3.3 LONGUEUR D'ARC ET AIRE DE SURFACE

cours 18

Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

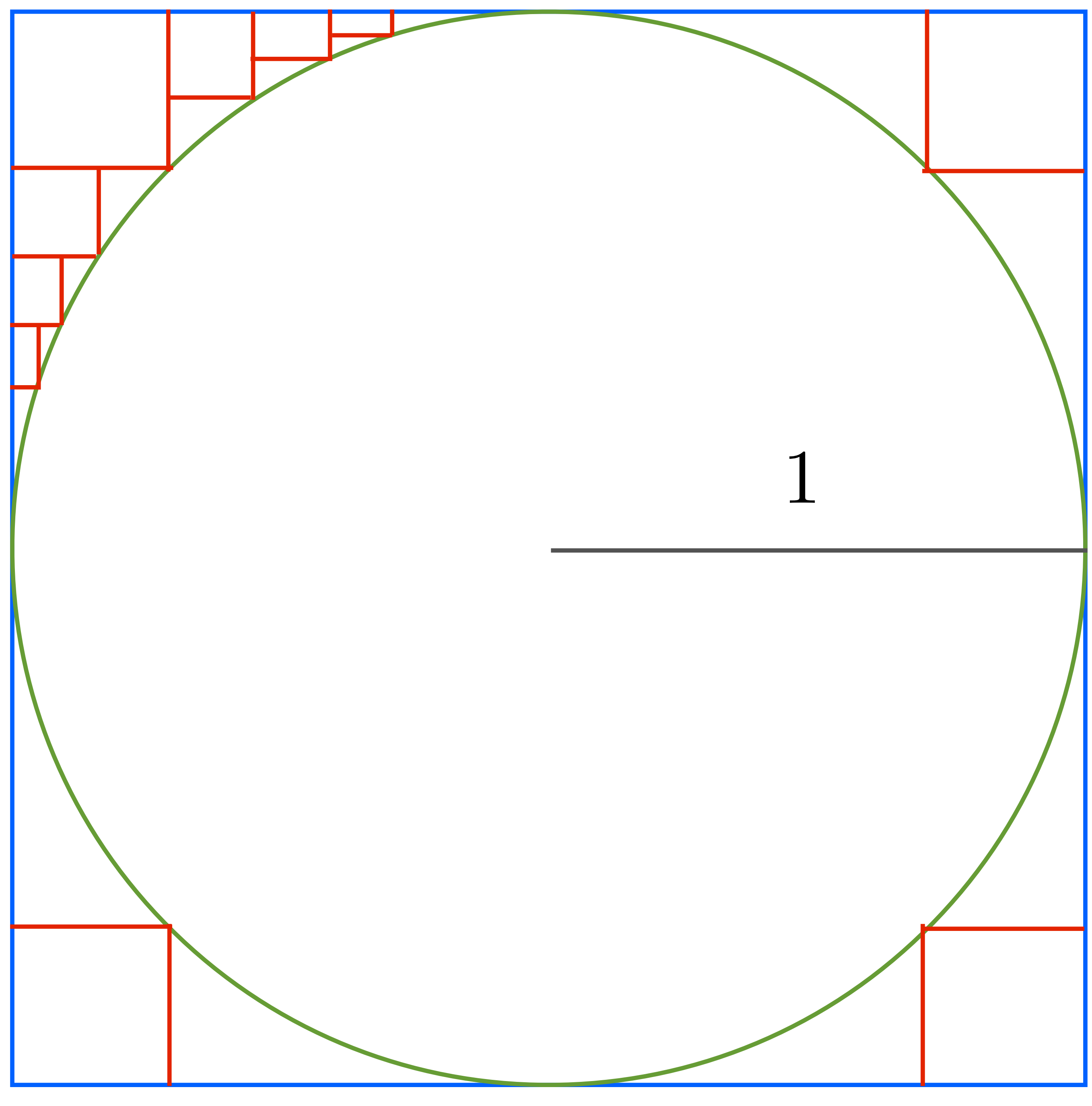
- ✓ Volume de solide de révolution à l'aide de la méthode des tubes.

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Longueur d'arc
- ✓ Aire d'une surface de révolution

Supposons qu'on veuille approximer la circonférence d'un cercle de rayon 1

$$\pi = 4 \quad !?!$$



Le problème avec cette approche est dû au fait que notre découpage ne change pas lorsqu'on le raffine.

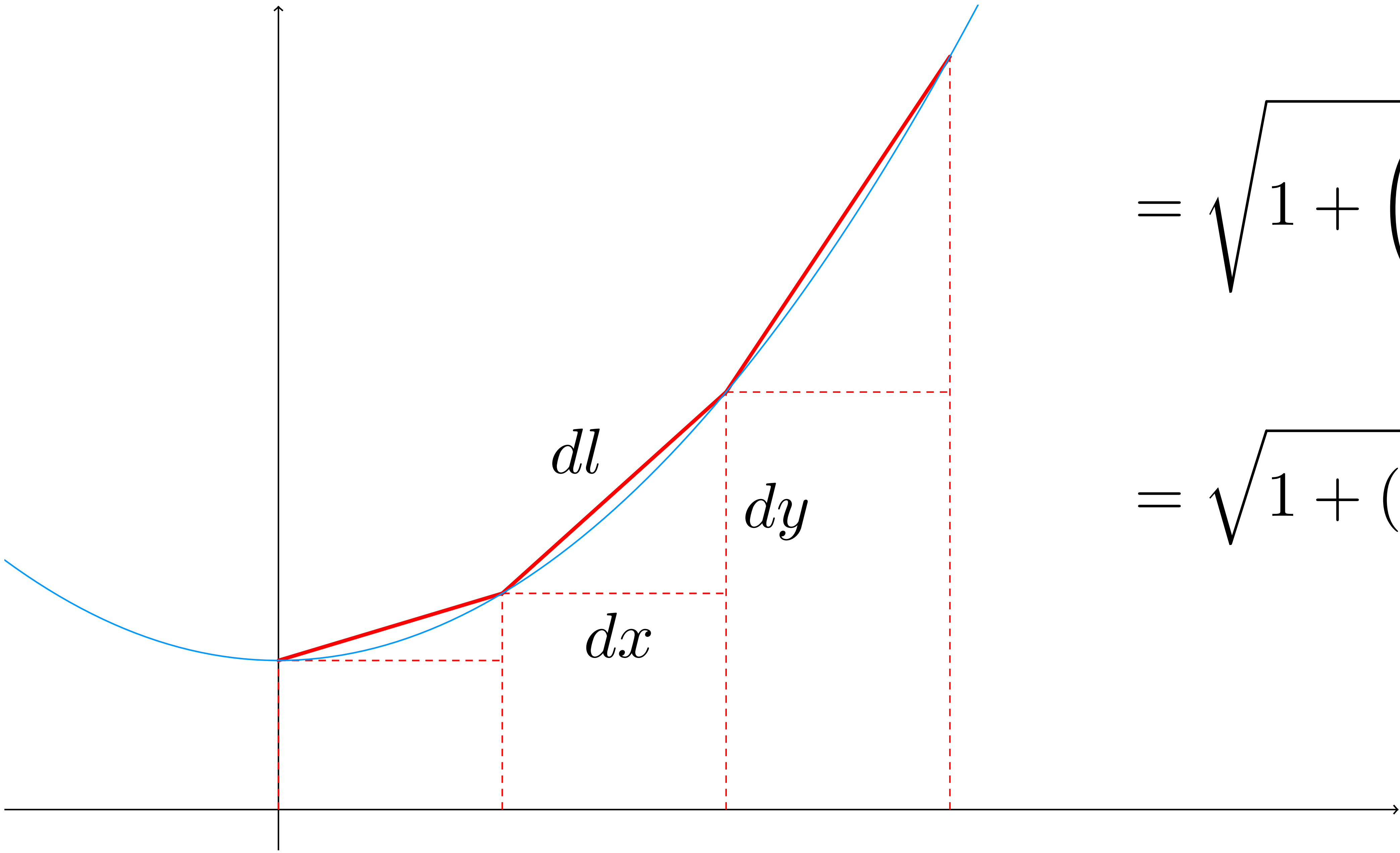
$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\ dx$$

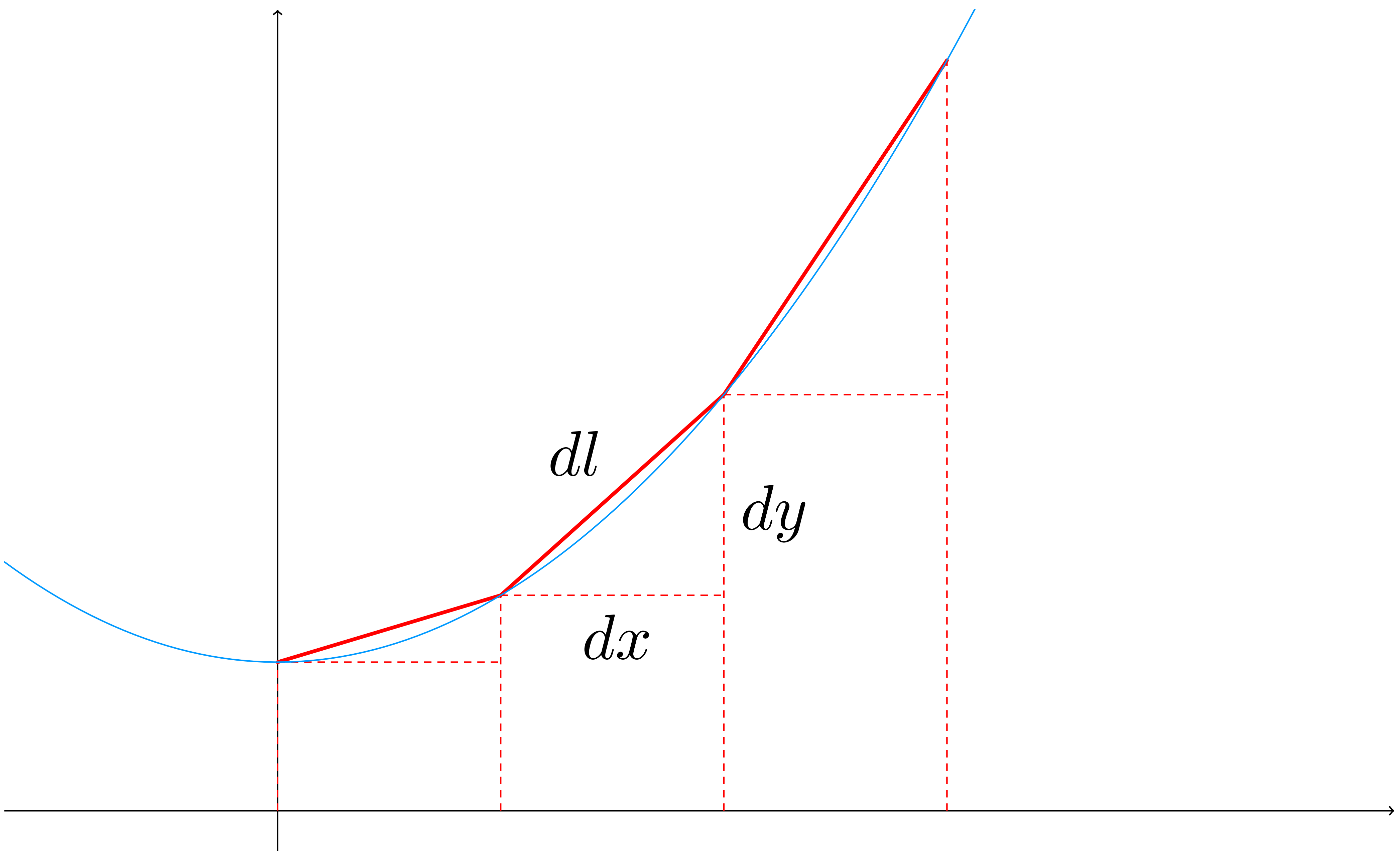
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$= \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ dx$$



$$dl = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

$$L = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$



Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par
$f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \quad = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}\right)}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}}\ dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\ dx = \int_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ dx$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1} - e}{2} = e - \frac{1}{e}$$

Faites les exercices suivants

Section 3 # 11, 12, 13

Courbe paramétrique

$$x = f(t) \qquad\qquad (x, y) = (f(t), g(t))$$

$$y = g(t)$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad = \sqrt{dt^2 \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} \right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt$$

$$= \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

$$L = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

Exemple

$$x(\theta) = \cos\theta \qquad y(\theta) = \sin\theta$$

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Circonférence d'un cercle de rayon 1 est

$$\text{Circ} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos'\theta)^2 + (\sin'\theta)^2}\ d\theta$$

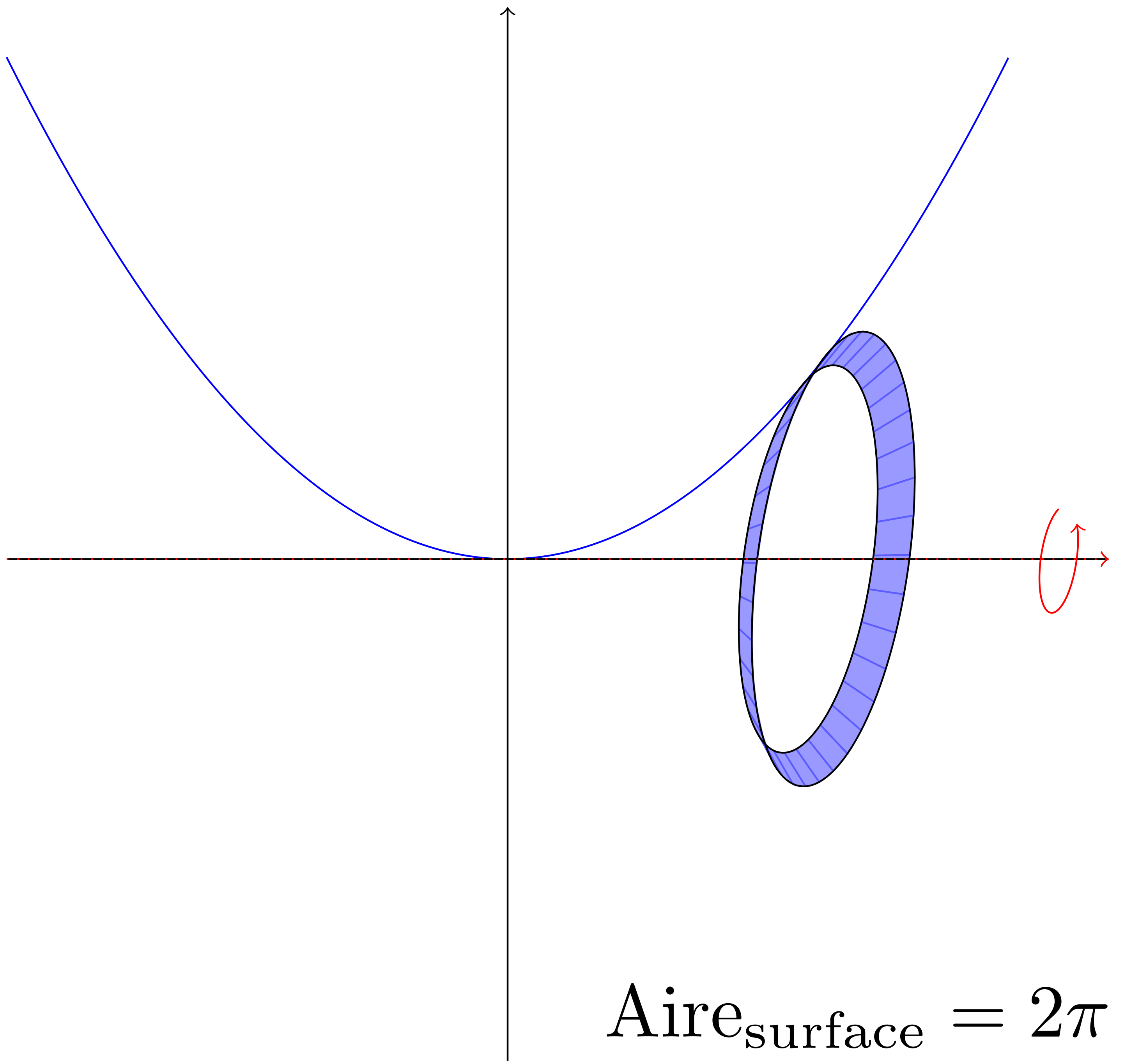
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2}\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}\ d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \ = \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Faites les exercices suivants

Section 3 # 14, 15

$$\text{Aire}_{\text{bande}} = 2\pi R \Delta l \ = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$



$$\text{Aire}_{\text{surface}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Exemple Calculer l'aire de la sphère.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\begin{aligned}
\text{Aire} = 2\int_0^r 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ dx \\
= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\ dx \\
= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\ dx \\
= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\ dx = 4\pi \int_0^r r\ dx = 4\pi r^2
\end{aligned}$$

Faites les exercices suivants

Section 3 # 16, 18

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Longueur d'arc
- ✓ Aire d'une surface de révolution

Devoir: Section 3.3