

2.1 INTÉGRATION PAR PARTIE

cours 9

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Intégration par partie.

Malheureusement, il n'existe pas de règle générale pour trouver

$$\int f(x)g(x) dx$$

Par contre, on sait que

$$\int (f(x)g(x))' dx = f(x)g(x) + C$$

est valide.

Voyons voir ce qu'on peut faire avec cela.

Dans un premier temps, regardons la différentielle associée à un produit de fonction.

$$y = f(x)g(x) = uv$$

$$u = f(x)$$

$$du = f'(x)dx$$

$$v = g(x)$$

$$dv = g'(x)dx$$

$$dy = (f(x)g(x))' dx = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx$$

$$= f'(x)g(x) dx + f(x)g'(x) dx$$

$$= g(x) f'(x) dx + f(x) g'(x) dx$$

$$= g(x) du + f(x) dv = v du + u dv$$

$$y = f(x)g(x) = uv \quad \begin{array}{l} u = f(x) \\ v = g(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} du = f'(x)dx \\ dv = g'(x)dx \end{array}$$

$$dy = vdu + udv$$

$$\int (f(x)g(x))' dx = f(x)g(x) + C$$

$$\int dy = y + C$$

$$uv = \int vdu + udv = \int vdu + \int udv$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

C'est l'intégration par partie.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Voyons voir comment on utilise ça.

Exemple

$$\int x \cos x dx$$

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = \cos x dx$$

$$v = \int dv$$

$$= x(\sin x + C) - \int (\sin x + C) dx$$

$$= \int \cos x dx$$

$$= \sin x + C$$

$$= x \sin x + \cancel{Cx} - (-\cos x + \cancel{Cx} + C_2)$$

$$= x \sin x + \cos x + C_3$$

Ici la constante a disparu. Est-ce toujours le cas?

$$\begin{aligned}
 & f(x)dx & u &= g(x) & dv &= h(x)dx \\
 & = g(x)h(x)dx & du &= g'(x)dx & v &= \int h(x) dx = H(x) + C \\
 \int f(x) dx &= g(x)(H(x) + C) - \int (H(x) + C)g'(x) dx \\
 &= g(x)H(x) + g(x)C - \int (H(x) + C)g'(x) dx \\
 &= g(x)H(x) + g(x)C - \int H(x)g'(x) dx - \int Cg'(x) dx \\
 &= g(x)H(x) + g(x)C - \int H(x)g'(x) dx - C \int g'(x) dx \\
 &= g(x)H(x) + \cancel{g(x)C} - \int H(x)g'(x) dx - \cancel{Cg(x)} \\
 &= g(x)H(x) - \int H(x)g'(x) dx
 \end{aligned}$$

On peut donc omettre cette constante.

Exemple

$$u = \arctan x$$

$$dv = dx$$

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$v = x$$

$$\int \arctan x \, dx$$

Changement de variable

$$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$u = 1 + x^2 \quad du = 2x \, dx$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C$$

Faites les exercices suivants

Section 2. # 1

Example

$$w = \sqrt{x}$$

$$dw = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \sin(\sqrt{x}) dx = 2 \int \sqrt{x} \sin(w) dw$$

$$dx = 2\sqrt{x} dw$$

$$= 2 \int w \sin(w) dw$$

$$u = w \quad dv = \sin w dw$$

$$du = dw \quad v = -\cos w$$

$$= -2w \cos w + 2 \int \cos w dw$$

$$= -2w \cos w + 2 \sin w + C$$

$$= -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$$

Faites les exercices suivants

Section 2. # 2

Exemple

partie à dériver

partie à intégrer

$$u = x^2$$

$$dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx$$

$$v = e^x$$

$$\int x^2 e^x dx$$

$$= x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right)$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$$u = x$$

$$dv = e^x dx$$

$$du = dx$$

$$v = e^x$$

Exemple

partie à dériver

partie à intégrer

$$u = x^2$$

$$dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx$$

$$v = e^x$$

$$\int x^2 e^x dx$$

$$= x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \left(e^x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x dx \right)$$

$$= \cancel{x^2 e^x} - \cancel{x^2 e^x} + \int x^2 e^x dx = \int x^2 e^x dx$$

$$u = e^x$$

$$dv = x dx$$

$$du = e^x dx$$

$$v = \frac{x^2}{2}$$

ici

on a défait ce qu'on
avait fait ici

Hum... on n'a pas fait grand-chose!

Pour aider à bien choisir le u et le dv

	x^n	e^x	$\sin x$ ou $\cos x$
$f(x)'$	degré ↓	e^x ↻	<p> $\sin x$ $-\cos x$ $\cos x$ $-\sin x$ </p>
$\int f(x) dx$	degré ↑	e^x ↻	<p> $\sin x$ $-\cos x$ $\cos x$ $-\sin x$ </p>

Faites les exercices suivants

Section 2. # 3

Exemple

$$u = \sin x \quad dv = e^x dx$$

$$du = \cos x dx \quad v = e^x$$

$$u = \cos x \quad dv = e^x dx$$

$$du = -\sin x dx \quad v = e^x$$

$$I = \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

On semble tourner en rond!

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\int e^x \sin x dx = I = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$$

Attention de
ne pas oublier



+ C

Faites les exercices suivants

Section 2. # 4

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Intégration par partie

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$I = \int f(x) \, dx$$

Devoir:

Section 2. # 1 à 6