1.5 THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL

cours 5

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Notation sigma

✓ Règles de sommation

$$\sum_{k=r}^{n} cf(k) = c\sum_{k=r}^{n} f(k)$$

$$\sum_{k=r}^{n} f(k) + g(k) = \sum_{k=r}^{n} f(k) + \sum_{k=r}^{n} g(k)$$

$$\sum_{k=r}^{n} f(k) = \sum_{k=r}^{t} f(k) + \sum_{k=t+1}^{n} f(k)$$

✓ Induction

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Les sommations suivantes

$$\sum_{k=a}^{b} c = (b-a+1)c$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Intégrale définie
- ✓ Somme de Riemann
- ✓ Théorème fondamental du calcul

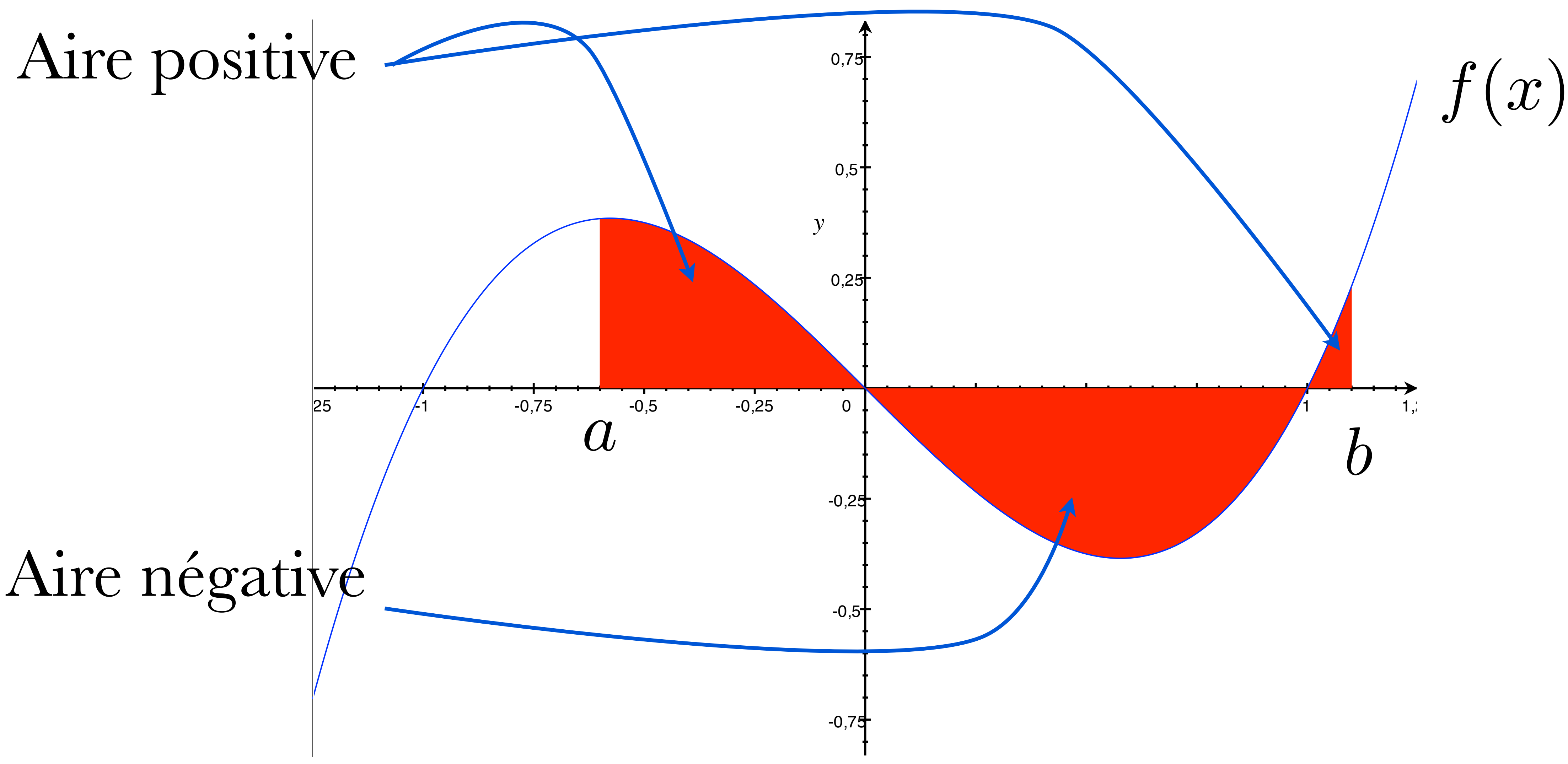
Depuis le début de la session, on a vu qu'il semble y avoir un lien entre somme, primitive et aire sous la courbe.

Nous expliciterons ce lien ici.

Définition

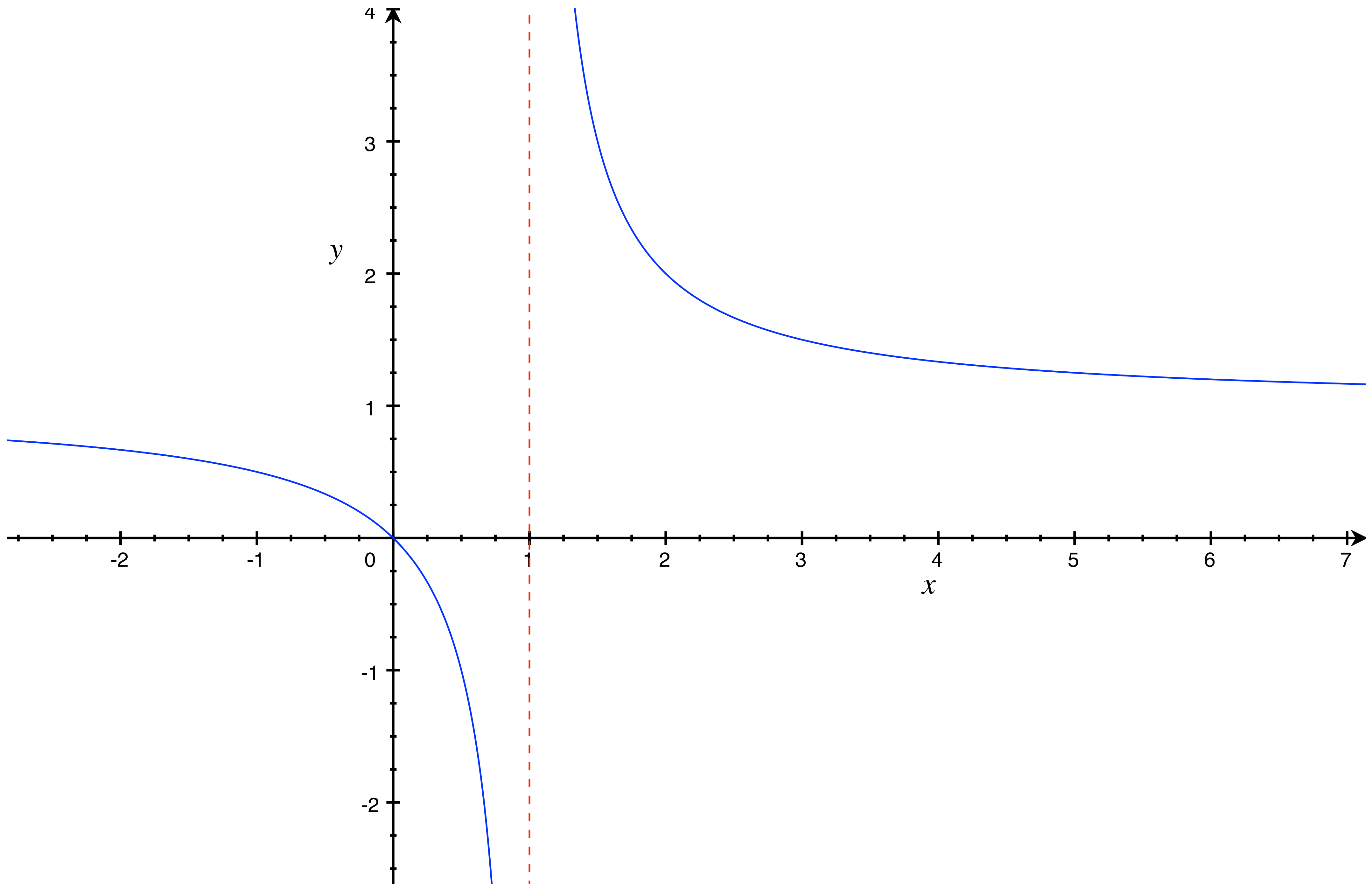
On nomme l'aire signée entre une fonction et l'axe des x et entre $x = a$ et $x = b$, l'intégrale définie de $f(x)$ et on la note.

$$\int_a^b f(x)\ dx$$



Remarque:

Pour que l'intégrale définie ait un sens, il faut que la fonction soit continue sur l'intervalle.



Outre la notation et le nom, l'intégrale indéfinie et l'intégrale définie sont deux concepts très différents.

$$\int f(x)\ dx \qquad = F(x) + C$$ Un ensemble infini de primitives

$$\int_a^b f(x)\ dx$$ Une aire délimitée par une fonction

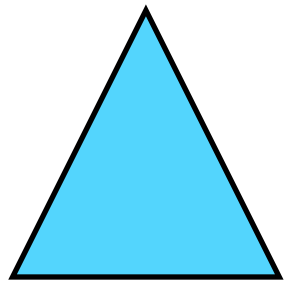
Comprendre ce qu'est $\int_a^b f(x)\ dx$ est une chose

mais la calculer en est une autre.

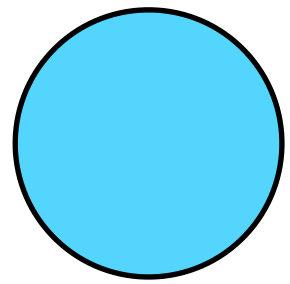
Quels sont les objets géométriques dont on sait calculer l'aire?

Les rectangles

Les triangles

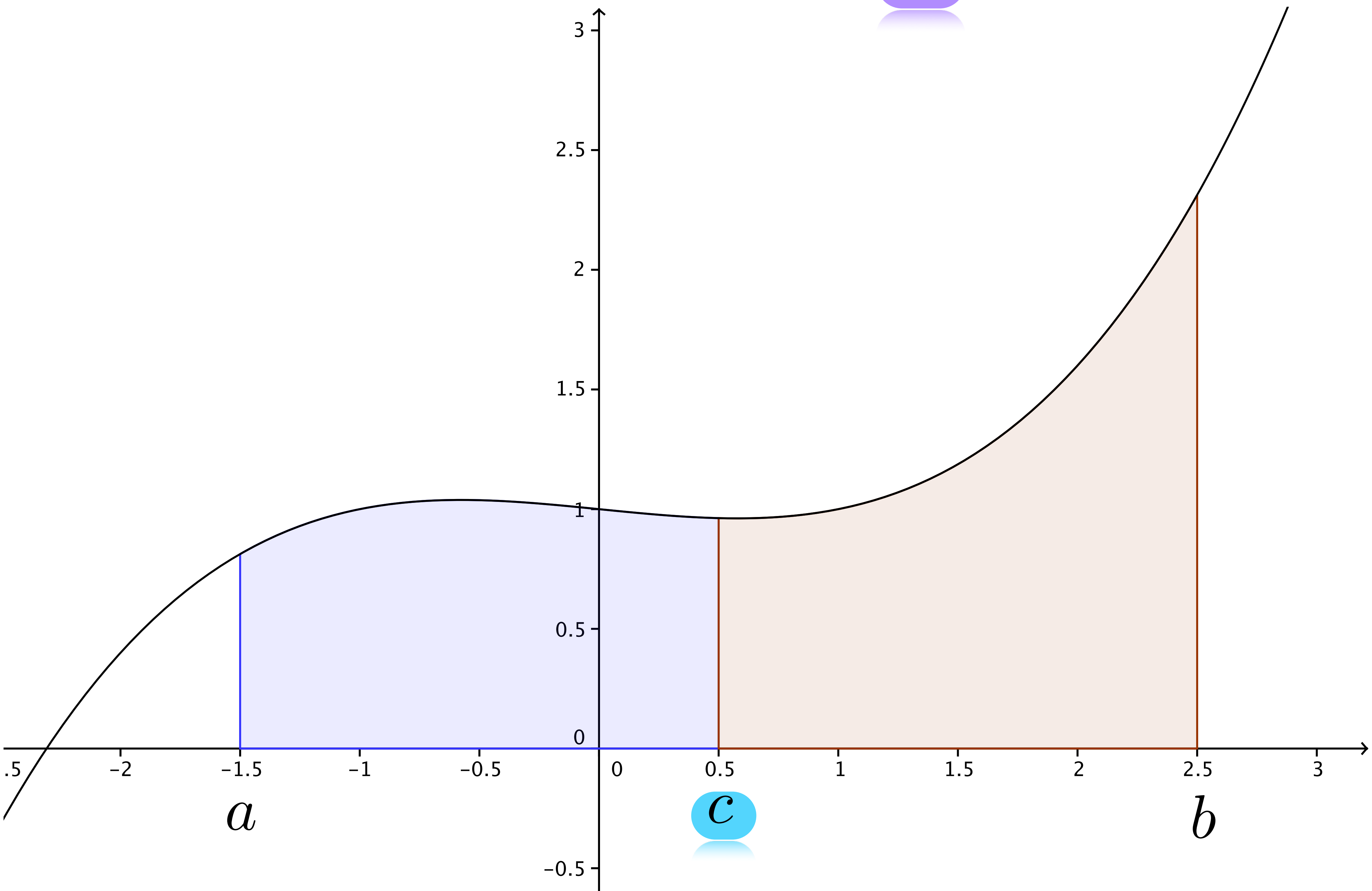


Les cercles



$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

$$\sum_{k=r}^{n} f(k) = \sum_{k=r}^{t} f(k) + \sum_{k=t+1}^{n} f(k)$$



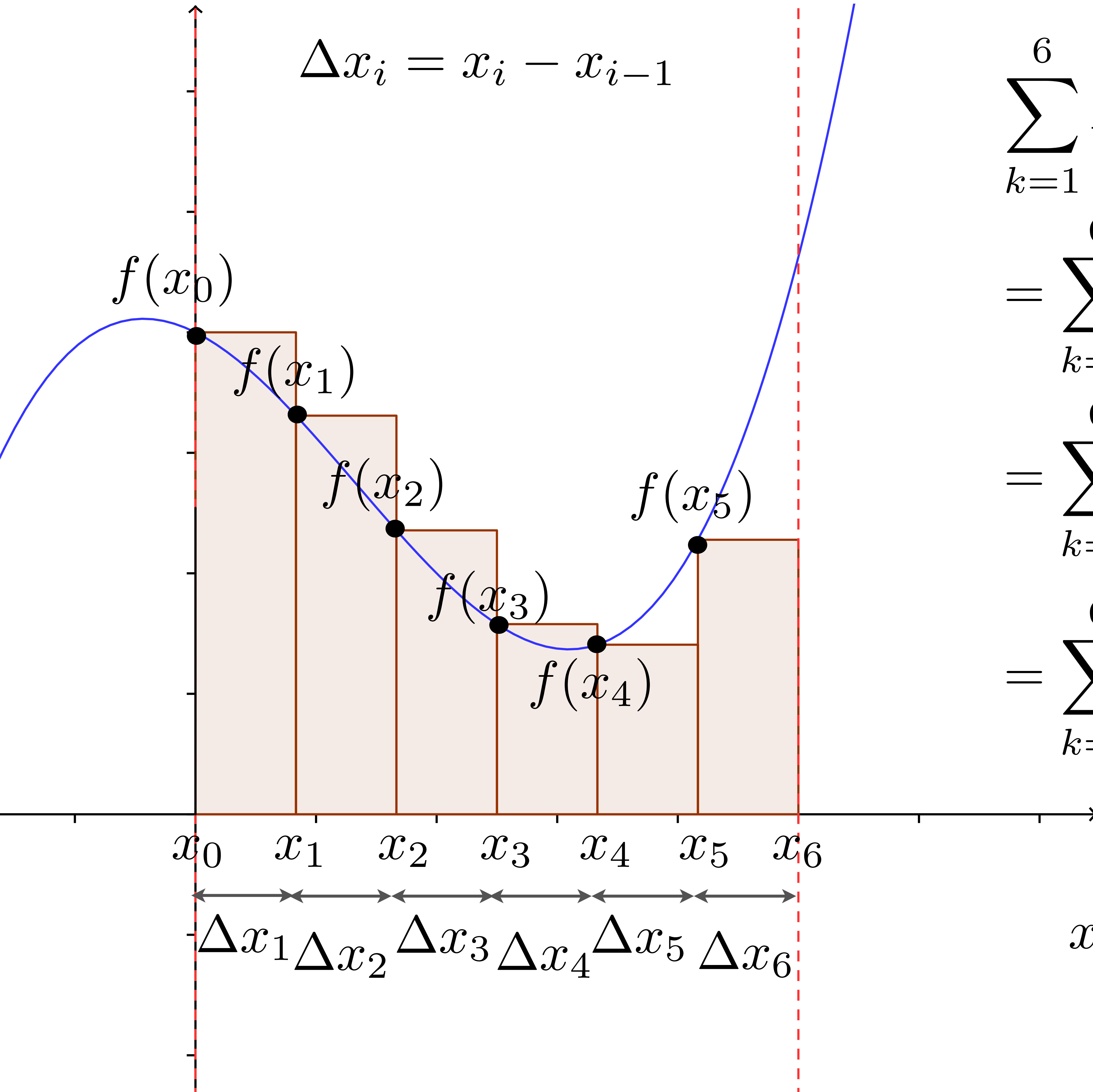
Somme de Riemann

Pour pousser un plus loin notre compréhension de l'intégrale, il nous faut comprendre les sommes de Riemann.

GeoGebra

Faites les exercices suivants

Section 1.5 # 26



$$\sum_{k=1}^{6} \text{Aire rectangle } k$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \text{Base}_k \text{Hauteur}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \Delta x_k f(x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{6} f(x_k^*) \Delta x_k$$

$$x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$$

L'approximation de l'aire si on subdivise en n partie est

$$x_0 = a \qquad\qquad x_n = b$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_i \qquad\qquad x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$$

Pour avoir une meilleure approximation il faut prendre un n plus grand.

Pour avoir exactement l'aire, il faut...

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

Somme de hauteurs fois des bases.

De cette égalité

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_i \quad = \int_a^b f(x)\ dx$$

et notre connaissance des sommes, on peut déduire que

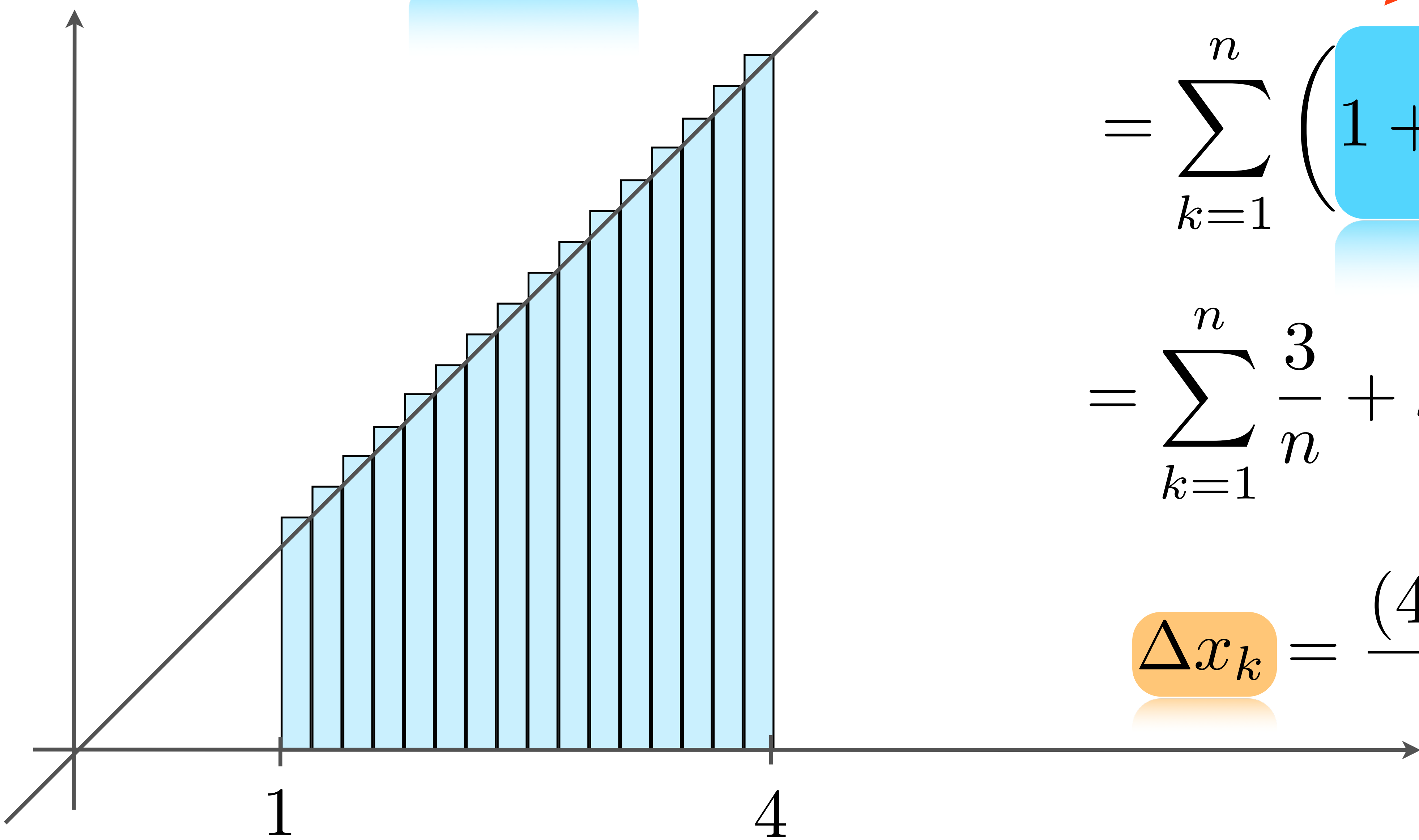
$$\int_a^b cf(x)\ dx = c\int_a^b f(x)\ dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

Exemple Calculer $\int_1^4 x \; dx$

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = 1 + \frac{3}{n} \qquad x_2 = 1 + 2\frac{3}{n} \quad \dots \quad x_n = 1 + \cancel{n}\frac{3}{\cancel{n}} = 4$$

$$f(x_k^*) = x_k = 1 + k\frac{3}{n}$$



$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(1 + k\frac{3}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n} + k\frac{3^2}{n^2}$$

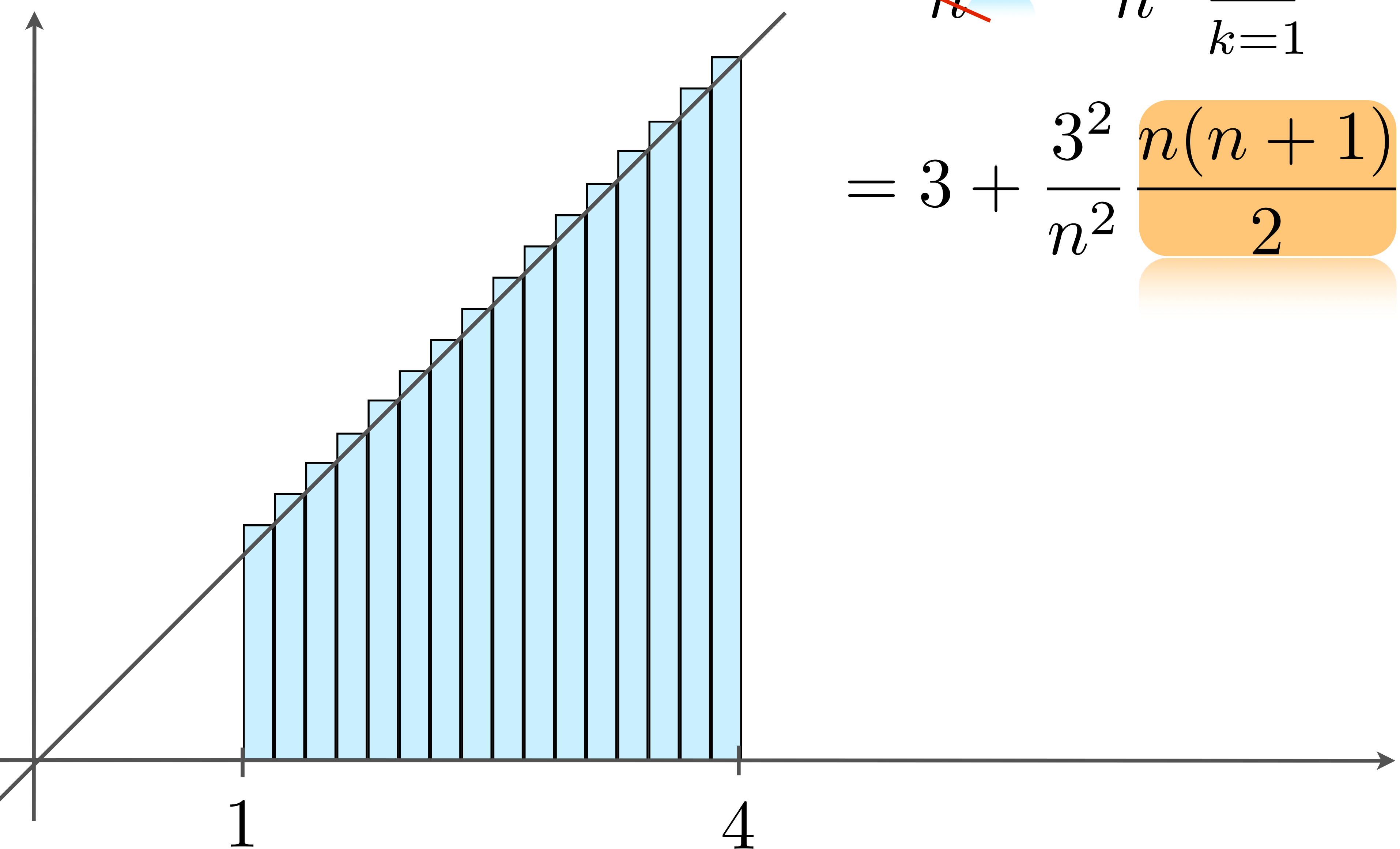
$$\Delta x_k = \frac{(4-1)}{n} = \frac{3}{n}$$

Exemple Calculer $\int_1^4 x \; dx$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n} + k\frac{3^2}{n^2} = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{3^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{3}{\cancel{n}}\cancel{n} + \frac{3^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = 3 + \frac{3^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= 3 + \frac{3^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = 3 + \frac{3^2 n(n+1)}{2n^2}$$



Exemple

Calculer $\displaystyle\int_1^4 x\ dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$

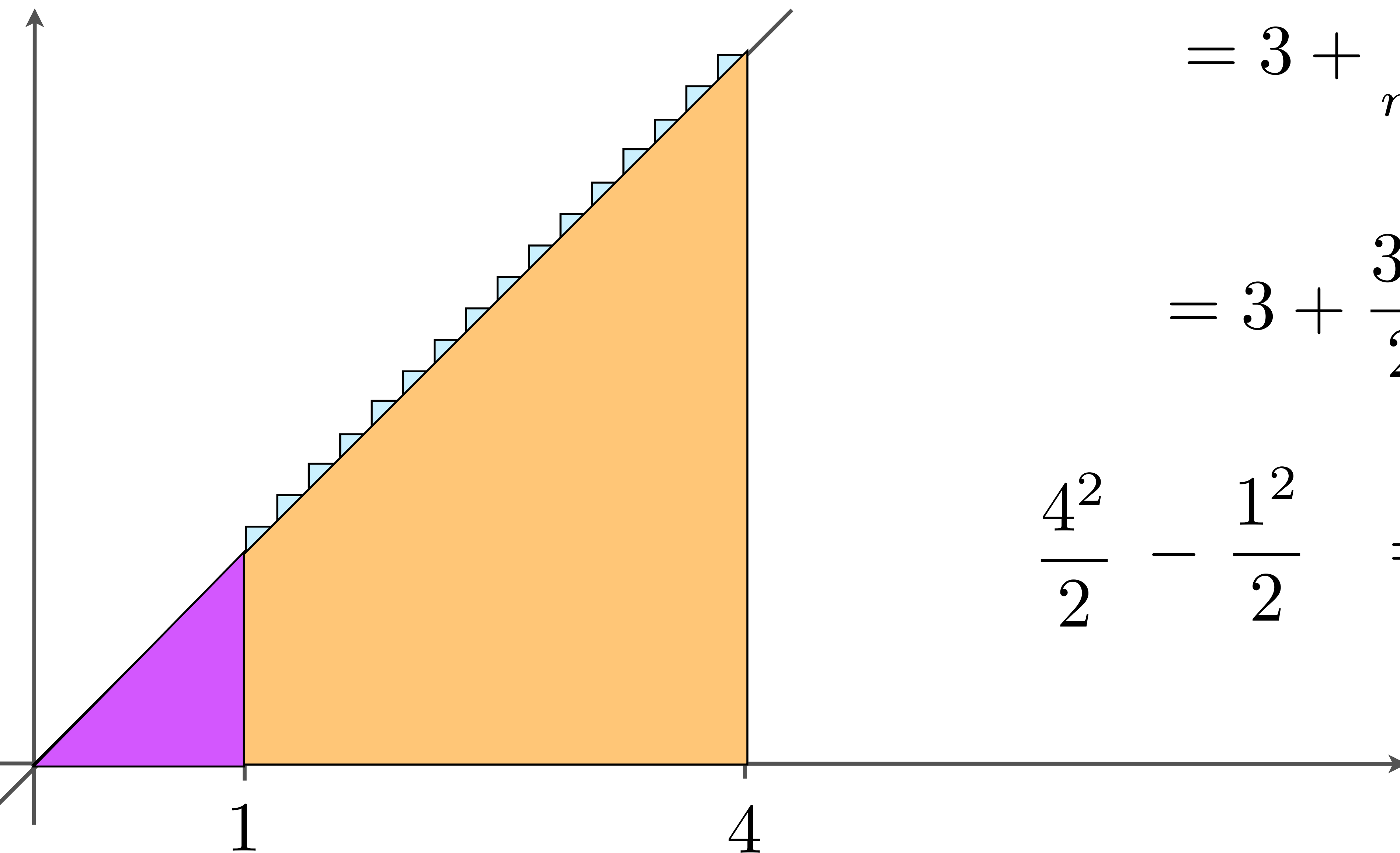
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = 3 + \frac{3^2 n(n+1)}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} 3 + \frac{9n(n+1)}{2n^2}$$

$$= 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{9\cancel{n}^2(1+\overset{0}{\frac{1}{n}})}{2\cancel{n}^2}$$

$$= 3 + \frac{3^2}{2} = \frac{6+9}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{16-1}{2} = \frac{15}{2}$$



Faites les exercices suivants

Section 1.5 # 27 et 28

Ouin, ça marche, mais ce n’est pas simple!

Ça serait bien d’avoir une méthode pour faire tout ça qui soit moins compliquée.

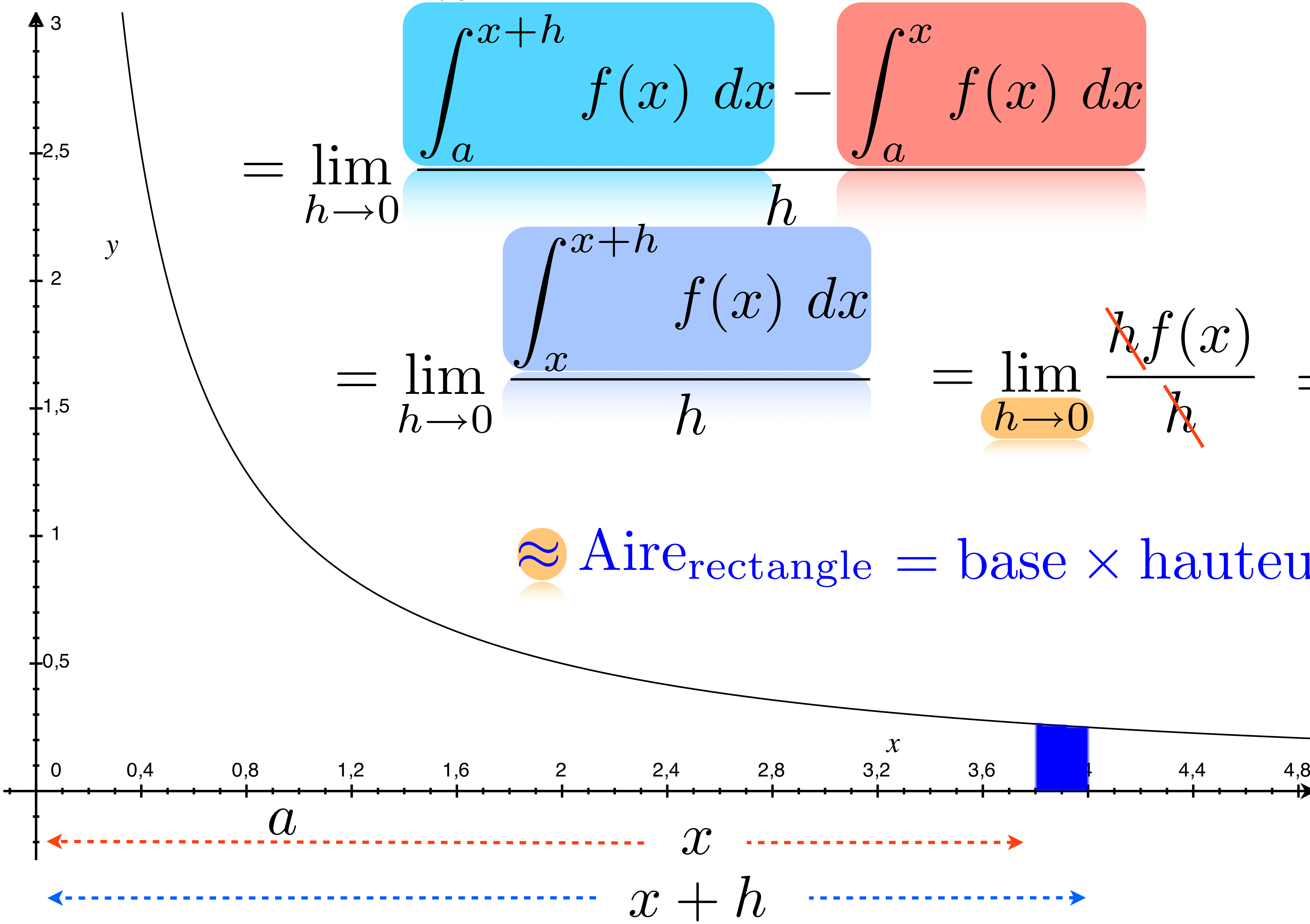
$$A(x) = A_{(f(x),a)}(x) = \int_a^x f(x)\ dx$$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(x)\ dx - \int_a^{x} f(x)\ dx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(x)\ dx}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}f(x)}{\cancel{h}} = f(x)$$

$$\approx \text{Aire}_{\text{rectangle}} = \text{base} \times \text{hauteur} = hf(x)$$



En d'autres termes

$$A'(x) \quad = \left(\int_a^x f(x)\ dx \right)' \quad = f(x)$$

c'est-à-dire

$$\int_a^x f(x)\ dx \qquad \text{est une primitive de} \qquad f(x)$$

On peut donc écrire

$$\int_a^x f(x)\ dx = F(x) + C$$

$$\int_a^x f(x)\ dx = F(x) + C$$

Ici on est en mesure de trouver la constante

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0 \quad = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

$$\int_a^x f(x)\ dx = F(x) - F(a)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)}$$

Le théorème fondamental du calcul.

Théorème fondamental du calcul (version 2)

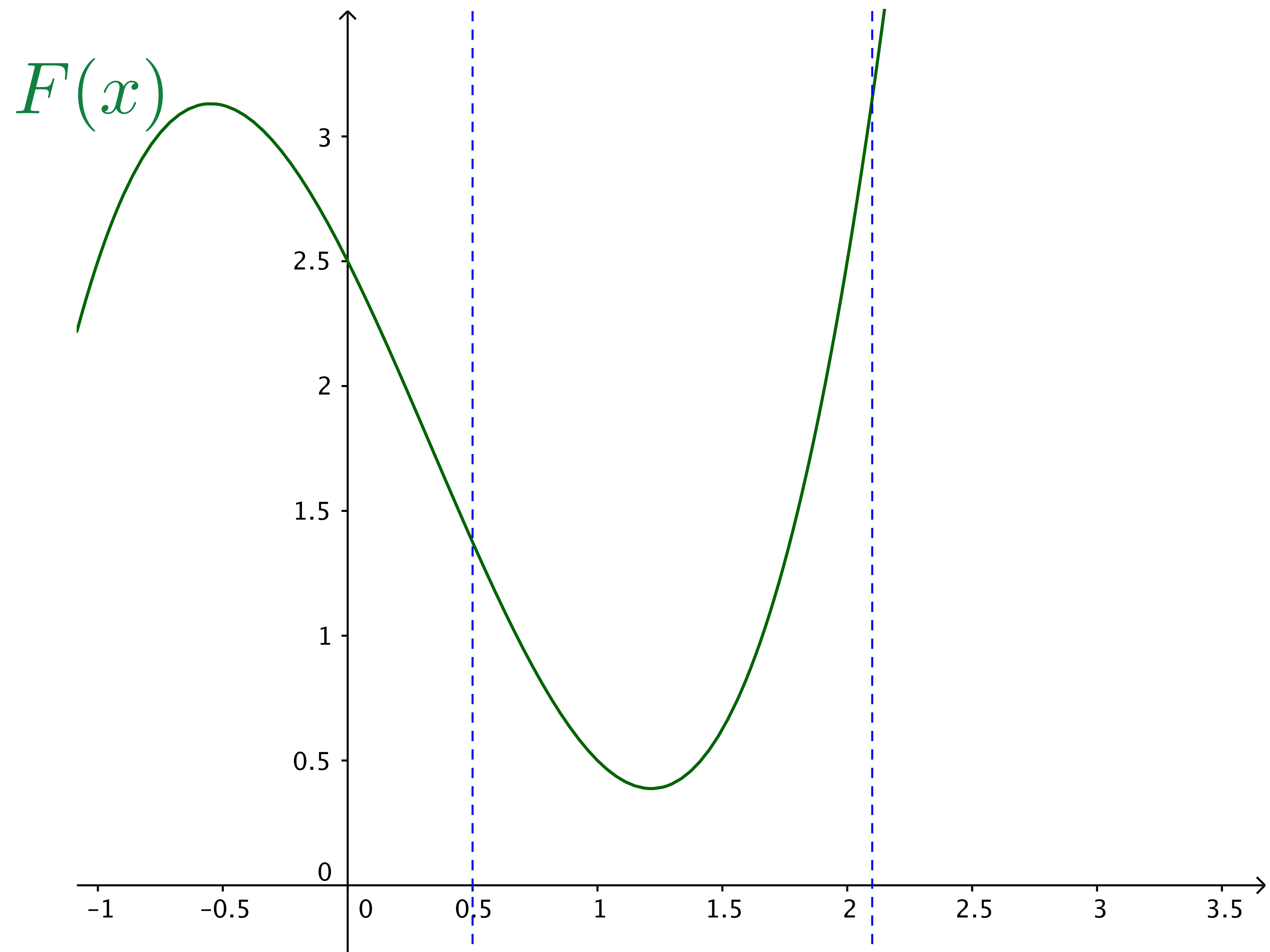
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$y = F(x)$$

$$dy = F'(x)dx$$

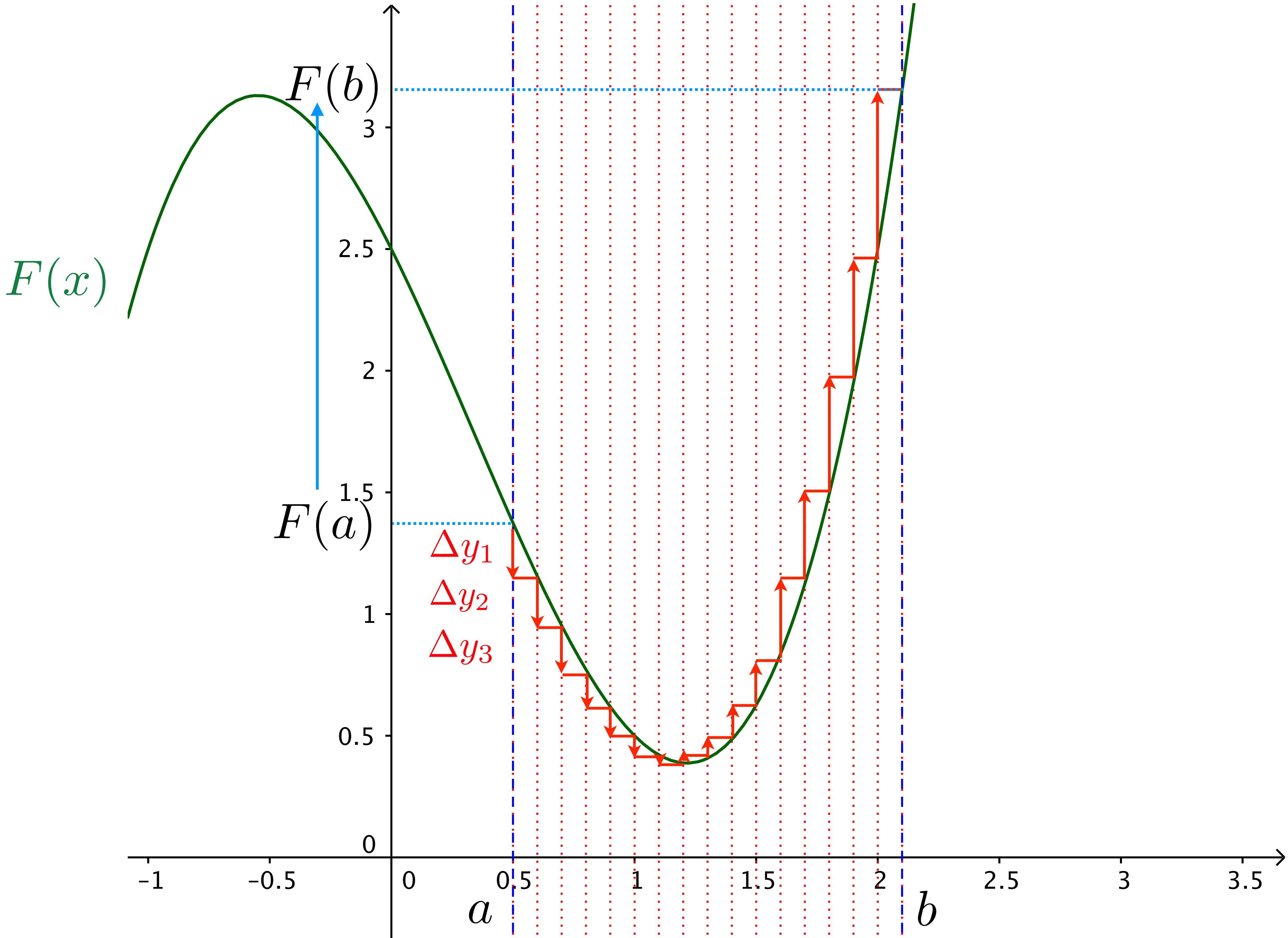
$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dy$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dy$$



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dy \ = F(b) - F(a)$$

$$y = F(x)$$



Exemple

$$\int_1^4 x\ dx$$

$$\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + C = F(x) + C$$

$$\int_1^4 x\ dx = F(4) - F(1) = \frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{16-1}{2} = \frac{15}{2}$$

Habituellement on écrit plutôt:

$$\int_1^4 x\ dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{15}{2}$$

Faites les exercices suivants

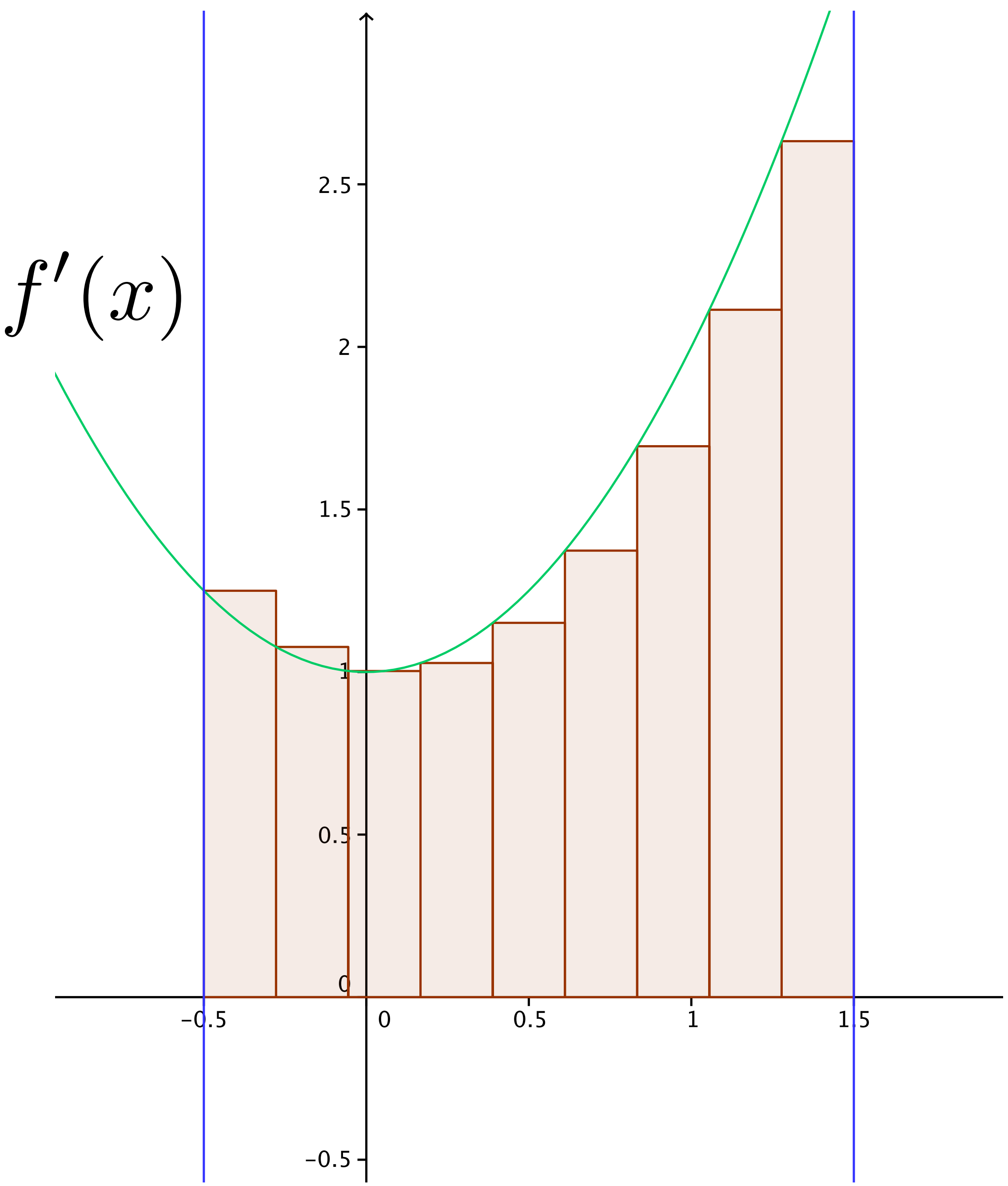
Section 1.5 # 29 et 32

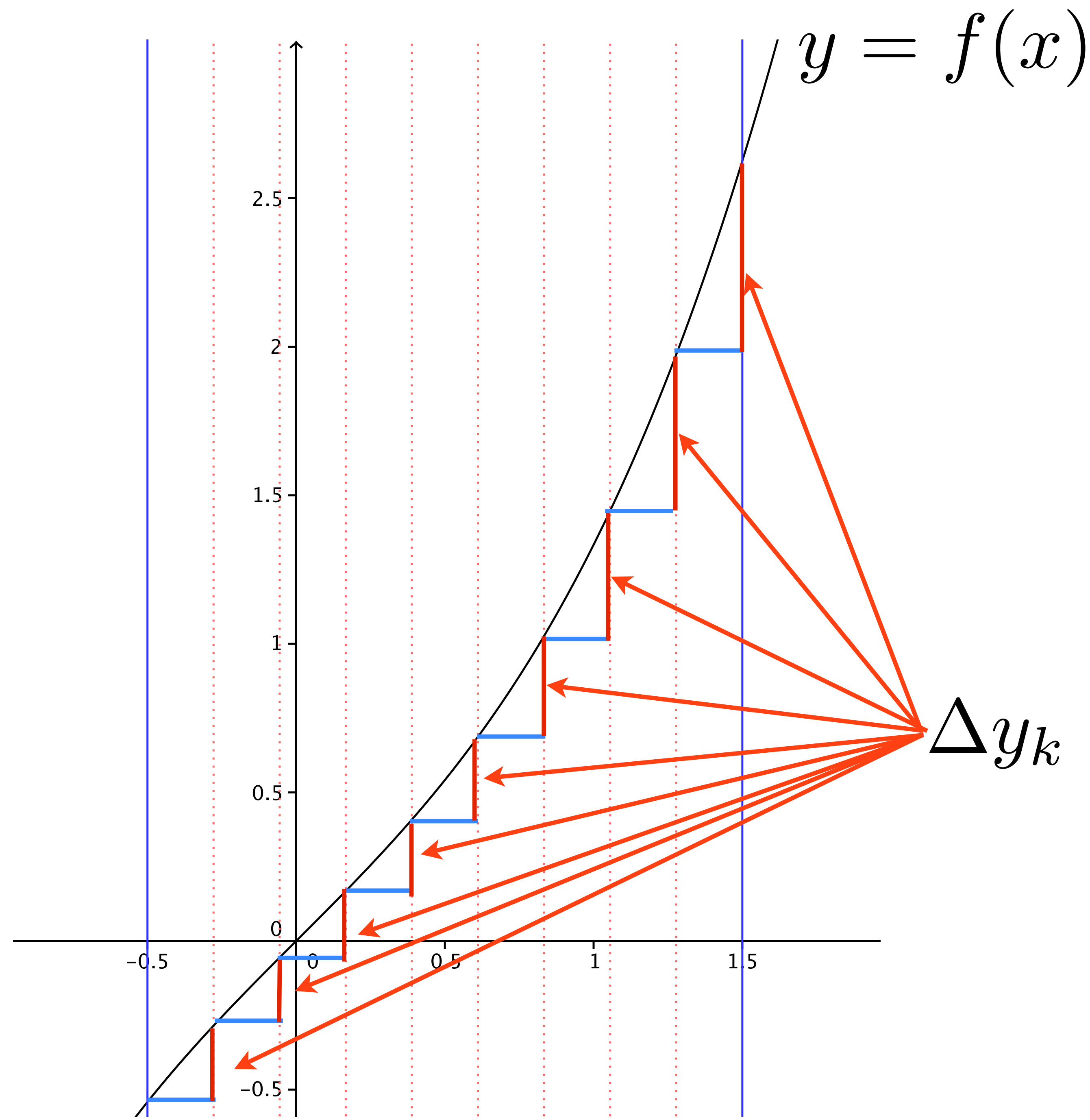
$$\int_a^x f'(x)\,dx = f(x) + C$$

$$\sum_{k=1}^{n} f'(x_k^*)\Delta x_k = \text{Aire}$$

$$\int_a^x dy = y + C$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta y_k = \text{Déplacement}$$





Il est important de bien comprendre la distinction et le lien entre les 3 concepts suivants:

Intégrale indéfinie

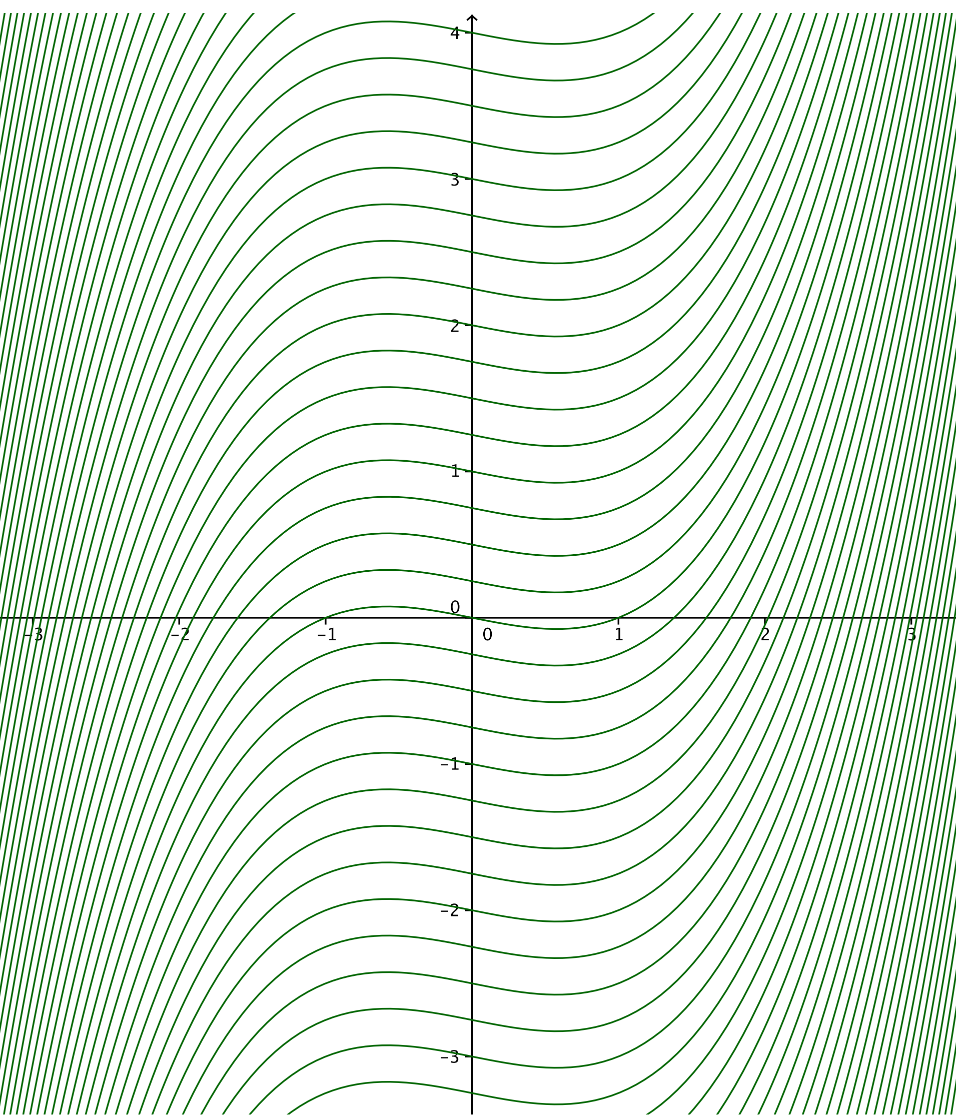
$$\int f(x)\ dx$$

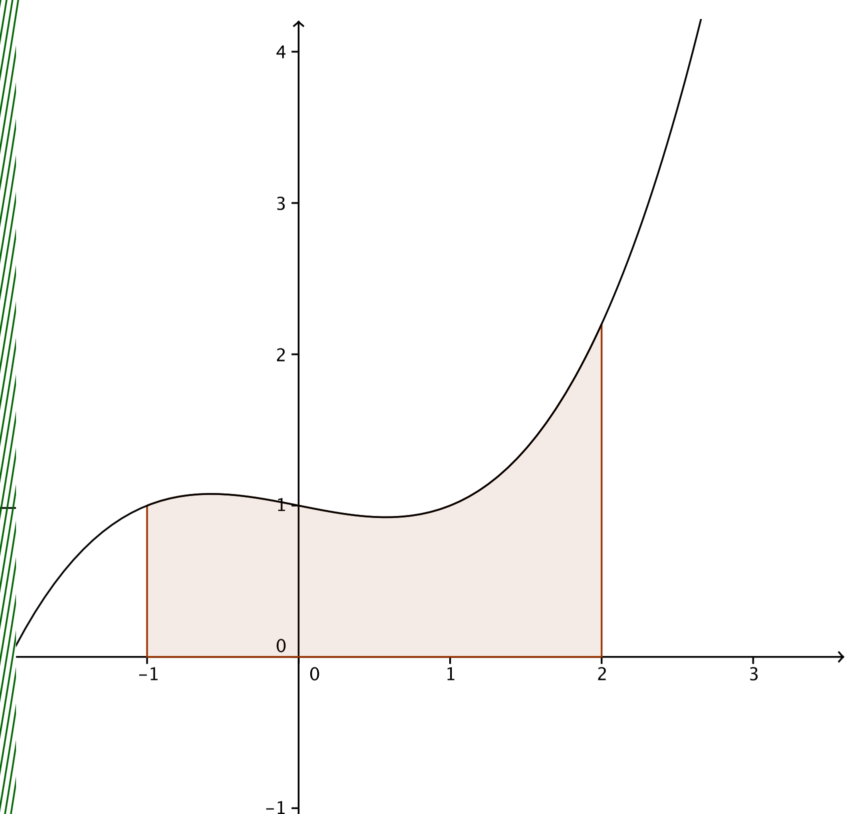
Intégrale définie

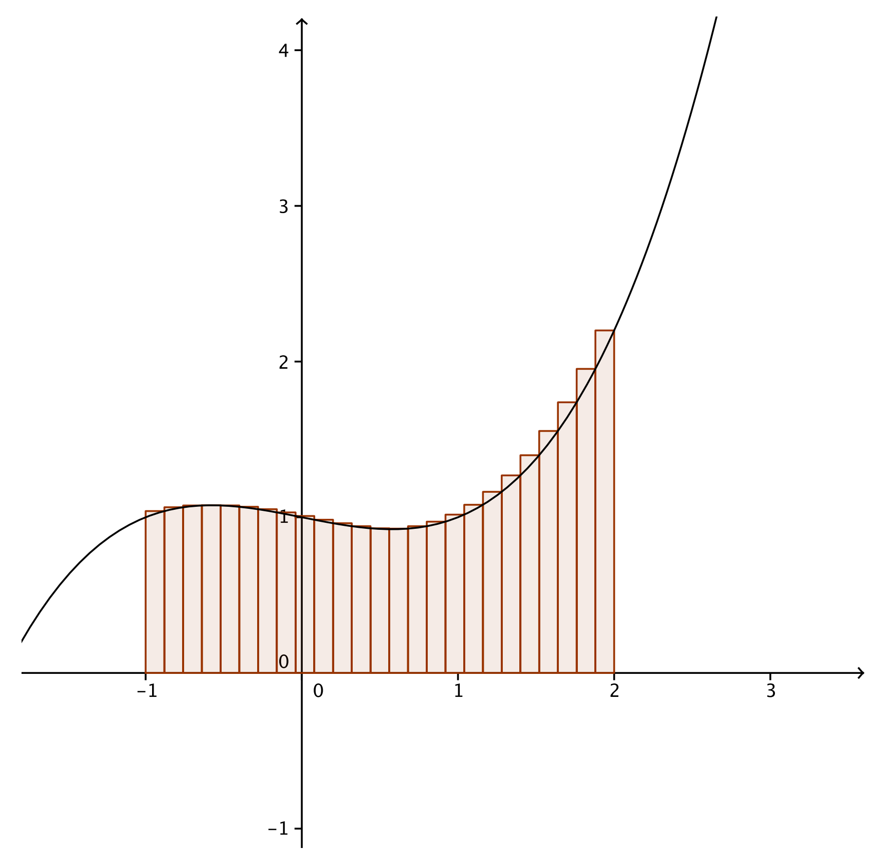
$$\int_a^b f(x)\ dx$$

Somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

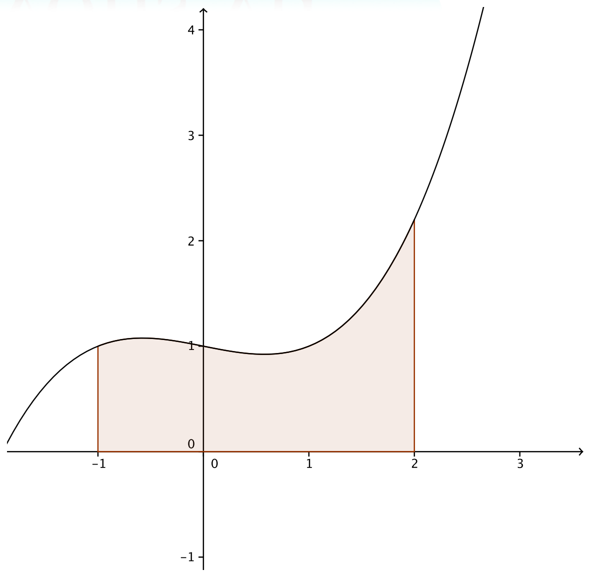




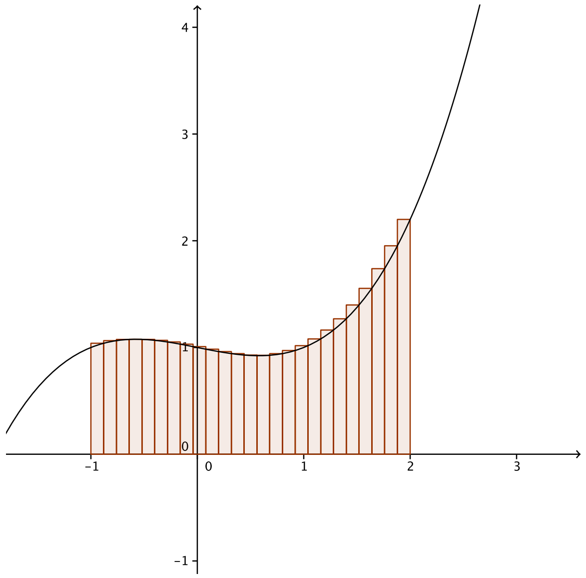


Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Intégrale définie



✓ Somme de Riemann



✓ Théorème fondamental du calcul

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Devoir: Section 1.5