2.2 INTÉGRATION DE FONCTION TRIGONOMÉTRIQUE

cours 10

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Intégration par partie

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$I = \int f(x) \, dx$$

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Comment intégrer des produits de puissance de fonctions trigonométriques.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \implies \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\implies \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \implies \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$$

$$\implies \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \implies \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\implies 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\begin{aligned} \sin(2x) = \sin(x+x) &= \sin x \cos x + \cos x \sin x \\ &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) = \cos(x+x) &= \cos x \cos x - \sin x \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

$$+\quad \begin{aligned} 1 &= \cos^2 x + \sin^2 x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

$$1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$$

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}}$$

$$-\quad \begin{aligned} 1 &= \cos^2 x + \sin^2 x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

$$1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x$$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}}$$

Lorsqu'on mélange les fonctions trigonométriques et le calcul différentiel, certaines fonctions vont naturellement ensemble.

$$\sin x \longleftrightarrow \cos x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\tan x \longleftrightarrow \sec x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$\cot x \longleftrightarrow \csc x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

Lorsqu’on a une intégrale de la forme

$$u = \sin x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos x$$

$$du = \cos x \; dx$$

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx$$

$$u = \cos x$$

$$\sin x$$

$$du = -\sin x \; dx$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Faites les exercices suivants

1) $$\int \sin^3 x \cos^2 x \; dx$$

2) $$\int \sin^4 x \cos x \; dx$$

3) $$\int \cos^3 x \; dx$$

4) $$\int \sin^2 x \cos^2 x \; dx$$

On voit que la situation est relativement simple si une des deux puissances est impaire.

Exemple

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \; dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) \; dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos(2x))(1+\cos(2x)) \; dx \quad = \frac{1}{4}\int 1-\cos^2(2x) \; dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2(2x) \; dx \; = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(4x)}{2} \; dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1-\cos(4x) \; dx \quad = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin(4x)}{4}\right) + C$$

Exemple

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \; dx$$

$$u = \cos x \qquad dv = \sin^2 x \cos x \; dx$$

$$du = -\sin x \; dx \qquad v = \int \sin^2 x \cos x \; dx$$

$$= \int \omega^2 \; d\omega = \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$= \frac{\sin^3 x \cos x}{3} + \frac{1}{3} \int \sin^4 x \; dx$$

On peut se ramener à intégrer une puissance de sinus (ou cosinus).

Parfois lorsqu'on répète une même procédure, ça vaut la peine de s'en faire une formule.

$$u = \sin^{19} x \qquad dv = \sin x \; dx$$

$$\int \sin^{20} x \; dx$$

$$du = 19 \sin^{18} x \cos x \; dx \qquad v = -\cos x$$

$$= \int \sin^{19} x \sin x \; dx$$

$$= -\sin^{19} x \cos x + 19 \int \sin^{18} x \cos^2 x \; dx$$

$$= -\sin^{19} x \cos x + 19 \int \sin^{18} x (1 - \sin^2 x) \; dx$$

$$= -\sin^{19} x \cos x + 19 \int \sin^{18} x - \sin^{20} x \; dx$$

Parfois lorsqu'on répète une même procédure, ça vaut la peine de s'en faire une formule.

$$I = \boxed{\int \sin^{20} x \; dx} = -\sin^{19} x \cos x + 19 \int \sin^{18} x - \sin^{20} x \; dx$$

$$= -\sin^{19} x \cos x + 19 \int \sin^{18} x \; dx - 19 \boxed{\int \sin^{20} x \; dx}$$

$$I = -\sin^{19} x \cos x + 19 \int \sin^{18} x \; dx - 19I$$

$$20I = -\sin^{19} x \cos x + 19 \int \sin^{18} x \; dx$$

$$I = -\frac{\sin^{19} x \cos x}{20} + \frac{19}{20} \boxed{\int \sin^{18} x \; dx}$$

$$u = \sin^{n-1} x$$

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \; dx$$

$$dv = \sin x \; dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int \sin^n x \; dx$$

$$= \int \sin^{n-1} x \sin x \; dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \; dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \; dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \; dx - (n-1) \int \sin^n x \; dx$$

$$I = \boxed{\int \sin^n x \; dx}$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \; dx - (n-1) \boxed{\int \sin^n x \; dx}$$

$$I = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \; dx - (n-1) I$$

$$nI = I + (n-1)I = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \; dx$$

$$\int \sin^n x \; dx = \; I = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \; dx$$

Formule qui réduit l'exposant.

$$\int \sin^n x \ dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \ dx$$

Exemple

$$\int \sin^6 x \ dx \quad = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6} \int \sin^4 x \ dx$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6} \left(-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \ dx \right)$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6} \left(-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} \int dx \right) \right)$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6} \left(-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} x + C \right) \right)$$

Faites les exercices suivants

1) $$\int \sin^8 x \, dx$$

2) $$\int \cos^4 x \, dx$$

Lorsqu'on a une intégrale de la forme

$$u = \tan x$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\sec^2 x$$

$$du = \sec^2 x \; dx$$

$$\int \tan^n x \sec^m x \; dx$$

$$\tan x \sec x$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$u = \sec x$$

$$du = \tan x \sec x \; dx$$

À quelques signes près, c'est la même chose pour

$$\int \cot^n x \csc^m x \; dx$$

Faites les exercices suivants

1) $$\int \sec^4 x \tan^3 x \; dx$$

2) $$\int \sec^3 x \tan^3 x \; dx$$

3) $$\int \sec^3 x \tan^4 x \; dx$$

Exemple

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x \; dx$$

$$du = \sec x \tan x \; dx \qquad v = \tan x$$

$$\int \sec^3 x \; dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \; dx$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \; dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x - \sec x \; dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \; dx + \int \sec x \; dx$$

$$= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - I$$

$$2I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\int \sec^3 x \; dx = I = \frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2} + C$$

Faites les exercices suivants

10

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Identités trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

✓ Intégrale de la forme

$$\int \sin^n x \cos^m x \; dx \qquad \int \tan^n x \sec^m x \; dx$$

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Formule de réduction

$$\int \sin^{n} x \; dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \; dx$$

Devoir: Section 2.2