2.3 SUBSTITUTION TRIGONOMÉTRIQUE

cours 11

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Identités trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

✓ Intégrale de la forme

$$\int \sin^n x \cos^m x \; dx \qquad \int \tan^n x \sec^m x \; dx$$

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Formule de réduction

$$\int \sin^{n} x \; dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \; dx$$

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Substitution trigonométrique

On sait intégrer les fonctions de la forme

$$f(x) = \frac{1}{ax+b} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{ax+b}$$

Car les changements de variable linéaire

$$u = ax+b \qquad\qquad du = a\ dx$$

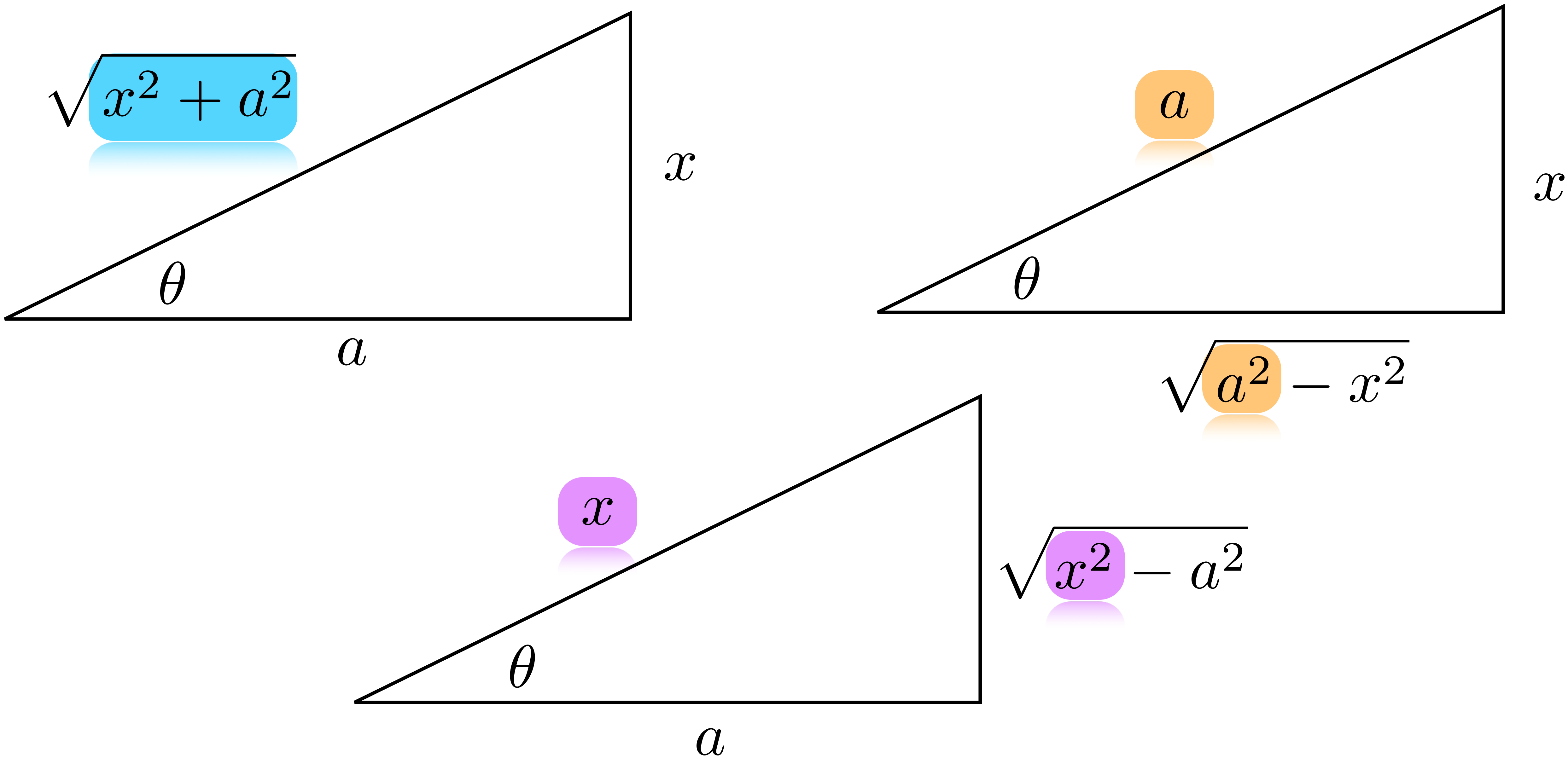
fonctionnent toujours

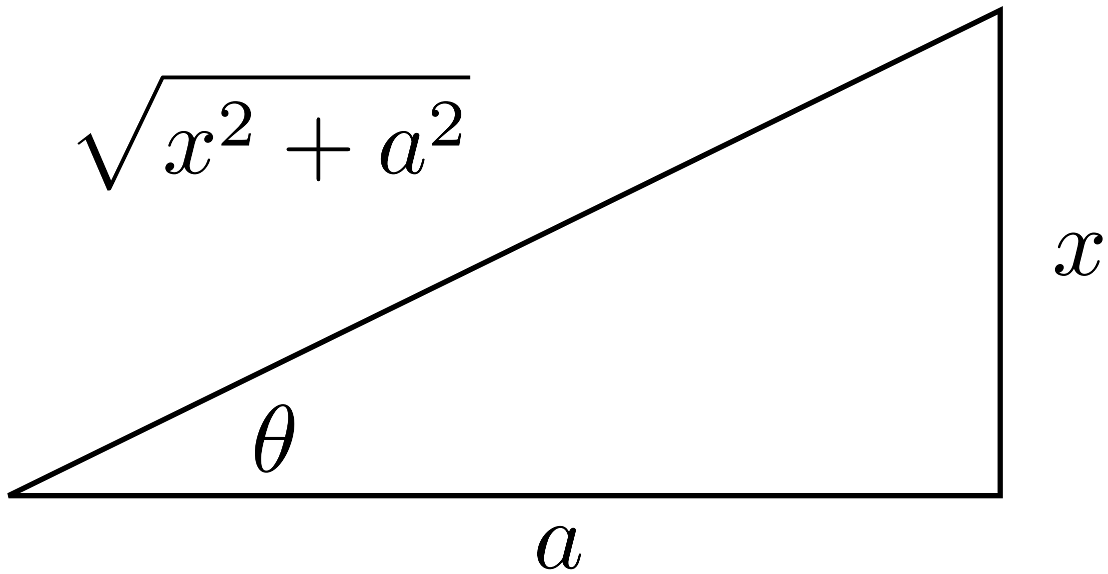
Aujourd'hui et dans les cours suivants, on va voir comment intégrer certaines fonctions composées dont l'intérieur est de la forme

$$ax^2+bx+c$$

La substitution trigonométrique repose sur le théorème de Pythagore ainsi que les rapports trigonométriques.

Considérons une variable x, une constante a et écrivons l'autre coté d'un triangle rectangle en fonction de ces données



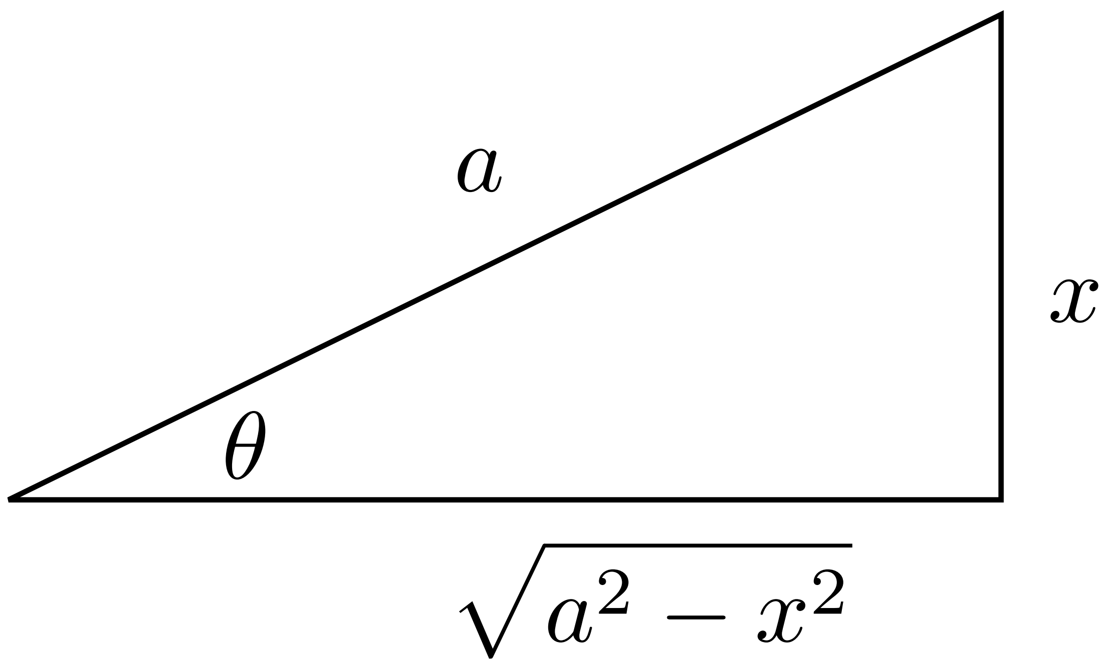


$$\frac{x}{a} = \tan\theta$$

$$x = a\tan\theta$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} = \sec\theta$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec\theta$$

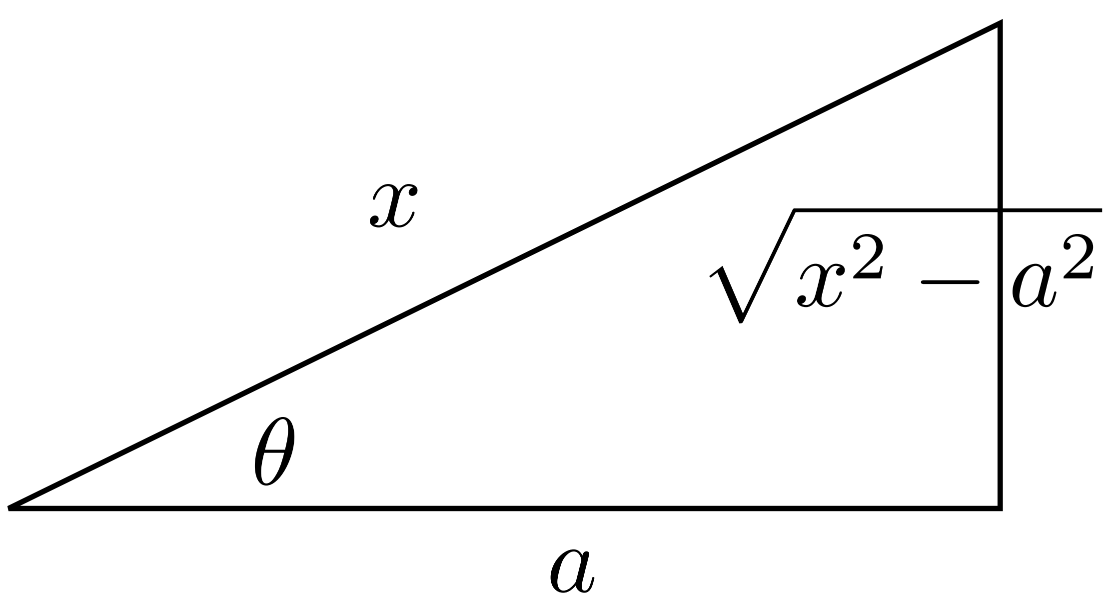


$$\frac{x}{a} = \sin\theta$$

$$x = a\sin\theta$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \cos\theta$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$$



$$\frac{x}{a} = \sec\theta$$

$$x = a\sec\theta$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \tan\theta$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$$

Faites les exercices suivants

Section 2, # 11

Voyons voir comment mélanger ça avec des intégrales.

Exemple

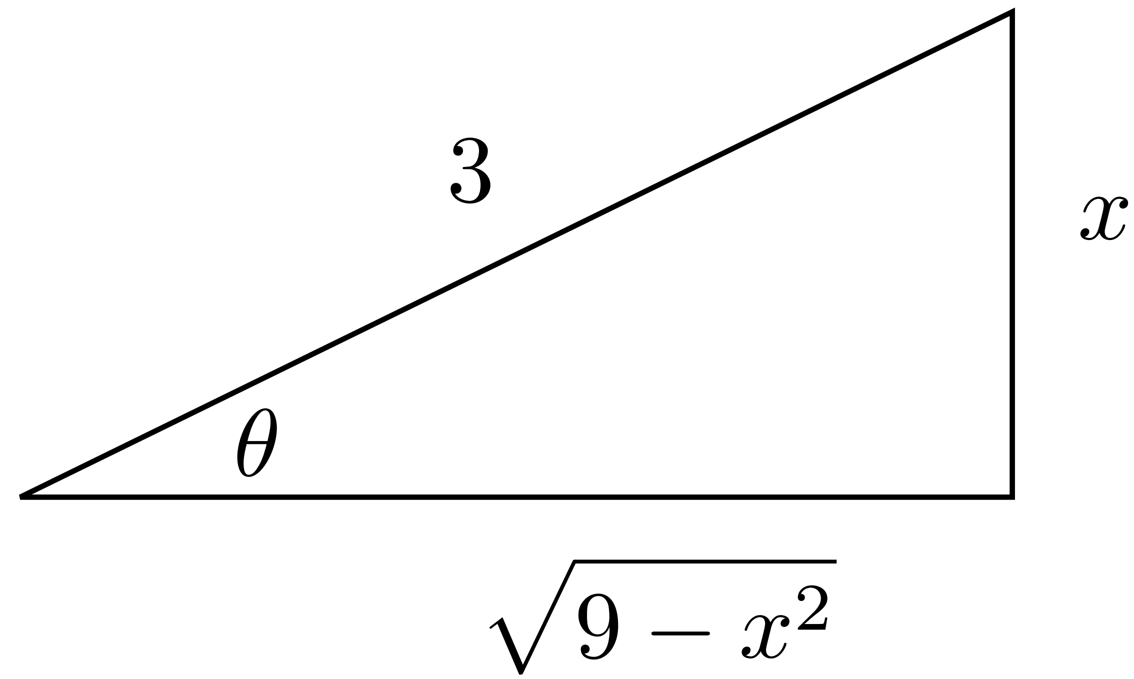
$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{3\sin\theta}{3\cos\theta}\,3\cos\theta\ d\theta$$

$$= 3\int \sin\theta\ d\theta$$

$$= -3\cos\theta + C$$

$$= -3\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + C$$



Notre changement de variable

$$\frac{x}{3} = \sin\theta \qquad x = 3\sin\theta$$

$$dx = 3\cos\theta\ d\theta$$

$$\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} = \cos\theta$$

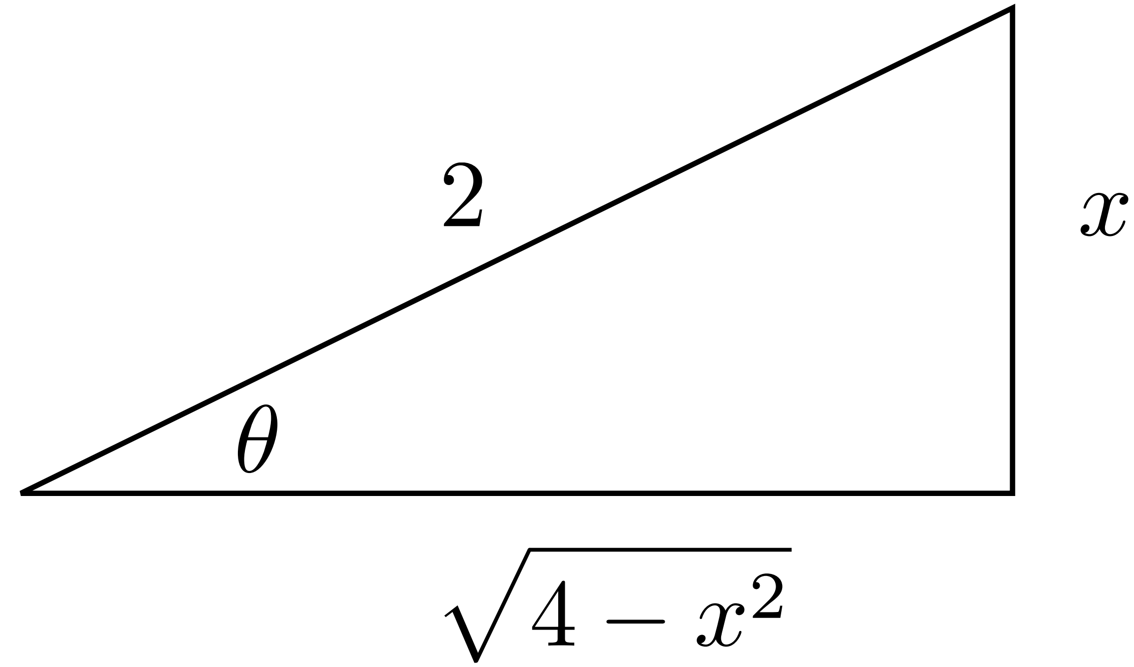
$$\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$$

Faites les exercices suivants

Section 2, # 12 et 13

Exemple

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx$$



$$= \int (2\cos\theta)\, 2\cos\theta \;\, d\theta$$

$$\frac{x}{2} = \sin\theta \qquad x = 2\sin\theta$$

$$dx = 2\cos\theta \;\, d\theta$$

$$= 4\int \cos^2\theta \;\, d\theta$$

$$= 4\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \;\, d\theta$$

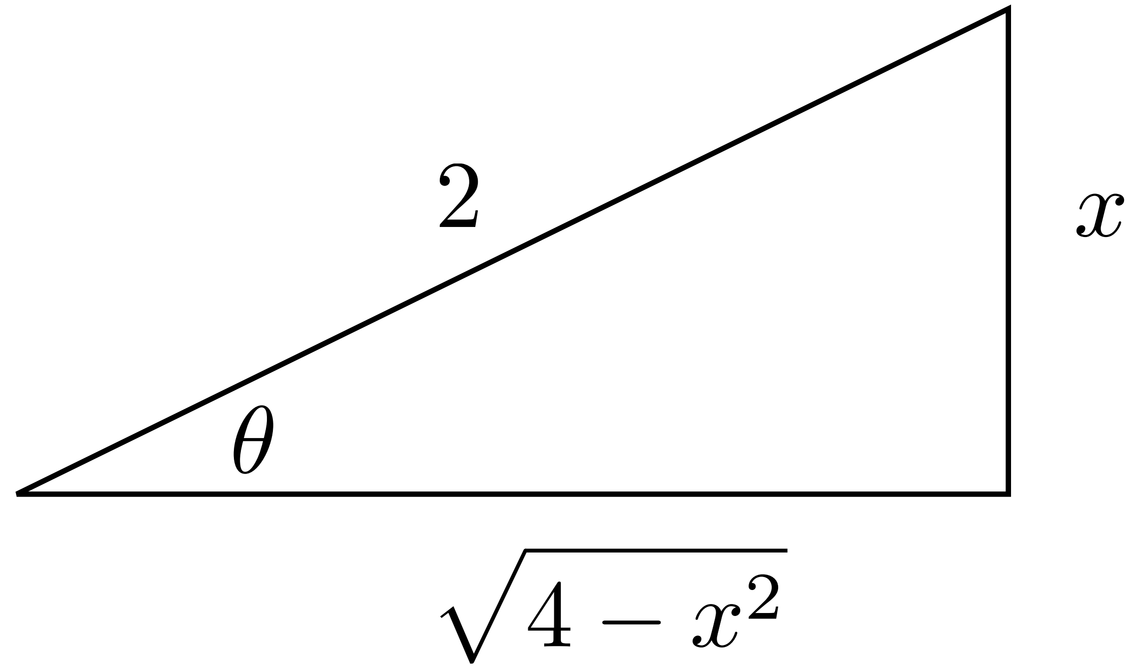
$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} = \cos\theta$$

$$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$$

$$= 2\theta + \sin(2\theta) + C$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\theta\cos\theta + C$$

Exemple $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$



$$= 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\theta\cos\theta + C$$

$$\frac{x}{2} = \sin\theta \qquad x = 2\sin\theta$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}\right) + C$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + C$$

$$\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} = \cos\theta$$

Faites les exercices suivants

Section 2 , # 12, 13

Exemple

$$x^2 + y^2 = r^2$$

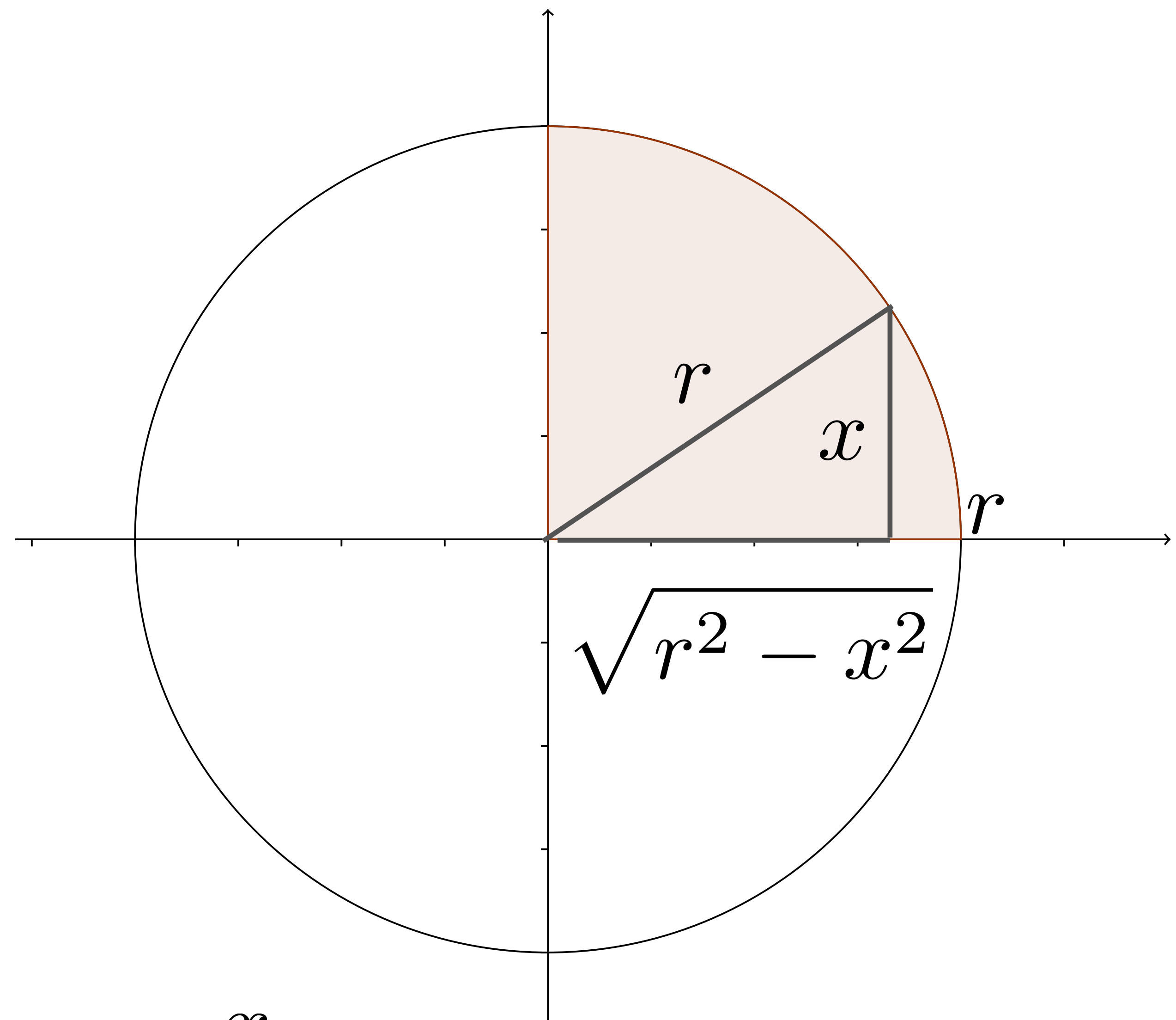
$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{Aire}_\circ = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\; dx$$

$$= 4 \int_?^? r^2 \cos^2 \theta \; d\theta$$

$$= 4r^2 \int_?^? \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \; d\theta$$



$$\frac{x}{r} = \sin\theta \qquad x = r\sin\theta$$

$$dx = r\cos\theta \; d\theta$$

$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = \cos\theta$$

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos\theta$$

Exemple

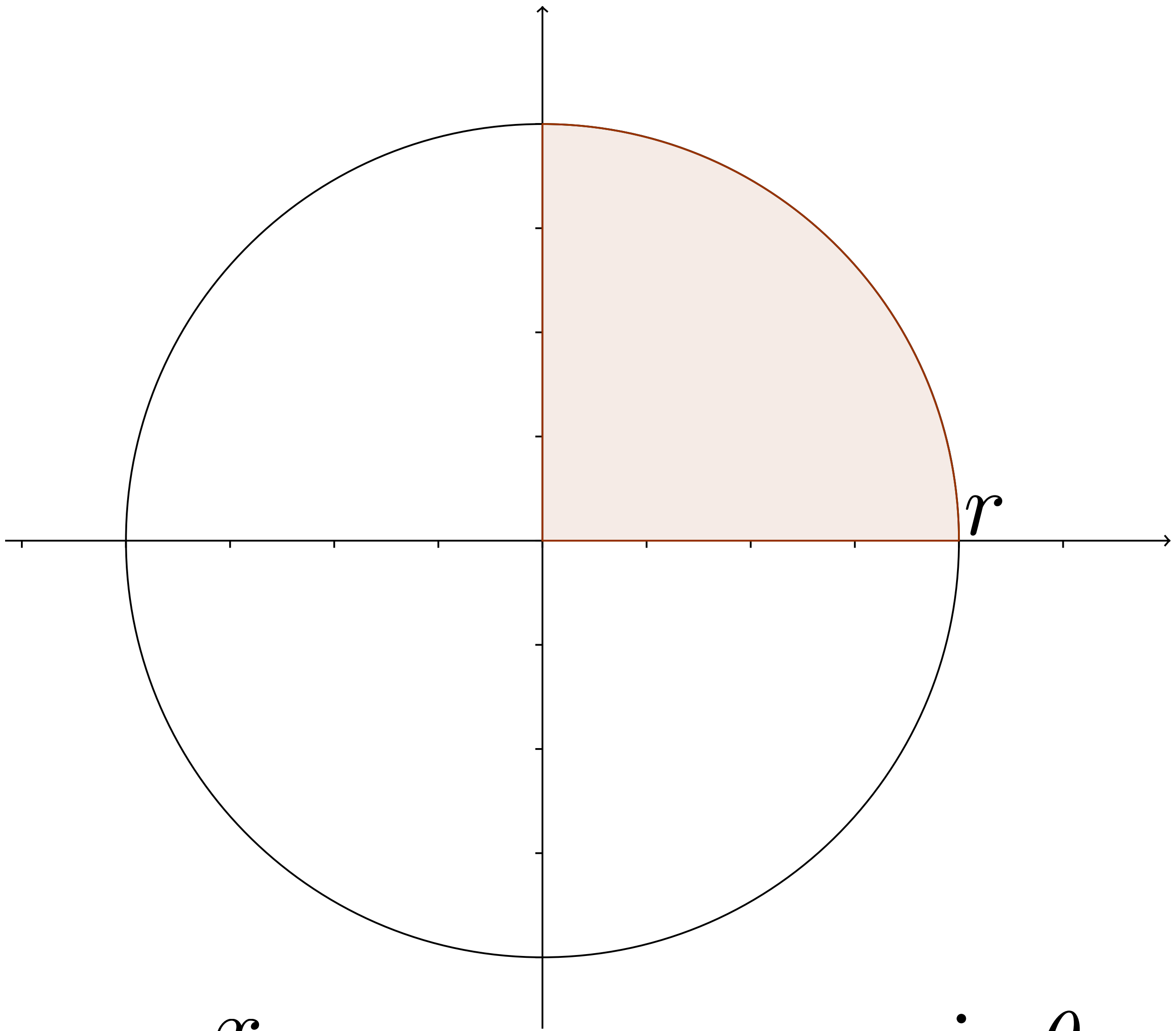
$$\text{Aire}_\circ = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$$

$$= 4r^2 \int_?^? \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\ d\theta$$

$$= 2r^2 \int_?^? 1+\cos(2\theta)\ d\theta$$

$$= 2r^2 \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Bigg|_?^?$$

$$= 2r^2 \left(\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \sin\theta\cos\theta\right)\Bigg|_?^?$$



$$\frac{x}{r} = \sin\theta \qquad x = r\sin\theta$$

$$dx = r\cos\theta\ d\theta$$

$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = \cos\theta$$

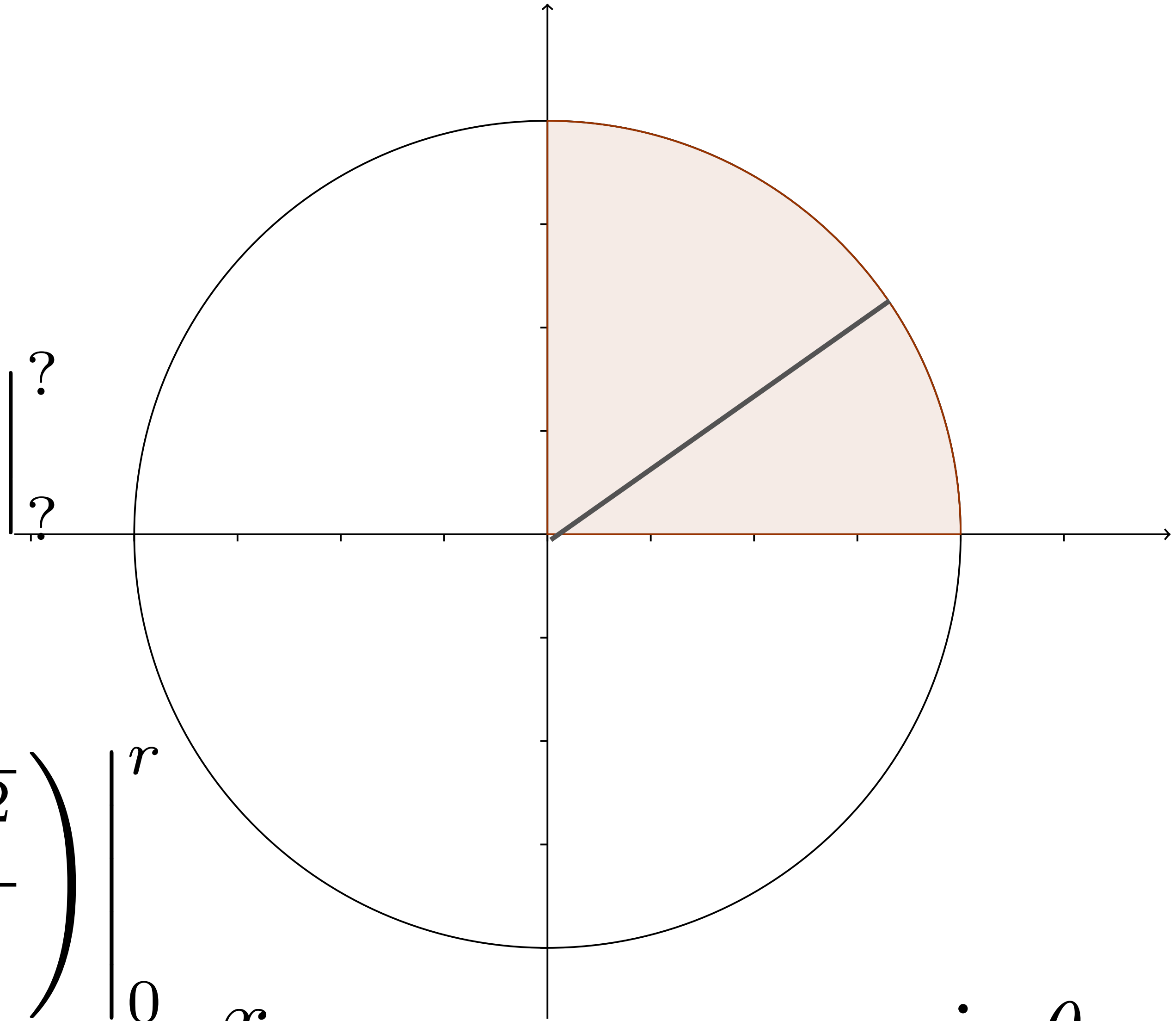
$$\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos\theta$$

Exemple

$$\text{Aire}_\circ = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$$

$$= 2r^2 \left(\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \sin\theta\cos\theta\right)\Big|_?^?$$

$$= 2r^2 \left(\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2}\right)\Bigg|_0^r$$



$$\frac{x}{r} = \sin\theta \qquad x = r\sin\theta$$

$$dx = r\cos\theta\ d\theta$$

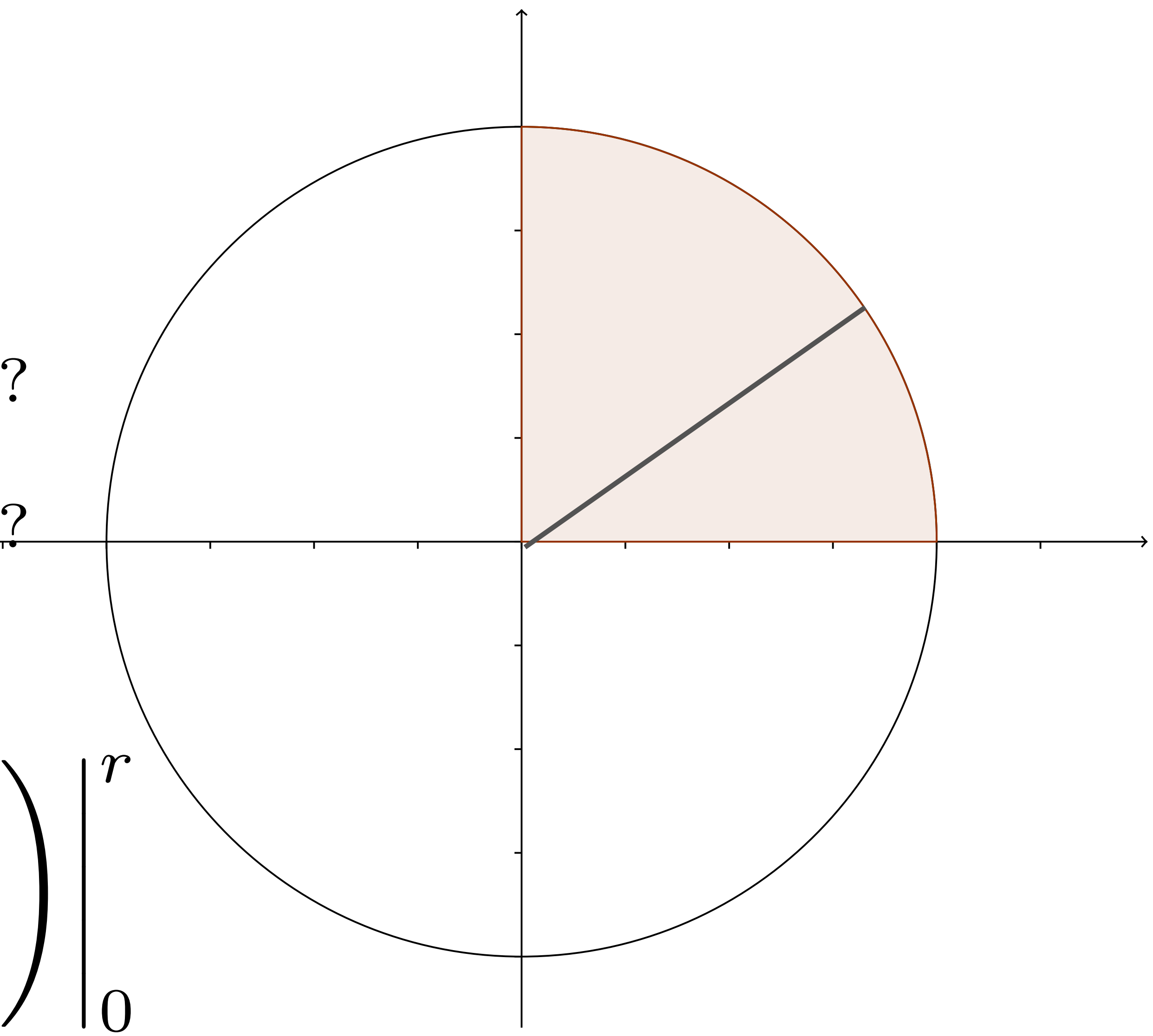
$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = \cos\theta$$

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos\theta$$

Exemple

$$\text{Aire}_\circ = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\; dx$$

$$= 2r^2 \left(\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \sin\theta\cos\theta\right)\Bigg|_?^?$$



$$= 2r^2 \left(\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2}\right)\Bigg|_0^r$$

$$= 2r^2 \left(\arcsin 1 + \frac{r\sqrt{r^2 - r^2}}{r^2}\right) - 2r^2\left(\arcsin 0 + \frac{0\sqrt{r^2 - 0^2}}{r^2}\right)$$

$$= 2r^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi r^2$$

Exemple

$$\text{Aire}_{\circ} = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$$

$$x = r \qquad \sin\theta = \frac{r}{r} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\ d\theta$$

$$x = 0 \qquad \sin\theta = \frac{0}{r} = 0$$

$$\theta = 0$$

$$= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\ d\theta$$

$$= 2r^2 \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{x}{r} = \sin\theta \qquad x = r\sin\theta$$

$$dx = r\cos\theta\ d\theta$$

$$= 2r^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - 2r^2\left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = \cos\theta$$

$$= \pi r^2$$

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos\theta$$

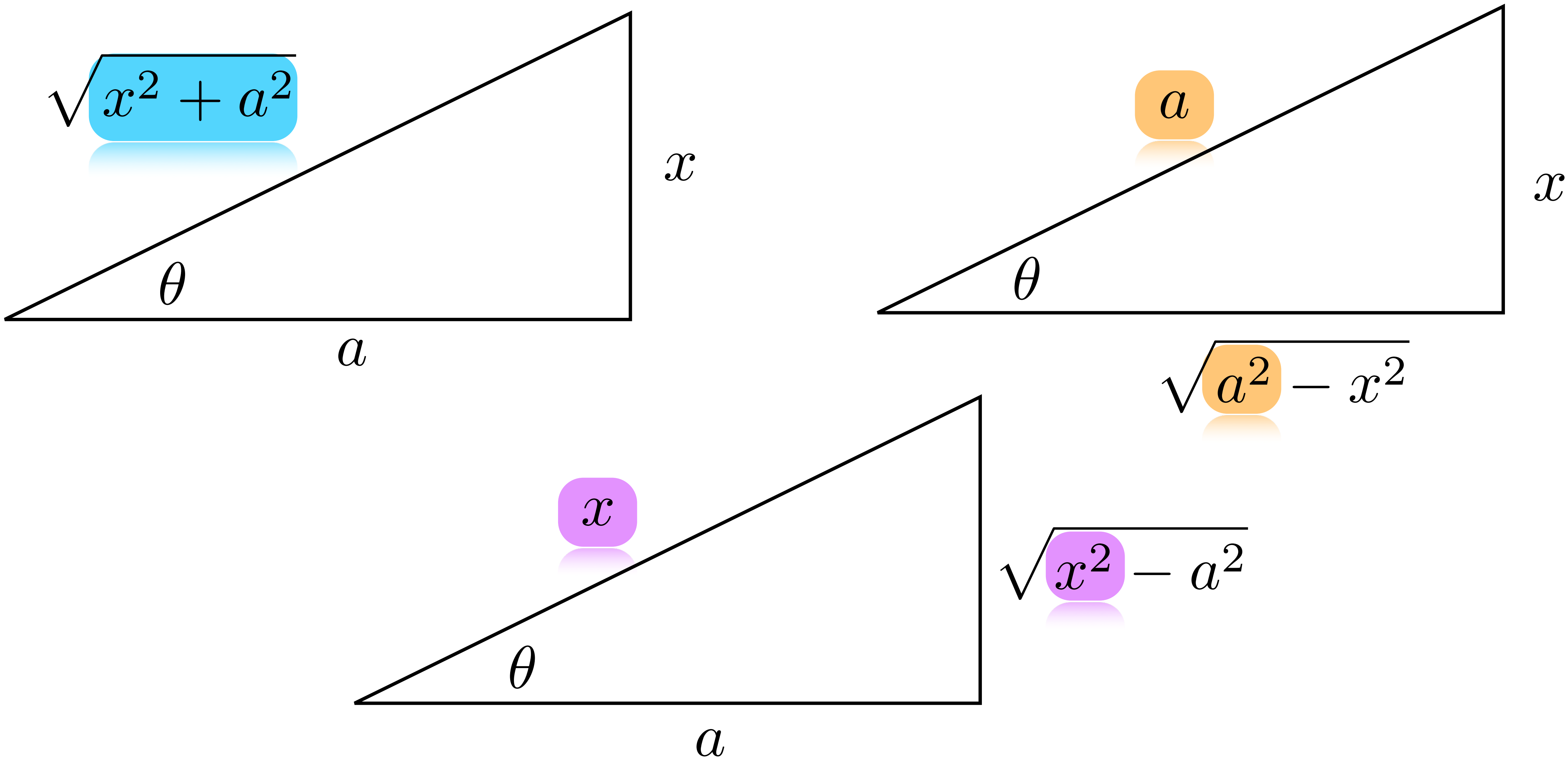
Faites les exercices suivants

Calculer l’aire de l’ellipse défini par l’équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Substitution trigonométrique



Devoir: Section 2.3