3.1 VOLUME DE RÉVOLUTION (DISQUES)

cours 16

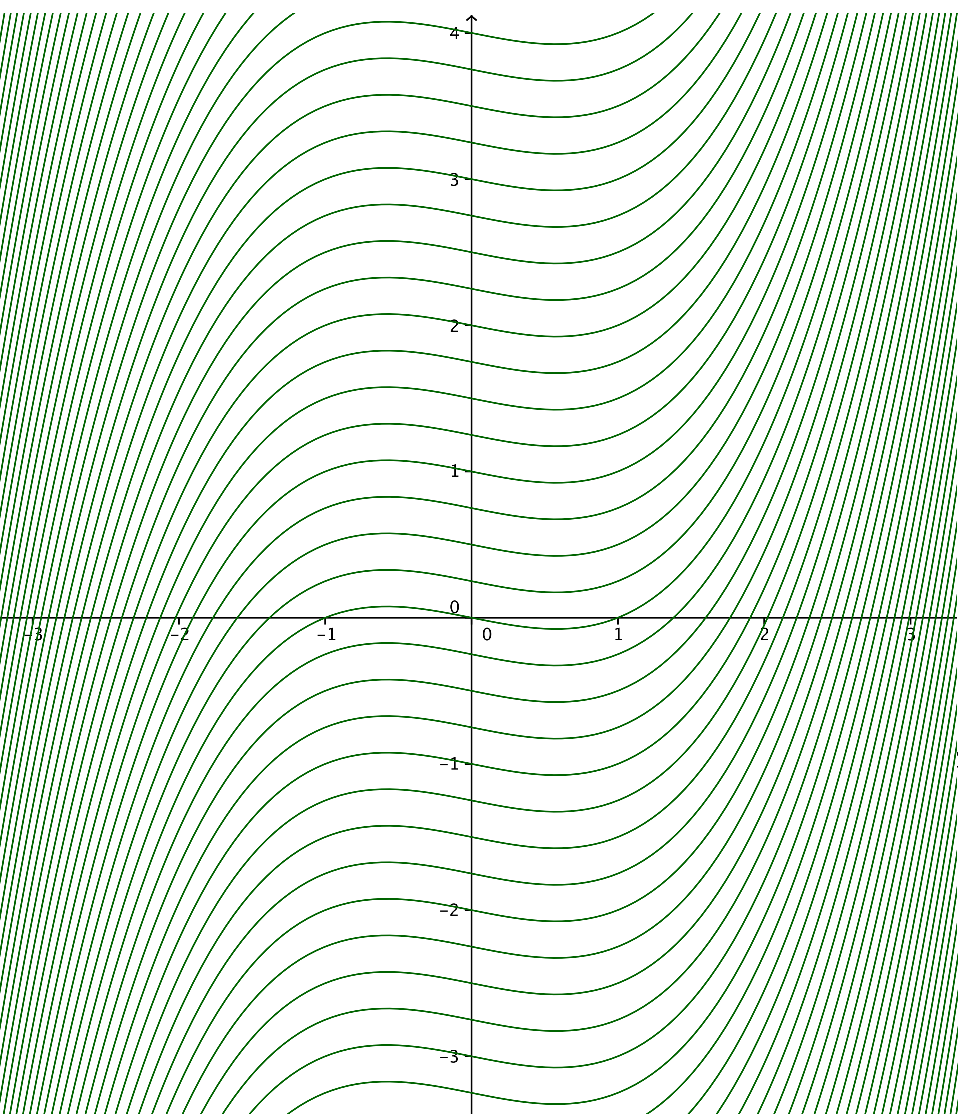
Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Comment calculer le volume d'un solide de révolution à l'aide de la méthode des disques.

Depuis le début de la session, nous avons vu trois concepts interreliés;

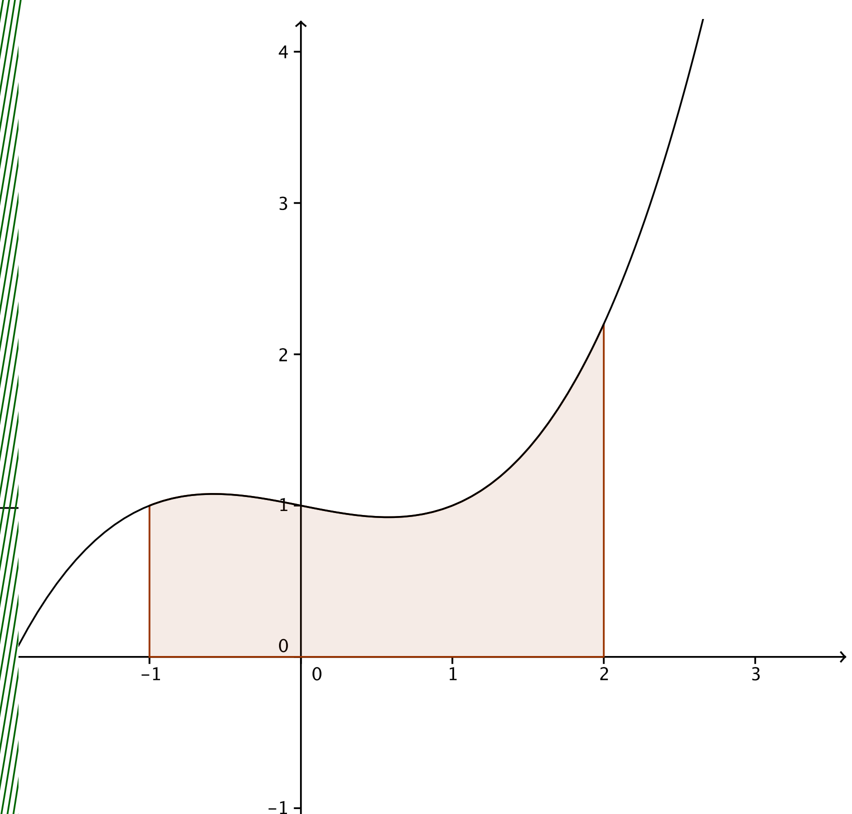
Intégrale indéfinie

$$\int f(x)\ dx$$



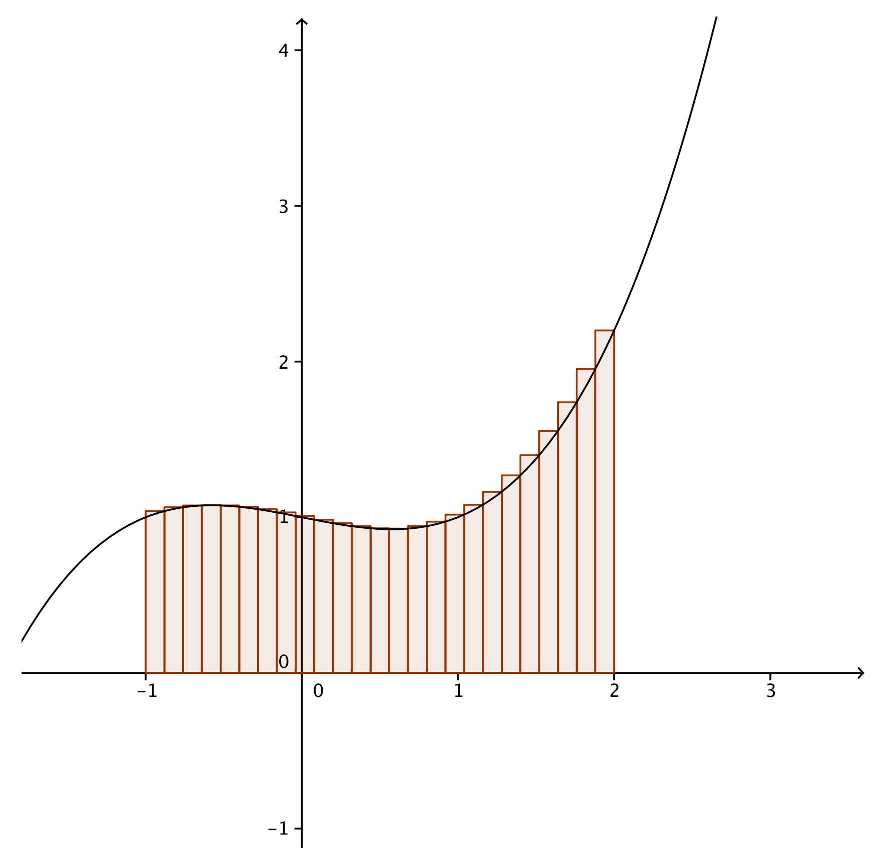
Intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\ dx$$



Somme de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$



On a développé plusieurs techniques nous permettant de calculer

$$\int f(x)\ dx\ = F(x) + C$$

et le théorème fondamental du calcul nous permet donc d'évaluer

$$\int_a^b f(x)\ dx\ = F(b) - F(a)$$

De plus, on a l'équivalence

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k\ = \int_a^b f(x)\ dx$$

Regardons comment on peut utiliser cette équivalence dans d'autres contextes.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\ dx$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \text{Aire}_{\text{rectangle}_k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \text{hauteur}_{\text{rect}_k} \times \text{base}_{\text{rect}_k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k\end{aligned}$$

Si on oublie qu'on additionnait des rectangles, l'intégrale définie nous donne une façon de calculer une somme infinie de contributions infinitésimales.

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x_k$$

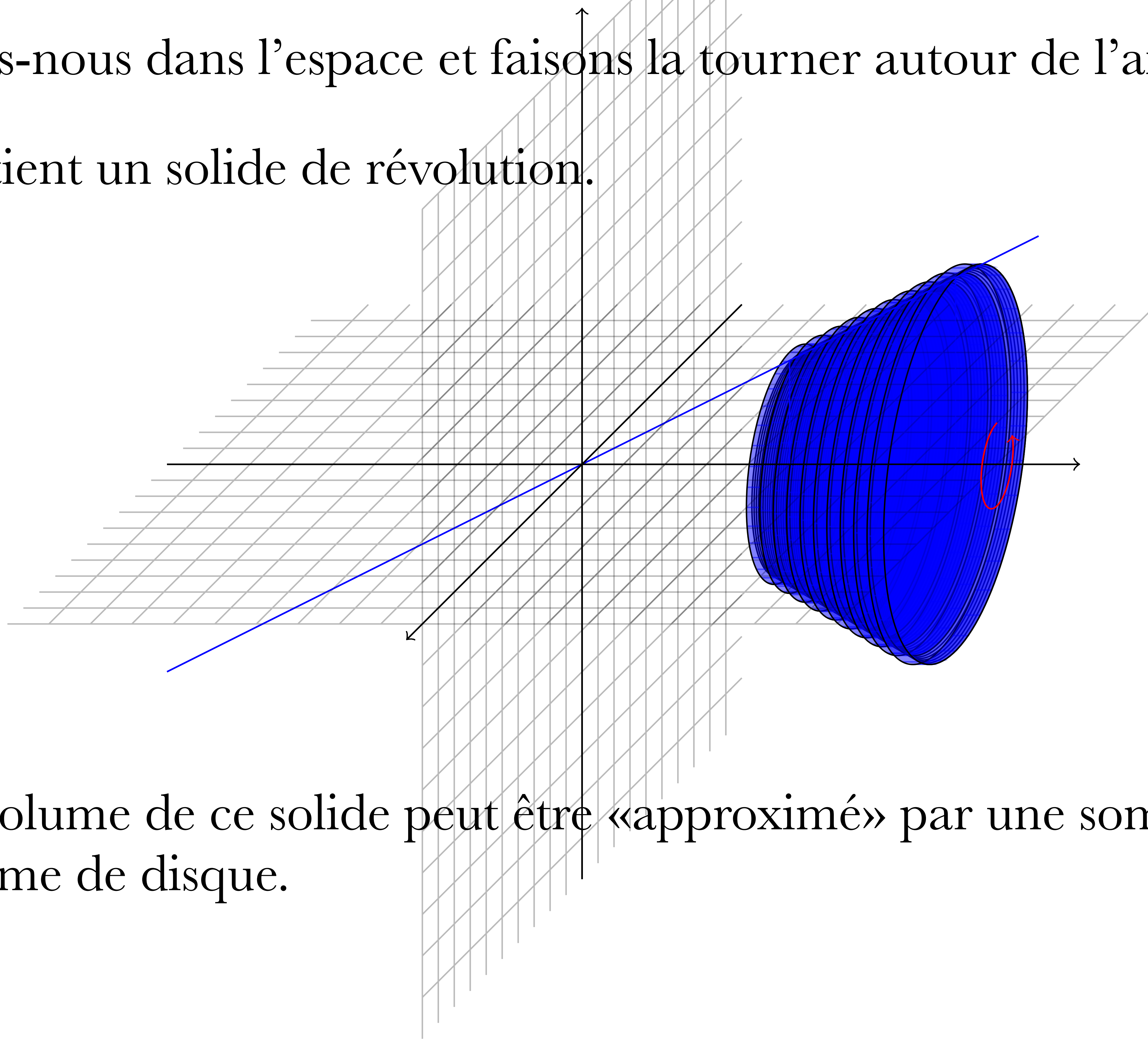
Pas nécessairement une hauteur

Pas nécessairement une base

Prenons l'aire sous une fonction entre deux bornes

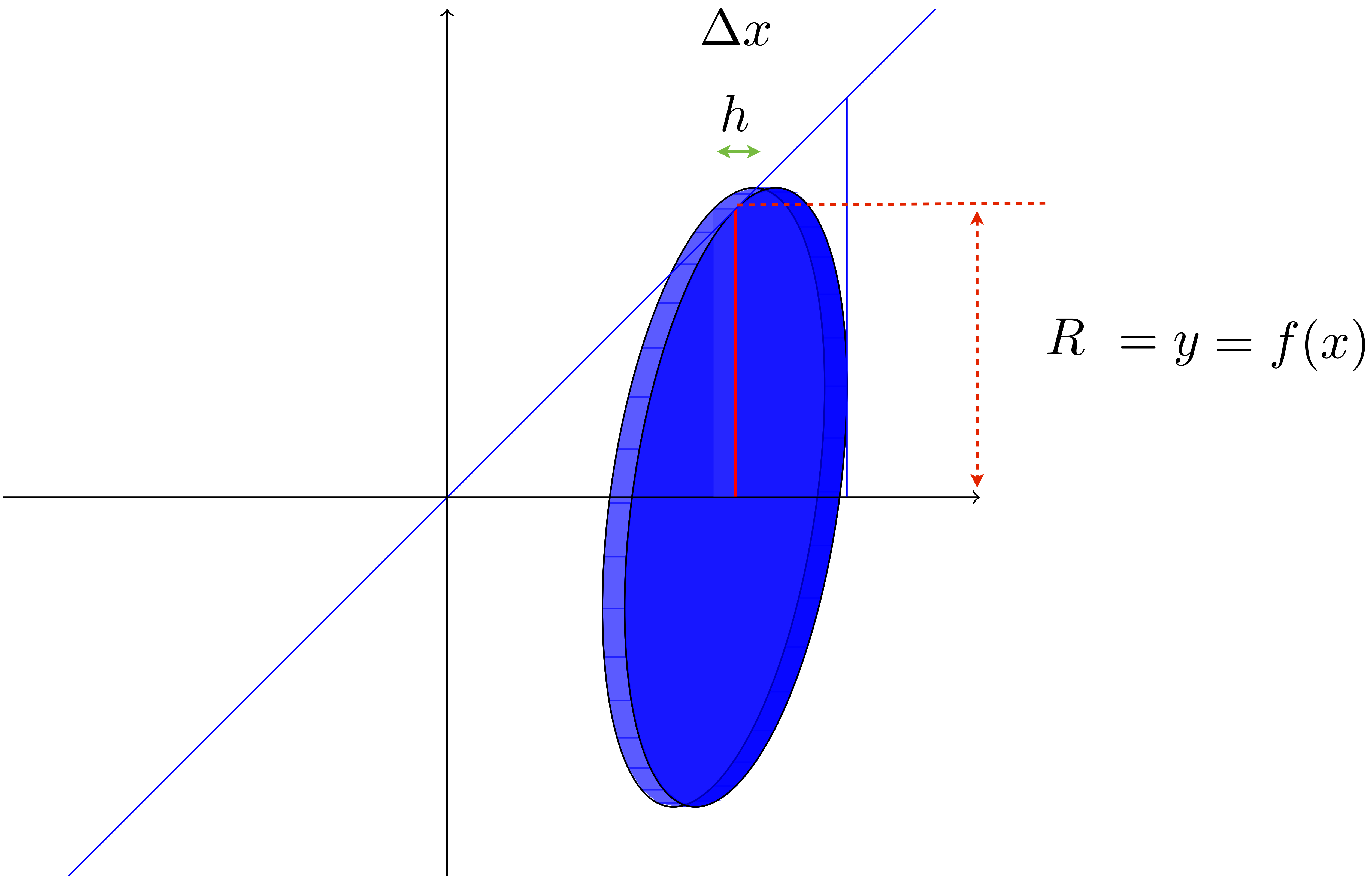
plaçons-nous dans l'espace et faisons la tourner autour de l'axe des x.

On obtient un solide de révolution.



Le volume de ce solide peut être «approximé» par une somme de volume de disque.

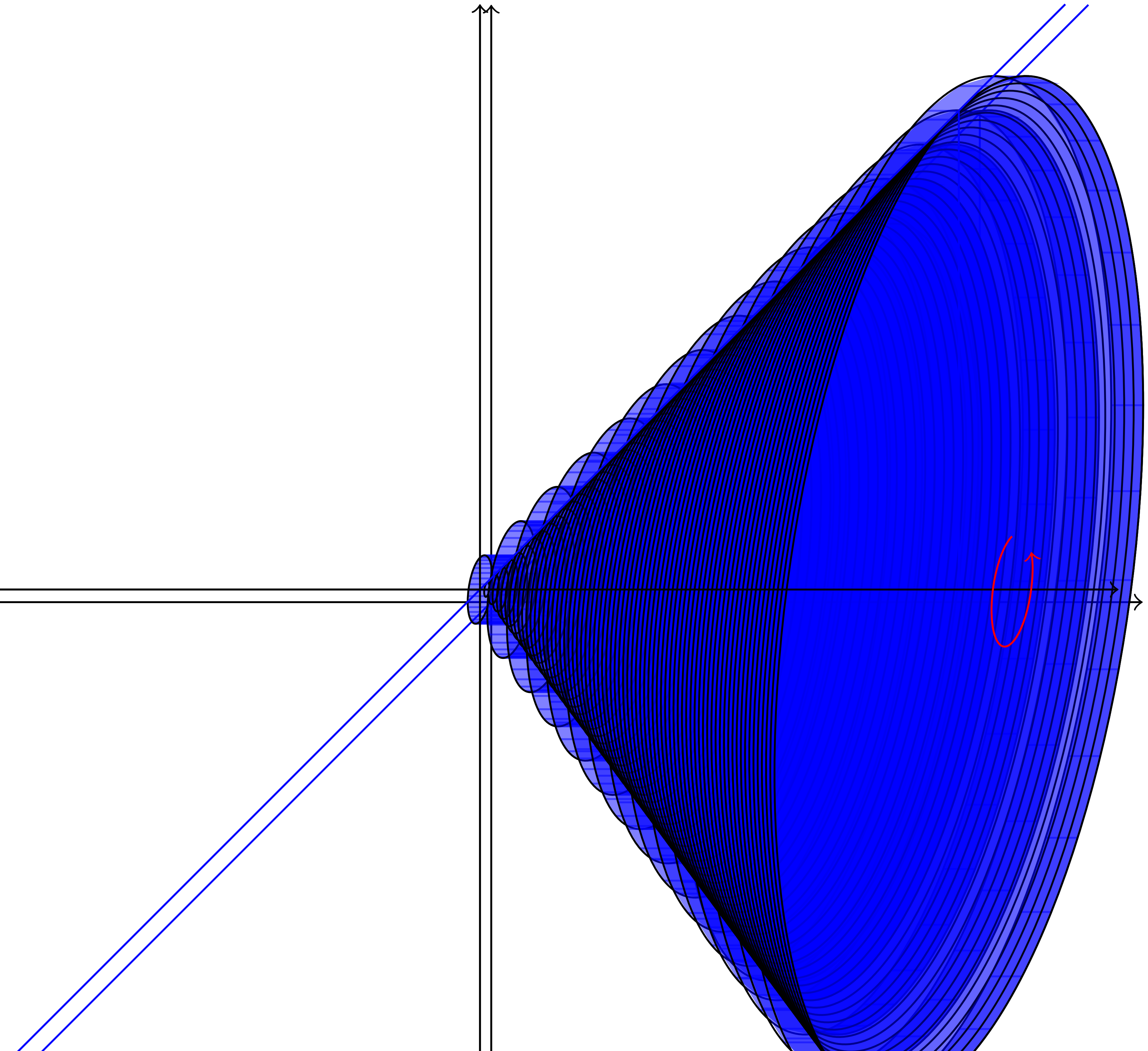
$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{disque}} = \mathrm{Aire}_{\mathrm{base}} \times \mathrm{hauteur} = \pi R^2 \times h$$
$$= \pi y^2 \Delta x = \pi f^2(x) \Delta x$$



$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{disque}} = \pi f^2(x)\Delta x$$

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{total}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k}^{n} \mathrm{Vol}_{\mathrm{disque}_k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k}^{n} \pi f^2(x_k^*)\Delta x_k$$

$$= \int_a^b \pi f^2(x)\, dx$$



Exemple

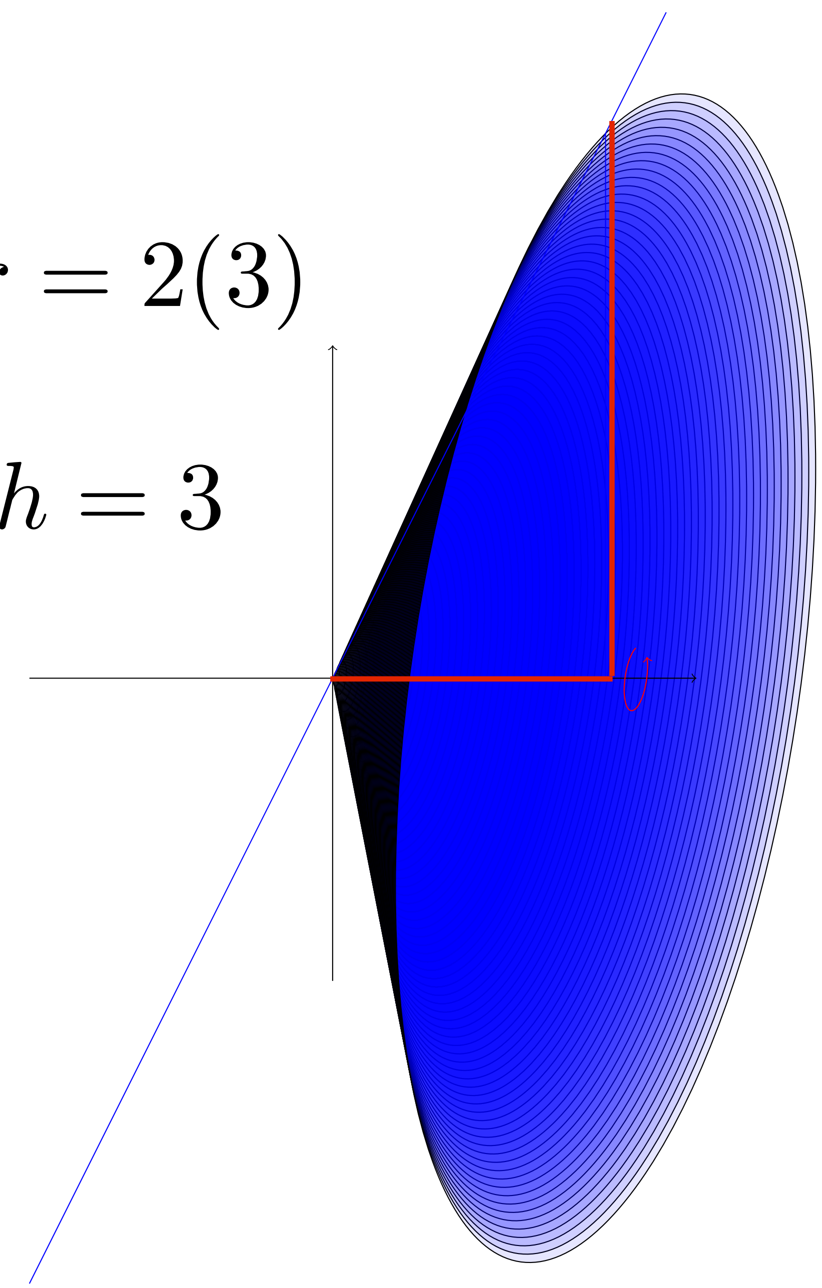
Calculer le volume du cône obtenu en faisant tourner la droite $y = 2x$ autour de l'axe des x entre $x = 0$ et $x = 3$

On vous a déjà dit que le volume d'un cône est

$$\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi (6)^2 3}{3} = 36\pi$$

$r = 2(3)$

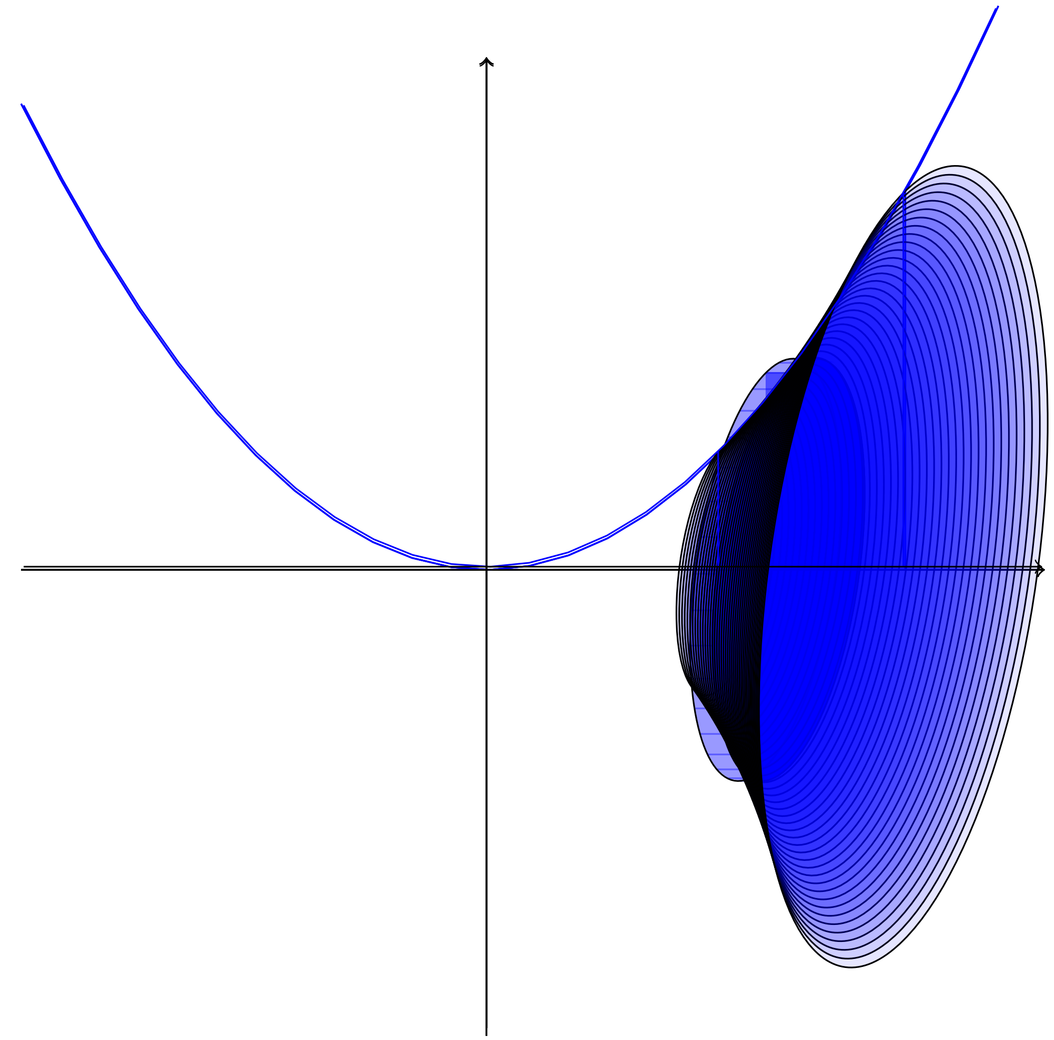
$h = 3$



$$\int_0^3 \pi (2x)^2 \; dx = 4\pi \int_0^3 x^2 \; dx$$

$$= 4\pi \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = 4\pi \frac{3^3}{3} - 0 = 4\pi 9 = 36\pi$$

Exemple Calculer le volume du solide obtenu en faisant tourner la fonction $f(x) = x^2$ autour de l'axe des x entre $x = 1$ et $x = 2$



$$\pi \int_1^2 R^2 \, dx = \pi \int_1^2 (x^2)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_1^2 x^4 \, dx = \left. \frac{\pi x^5}{5} \right|_1^2$$

$$= \frac{32\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{31\pi}{5}$$

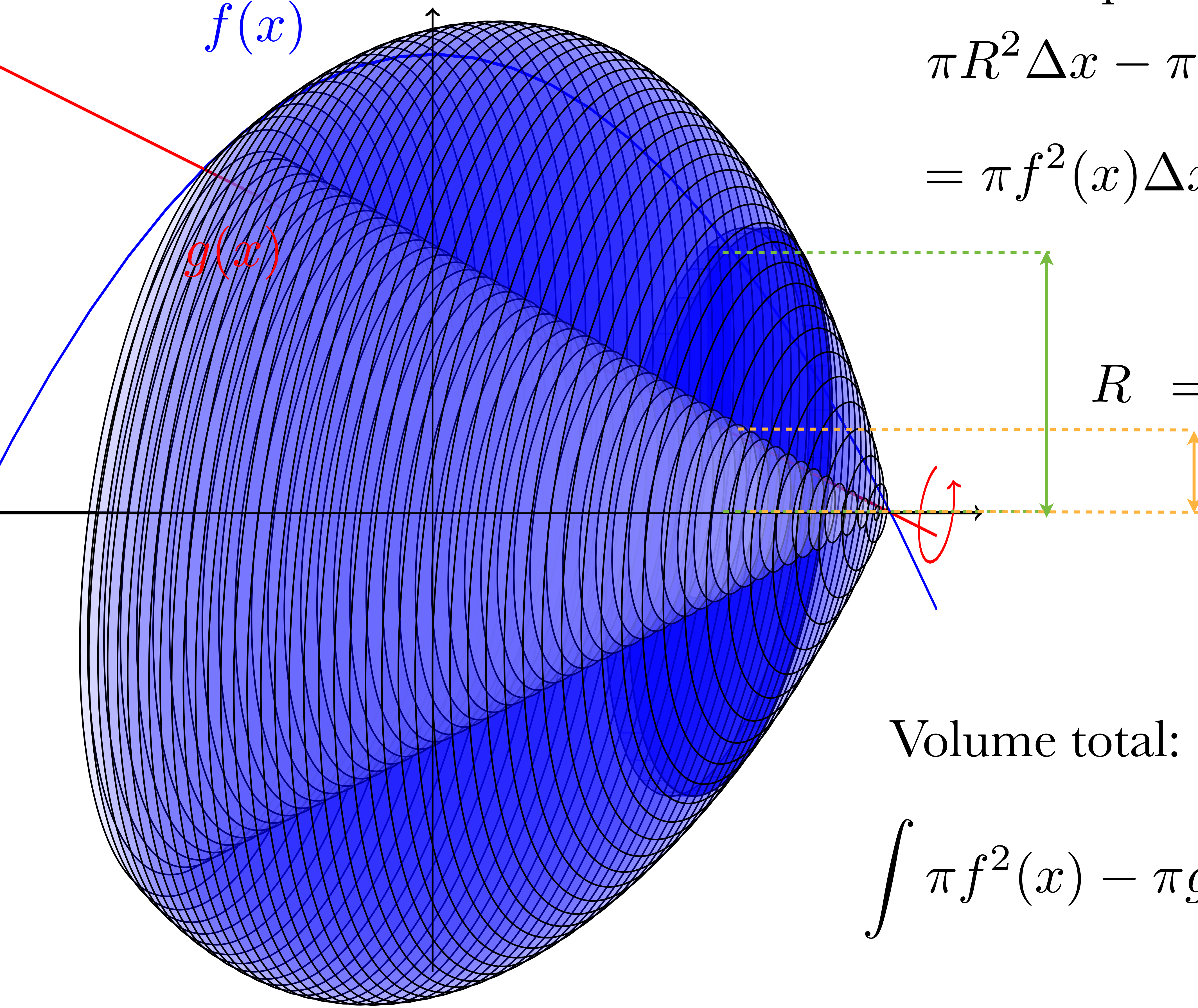
Faites les exercices suivants

Section 3 # 4 a), b) et c)

Volume d'un disque troué:

$$\pi R^2 \Delta x - \pi r^2 \Delta x$$

$$= \pi f^2(x) \Delta x - \pi g^2(x) \Delta x$$



$R = f(x)$

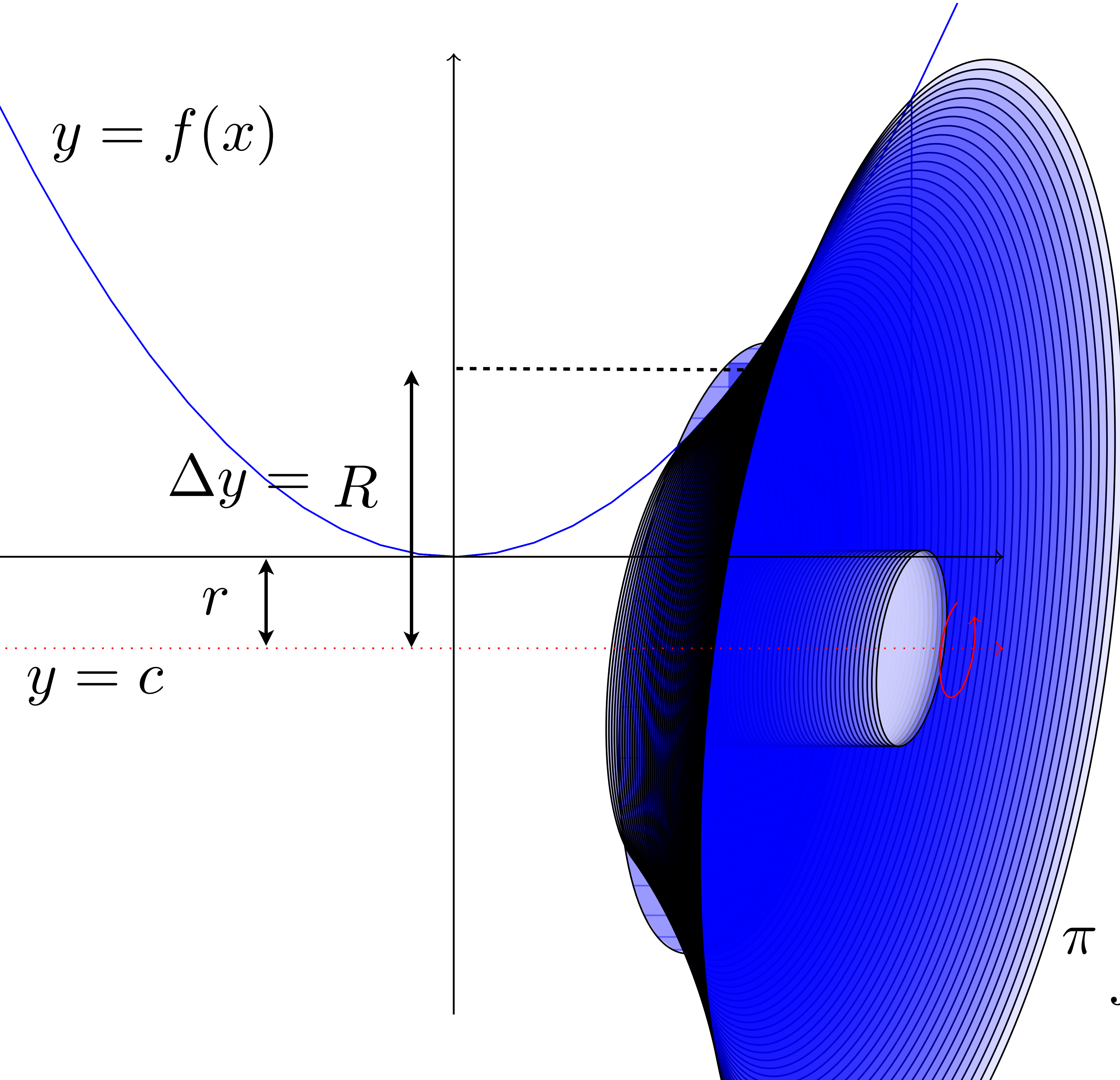
$r = g(x)$

Volume total:

$$\int \pi f^2(x) - \pi g^2(x)\ dx$$

Volume d'un disque troué: $\pi R^2 \Delta x - \pi r^2 \Delta x$

$$= \pi (f(x) - c)^2 \Delta x - \pi(-c)^2 \Delta x$$



$$R = \Delta y = f(x) - c$$

$$r = 0 - c$$

Volume total

$$\pi \int_a^b (f(x) - c)^2 - c^2 \; dx$$

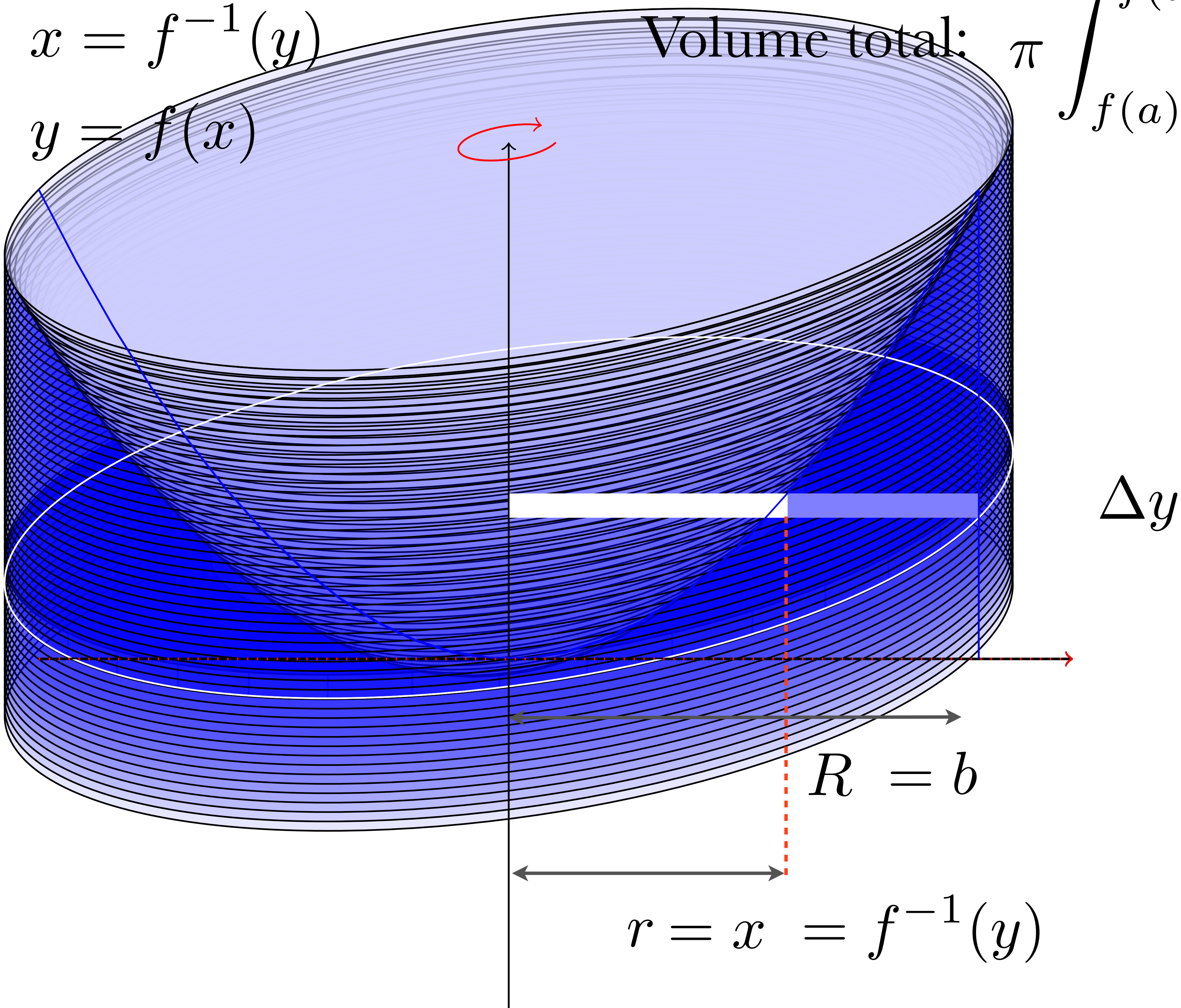
Volume d'un disque troué: $\pi R^2 \Delta y - \pi r^2 \Delta y \ = \pi b^2 \Delta y - \pi x^2 \Delta y$

$$= \pi b^2 \Delta y - \pi (f^{-1}(y))^2 \Delta y$$

$x = f^{-1}(y)$

$y = f(x)$

Volume total: $\pi \displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} b^2 - (f^{-1}(y))^2 \; dy$



Ce qu'il faut faire:

- Dessiner la région et l'axe de rotation
- Dessiner un élément d'aire
- Déterminer le rayon du disque et le rayon du trou
- Déterminer l'intégrale qui donne le volume
- Calculer l'intégrale

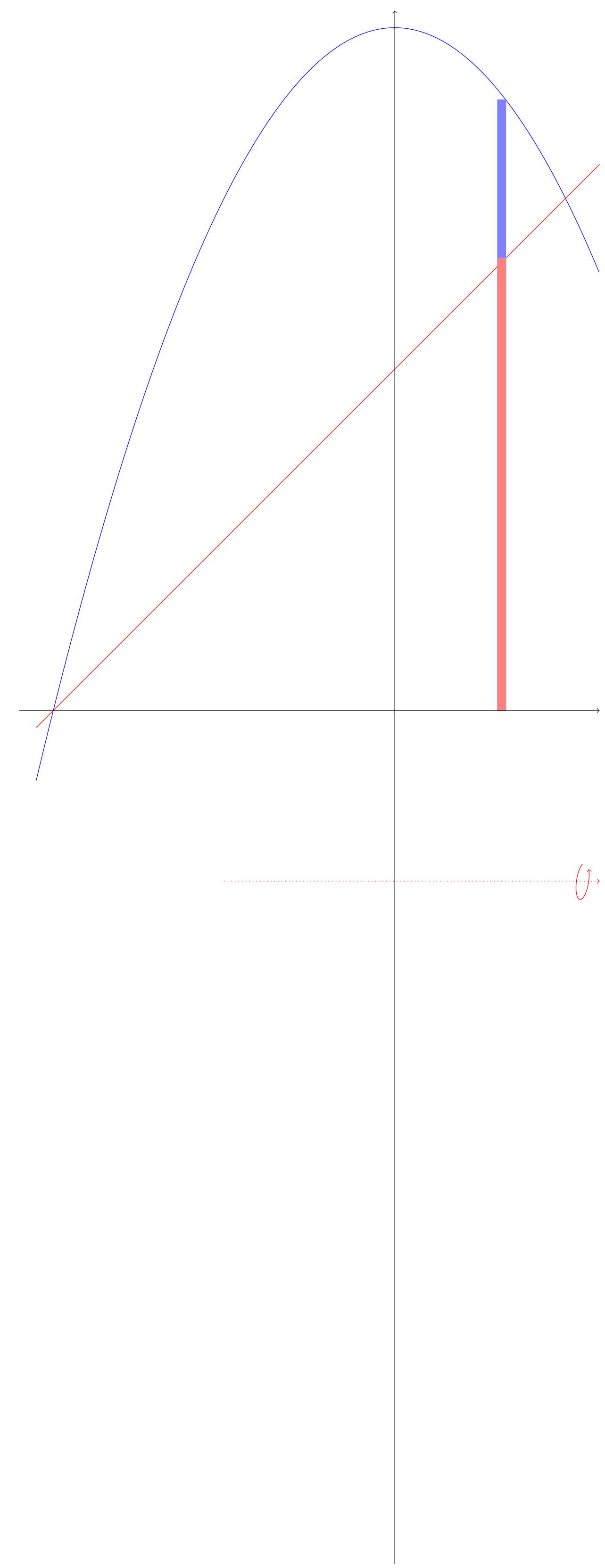
Faites les exercices suivants

Section 3 # 4

Exemple

Calculer le volume de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe de $y = -1$, la région entre les deux fonctions suivantes.

$f(x) = 4 - x^2 \qquad g(x) = x + 2$



commençons par trouver les points d'intersection

$$4 - x^2 = x + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

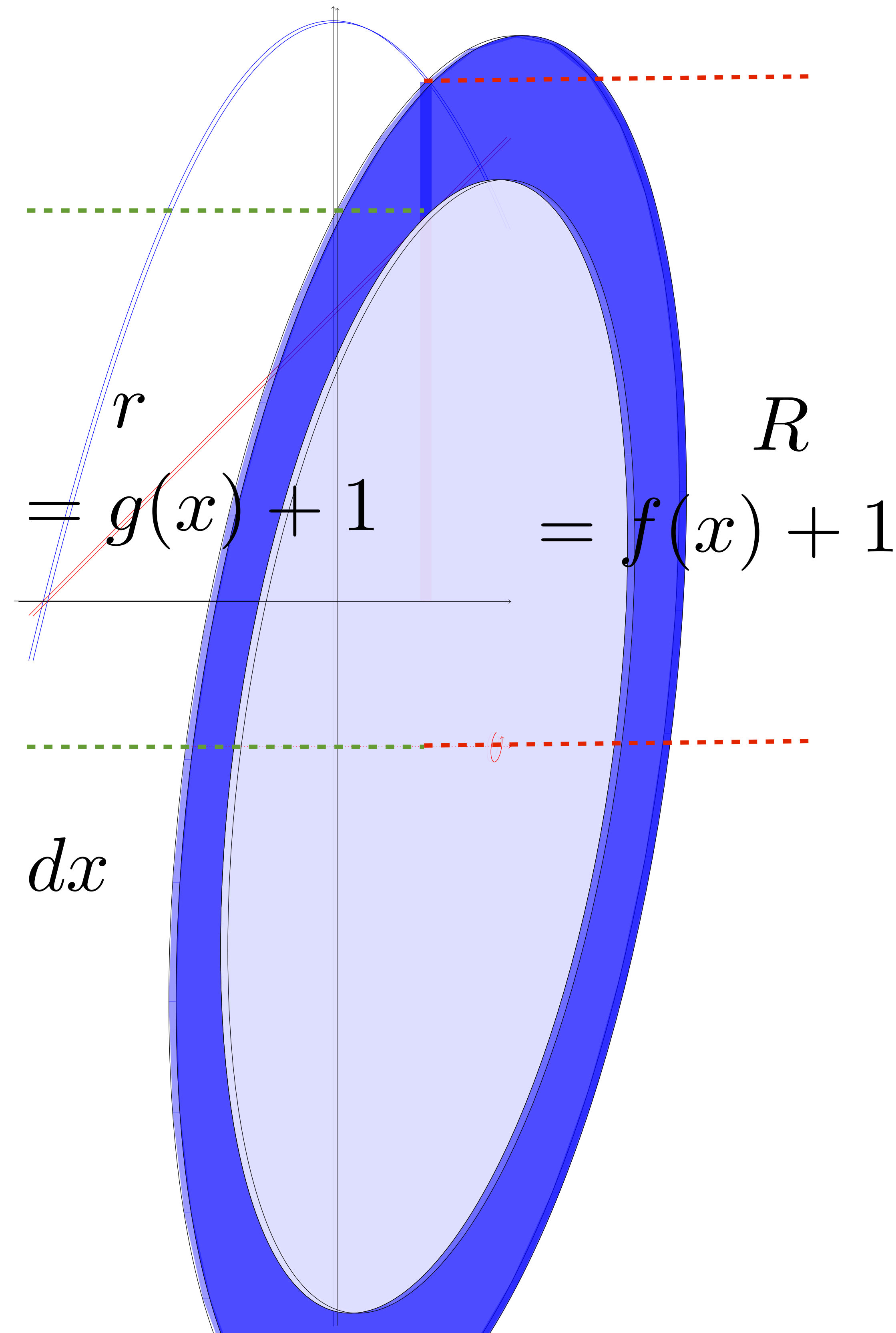
$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$\int_{-2}^{1} \pi R^2 - \pi r^2 \, dx$$

Exemple

Calculer le volume de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe de $y = -1$, la région entre les deux fonctions suivantes.

$$f(x) = 4 - x^2 \qquad g(x) = x + 2$$



$$\int_{-2}^{1} \pi R^2 - \pi r^2 \; dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \pi(f(x)+1)^2 - \pi(g(x)+1)^2 \; dx$$

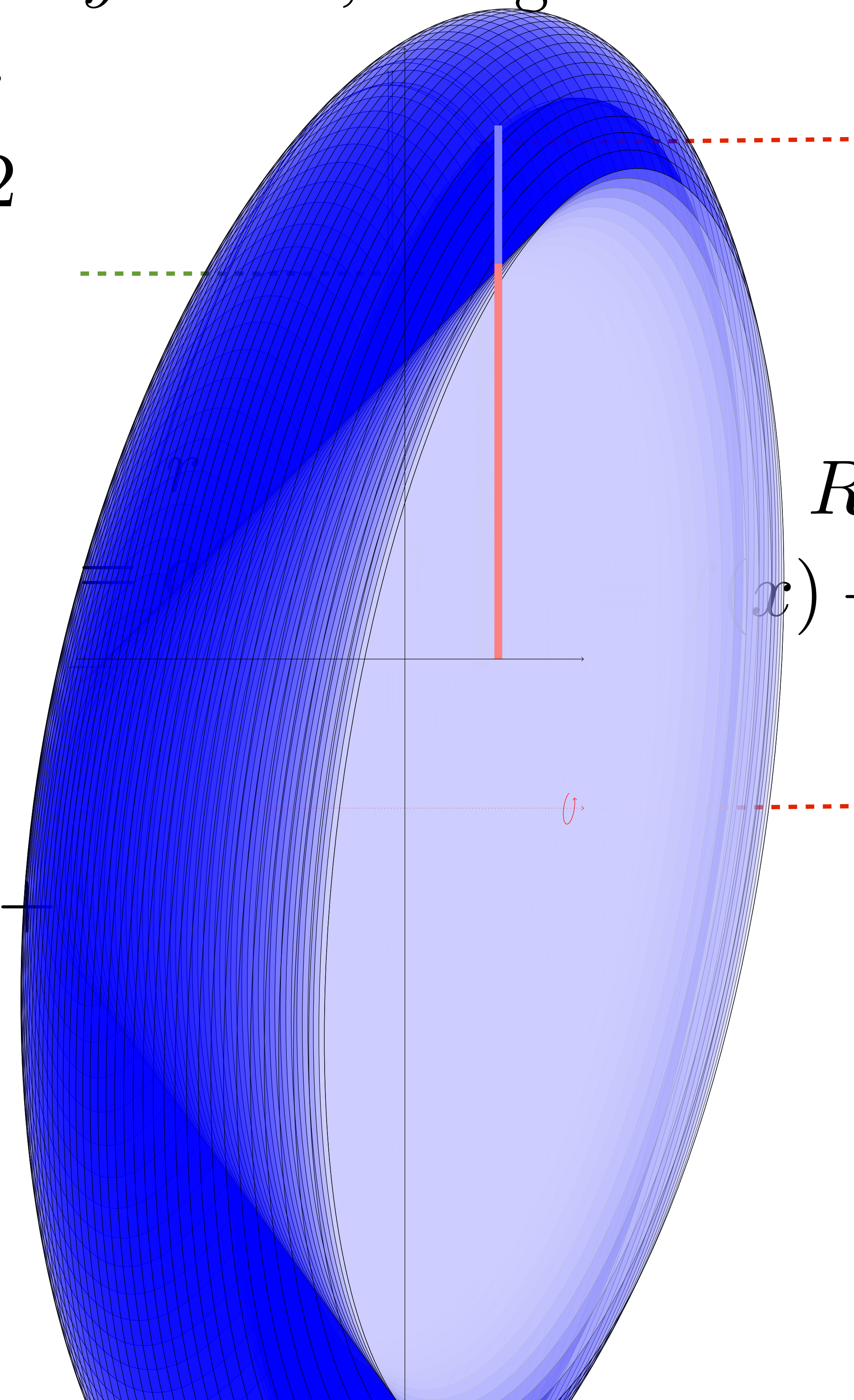
$$= \int_{-2}^{1} \pi(4 - x^2 + 1)^2 - \pi(x + 2 + 1)^2 \; dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{1} (5 - x^2)^2 - (x+3)^2 \; dx$$

Exemple

Calculer le volume de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe de $y = -1$, la région entre les deux fonctions suivantes.

$$f(x) = 4 - x^2 \qquad g(x) = x + 2$$



$$\int_{-2}^{1} \pi R^2 - \pi r^2 \; dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{1} (5 - x^2)^2 - (x+3)^2 \; dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{1} x^4 - 10x^2 + 25 - (x^2 + 6x +$$

$$= \pi \int_{-2}^{1} x^4 - 9x^2 - 6x + 16 \; dx$$

$$= \dots$$

Faites les exercices suivants

Section 3 # 5

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Calculer le volume d'un solide de révolution

avec la méthode des disques.

Devoir: Section 3.1