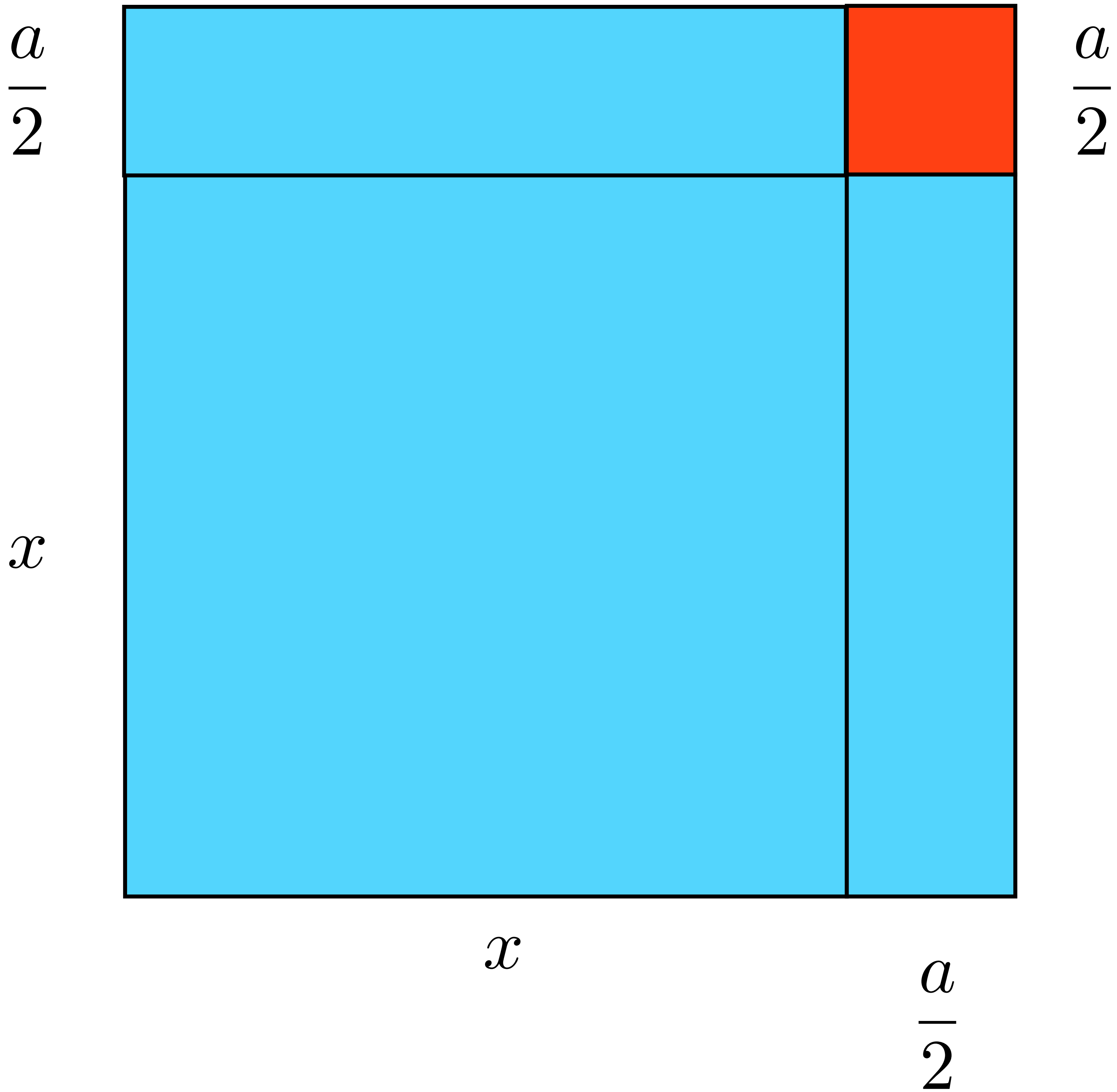
2.5 FRACTIONS PARTIELLES

cours 13

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Complétion de carré



Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Comment faire le processus inverse de mettre sur le même dénominateur.

On peut calculer une intégrale de la forme

$$\int \frac{a}{bx+c}\ dx$$

en faisant un changement de variable.

On peut aussi calculer une intégrale de la forme

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}\ dx$$

en faisant une complétion de carré suivi d'une substitution trigonométrique.

Est-ce possible d'intégrer n'importe quelle fonction de la forme

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx \qquad ?$$

Pour résoudre ce problème, on va essayer de ramener ce quotient polynomial aux deux formes qu'on sait intégrer.

$$\frac{2}{x-3} + \frac{5}{2x-1}$$

?

$$= \frac{9x-17}{2x^2-7x+3}$$

Comment faire le processus inverse de mettre sur le même dénominateur ?

Si on a une expression de la forme

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{où} \quad p(x) \quad \text{et} \quad q(x) \ \text{sont des polynômes}$$

Si le degré de $p(x)$ est plus grand ou égale que le degré de $q(x)$, on fait une division polynomiale.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad = r(x) + \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

Pour faire le processus inverse de mettre sur le même dénominateur, la première chose à faire est de déterminer quels étaient les dénominateurs initiaux.

Pour faire ça, il faut complètement factoriser le dénominateur.

Exemple

$$\frac{9x-17}{2x^2-7x+3}$$

$$= \frac{9x-17}{(x-3)(2x-1)}$$

$$2x^2-7x+3 \quad = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-4(2)(3)}}{4}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \quad = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$x = 3$ et $x = \dfrac{1}{2}$

$$2x^2-7x+3 = 2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$= (x-3)(2x-1)$$

Exemple

$$\frac{9x-17}{2x^2-7x+3} = \frac{9x-17}{(x-3)(2x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x-1}$$

$$= \frac{A(2x-1)}{(x-3)(2x-1)} + \frac{B(x-3)}{(2x-1)(x-3)} = \frac{A(2x-1)+B(x-3)}{(x-3)(2x-1)}$$

$$= \frac{2Ax - A + Bx - 3B}{(x-3)(2x-1)} = \frac{(2A+B)x + (-A-3B)}{(x-3)(2x-1)}$$

$$9x - 17 = (2A+B)x + (-A-3B)$$

Dans une égalité polynomiale, les coefficients de chaque puissance de x doivent être égaux.

Exemple

$$\frac{9x-17}{2x^2-7x+3} = \frac{9x-17}{(x-3)(2x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x-1}$$

$$9x - 17 = (2A+B)x + (-A-3B)$$

$$\begin{cases} 2A + B &= 9 \\ -A - 3B &= -17 \end{cases}$$

$$A = -3B + 17$$

$$2(-3B+17) + B = 9 \implies -5B + 34 = 9 \implies 5B = 25$$

$$\implies B = 5$$

$$A = -3(5) + 17 \quad = 2$$

Exemple

$$\frac{9x-17}{2x^2-7x+3} = \frac{9x-17}{(x-3)(2x-1)} = \frac{\boxed{A}}{x-3} + \frac{\boxed{B}}{2x-1}$$

$$= \frac{\boxed{2}}{x-3} + \frac{\boxed{5}}{2x-1}$$

$$\begin{cases} 2A + B &= 9 \\ -A - 3B &= -17 \end{cases}$$

$$A = -3B + 17$$

$$2(-3B+17) + B = 9 \implies -5B + 34 = 9 \implies 5B = 25$$

$$\implies \boxed{B} = \boxed{5}$$

$$\boxed{A} = -3(5) + 17 = \boxed{2}$$

Exemple (Prise 2)

$$\frac{9x-17}{2x^2-7x+3} = \frac{9x-17}{(x-3)(2x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x-1}$$

$$= \frac{A(2x-1)}{(x-3)(2x-1)} + \frac{B(x-3)}{(2x-1)(x-3)} = \frac{A(2x-1)+B(x-3)}{(x-3)(2x-1)}$$

$$9x-17 = A(2x-1) + B(x-3)$$

Cette égalité doit être vraie pour toute valeur de x

Exemple (Prise 2)

$$\frac{9x-17}{2x^2-7x+3} = \frac{9x-17}{(x-3)(2x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x-1}$$

$$9x - 17 = A(2x-1) + B(x-3)$$

Cette égalité doit être vraie pour toute valeur de x

Pour $x = \frac{1}{2}$

$$9\frac{1}{2} - 17 = A\left(\cancelto{0}{2\frac{1}{2} - 1}\right) + B\left(\frac{1}{2} - 3\right)$$

$$\Longrightarrow -\frac{25}{2} = -\frac{5}{2}B \qquad \Longrightarrow B = 5$$

Pour $x = 3$

$$9(3) - 17 = A(2(3) - 1) + B(\cancelto{0}{3 - 3})$$

$$\Longrightarrow 10 = 5A \quad \Longrightarrow A = 2$$

Faites les exercices suivants

Section 2, # 19 a), b), 20 a)

Vous avez probablement déjà vu le théorème suivant:

Théorème Soit $p(x)$ un polynôme,

$$p(a) = 0 \Longleftrightarrow p(x) = (x - a)q(x)$$

C'est-à-dire

a est un zéro du polynôme

si et seulement si $(x - a)$ est un facteur du polynôme.

On peut donc conclure que certains polynômes ne peuvent pas être factorisés en facteur linéaire.

$$x^2 + 1 \stackrel{?}{=} (x-a)(x-b)$$

$$x^2 + 1 = 0 \implies x^2 = -1 \qquad \implies x = \pm\sqrt{-1}$$

Mais $\quad \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

Donc $x^2 + 1$ ne peut pas être factorisé.

Exemple

$$\frac{5x^2-7x+11}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$= \frac{A(x^2+2)}{(x-1)(x^2+2)} + \frac{(Bx+C)(x-1)}{(x^2+2)(x-1)}$$

$$= \frac{A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2)}$$

$$5x^2-7x+11 = A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)$$

Pour $x=1$

$$5(1)^2-7(1)+11 = A((1)^2+2)+(B(1)+C)((1)-1)$$

$$9 = 3A$$

$$A = 3$$

Exemple

$$\frac{5x^2-7x+11}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$= \frac{A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2)} \qquad A=3$$

$$= \frac{3(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2)}$$

$$\begin{aligned} 5x^2-7x+11 &= 3(x^2+2)+(Bx+C)(x-1) \\ &= 3x^2+6+Bx^2+Cx-Bx-C \\ &= (3+B)x^2+(C-B)x+(6-C) \end{aligned}$$

Exemple

$$\frac{5x^2-7x+11}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$A = 3$$

$$5x^2-7x+11 = (3+B)x^2 + (C-B)x + (6-C)$$

$$\begin{cases} 3+B & = 5 \\ C-B & = -7 \\ 6-C & = 11 \end{cases}$$

$$B = 5-3 = 2$$

$$C = 6-11 = -5$$

$$C - B = -5 - 2 = -7$$

$$\frac{5x^2-7x+11}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{3}{x-1} + \frac{2x-5}{x^2+2}$$

Exemple

$$\frac{5x^2-7x+11}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{3}{x-1}+\frac{2x-5}{x^2+2}$$

$$\int \frac{5x^2-7x+11}{(x-1)(x^2+2)}\,dx=\int \frac{3}{x-1}+\frac{2x-5}{x^2+2}\,dx$$

$$=3\int \frac{1}{x-1}\,dx+\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx-5\int \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

$$u=x-1 \qquad du=dx$$

$$v=x^2+2 \qquad dv=2x\,dx$$

$$=3\int \frac{1}{u}\,du+\int \frac{1}{v}\,dv-5\int \frac{1}{2\left(\frac{x^2}{2}+1\right)}\,dx$$

$$=3\ln|x-1|+\ln|x^2+2|-\frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

Exemple

$$\frac{5x^2-7x+11}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{3}{x-1}+\frac{2x-5}{x^2+2}$$

$$\int \frac{5x^2-7x+11}{(x-1)(x^2+2)}\,dx=\int \frac{3}{x-1}+\frac{2x-5}{x^2+2}\,dx$$

$$=3\ln|x-1|+\ln|x^2+2|-\frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$$=3\ln|x-1|+\ln|x^2+2|-\frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

Faites les exercices suivants

Section 2, # 19 c), d), 20 g)

Si un des facteurs du dénominateur apparait plus d'une fois

Exemple

$$\frac{3x^2 - 4x - 4}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-1}$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x-1)^2 + C(x-1)^2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{(A+B+C)(x-1)^2}{(x-1)^3}$$

Nous mène nulle part, car ce polynôme

n'est pas un multiple de ce polynôme.

Exemple

$$\frac{3x^2-4x-4}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3}$$

$$3x^2-4x-4 = A(x-1)^2+B(x-1)+C$$

pour $x=1$ $\qquad 3(1)^2-4(1)-4 = 0A+0B+C$

$$C=-5$$

Exemple

$$\frac{3x^2-4x-4}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$C = -5$$

$$3x^2-4x-4 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

$$3x^2-4x-4 = A(x-1)^2 + B(x-1) - 5$$

$$3x^2-4x+1 = A(x^2-2x+1) + B(x-1)$$

$$3x^2-4x+1 = Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B)$$

$$\begin{cases} A &= 3 \\ -2A+B &= -4 \\ A-B &= 1 \end{cases}$$

$$A = 3$$

$$B = A - 1 = 3 - 1 = 2$$

Exemple

$$\frac{3x^2-4x-4}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{5}{(x-1)^3}$$

$$\int \frac{3x^2-4x-4}{(x-1)^3}\,dx = \int \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{5}{(x-1)^3}\,dx$$

$$= 3\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \frac{5}{2(x-1)^2} + C$$

$$\begin{cases} A &= 3 \\ -2A+B &= -4 \\ A-B &= 1 \end{cases}$$

$$A = 3$$

$$B = A - 1 \quad = 3 - 1 = 2$$

$$C = -5$$

Faites les exercices suivants

Section 2, # 19 e), f), 20 f)

$$\frac{4x^8+3x^5-3x+12}{(x-1)(x+3)^2(x^2+1)(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{x^2+2}+\frac{Hx+I}{(x^2+2)^2}$$

Les numérateurs des termes linéaires sont des constantes.

Les numérateurs des termes du deuxième degré sont des termes linaire.

Les termes qui apparaissent avec multiplicité feront apparaitre autant de termes dans la somme que la multiplicité.

Faites les exercices suivants

Section 2, # 20

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Fractions partielles

Devoir: Section 2 # 19 à 21