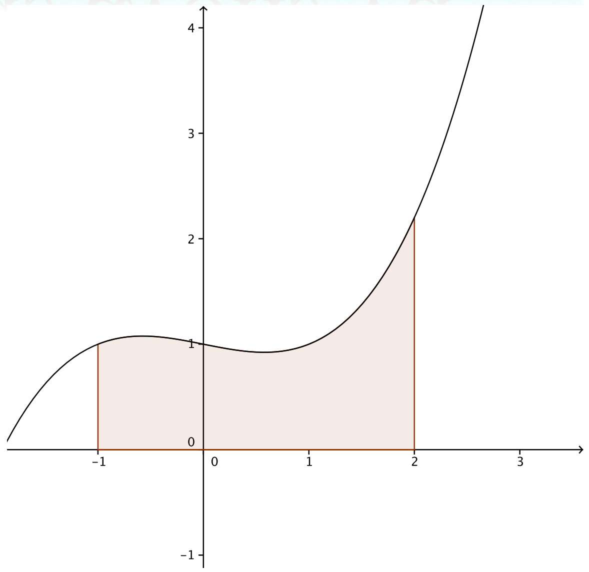
1.6 CALCUL D’AIRE

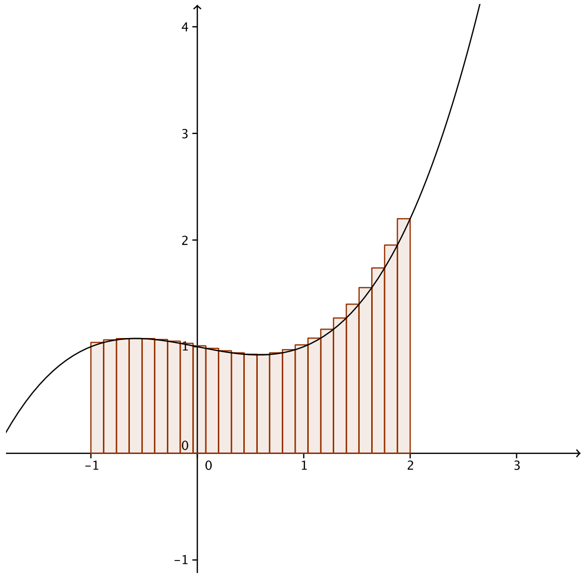
cours 6

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Intégrale définie



- ✓ Somme de Riemann



- ✓ Théorème fondamental du calcul

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Intégrale définie avec changement de variable
- ✓ Calcul d'aire
- ✓ Aire entre 2 courbes

Exemple

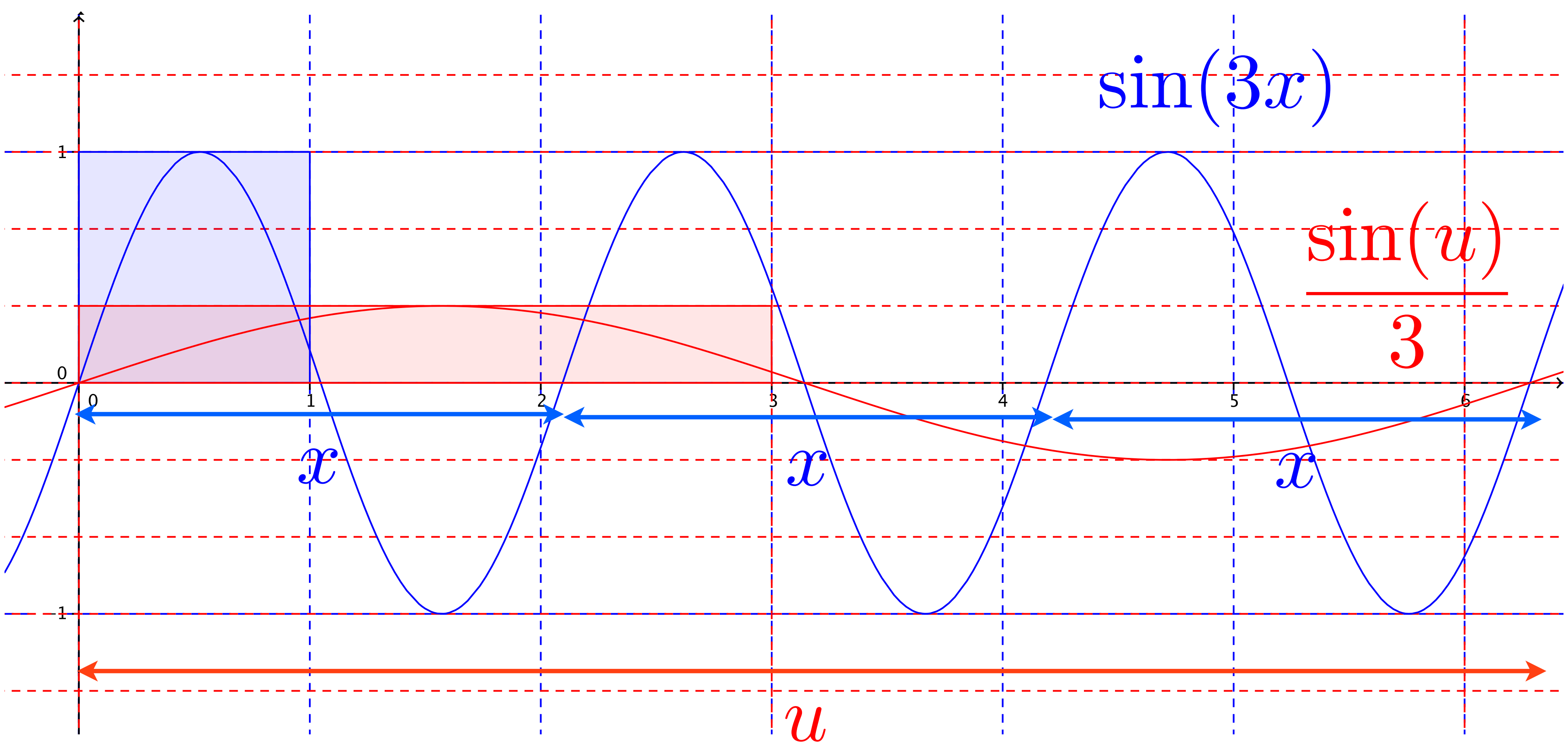
$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{3\pi}{12}} \sin(3x)\ dx$$

$u = 3x \qquad du = 3dx \qquad dx = \dfrac{du}{3}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin u}{3}\,du = -\frac{\cos u}{3}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{3} + \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3} = -\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{3} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}$$

$$= 2\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{12}$$



$$u = 3\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{3\pi}{12}$$

$$u = 3\frac{3\pi}{12} = 3\frac{\pi}{4}$$

Exemple $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{3\pi}{12}} \sin(3x)\ dx$ $\qquad u = 3x \quad du = 3dx \quad dx = \dfrac{du}{3}$

$$\int_{?}^{?} \frac{\sin u}{3}\ du = -\frac{\cos u}{3}\Big|_{?}^{?} = -\frac{\cos 3x}{3}\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{3\pi}{12}}$$

Prise 2

$$= -\frac{\cos 3\,\frac{3\pi}{12}}{3} + \frac{\cos 3\,\frac{\pi}{12}}{3} = -\frac{\cos\,\frac{3\pi}{4}}{3} + \frac{\cos\,\frac{\pi}{4}}{3}$$

$$= -\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{3} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = 2\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Faites les exercices suivants

Section 1.6 # 34 à 36

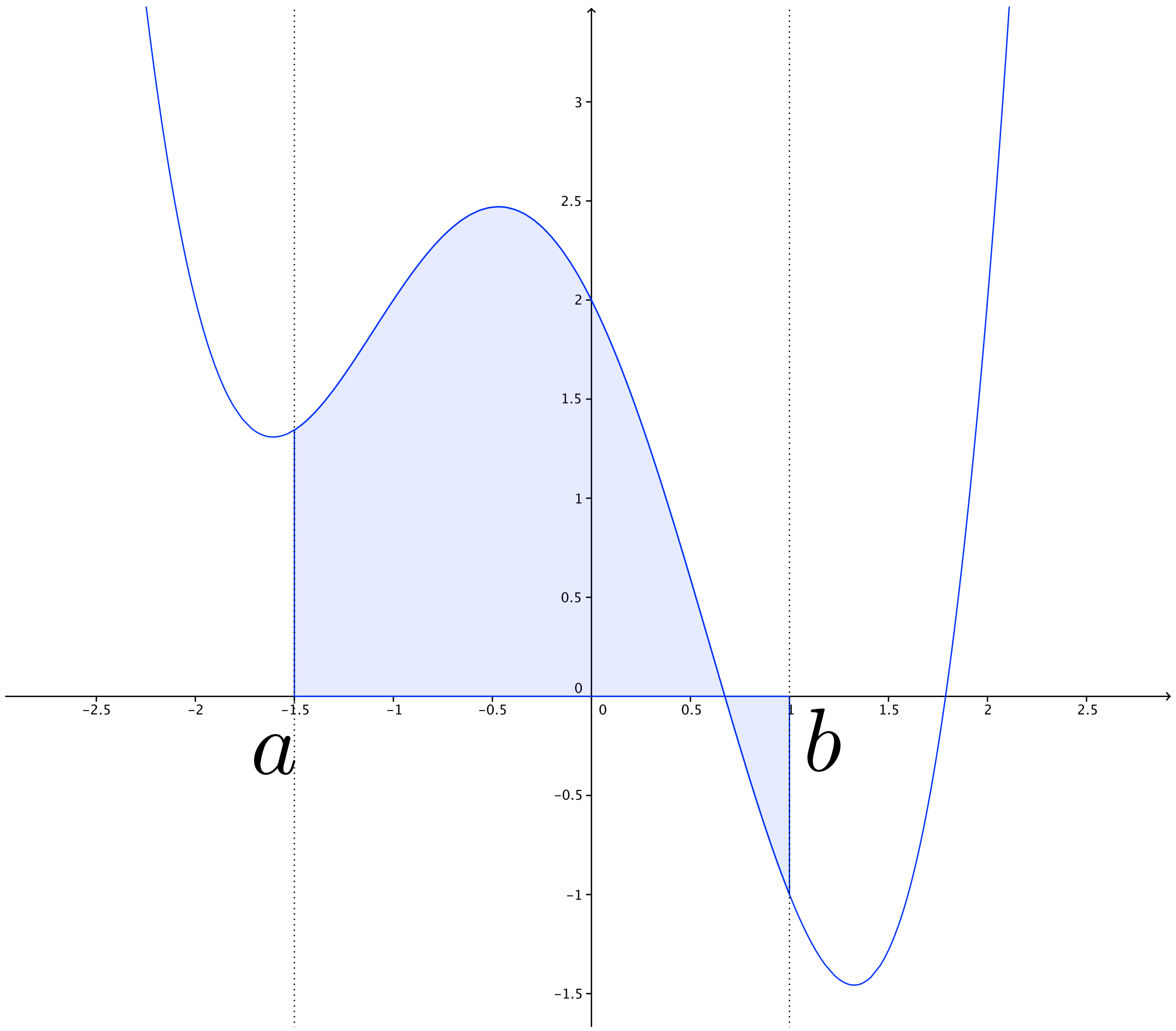
Quelle est la différence entre

$$\int_a^b f(x)\ dx \qquad \int_a^b f(t)\ dt \qquad \int_a^b f(\theta)\ d\theta \qquad \int_a^b f(\xi)\ d\xi \quad ?$$

À part la lettre utilisée pour la variable, il n’y en a pas

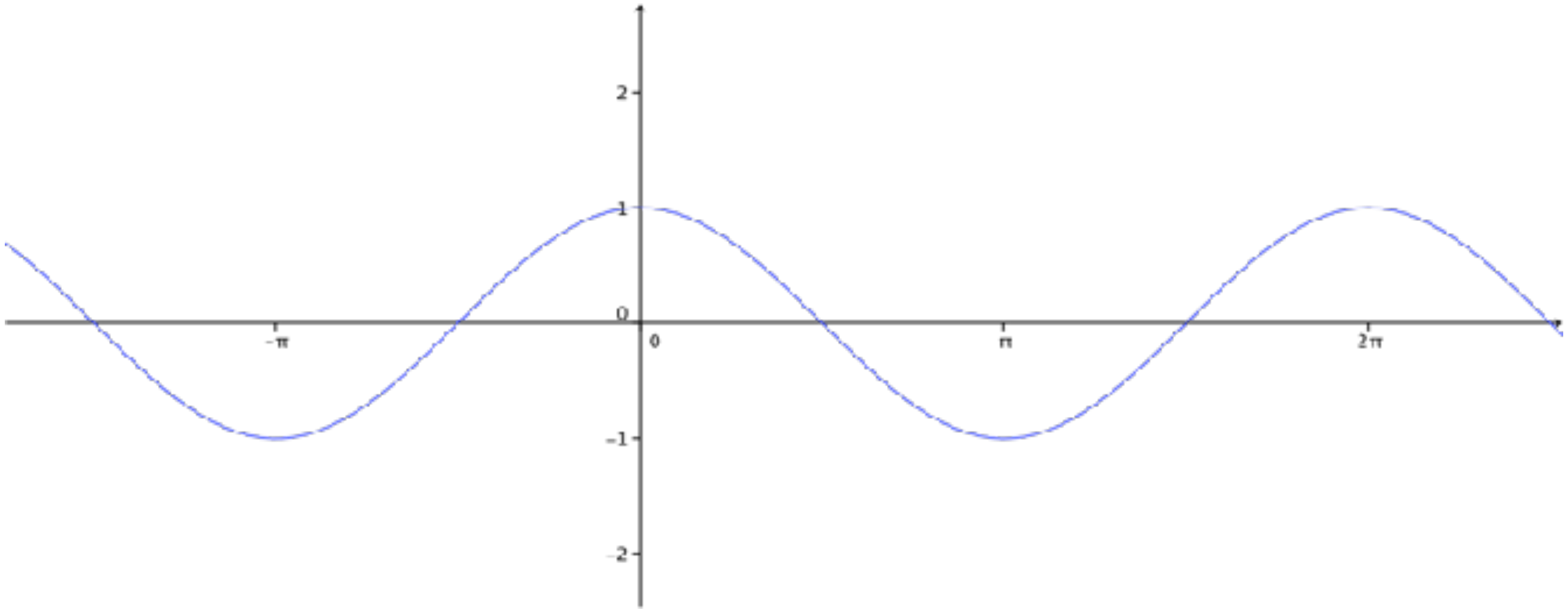
$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

$$a \leq b$$

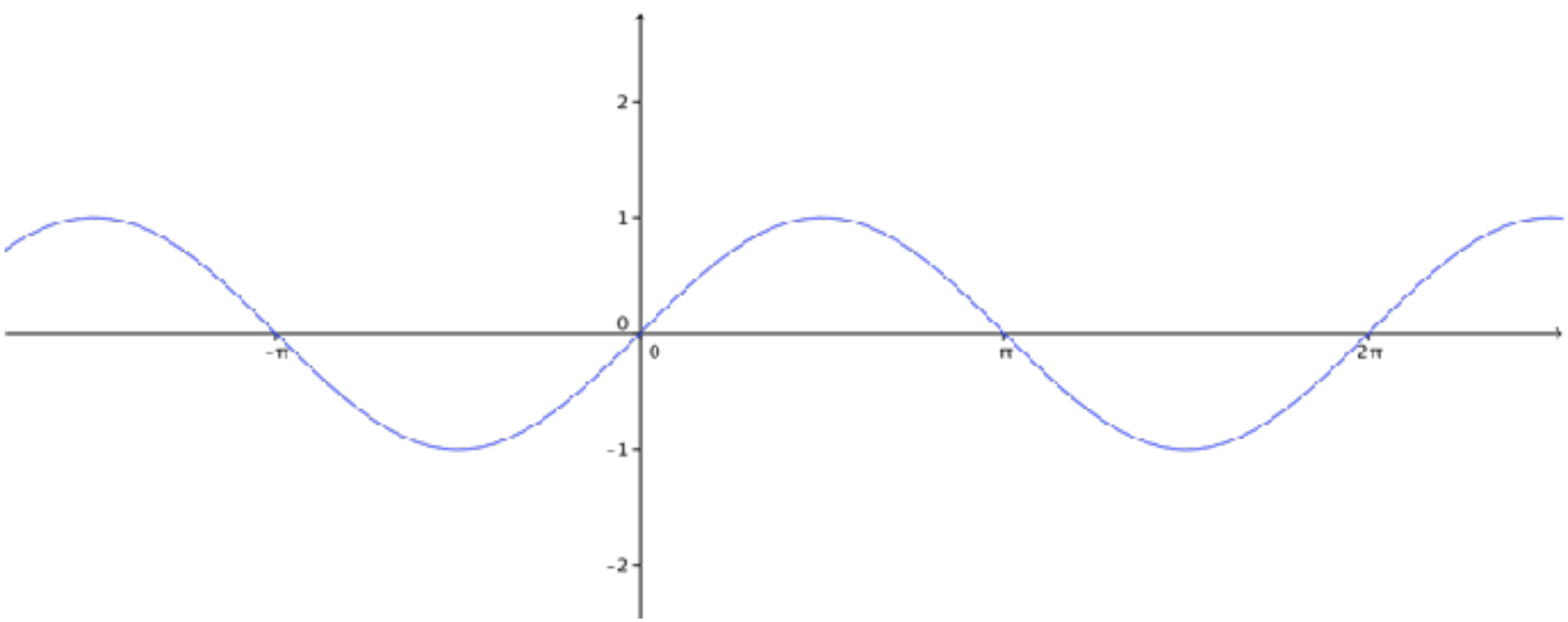


$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)\ dx &= F(a) - F(b)\\ &= -(F(b) - F(a))\\ &= -\int_a^b f(x)\ dx\end{aligned}$$

Un dit qu'une fonction est pair si $f(x) = f(-x)$



et qu'une fonction est impair si $f(x) = -f(-x)$



$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

$$u = -x$$

$$du = -dx$$

$$= -\int_{0}^{-a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

$$x = -a$$

$$u = a$$

$$= -\int_{0}^{-a} f(-(-x))\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-u)\ du + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

---

si $f(x)$ est pair

$$= \int_{0}^{a} f(u)\ du + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

si $f(x)$ est impair

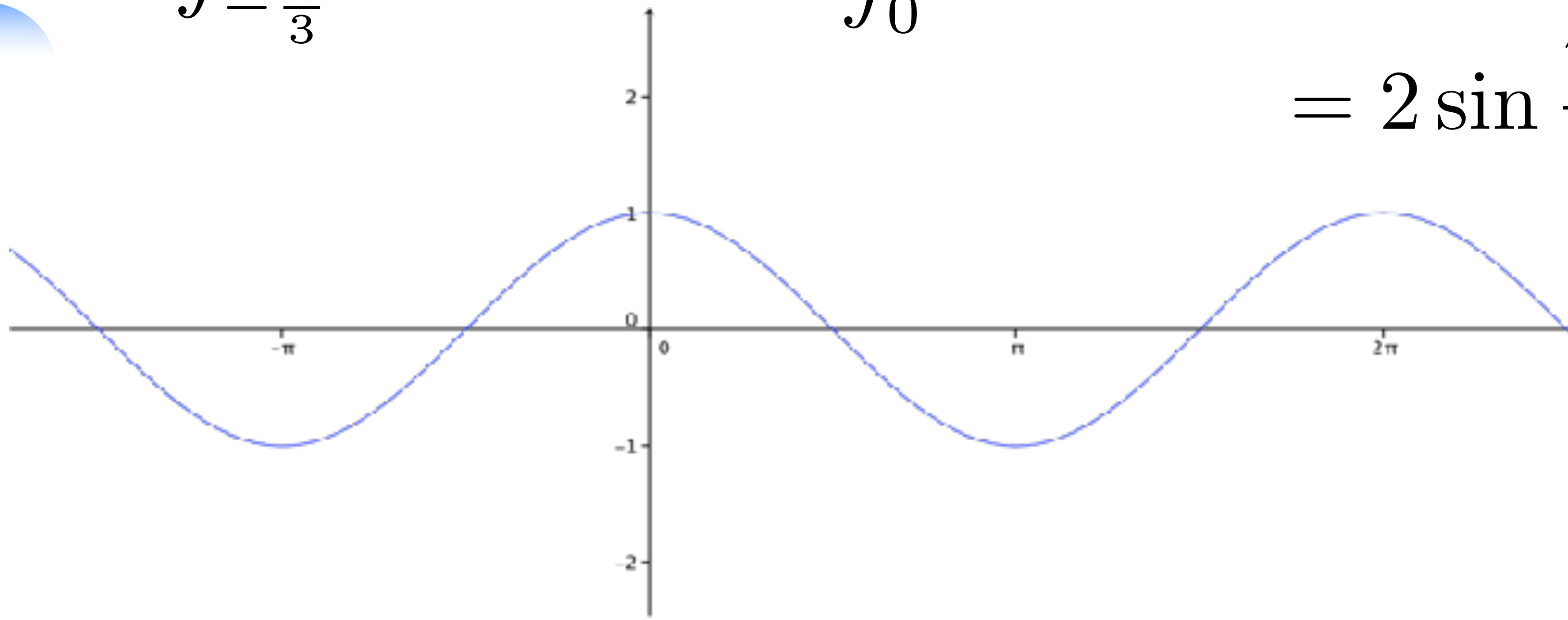
$$= -\int_{0}^{a} f(u)\ du + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = 0$$

Exemple

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \; dx \;= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \; dx \;= 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

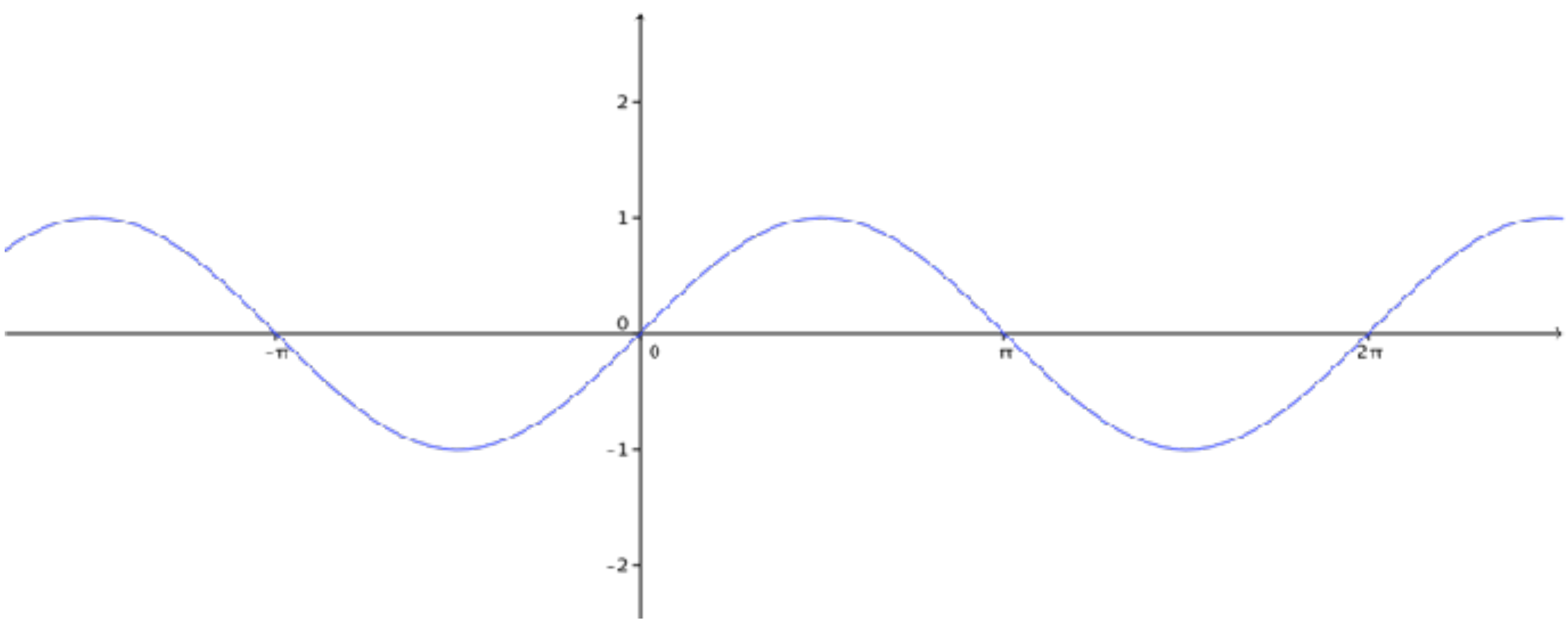
$$= 2\sin\frac{\pi}{3} - 2\sin 0$$

$$= \sqrt{3}$$



Exemple

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \; dx \;= 0$$



Exemple

$$\int_0^{2\pi} \sin x \; dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi}$$

$$= -\cos(2\pi) - (-\cos(0))$$

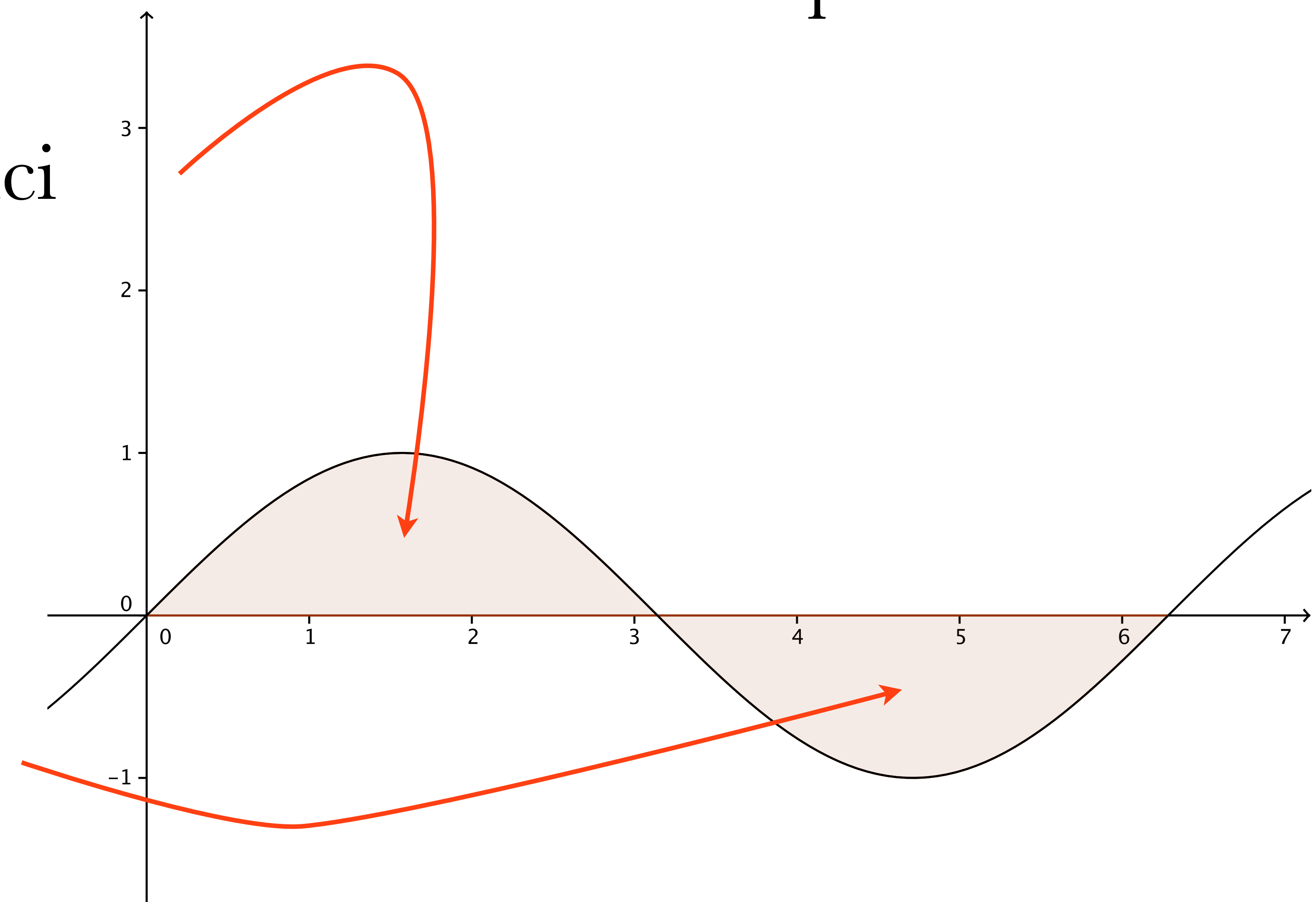
$$= -1 + 1 \quad = 0$$

Comment faire pour trouver l'aire total?

Aire ici

$=$

Aire ici



Exemple

$$\cancel{\int_0^{2\pi} \sin x \; dx}$$

$$\sin x = 0 \qquad x = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

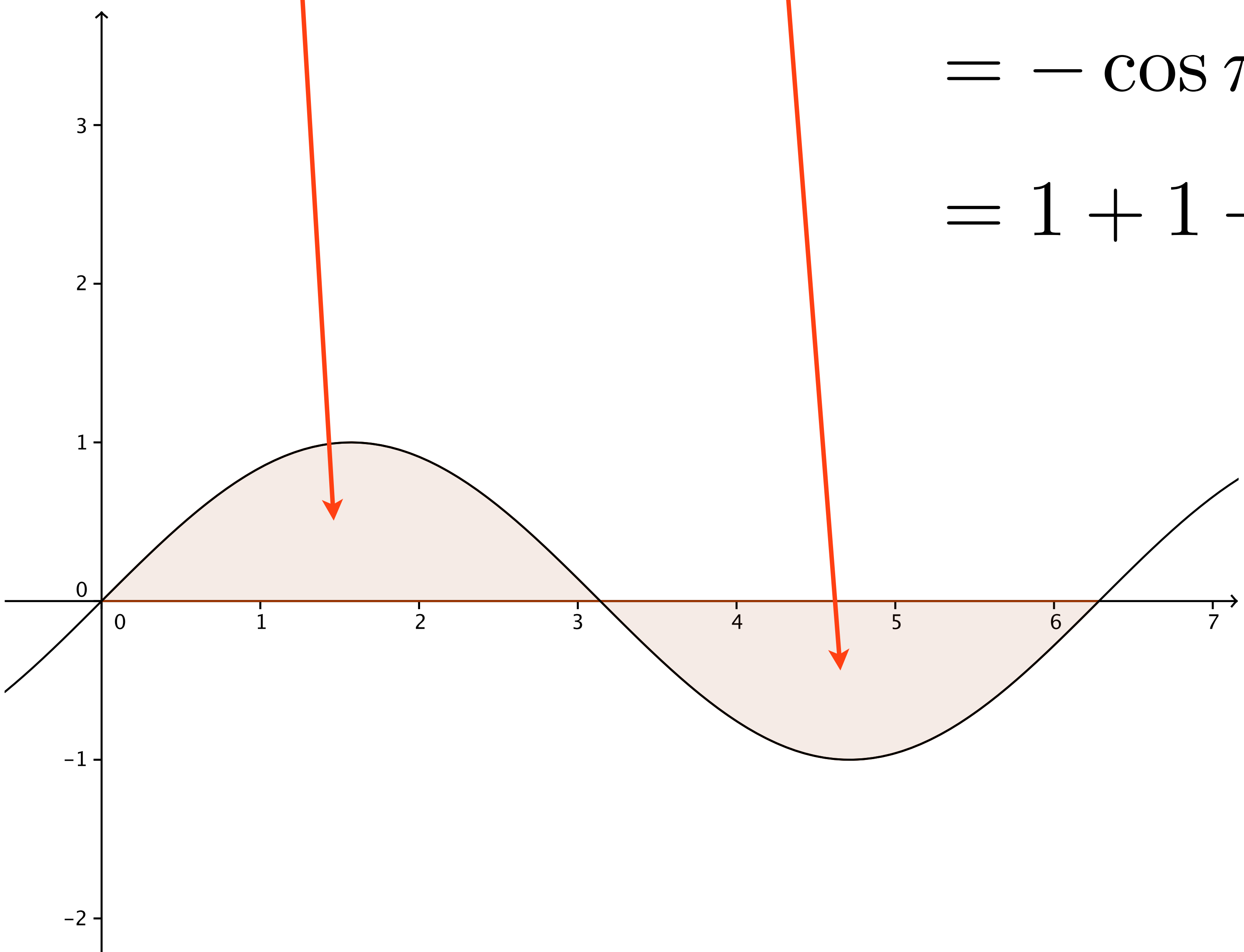
$$x = 0, \pi, 2\pi$$

On trouve les zéros de la fonction

$$\int_0^{\pi} \sin x \; dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \; dx \;\; = -\cos x \Big|_0^{\pi} - \left(-\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right)$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 \;\; = 4$$



Si on veut trouver l'aire entre la fonction et l'axe des x, il faut

1) Trouver les zéros de la fonction qui sont dans l'intervalle

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \,]a,b[\qquad \text{où} \qquad f(a_i) = 0$$

2) On additionne les intégrales d'un zéro à un autre en changeant de signe si la fonction est négative.

$$\pm \int_a^{a_1} f(x)\; dx \pm \int_{a_1}^{a_2} f(x)\; dx \pm \cdots \pm \int_{a_n}^{b} f(x)\; dx$$

Comment déterminer on si c'est un + ou un - ?

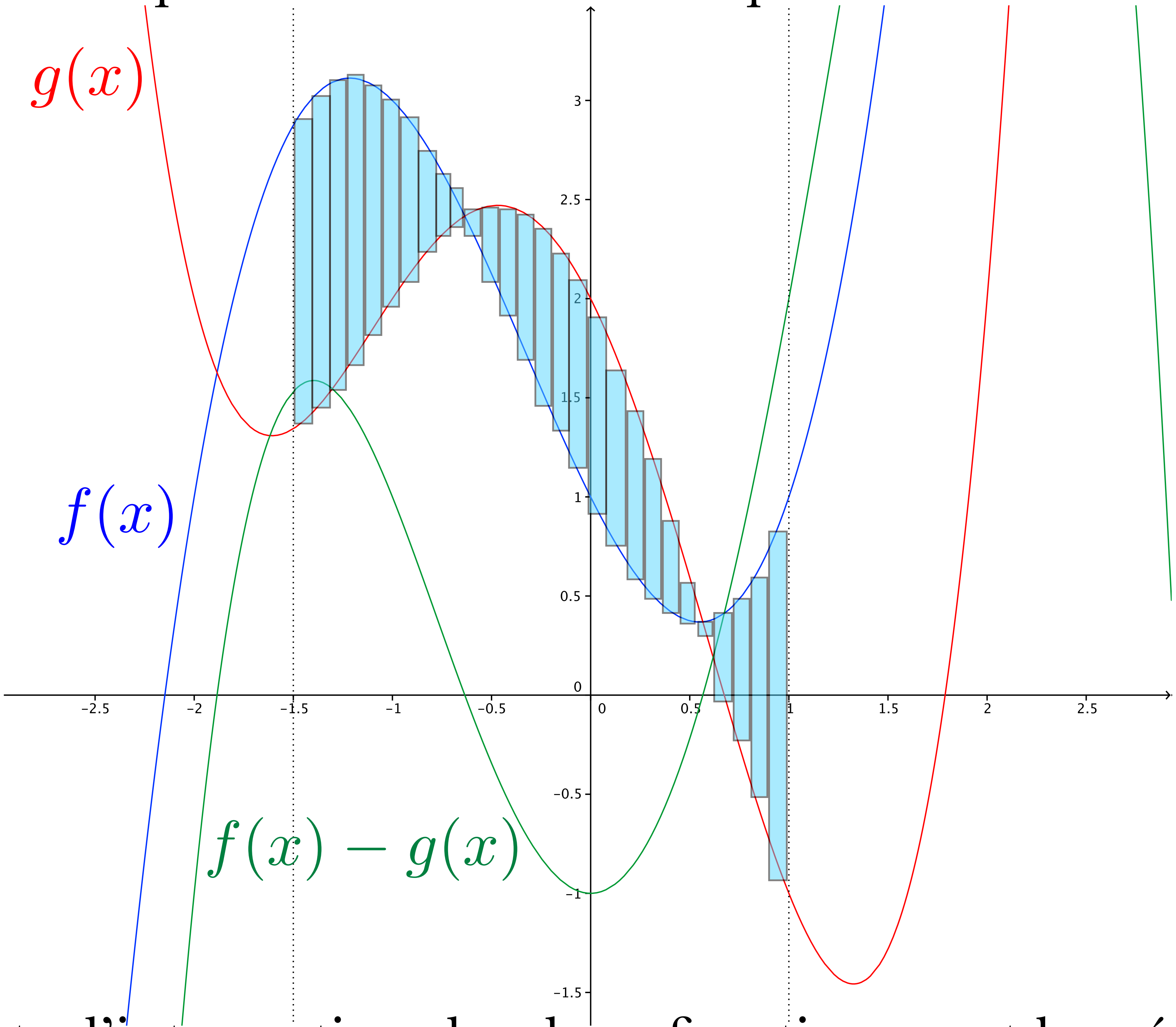
Pas besoin!

$$\left|\int_a^{a_1} f(x)\; dx\right| + \left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)\; dx\right| + \cdots + \left|\int_{a_n}^{b} f(x)\; dx\right|$$

Faites les exercices suivants

Section 1.6 # 37 a) et b)

Comment faire pour trouver l'aire comprise entre deux fonctions?



Les points d'intersection des deux fonctions sont les zéros de la différence des deux fonctions.

On revient au cas qu'on a déjà traité.

Exemple Calculer l'aire entre $f(x) = x^2 + 4x + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ sur $[-3, 2]$

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 + 4x + 1 - (-x^2 + 2x + 5) \\ &= 2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2) = 2(x-1)(x+2) \end{aligned}$$

Les zéros sont $x = -2, 1$

$$\left| \int_{-3}^{-2} f(x) - g(x)\, dx \right| + \left| \int_{-2}^{1} f(x) - g(x)\, dx \right| + \left| \int_{1}^{2} f(x) - g(x)\, dx \right|$$

$$\int 2x^2 + 2x - 4\, dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x + C$$

Exemple

Calculer l'aire entre $f(x) = x^2 + 4x + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ sur $[-3,2]$

$$\left|\int_{-3}^{-2} f(x) - g(x)\ dx\right| + \left|\int_{-2}^{1} f(x) - g(x)\ dx\right| + \left|\int_{1}^{2} f(x) - g(x)\ dx\right|$$

$$\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\Bigg|_{-3}^{-2}$$

$$= \left(\frac{2(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 4(-2)\right) - \left(\frac{2(-3)^3}{3} + (-3)^2 - 4(-3)\right)$$

$$= \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8\right) - (-18 + 9 + 12) \quad = \left(\frac{20}{3}\right) - (3)$$

$$\int 2x^2 + 2x - 4\ dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x + C$$

Exemple

Calculer l'aire entre $f(x) = x^2 + 4x + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ sur $[-3,2]$

$$\left|\int_{-3}^{-2} f(x) - g(x)\ dx\right| + \left|\int_{-2}^{1} f(x) - g(x)\ dx\right| + \left|\int_{1}^{2} f(x) - g(x)\ dx\right|$$

$$\left.\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\right|_{-3}^{-2} = \left(\frac{20}{3}\right) - (3)$$

$$\left.\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\right|_{-2}^{1} = \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right) - \left(\frac{20}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3}\right) - \left(\frac{20}{3}\right)$$

Exemple

Calculer l'aire entre $f(x) = x^2 + 4x + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ sur $[-3,2]$

$$\left|\int_{-3}^{-2} f(x) - g(x)\ dx\right| + \left|\int_{-2}^{1} f(x) - g(x)\ dx\right| + \left|\int_{1}^{2} f(x) - g(x)\ dx\right|$$

$$\left.\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\right|_{-3}^{-2} = \left(\frac{20}{3}\right) - (3)$$

$$\left.\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\right|_{-2}^{1} = \left(-\frac{7}{3}\right) - \left(\frac{20}{3}\right)$$

$$\left.\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\right|_{1}^{2} = \left(\frac{16}{3} + 4 - 8\right) - \left(-\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right)$$

Exemple

Calculer l'aire entre $f(x) = x^2 + 4x + 1$ et

$g(x) = -x^2 + 2x + 5$ sur $[-3,2]$

$$\left|\int_{-3}^{-2} f(x) - g(x)\ dx\right| + \left|\int_{-2}^{1} f(x) - g(x)\ dx\right| + \left|\int_{1}^{2} f(x) - g(x)\ dx\right|$$

$$\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\Big|_{-3}^{-2} = \left(\frac{20}{3}\right) - (3) = \frac{11}{3}$$

$$\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\Big|_{-2}^{1} = \left(-\frac{7}{3}\right) - \left(\frac{20}{3}\right) = -\frac{27}{3}$$

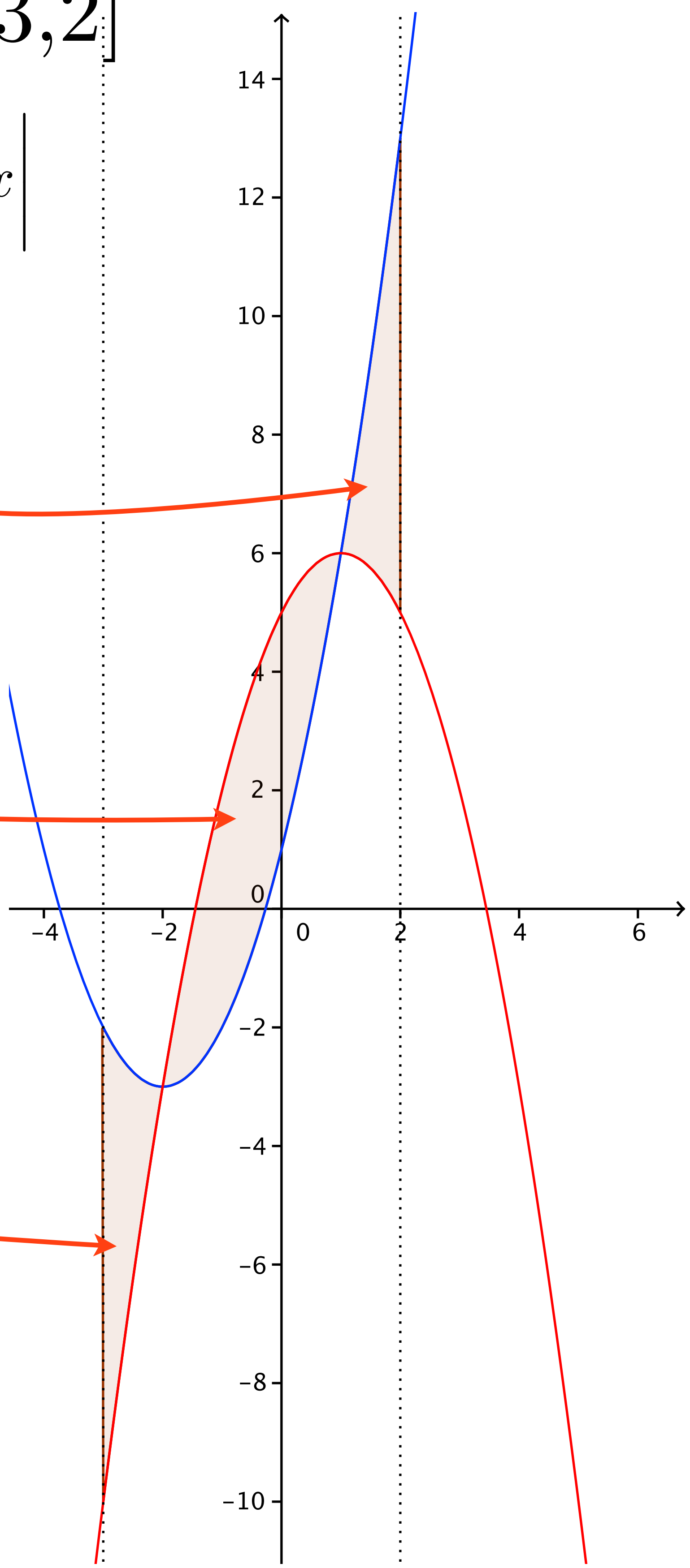
$$\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\Big|_{1}^{2} = \left(\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

$$\text{Aire} = \left|\frac{11}{3}\right| + \left|-\frac{27}{3}\right| + \left|\frac{11}{3}\right| = \frac{49}{3}$$

Exemple

Calculer l'aire entre $f(x) = x^2 + 4x + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ sur $[-3,2]$

$$\left| \int_{-3}^{-2} f(x) - g(x)\ dx \right| + \left| \int_{-2}^{1} f(x) - g(x)\ dx \right| + \left| \int_{1}^{2} f(x) - g(x)\ dx \right|$$



$$\text{Aire} = \left|\frac{11}{3}\right| + \left|-\frac{27}{3}\right| + \left|\frac{11}{3}\right| = \frac{49}{3}$$

Faites les exercices suivants

Section 1.6 # 37 c) à e)

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Changement de borne
- ✓ Fonction pair et fonction impair
- ✓ Calcul d'aire
- ✓ Calcul d'aire entre deux fonctions

Devoir: Section 1.6