1.4 SOMME

cours 4

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ La différentielle
- ✓ Le changement de variable

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ La notation sigma
- ✓ Des règles de sommation
- ✓ Le calcul de certaines sommations.

Comme nous le verrons bientôt le symbole

$$\int$$

est un « s » allongé et fait référence à la première lettre de somme.

Mais avant de voir ça, étudions une autre notation.

$$1 + 2$$

$$1 + 2 + 3$$

$$1 + 2 + 3 + 4$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$\vdots$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

On comprend assez bien la règle, mais ça serait bien d'avoir une notation pour l'écrire de manière plus compacte.

La fin de la somme

Une somme

L’indice de la somme

$$\sum_{i=r}^{n} a_i = \sum_{i=r}^{n} f(i)$$

Le début de la somme

Une expression qui dépend de i

$$\sum_{i=r}^{n} a_i = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Exemple

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Exemple

$$\sum_{i=3}^{5} i = 3 + 4 + 5$$

Exemple

$$\sum_{i=1}^{4} 3i = 3(1) + 3(2) + 3(3) + 3(4)$$

Exemple

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$i = 2 \qquad i = 4$

Exemple

$$\sum_{i=1}^{4} 7 = 7 + 7 + 7 + 7$$

$i = 1 \qquad i = 3$

Faites les exercices suivants

Section 1.4 # 18 et 19

En principe, on sait faire des additions.

Mais là, il peut y en avoir beaucoup!

$$\sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4 \ = 10$$

$$\sum_{i=1}^{1000} i$$

Ouin... ça va être long!

Essayons de voir si on peut dégager certains principes nous permettant de simplifier certaines sommes.

$$\begin{aligned}\sum_{k=r}^{n} ca_k &= \sum_{k=r}^{n} cf(k) \\ &= cf(r) + cf(r+1) + \cdots + cf(n-1) + cf(n) \\ &= c\big(f(r) + f(r+1) + \cdots + f(n-1) + f(n)\big) \\ &= c\sum_{k=r}^{n} f(k)\end{aligned}$$

$$\sum_{k=r}^{n} cf(k) = c\sum_{k=r}^{n} f(k)$$

$$\sum_{k=r}^{n} f(k) + g(k)$$

$$= \big(f(r) + g(r)\big) + \big(f(r+1) + g(r+1)\big) + \cdots + \big(f(n) + g(n)\big)$$

$$= \Big(f(r) + f(r+1) + \cdots + f(n)\Big) + \Big(g(r) + g(r+1) + \cdots + g(n)\Big)$$

$$= \sum_{k=r}^{n} f(k) + \sum_{k=r}^{n} g(k)$$

$$\sum_{k=r}^{n} f(k) + g(k) = \sum_{k=r}^{n} f(k) + \sum_{k=r}^{n} g(k)$$

Il est difficile de passer sous silence la similitude de ces règles avec celles de l'intégrale.

$$\sum_{k=r}^{n} cf(k) = c\sum_{k=r}^{n} f(k)$$

$$\int cf(x)\ dx = c\int f(x)\ dx$$

$$\sum_{k=r}^{n} f(k) + g(k) = \sum_{k=r}^{n} f(k) + \sum_{k=r}^{n} g(k)$$

$$\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$= (1 + 2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10)$$

$$= \sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=5}^{10} k$$

$$\sum_{k=r}^{n} f(k) = \sum_{k=r}^{t} f(k) + \sum_{k=t+1}^{n} f(k)$$

Cette propriété va nous être utile bientôt, car la plupart des formules que nous verrons commencent en 1.

$$\sum_{k=r}^{n} f(k) = \sum_{k=r}^{t} f(k) + \sum_{k=t+1}^{n} f(k)$$

$$\sum_{i=7}^{34} i = \sum_{i=1}^{34} i - \sum_{i=1}^{6} i$$

$$\sum_{i=1}^{34} i = \boxed{\sum_{i=1}^{6} i} + \sum_{i=7}^{34} i$$

Essayons de voir si l'on peut trouver des outils nous permettant de faire ça plus rapidement.

Exemple

$$\sum_{k=1}^{8} 2 = 2+2+2+2+2+2+2+2 = 8 \cdot 2$$

$$= (8-1+1)2$$

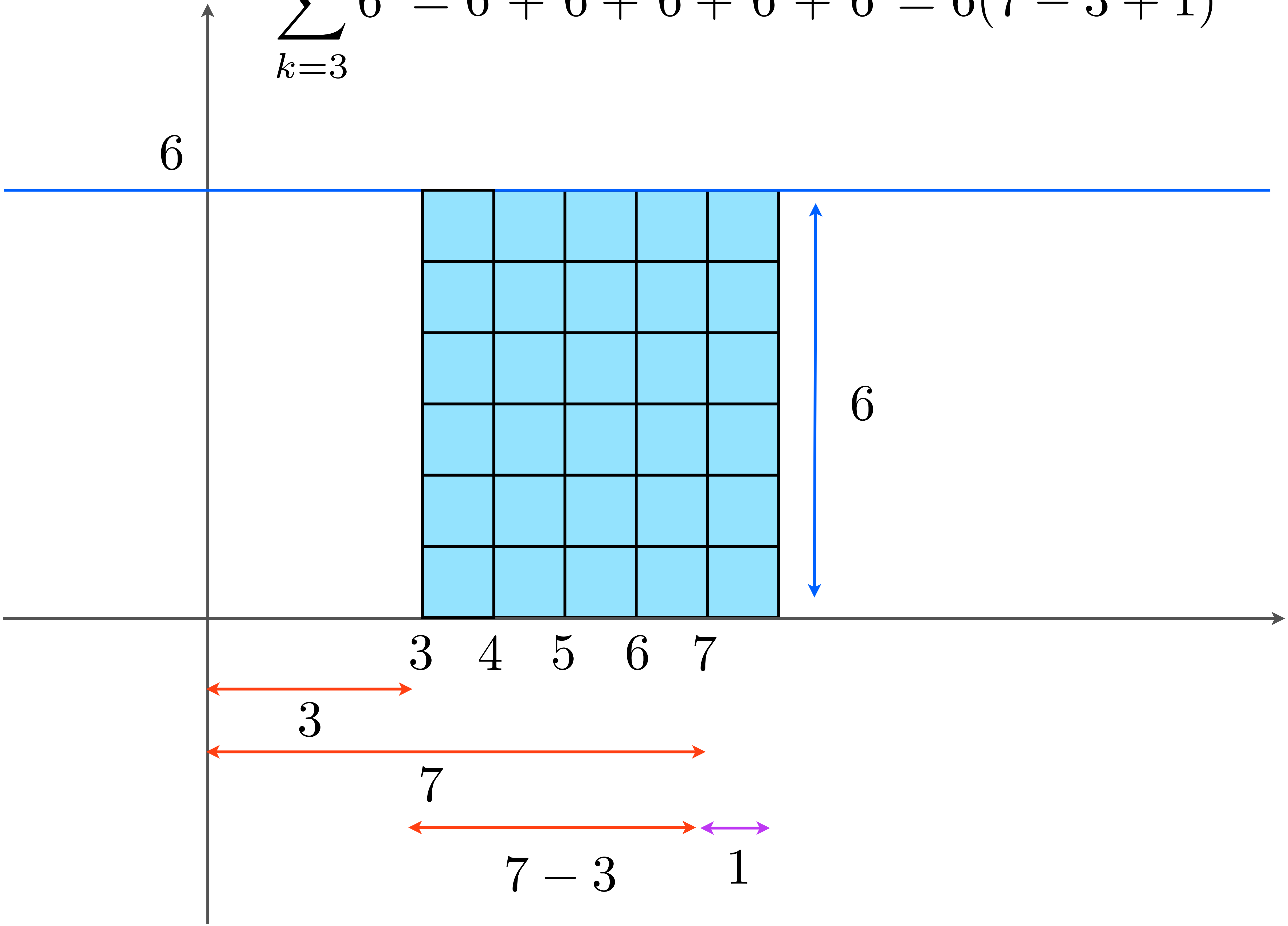
$$\sum_{k=3}^{10} 2 = 2+2+2+2+2+2+2+2 = 8 \cdot 2$$

$$= (10-3+1)2$$

On peut donc conclure

$$\sum_{k=a}^{b} c = (b-a+1)c$$

$$\sum_{k=3}^{7} 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 6(7 - 3 + 1)$$



$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(2)}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2} k = 1 + 2 = 3 = \frac{2(3)}{2} = \frac{2(2+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3(4)}{2} = \frac{3(3+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4(5)}{2} = \frac{4(4+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5(6)}{2} = \frac{5(5+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{6} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6(7)}{2} = \frac{6(6+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \stackrel{?}{=} \frac{n(n+1)}{2}$$

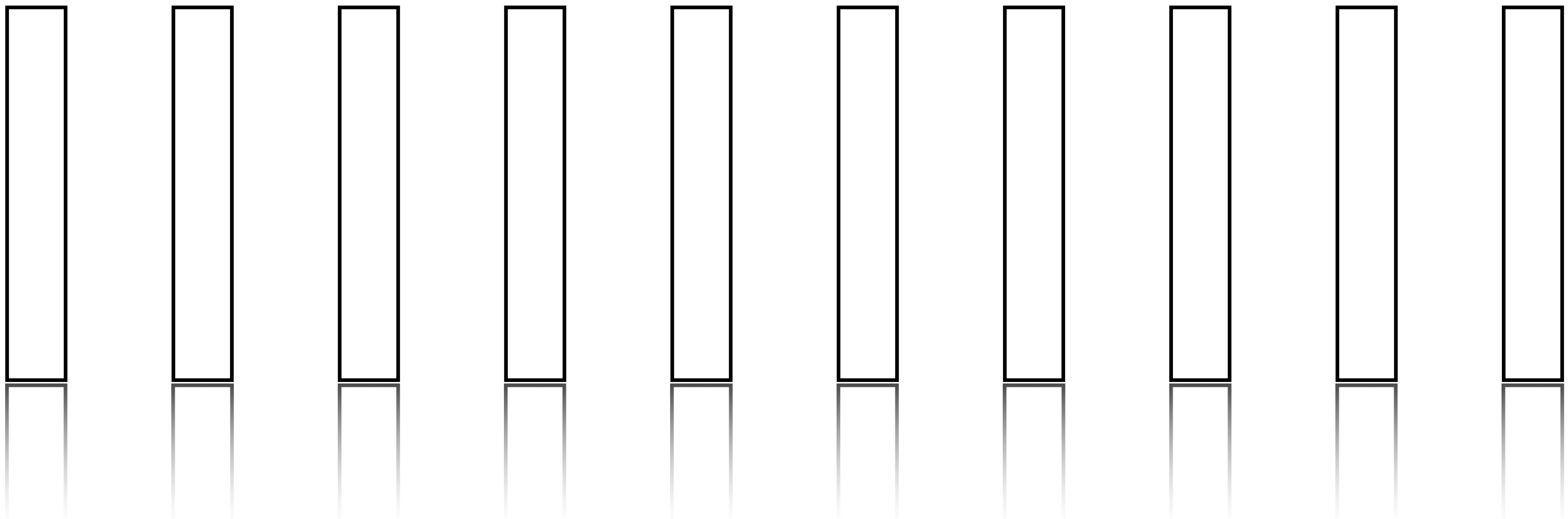
Comment faire pour être certain que cette formule fonctionne toujours?

Induction

L'induction est une méthode de preuve qui permet de vérifier si une proposition est vraie pour tous les entiers.

Dominos

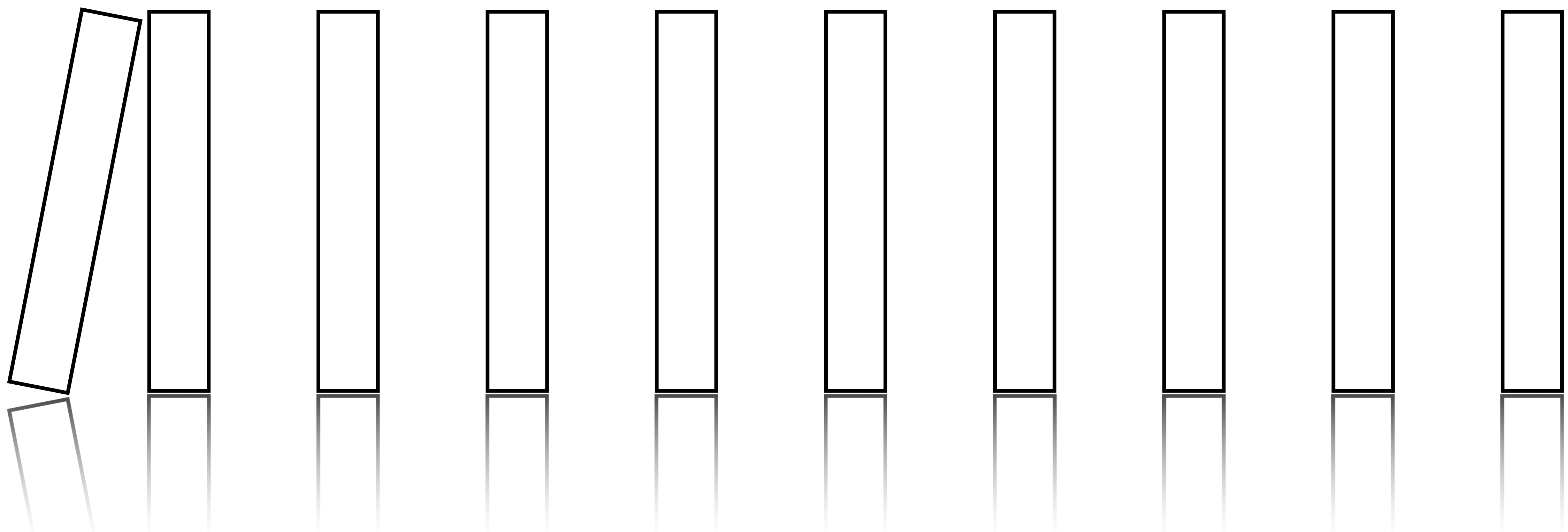
Quelles sont les conditions pour qu'ils tombent tous?



1) On doit être capable de faire tomber le premier

Dominos

Quelles sont les conditions pour qu'ils tombent tous?

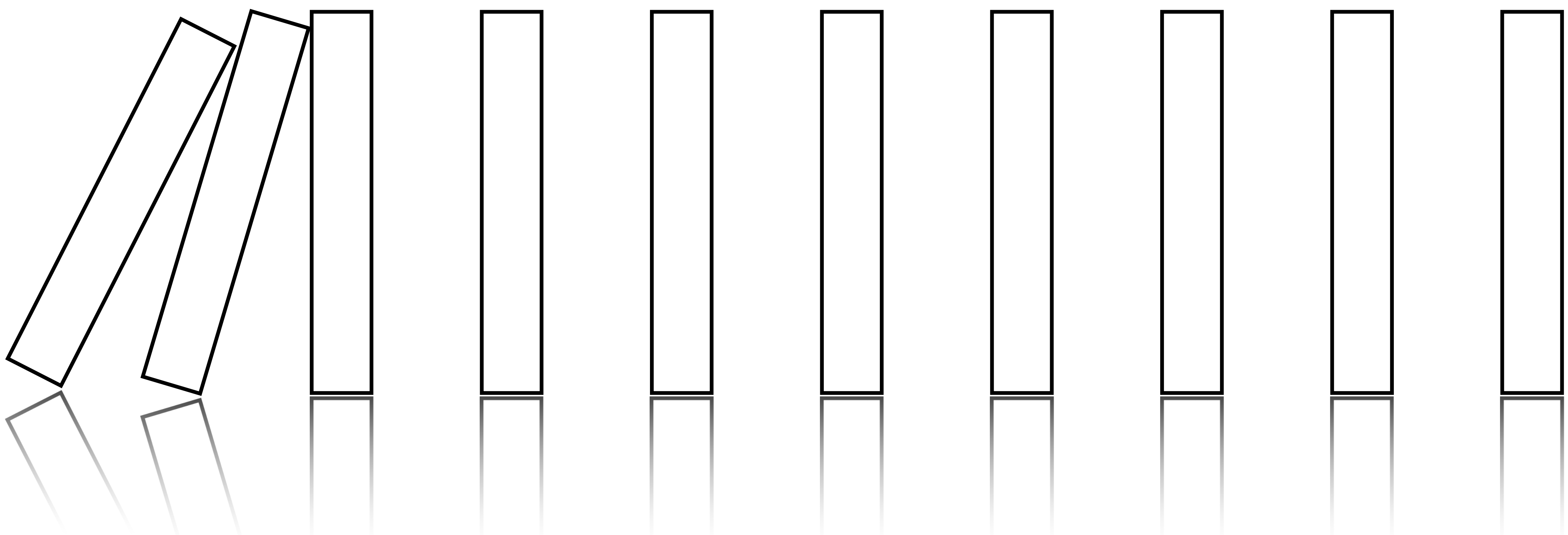


1) On doit être capable de faire tomber le premier

2) Si n'importe quel domino tombe, il doit faire tomber le suivant.

Dominos

Quelles sont les conditions pour qu'ils tombent tous?



1) On doit être capable de faire tomber le premier

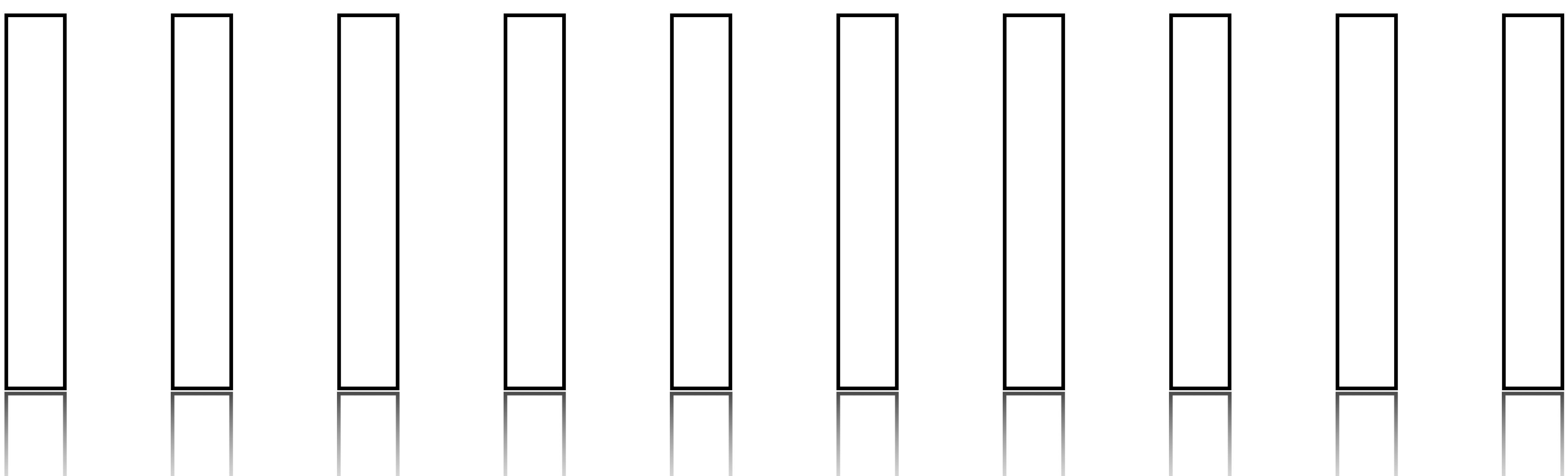
2) Si n'importe quel domino tombe, il doit faire tomber le suivant.

En terme d'autres mots, si l'on vérifie qu'une proposition

1) est vrai pour $n = 1$

2) si elle est vrai pour n alors elle est vrai pour $n + 1$

$$1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow \ldots$$



$n = 1$ $$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Supposons vrai pour n

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \overset{?}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{6} k = 1+2+3+4+5+6$$

$+$

$$\sum_{k=1}^{6} k = 6+5+4+3+2+1$$

1 2 3 4 5

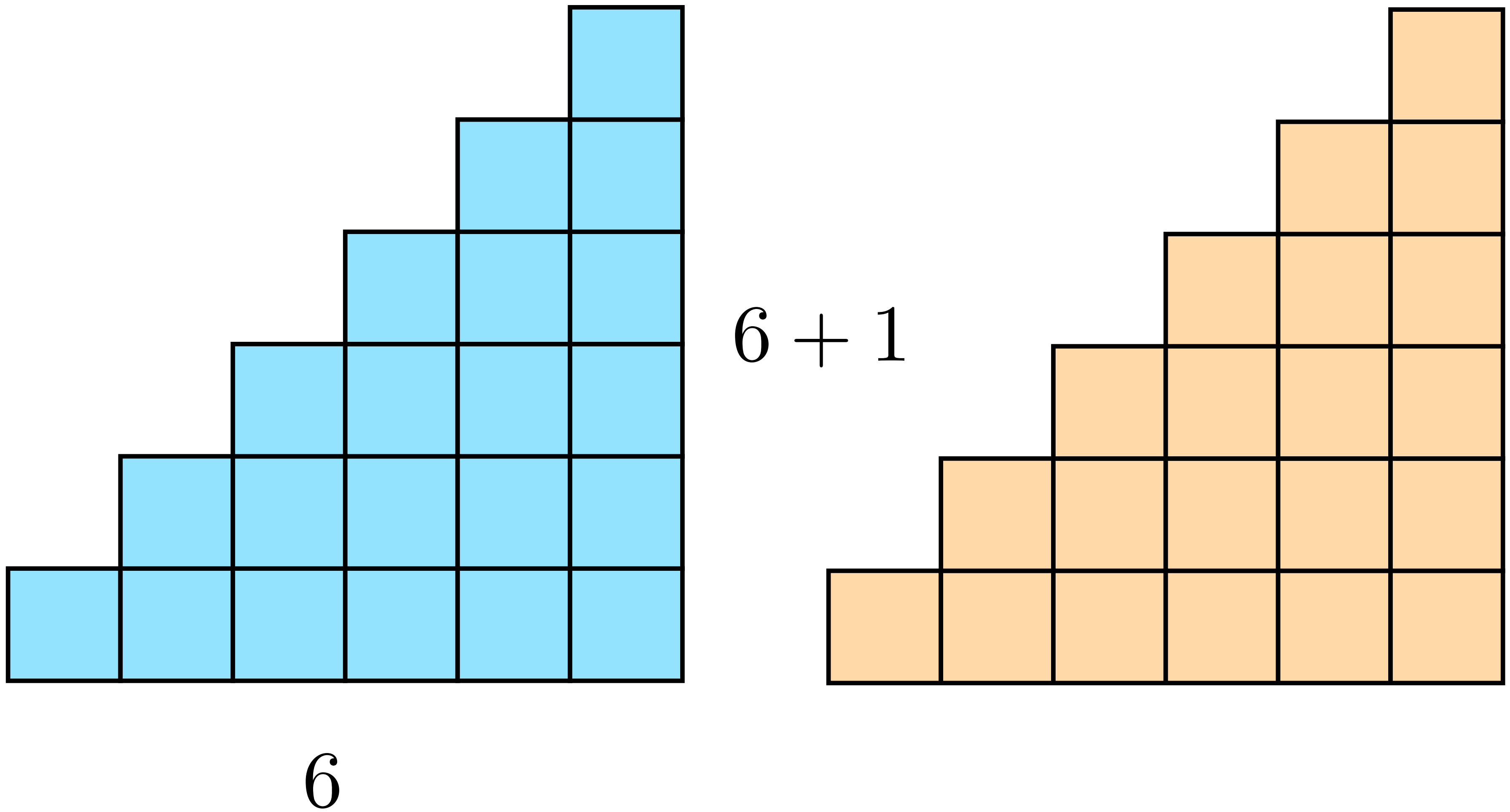
$$2\sum_{k=1}^{6} k = (1+6)+(2+5)+(3+4)+(4+3)+(5+2)+(6+1)$$

$$= \underbrace{(1+6)+(1+6)+(1+6)+(1+6)+(1+6)+(1+6)}_{6 \text{ fois}}$$

$$= 6(6+1)$$

$$\sum_{k=1}^{6} = \frac{6(6+1)}{2}$$

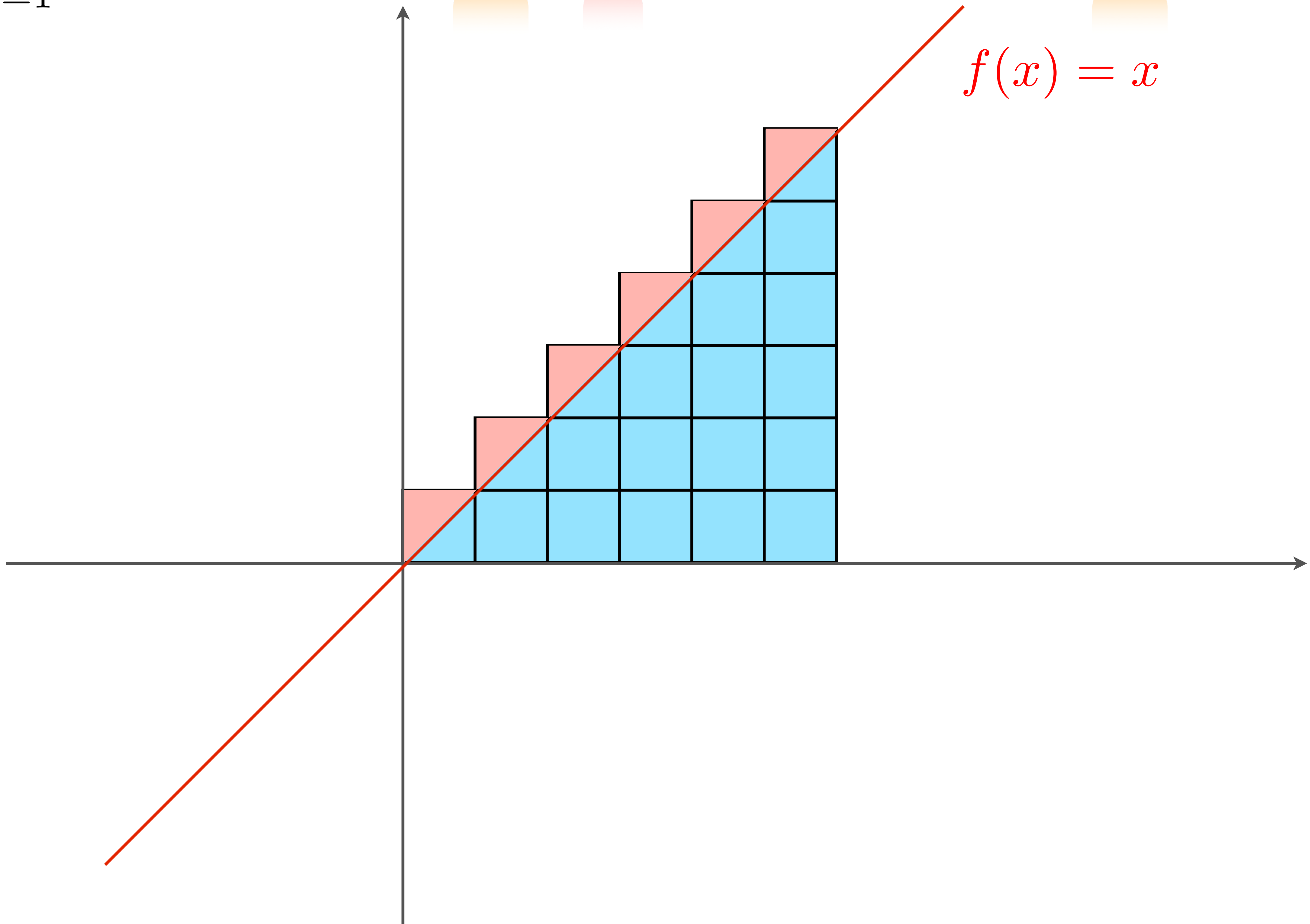
$$\boxed{\sum_{k=1}^{6} k} = \frac{1}{2}\text{Aire}_{\text{rectangle}} = \frac{bh}{2} = \frac{6(6+1)}{2}$$



$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \boxed{k} = \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n^2}{2}} + \boxed{\frac{n}{2}}$$

$$\int \boxed{x}\, dx = \boxed{\frac{x^2}{2}} + C$$



$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2} =? \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 =? \qquad \sum_{k=1}^{n} k^4 =? \qquad \text{etc.}$$

La méthode que nous utiliserons pour trouver

peut être utilisé pour trouver les autres.

$$(n+1)^3 - n^3 = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n^3 \;\; = 3n^2 + 3n + 1$$

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - \cancel{n^3} &= 3n^2 + 3n + 1 \\
\cancel{n^3} - \cancel{(n-1)^3} &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\
\cancel{(n-1)^3} - \cancel{(n-2)^3} &= 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1
\end{aligned}$$

$+$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
\cancel{(3)^3} - \cancel{(2)^3} &= 3(2)^2 + 3(2) + 1 \\
\cancel{(2)^3} - (1)^3 &= 3(1)^2 + 3(1) + 1
\end{aligned}$$

$$(n+1)^3 - 1 \;\; = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - 3\sum_{k=1}^{n} k - n$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - \cancel{1} - 3\sum_{k=1}^{n} k - n$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n - 3\sum_{k=1}^{n} k - n$$

$$= n^3 + 3n^2 + 2n - 3\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n(n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n(n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$= \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Ouf!

Faites les exercices suivants

Section 1.4 # 20 et 22

$$2\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$$
$$= \cancel{2^1} + \cancel{2^2} + \cancel{2^3} + \cancel{2^4} + \cancel{2^5} + 2^6$$

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + \cancel{2^1} + \cancel{2^2} + \cancel{2^3} + \cancel{2^4} + \cancel{2^5}$$

$$2\sum_{k=0}^{5} 2^k - \sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^6 - 2^0$$

$$(2-1)\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^{5+1} - 1 \qquad \sum_{k=0}^{5} 2^k = \frac{2^{5+1}-1}{2-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Notation sigma

✓ Règles de sommation

$$\sum_{k=r}^{n} cf(k) = c\sum_{k=r}^{n} f(k)$$

$$\sum_{k=r}^{n} f(k) + g(k) = \sum_{k=r}^{n} f(k) + \sum_{k=r}^{n} g(k)$$

$$\sum_{k=r}^{n} f(k) = \sum_{k=r}^{t} f(k) + \sum_{k=t+1}^{n} f(k)$$

✓ Induction

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Les sommations suivantes

$$\sum_{k=a}^{b} c = (b - a + 1)c$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Devoir: Section 1.4