intégrale indéfinie

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$$

$$\int \tan x\ dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x + C$$

$$\int \sec x\ dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x\ dx = e^x + C$$

Aujourd'hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

$$\int kf(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$$

$$\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

Devoir: Section 1.2