

3.3 LONGUEUR D'ARC ET AIRE DE SURFACE

cours 18

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Volume de solide de révolution à l'aide de la méthode des tubes.

Aujourd'hui, nous allons voir

Aujourd'hui, nous allons voir

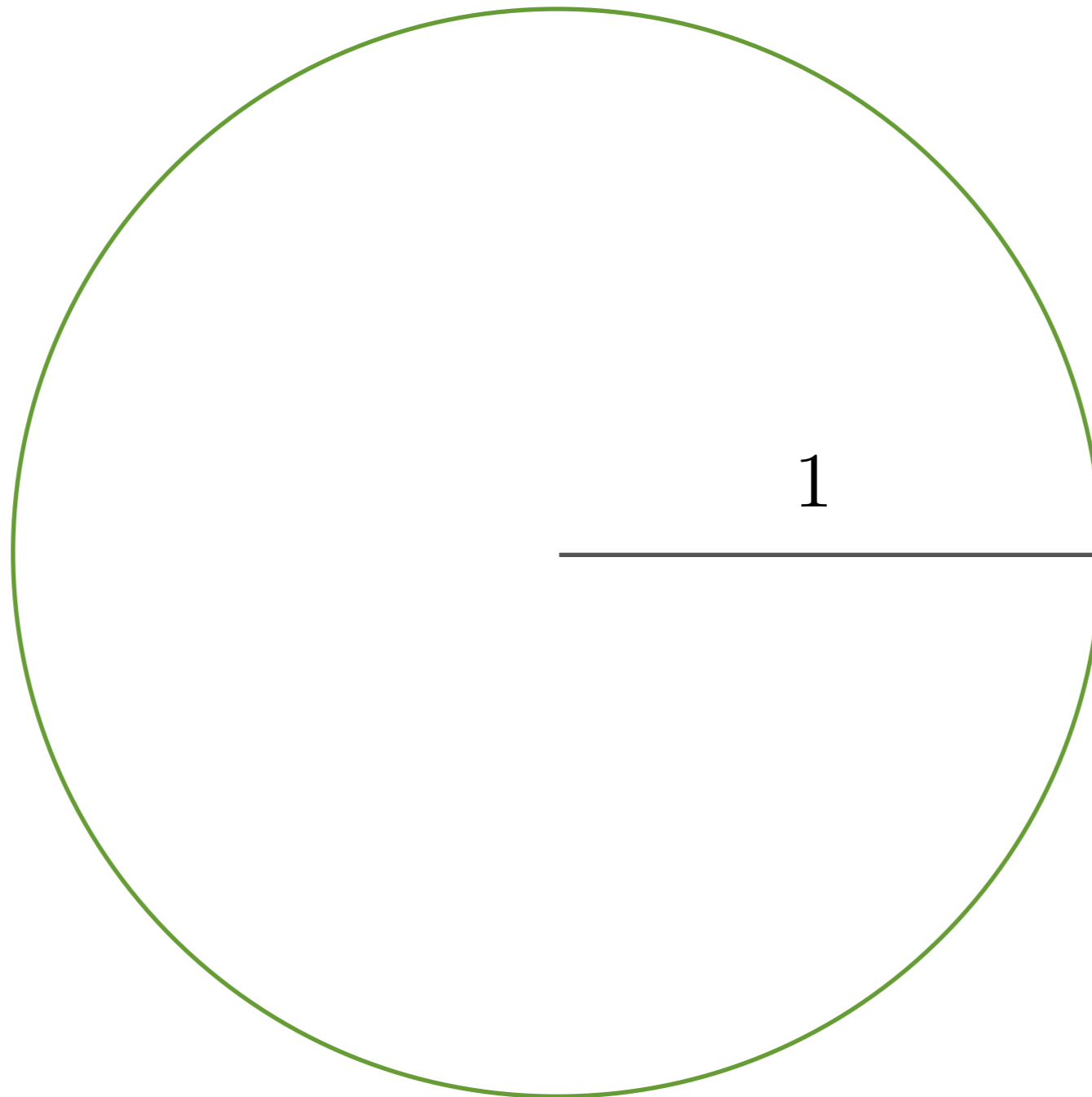
- ✓ Longueur d'arc

Aujourd'hui, nous allons voir

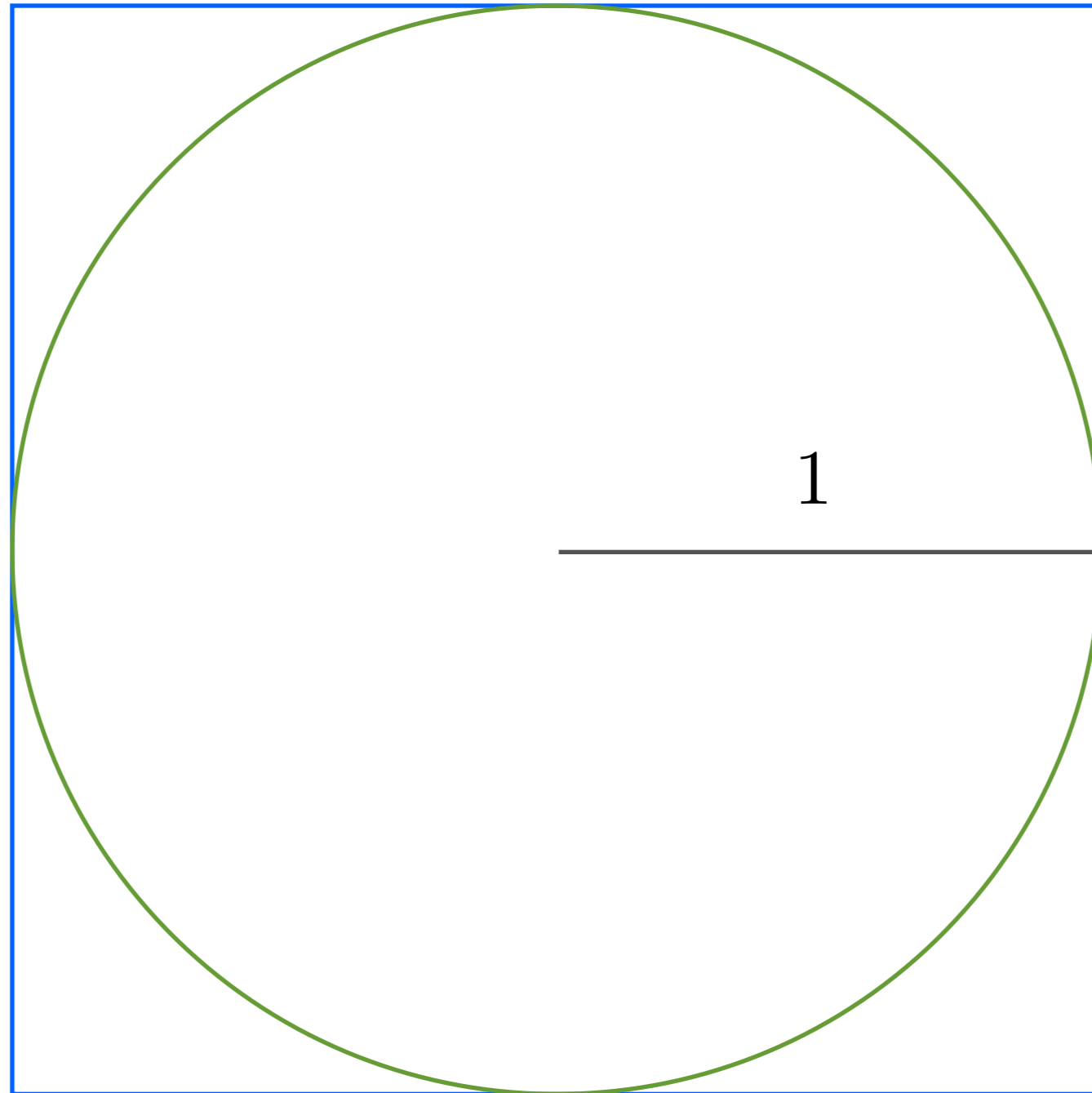
- ✓ Longueur d'arc
- ✓ Aire d'une surface de révolution

Supposons qu'on veuille approximer la
circonférence d'un cercle de rayon 1

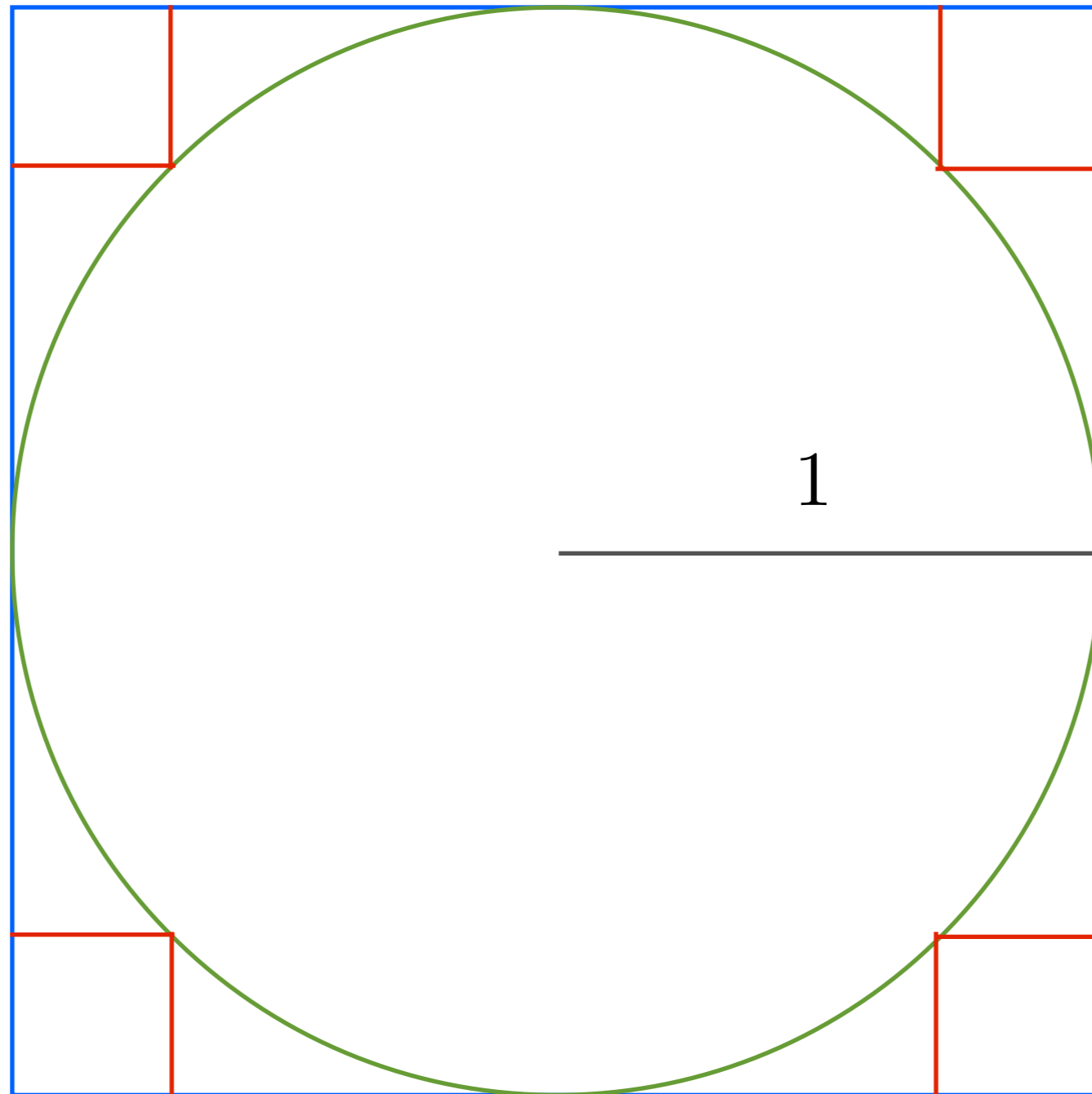
Supposons qu'on veuille approximer la
circonférence d'un cercle de rayon 1



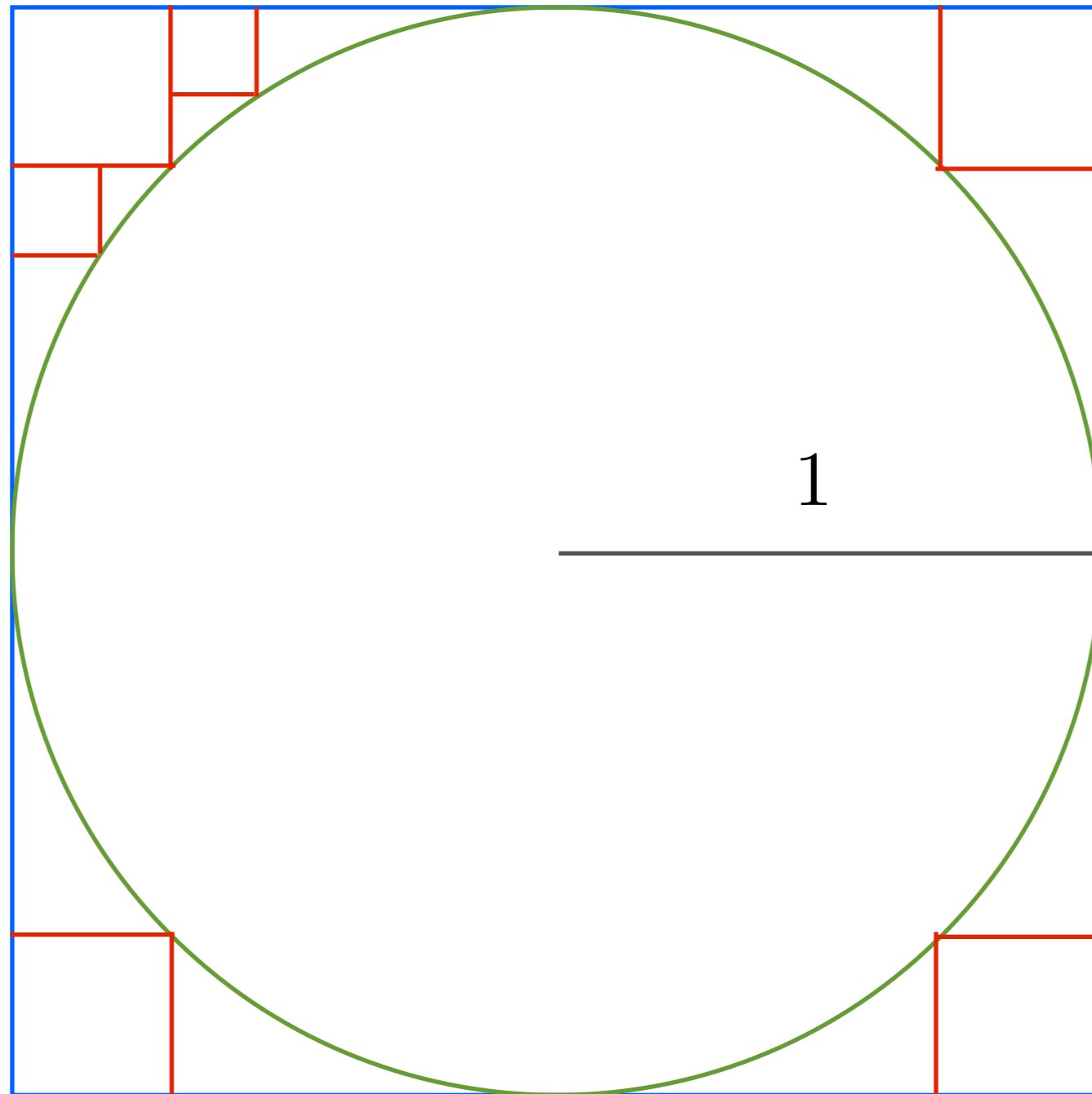
Supposons qu'on veuille approximer la
circonférence d'un cercle de rayon 1



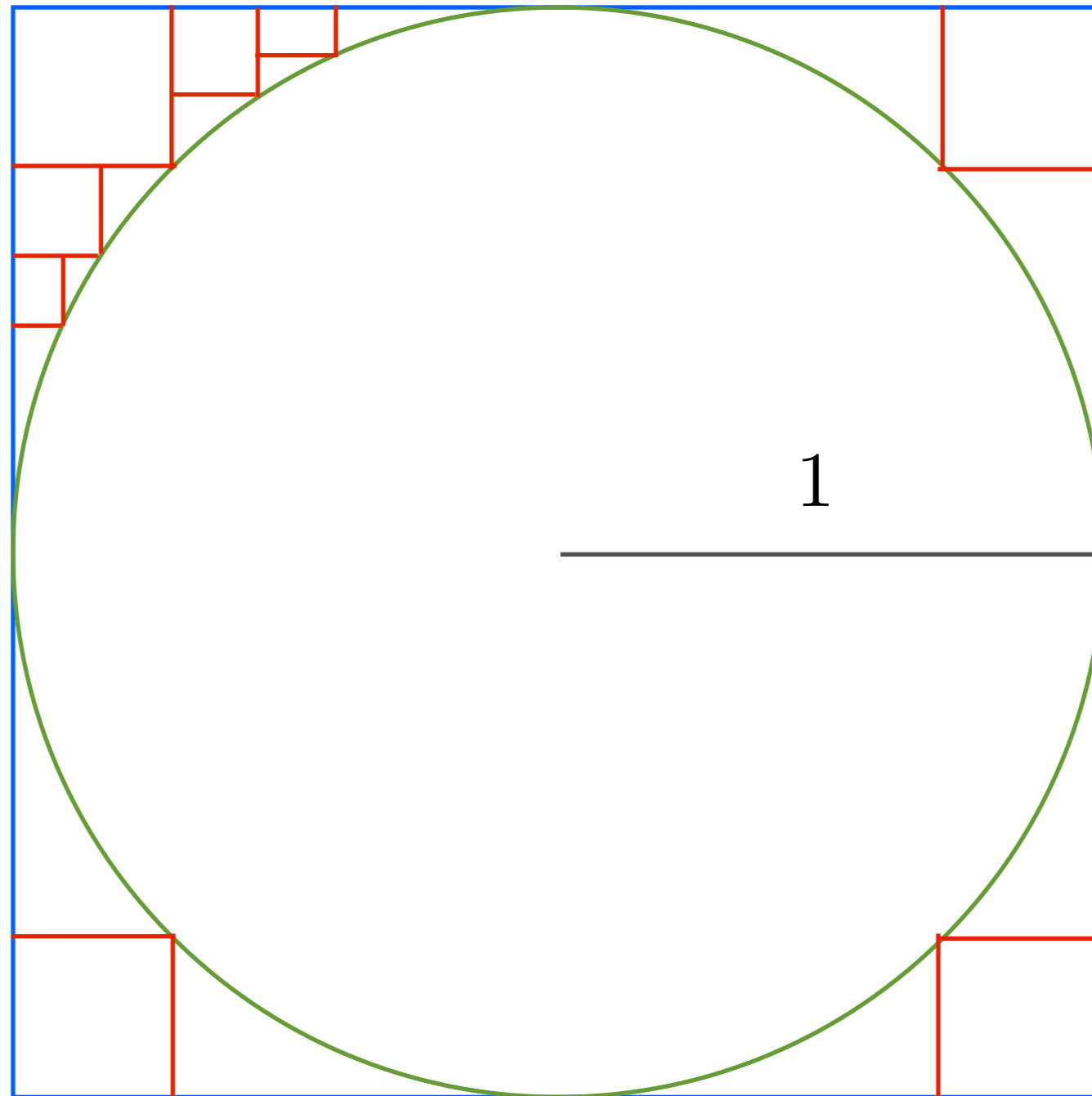
Supposons qu'on veuille approximer la
circonférence d'un cercle de rayon 1



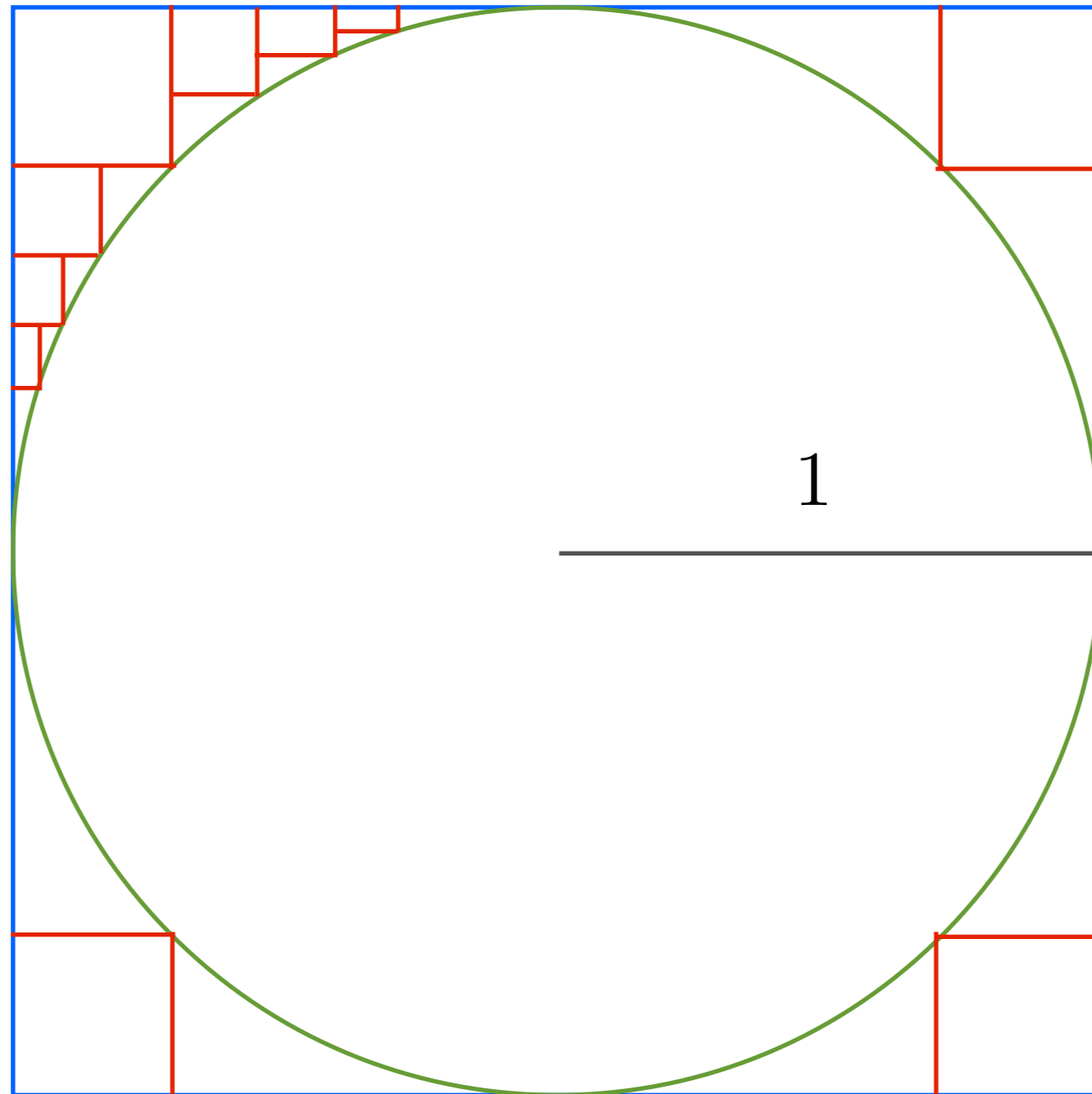
Supposons qu'on veuille approximer la
circonférence d'un cercle de rayon 1



Supposons qu'on veuille approximer la
circonférence d'un cercle de rayon 1

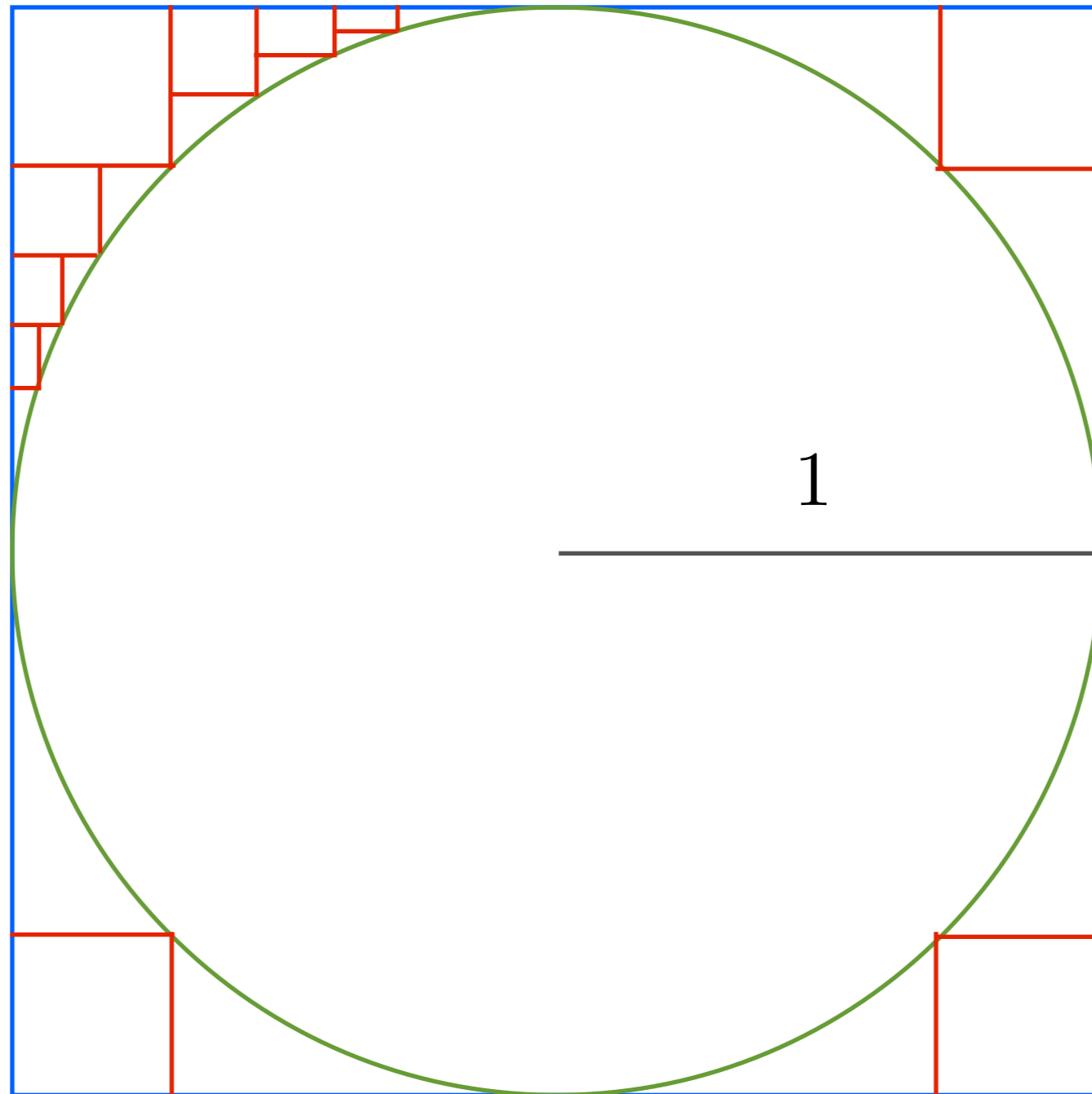


Supposons qu'on veuille approximer la
circonférence d'un cercle de rayon 1



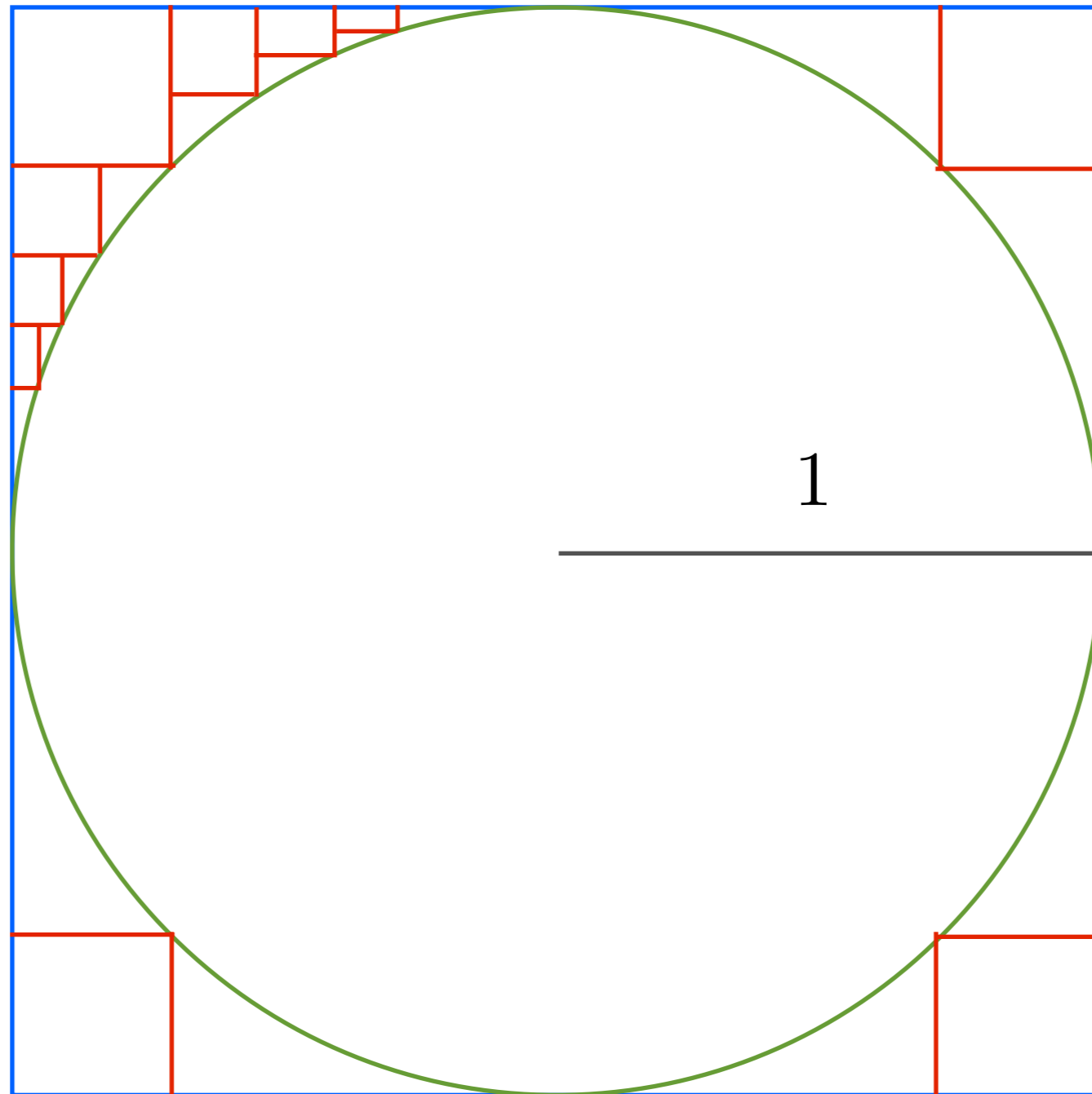
Supposons qu'on veuille approximer la
circonférence d'un cercle de rayon 1

$$\pi = 4 \quad !?!$$

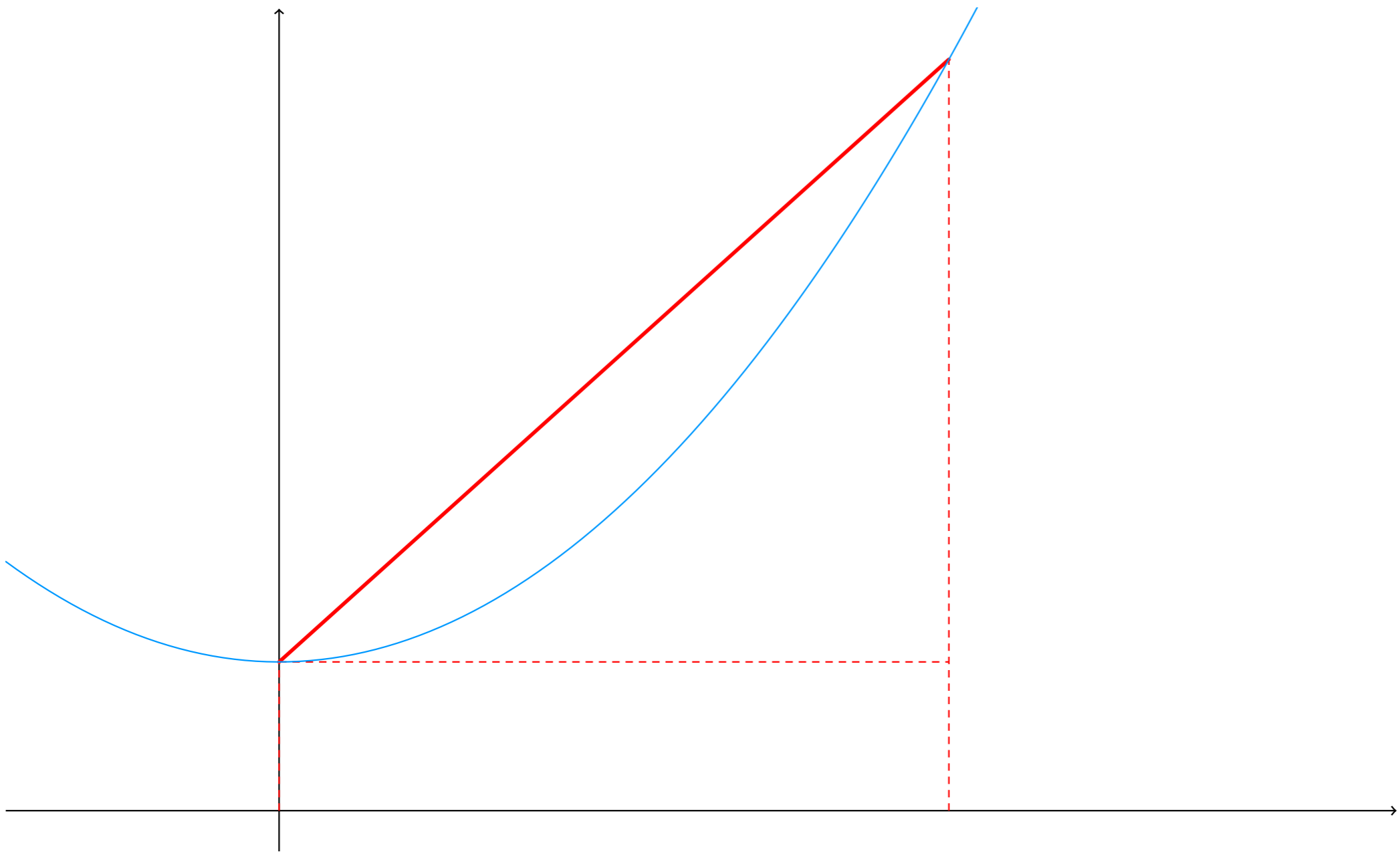


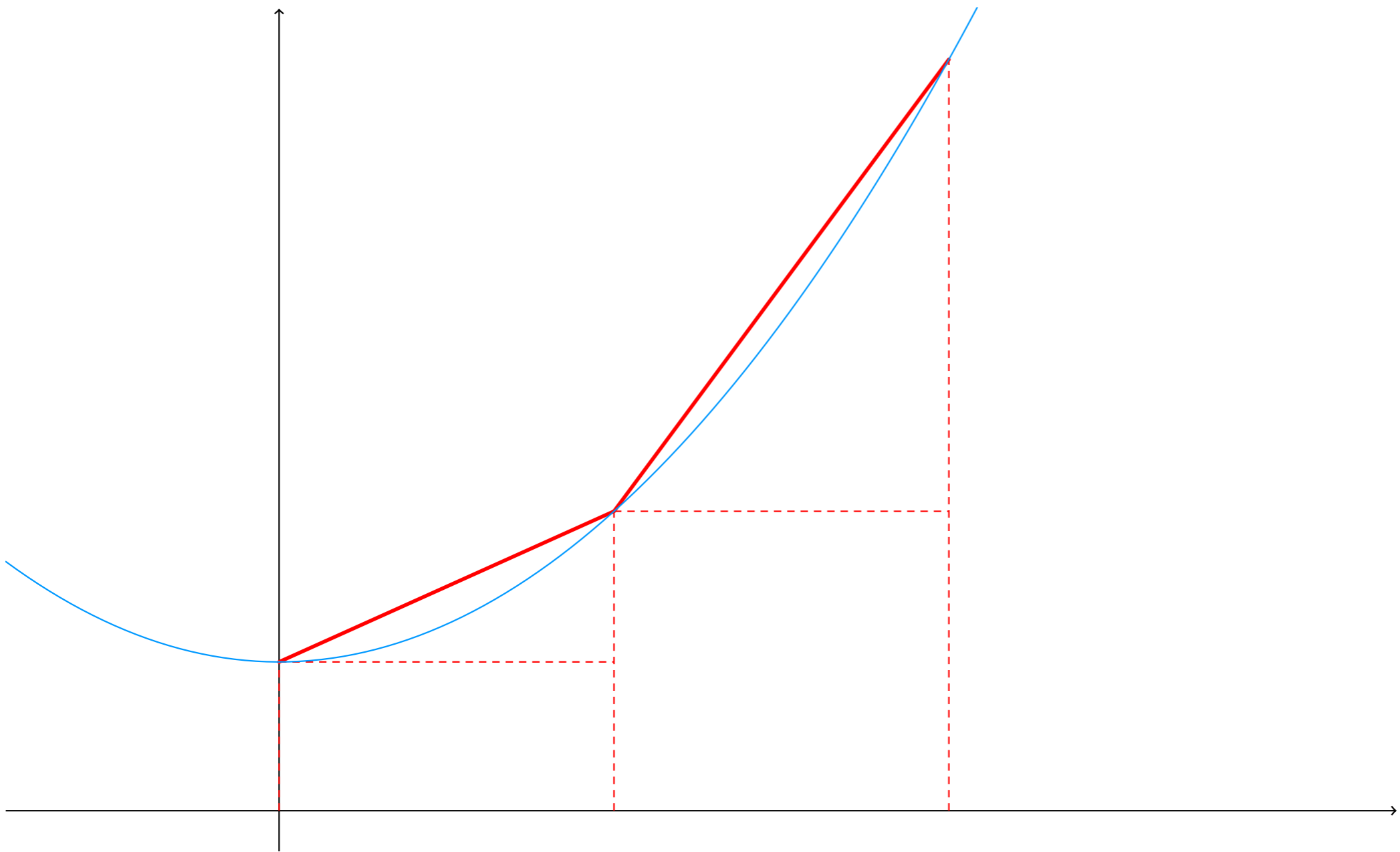
Supposons qu'on veuille approximer la
circonférence d'un cercle de rayon 1

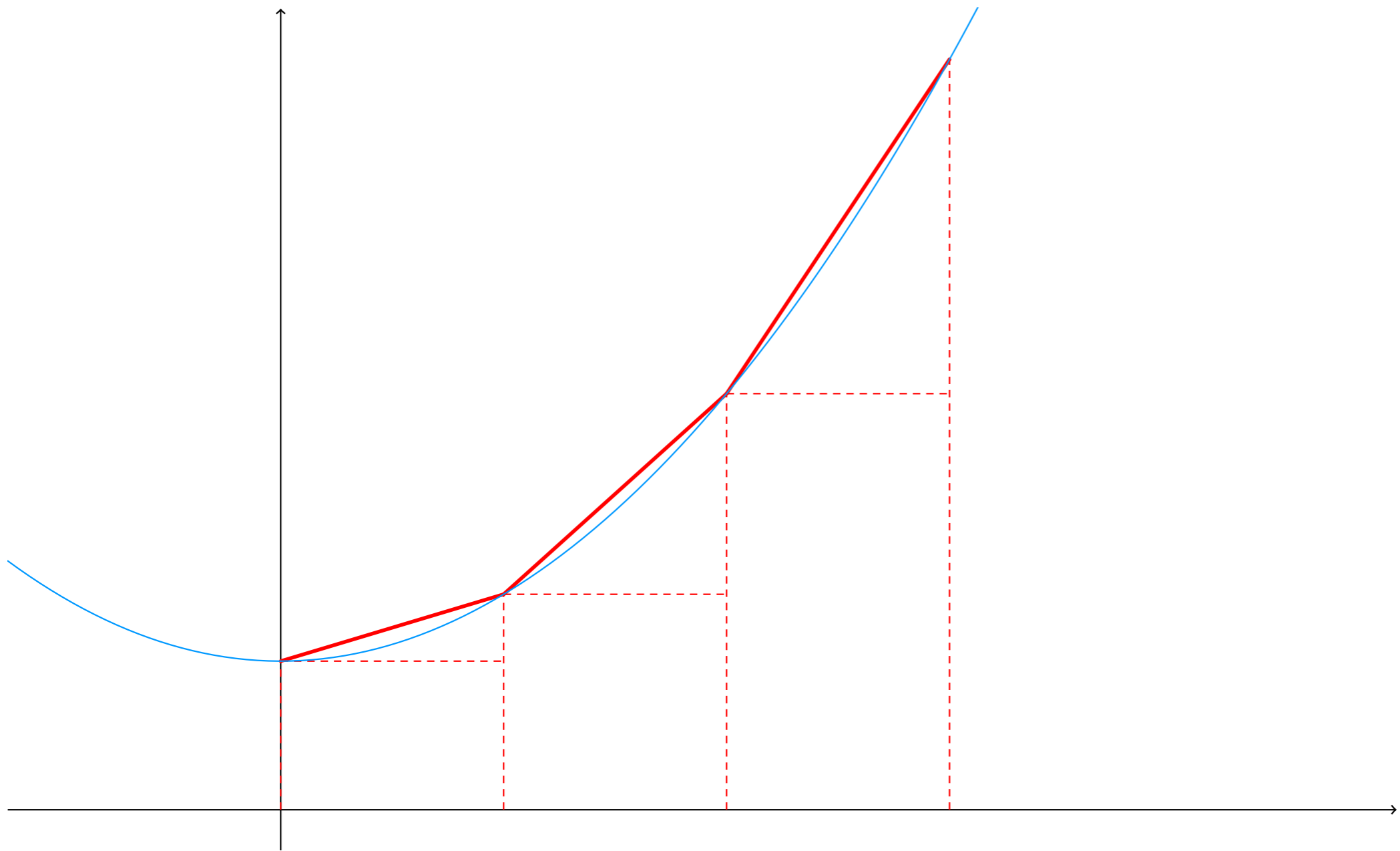
$$\pi = 4 \quad !?!$$

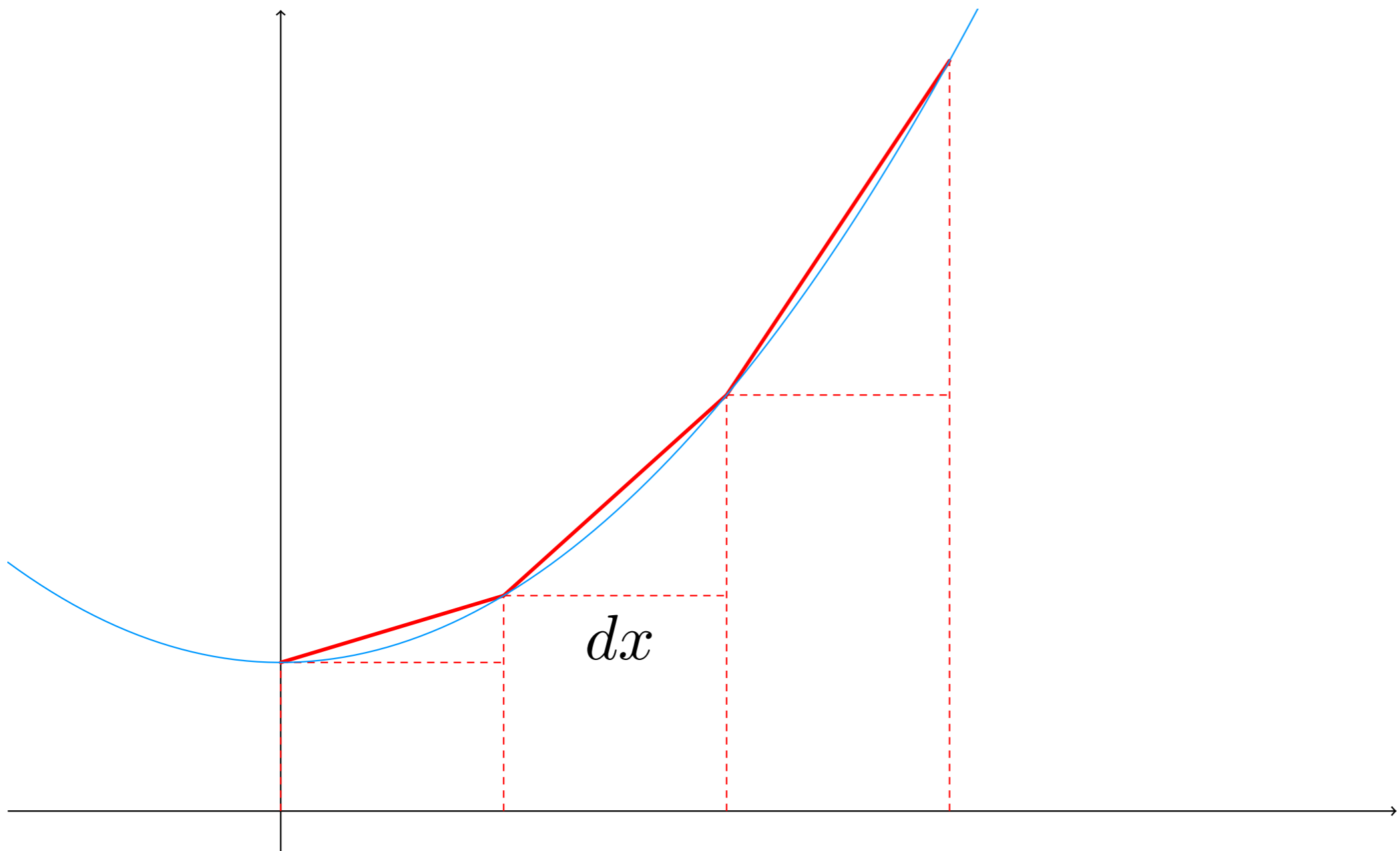


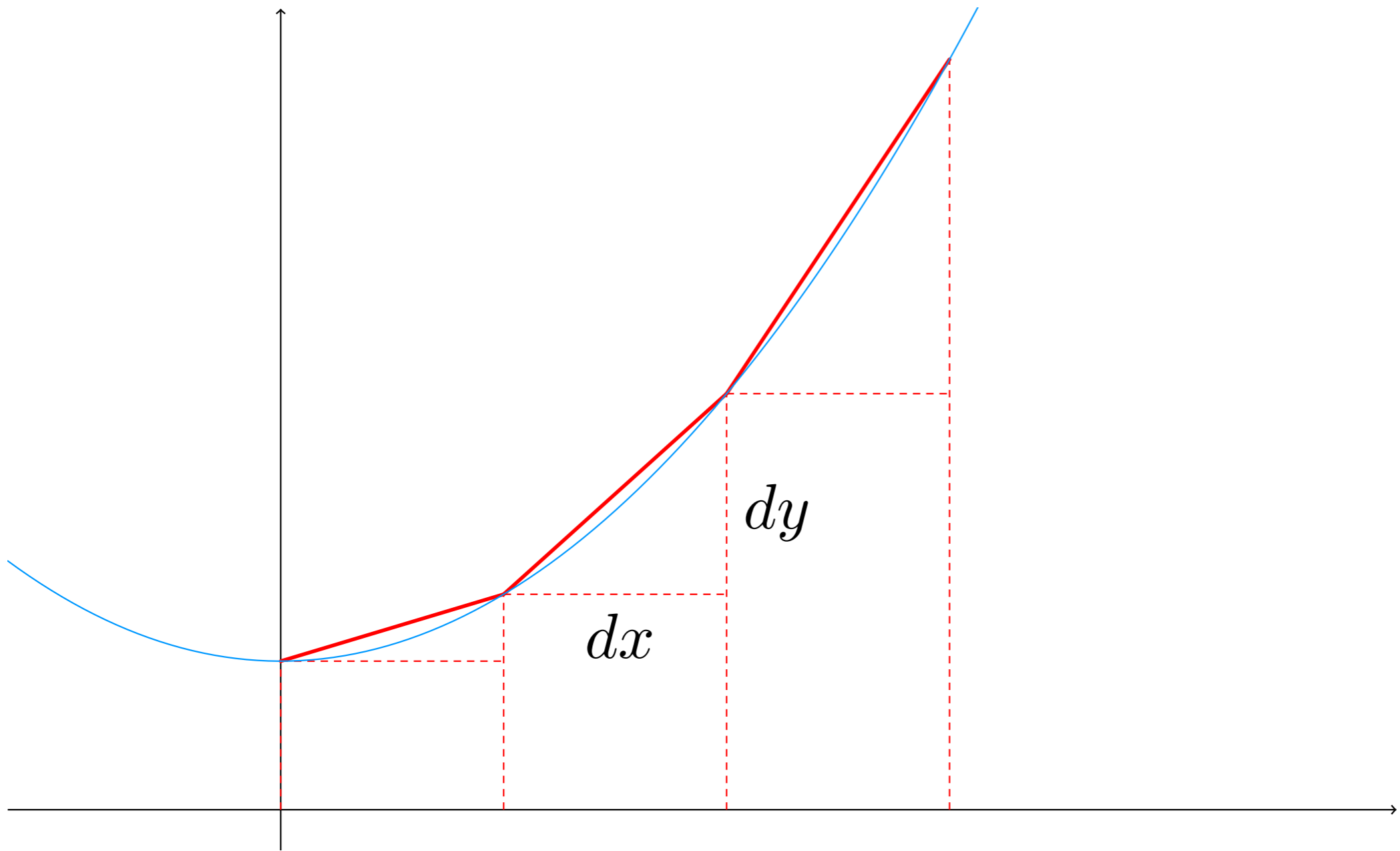
Le problème avec cette approche est dû au fait que notre découpage
ne change pas lorsqu'on le raffine.

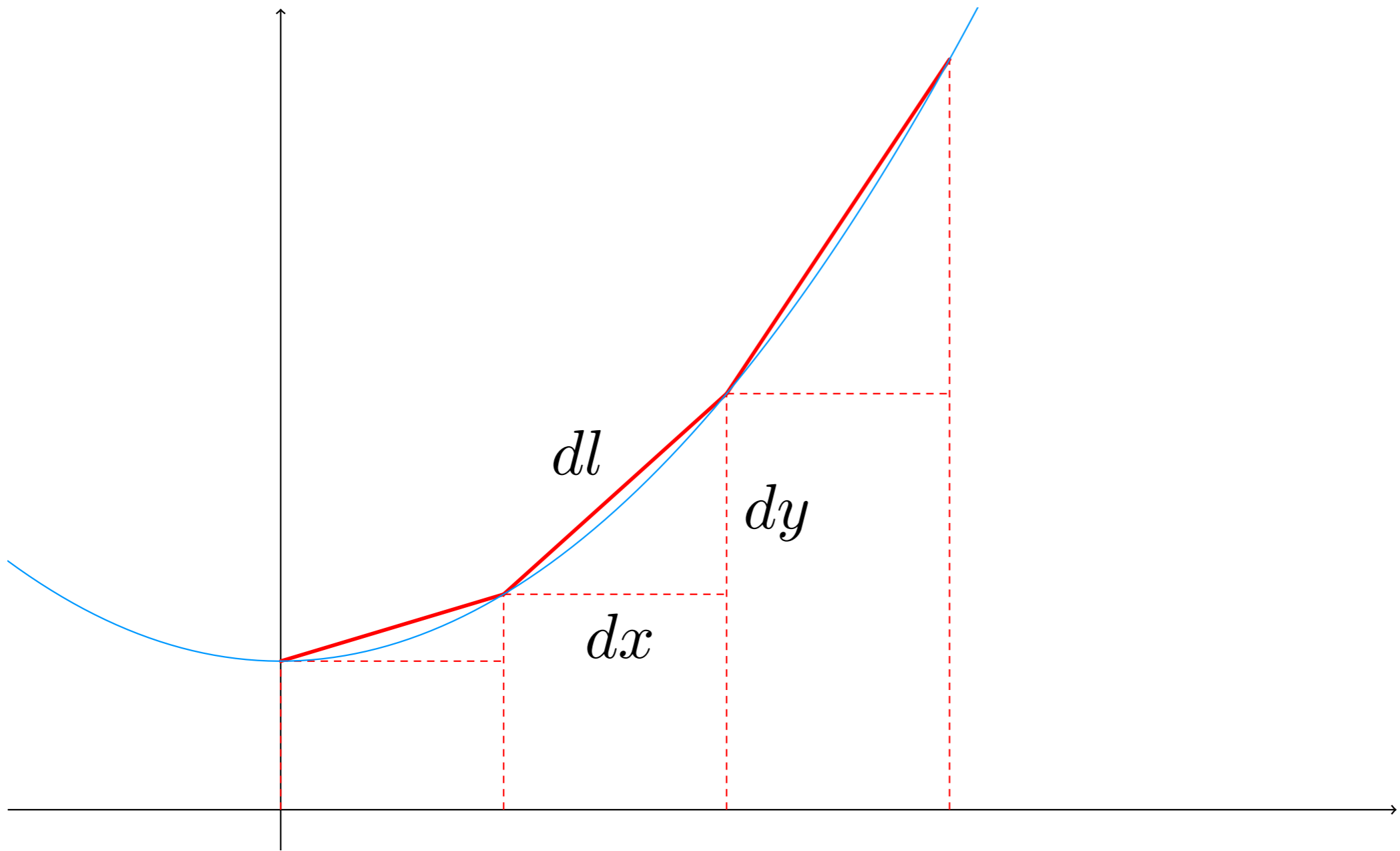




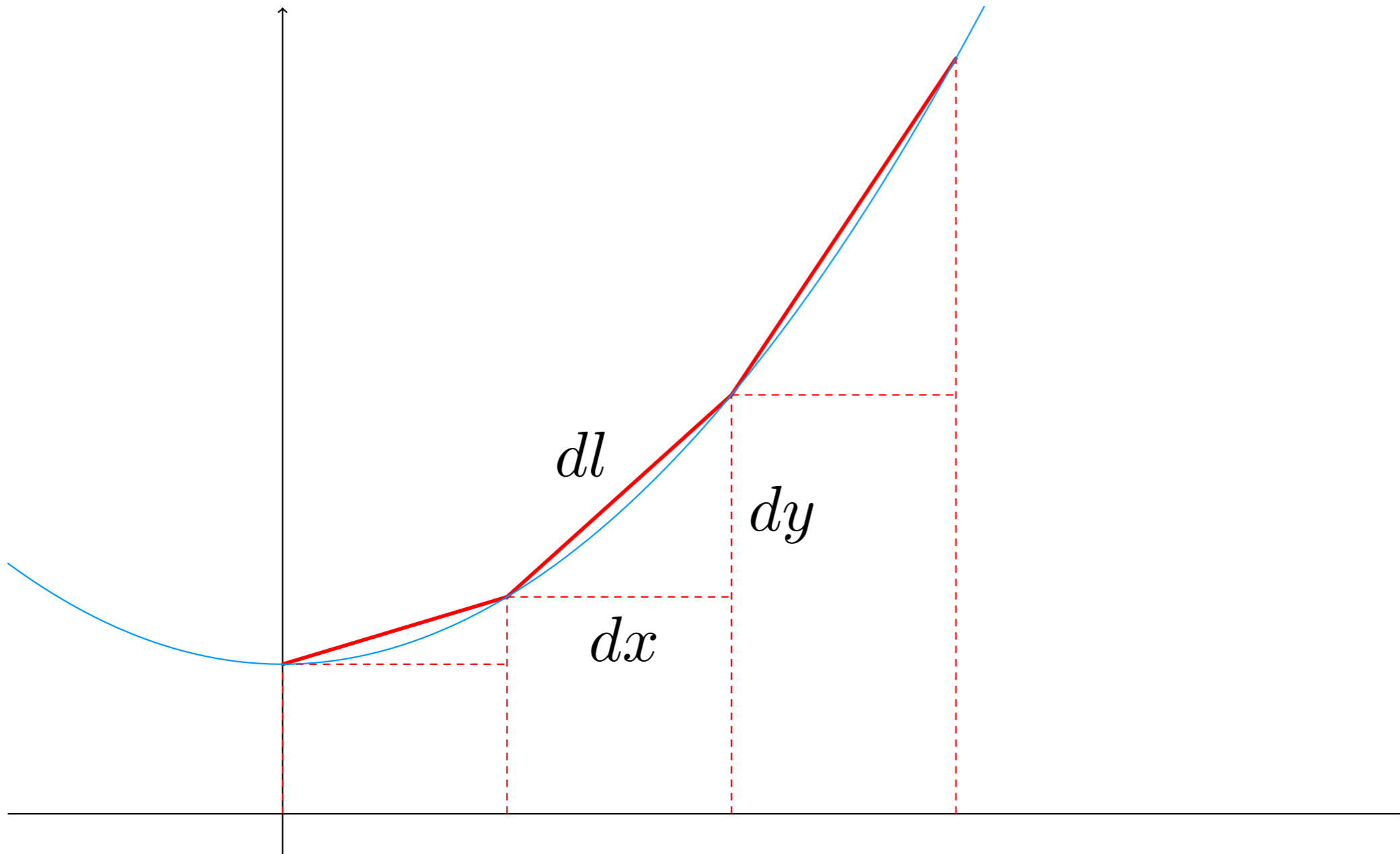




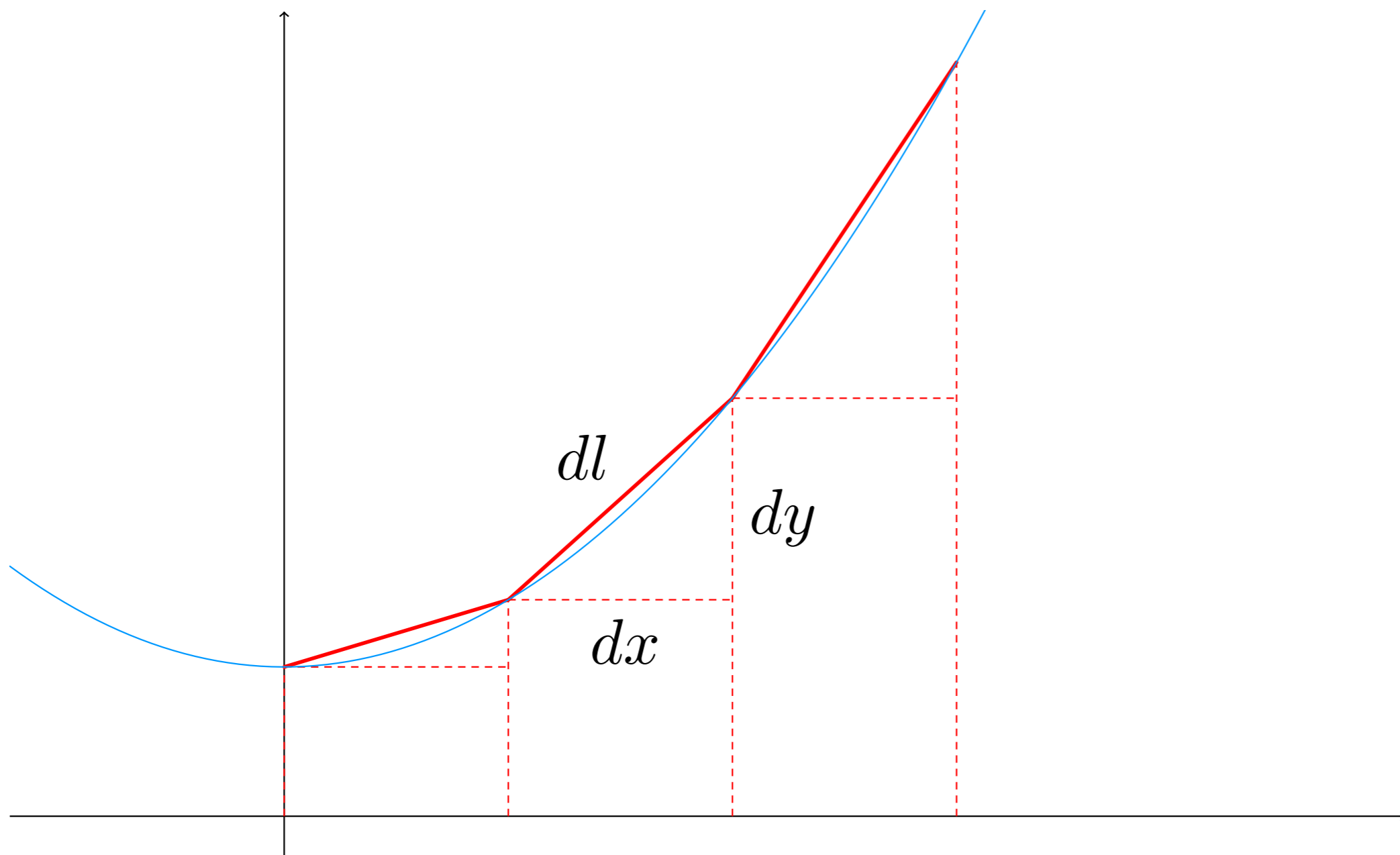




$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

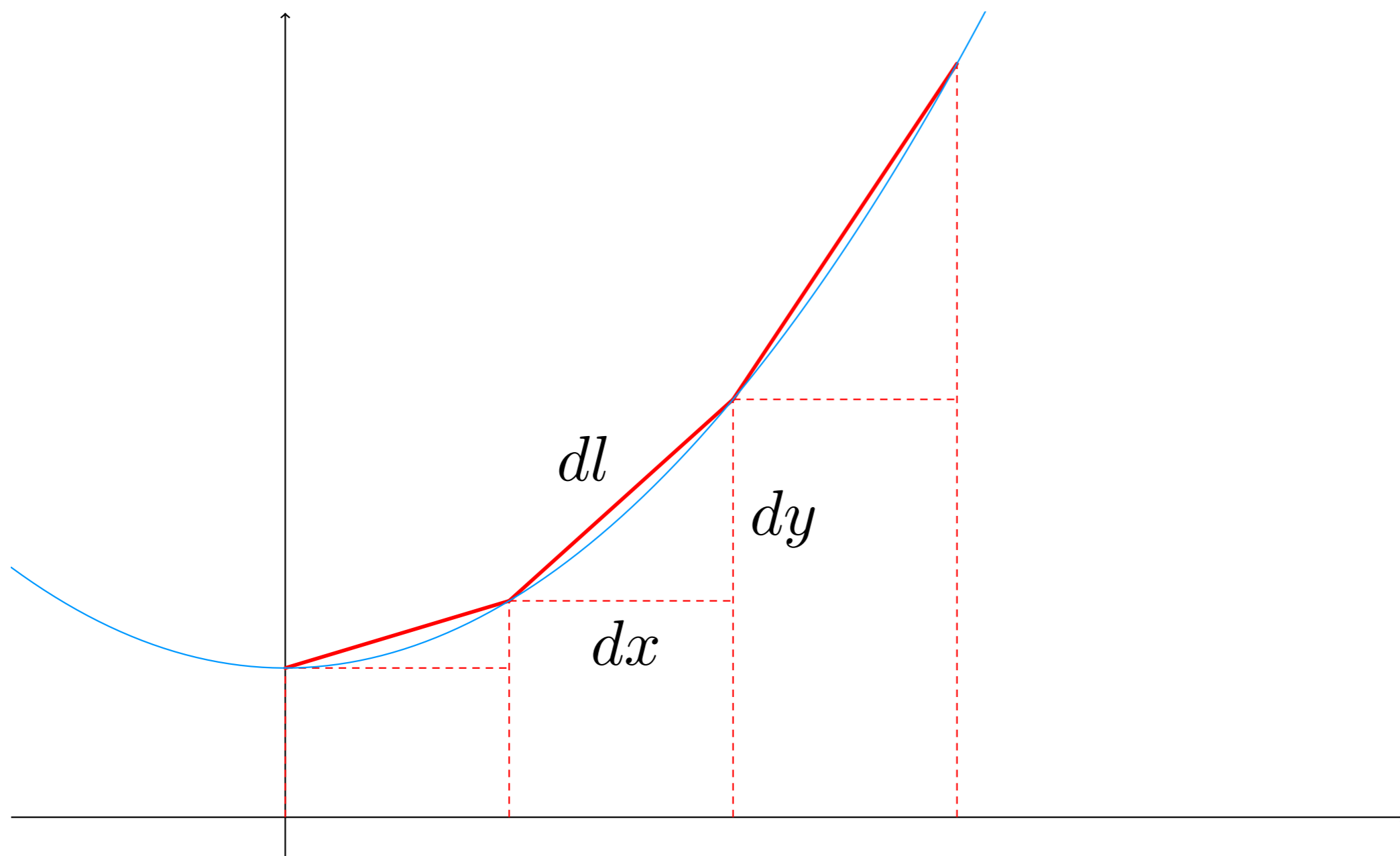


$$dl^2 = dx^2 + dy^2 \quad dl$$



$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

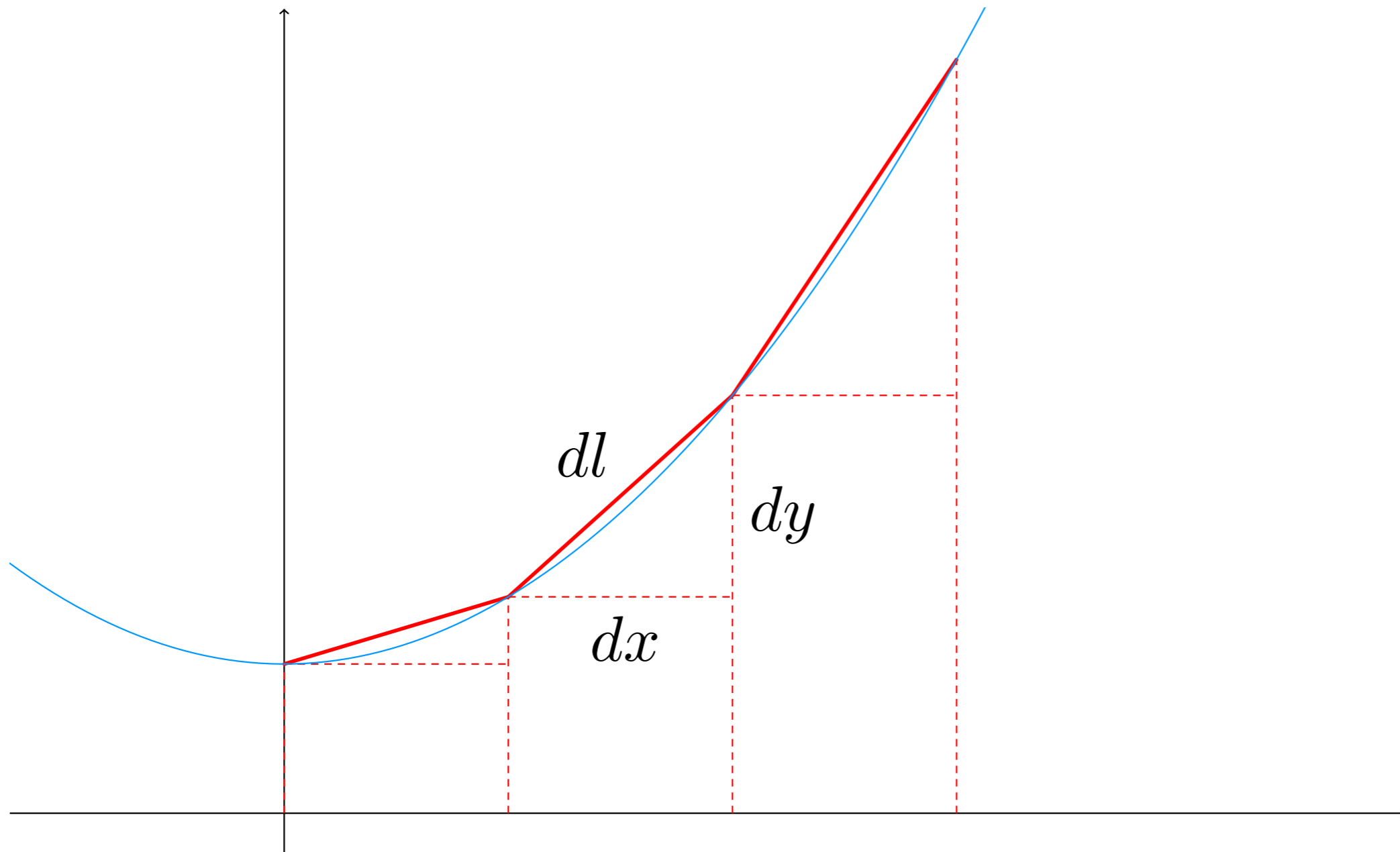
$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$



$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right)}$$

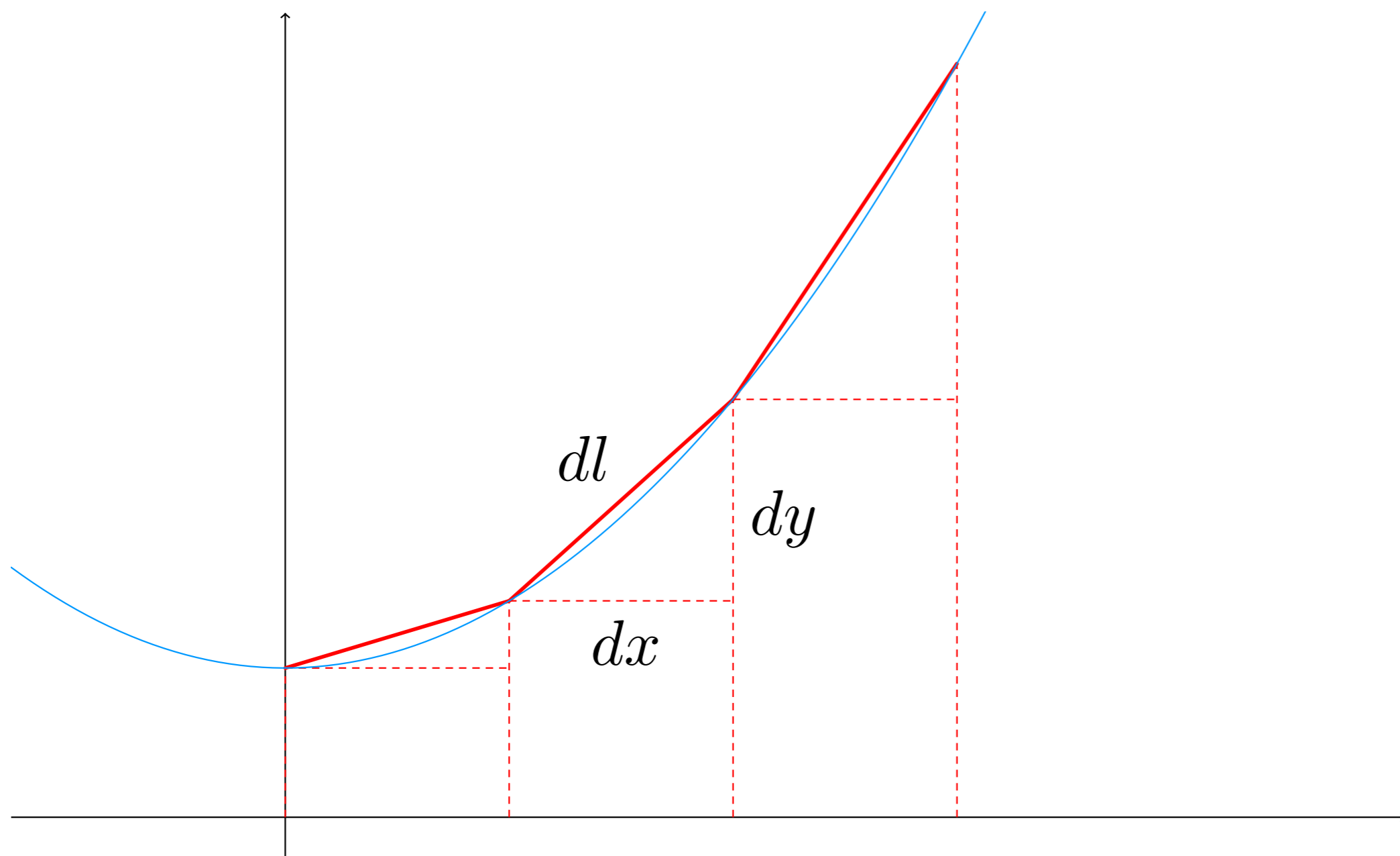


$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$$



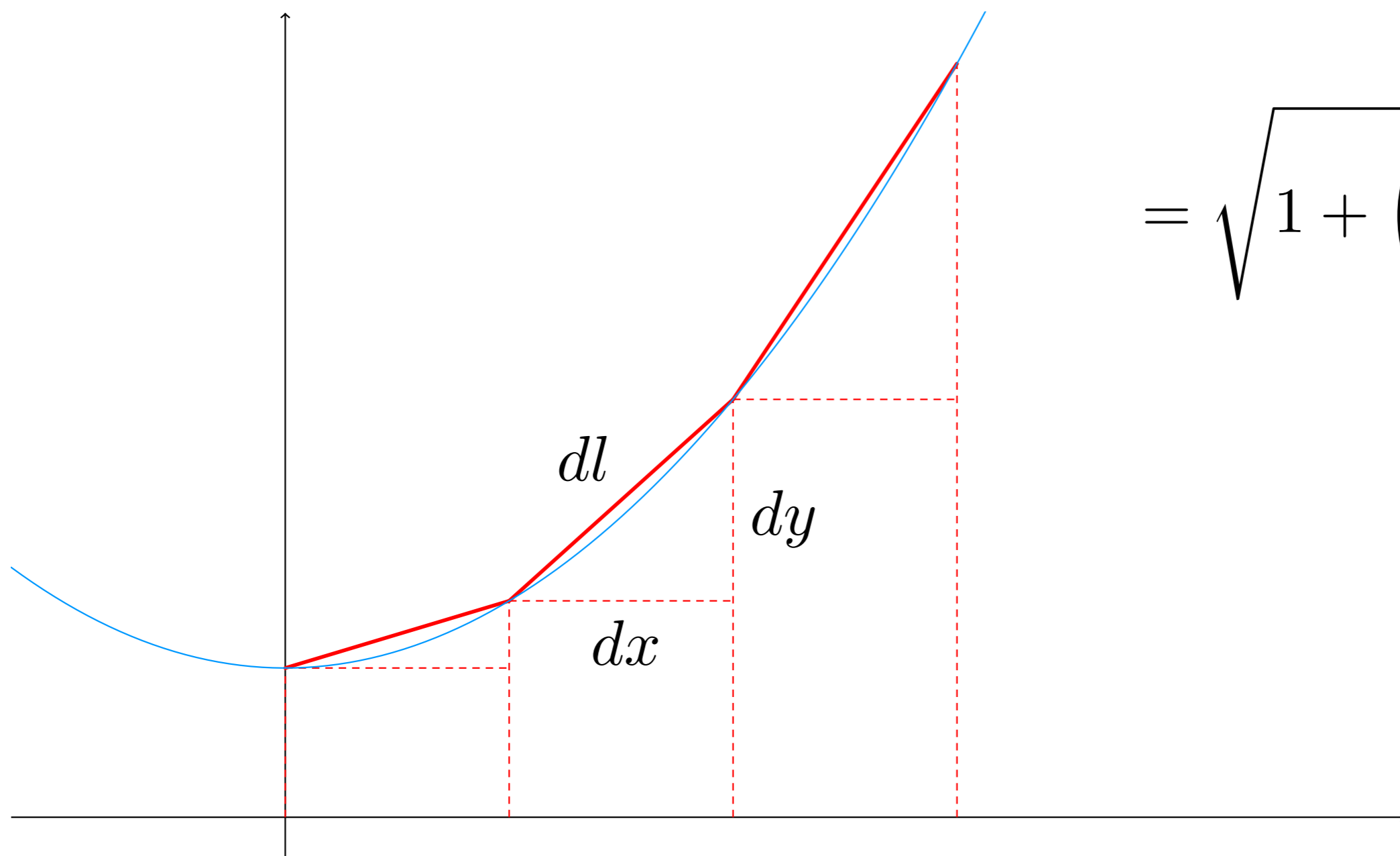
$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

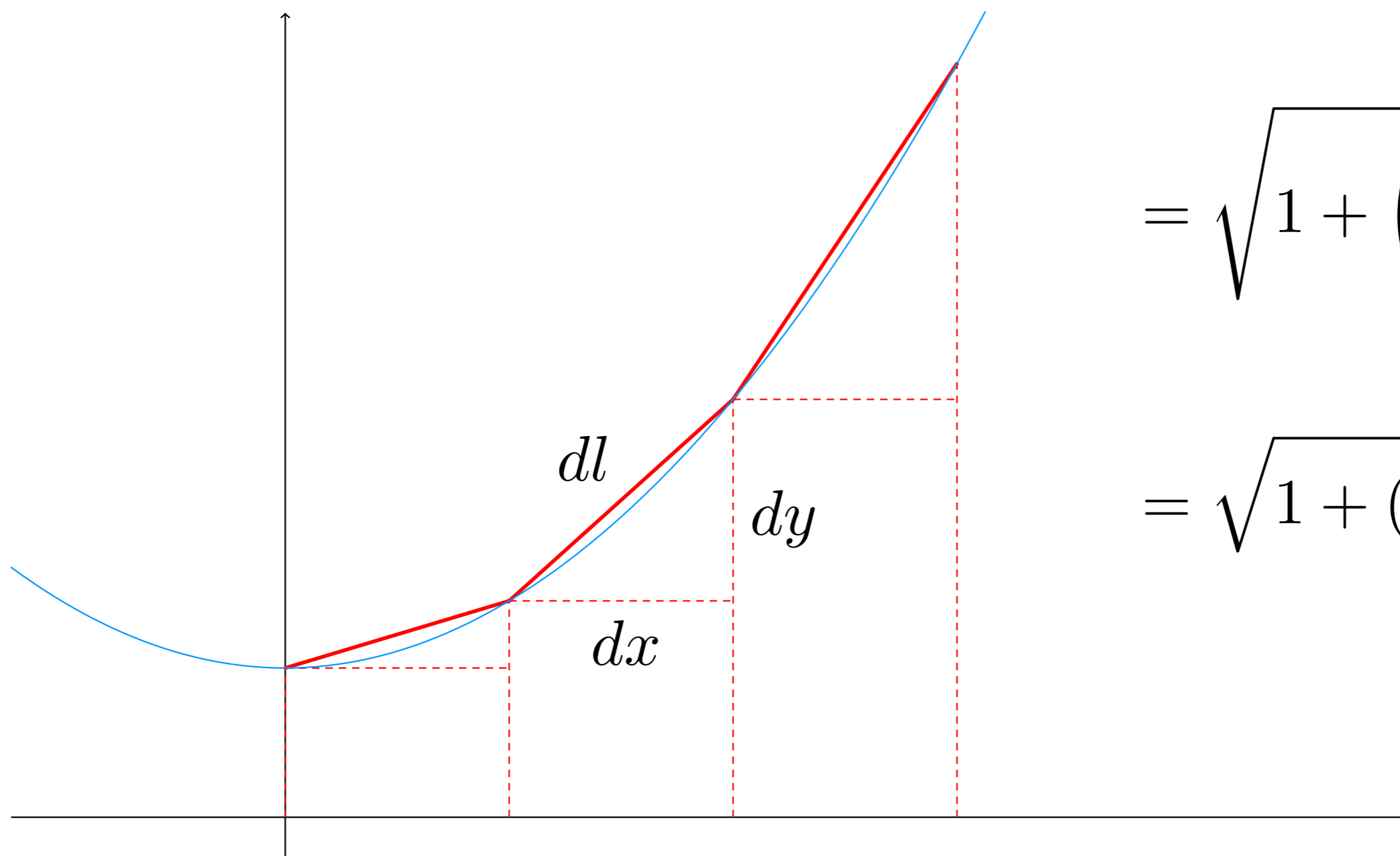
$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

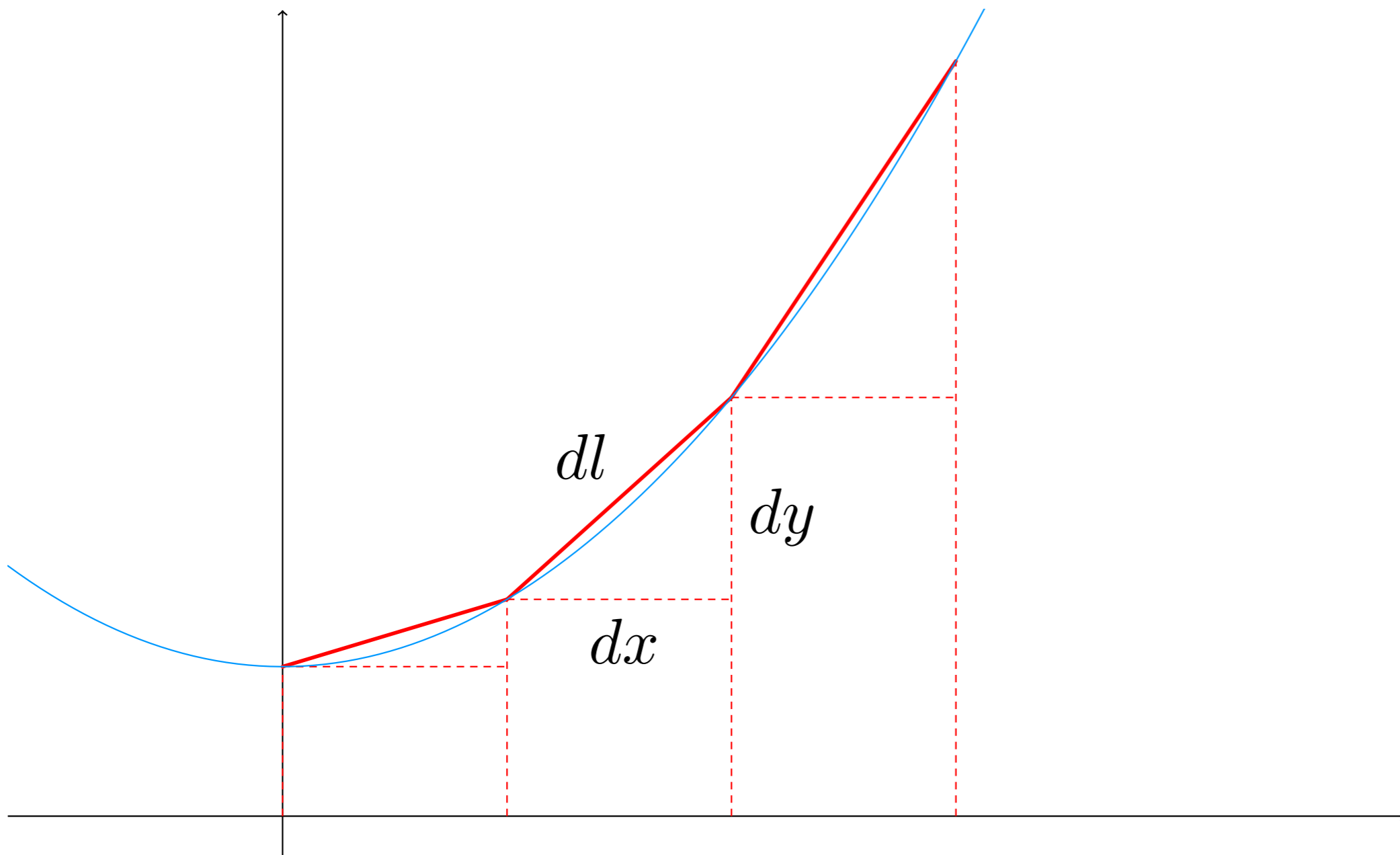
$$= \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

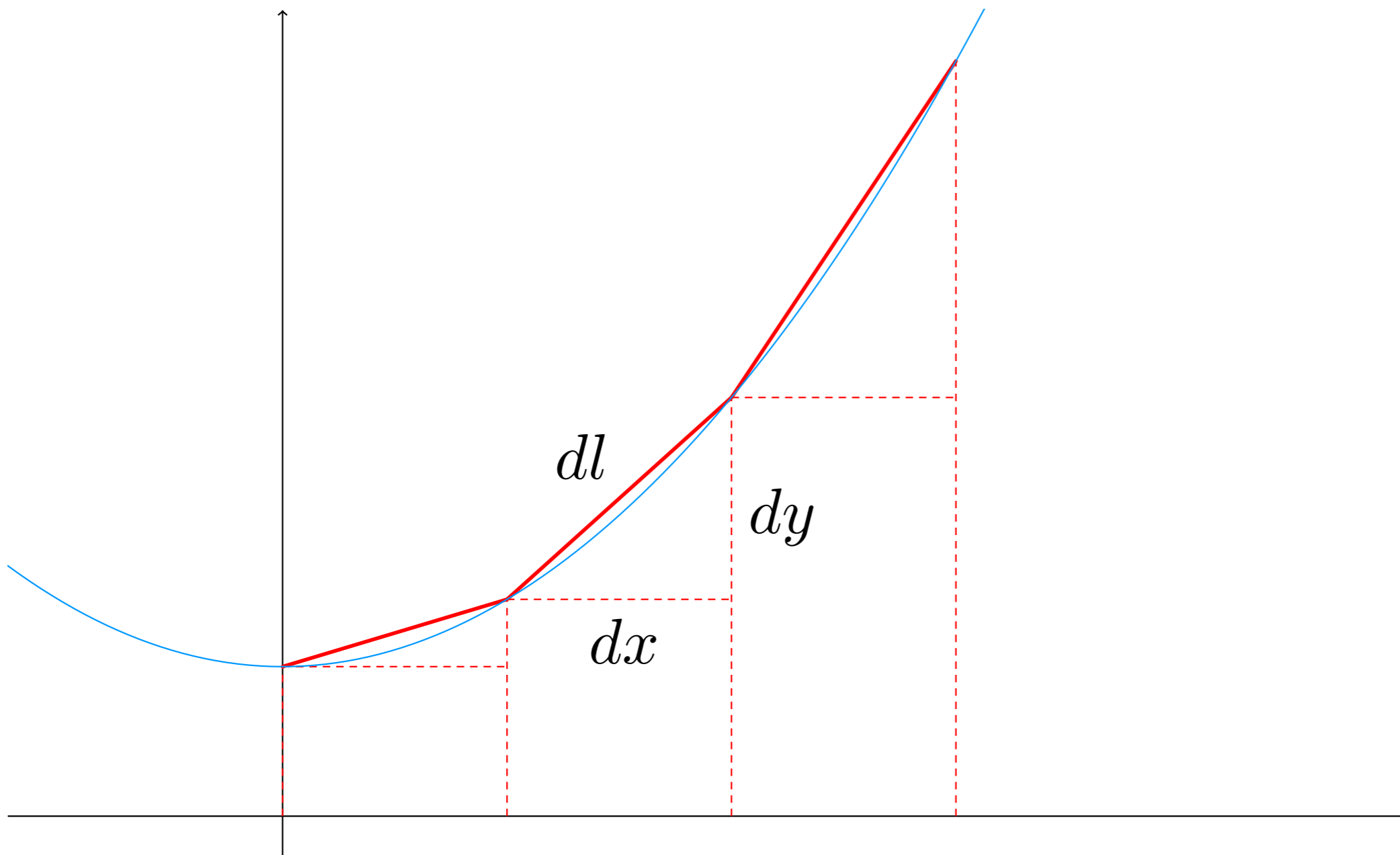


$$dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



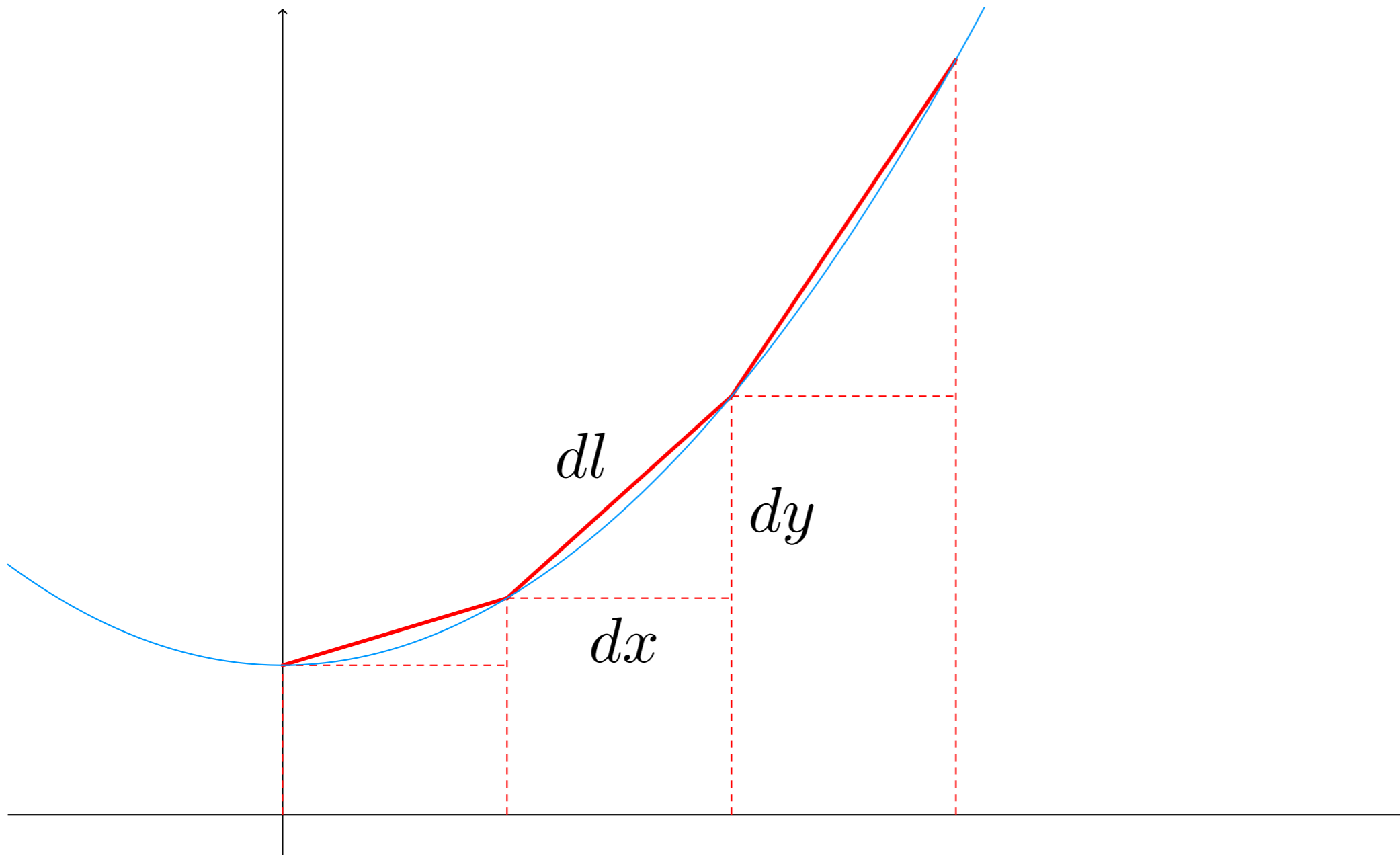
$$dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$L = \int_a^b dl$$



$$dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$L = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}\right)} \, dx \end{aligned}$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}\right)} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}\right)} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

$$= \left. \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right|_{-1}^1$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1} - e}{2}$$

Exemple

Calculer la longueur de la courbe donné par $f(x) = \cosh x$ pour x allant de -1 à 1 .

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1} - e}{2} = e - \frac{1}{e}$$

Faites les exercices suivants

Section 3 # 11, 12, 13

Courbe paramétrique

Courbe paramétrique

$$x = f(t)$$

Courbe paramétrique

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

Courbe paramétrique

$$x = f(t) \qquad (x, y) = (f(t), g(t))$$

$$y = g(t)$$

Courbe paramétrique

$$x = f(t) \quad (x, y) = (f(t), g(t))$$

$$y = g(t)$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Courbe paramétrique

$$x = f(t) \quad (x, y) = (f(t), g(t))$$

$$y = g(t)$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dt^2 \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} \right)}$$

Courbe paramétrique

$$x = f(t) \quad (x, y) = (f(t), g(t))$$

$$y = g(t)$$

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dt^2 \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} \right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt \end{aligned}$$

Courbe paramétrique

$$x = f(t) \qquad (x, y) = (f(t), g(t))$$

$$y = g(t)$$

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{dx^2 + dy^2} &= \sqrt{dt^2 \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} \right)} \\ & &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\ & &= \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt \end{aligned}$$

Courbe paramétrique

$$x = f(t) \quad (x, y) = (f(t), g(t))$$

$$y = g(t)$$

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dt^2 \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} \right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\ &= \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt \end{aligned}$$

$$L = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

Exemple

Example

$$x(\theta) = \cos \theta$$

Example

$$x(\theta) = \cos \theta$$

$$y(\theta) = \sin \theta$$

Example

$$x(\theta) = \cos \theta \qquad y(\theta) = \sin \theta$$

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Exemple

$$x(\theta) = \cos \theta \qquad y(\theta) = \sin \theta$$

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Circonférence d'un cercle de rayon 1 est

Exemple

$$x(\theta) = \cos \theta \qquad y(\theta) = \sin \theta$$

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Circonférence d'un cercle de rayon 1 est

$$\text{Circ} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\theta$$

Exemple

$$x(\theta) = \cos \theta \qquad y(\theta) = \sin \theta$$

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Circonférence d'un cercle de rayon 1 est

$$\text{Circ} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos' \theta)^2 + (\sin' \theta)^2} d\theta$$

Exemple

$$x(\theta) = \cos \theta \qquad y(\theta) = \sin \theta$$

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Circonférence d'un cercle de rayon 1 est

$$\begin{aligned} \text{Circ} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos' \theta)^2 + (\sin' \theta)^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} \, d\theta \end{aligned}$$

Exemple

$$x(\theta) = \cos \theta \qquad y(\theta) = \sin \theta$$

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Circonférence d'un cercle de rayon 1 est

$$\begin{aligned} \text{Circ} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos' \theta)^2 + (\sin' \theta)^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \, d\theta \end{aligned}$$

Exemple

$$x(\theta) = \cos \theta \quad y(\theta) = \sin \theta$$

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Circonférence d'un cercle de rayon 1 est

$$\begin{aligned} \text{Circ} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos' \theta)^2 + (\sin' \theta)^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

Exemple

$$x(\theta) = \cos \theta \quad y(\theta) = \sin \theta$$

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Circonférence d'un cercle de rayon 1 est

$$\text{Circ} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos' \theta)^2 + (\sin' \theta)^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = \theta \Big|_0^{2\pi}$$

Exemple

$$x(\theta) = \cos \theta \qquad y(\theta) = \sin \theta$$

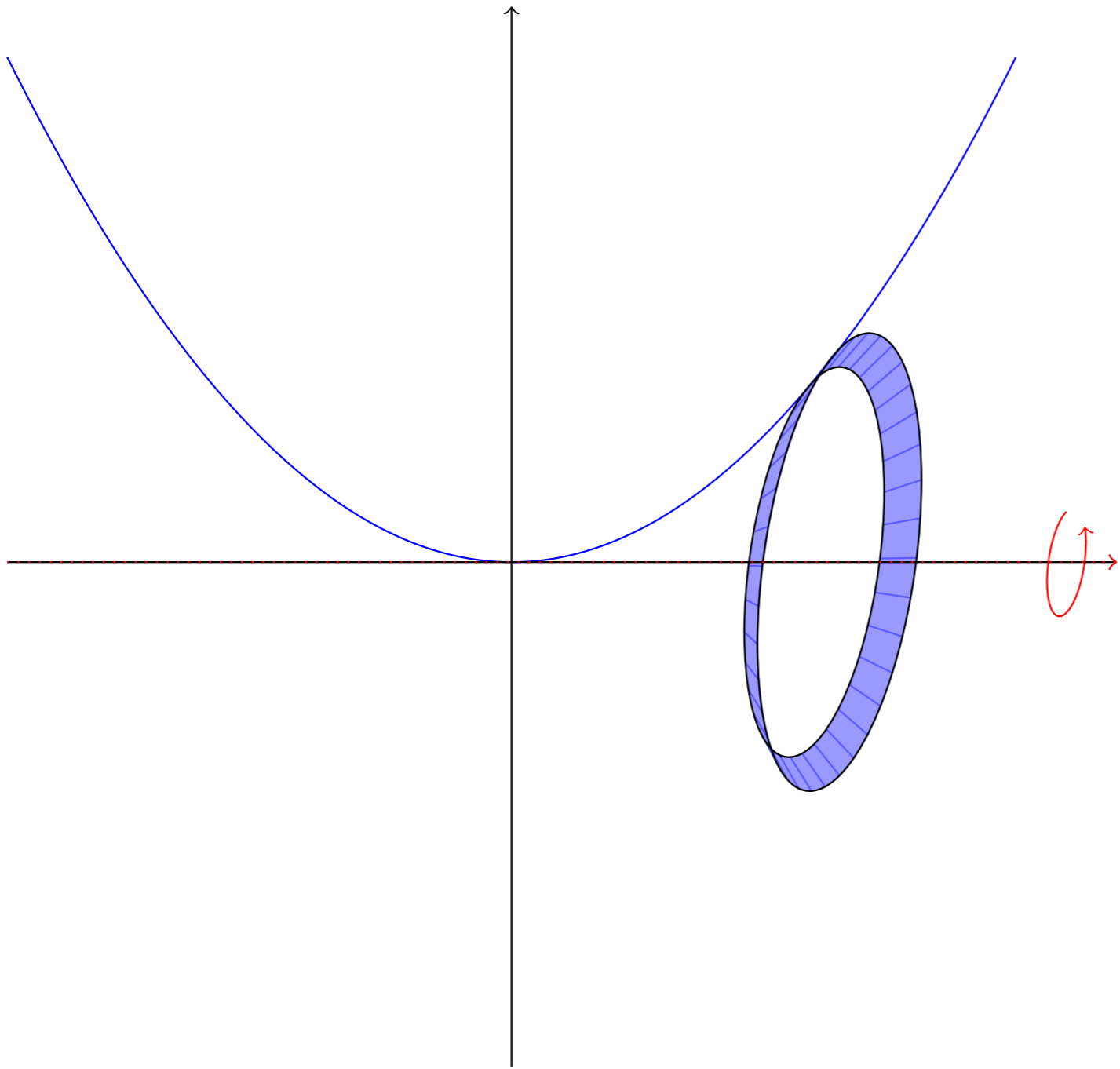
$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Circonférence d'un cercle de rayon 1 est

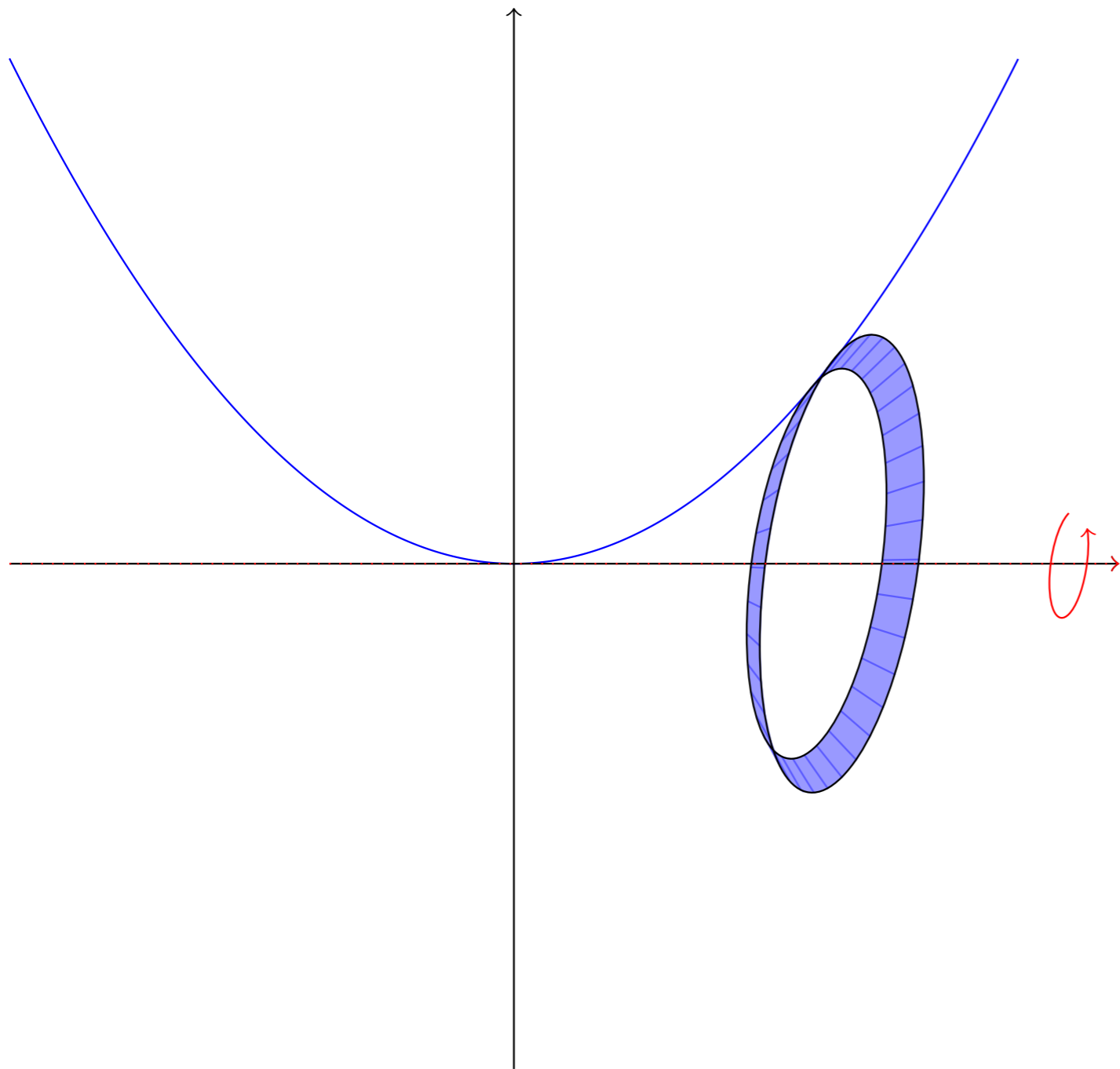
$$\begin{aligned} \text{Circ} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos' \theta)^2 + (\sin' \theta)^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

Faites les exercices suivants

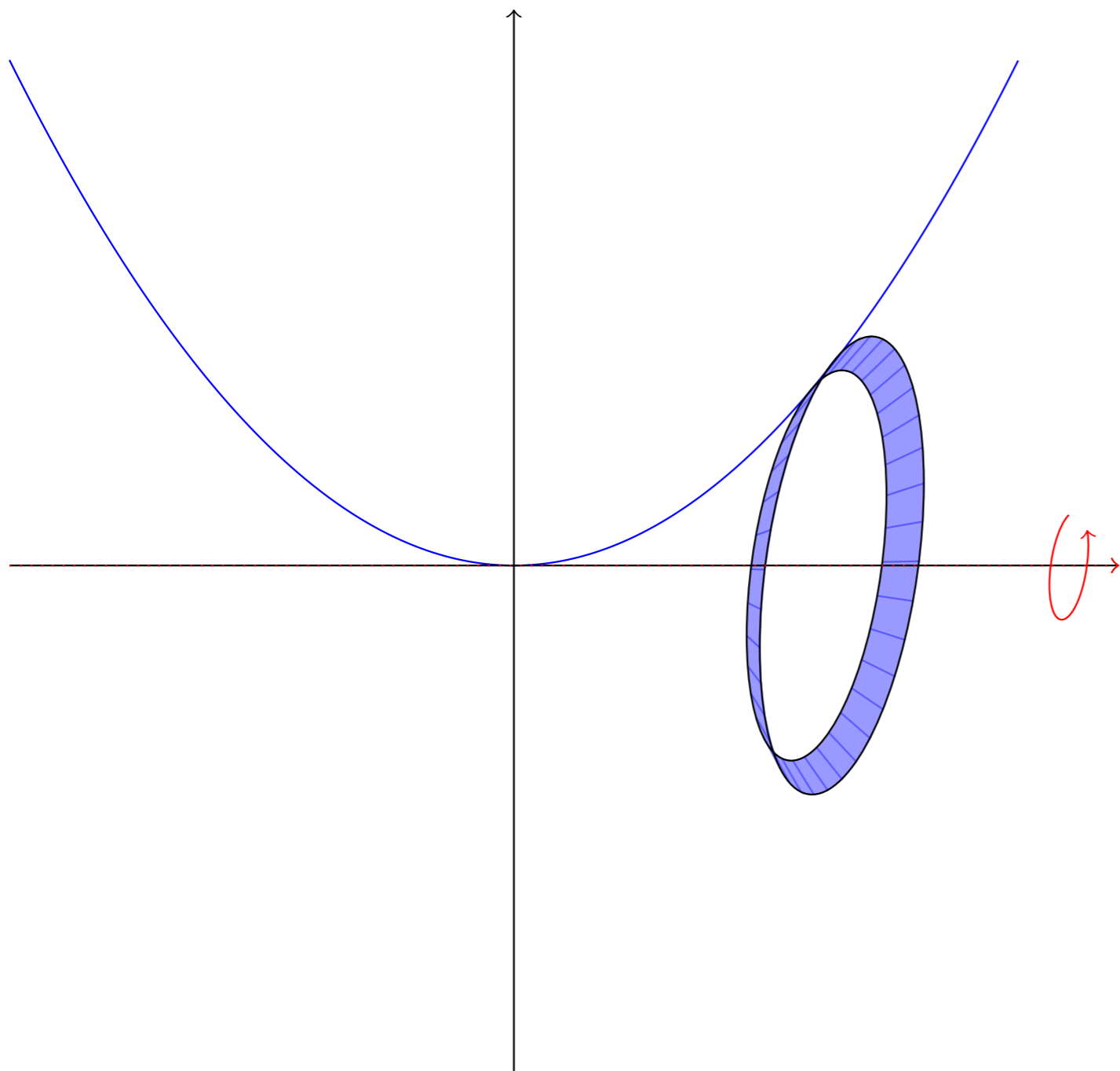
Section 3 # 14, 15



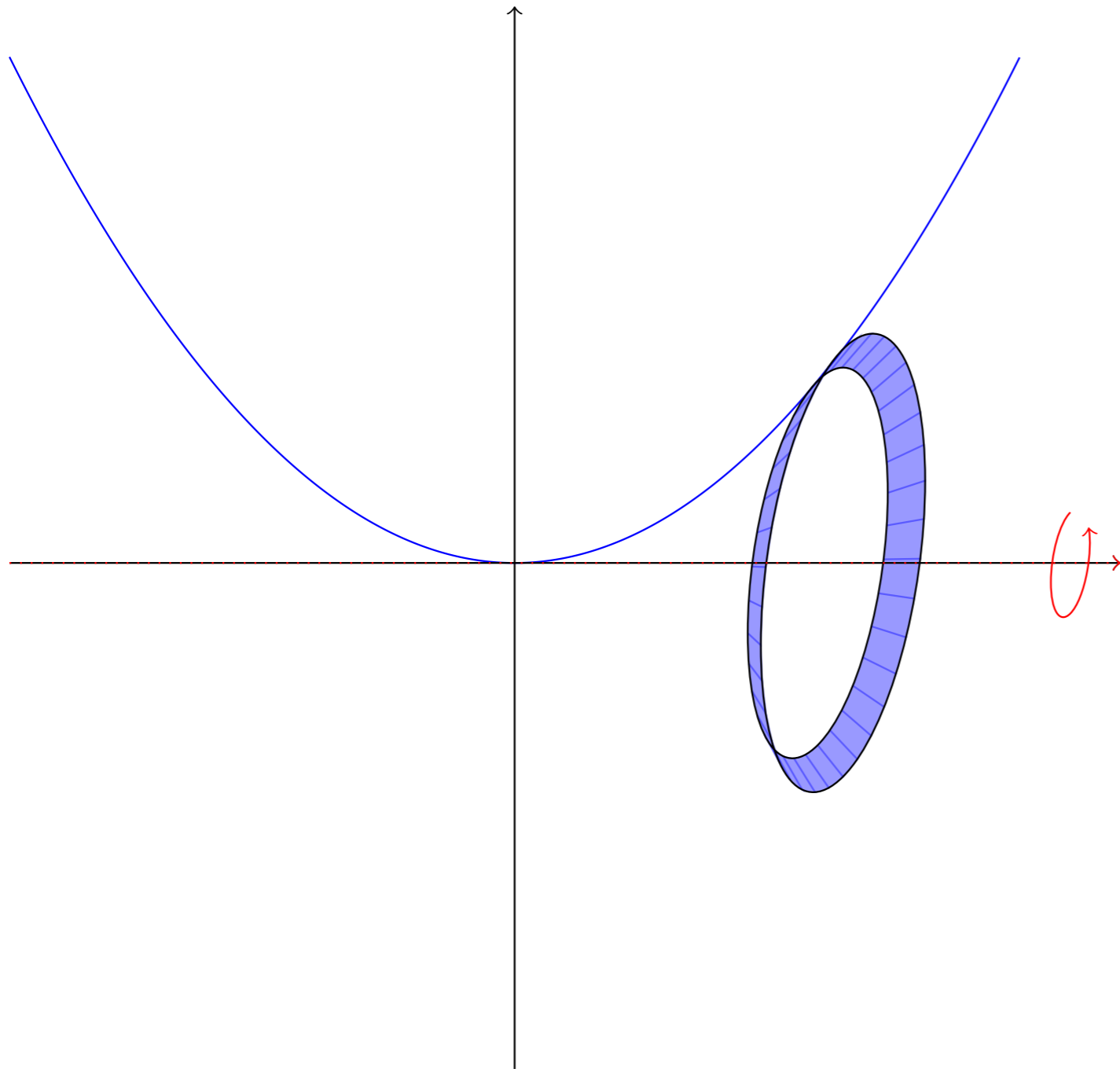
Aire_{bande}



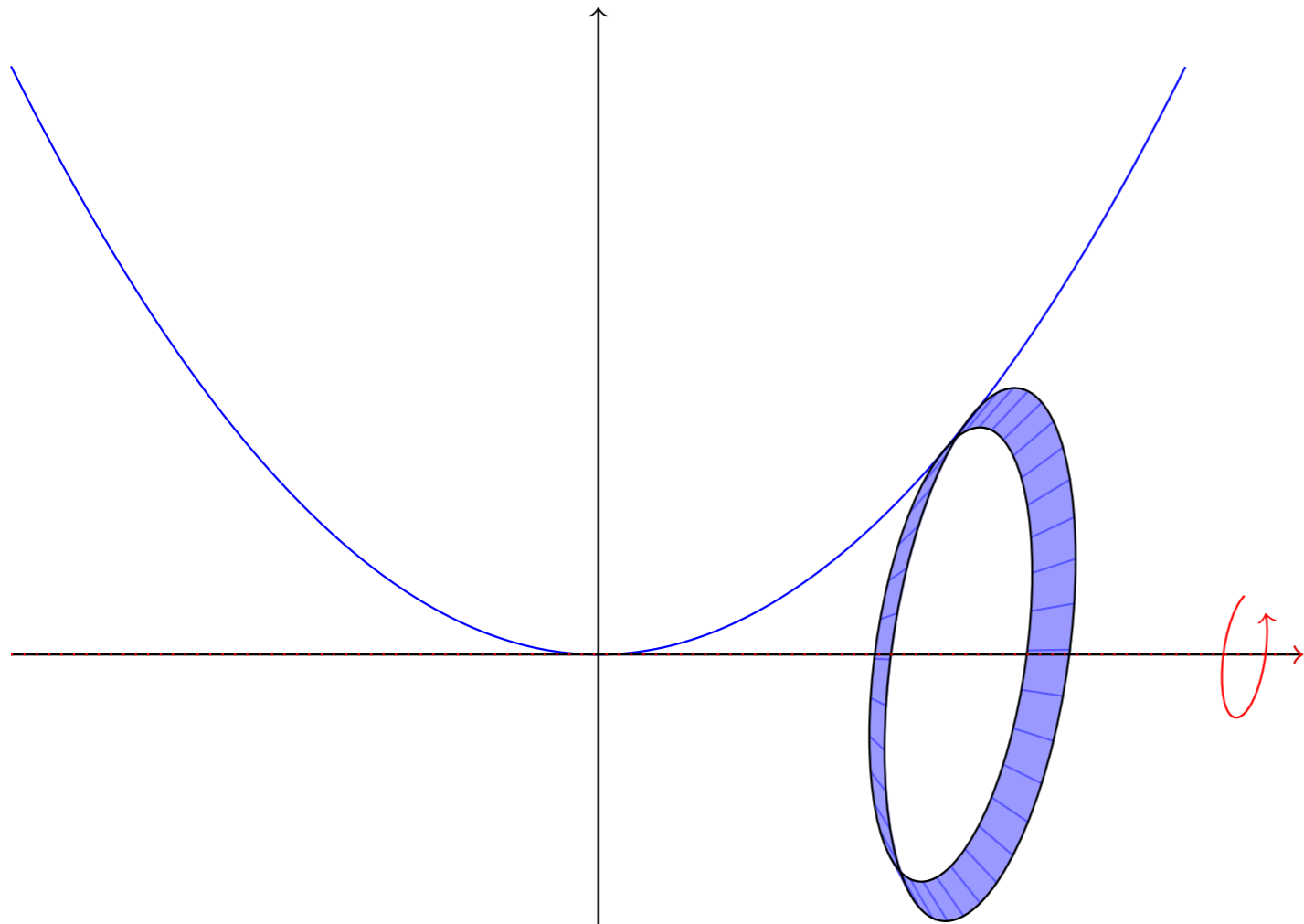
$$\text{Aire}_{\text{bande}} = 2\pi R \Delta l$$



$$\text{Aire}_{\text{bande}} = 2\pi R \Delta l = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$



$$\text{Aire}_{\text{bande}} = 2\pi R \Delta l = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$



$$\text{Aire}_{\text{surface}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Exemple

Calculer l'aire de la sphère.

Exemple

Calculer l'aire de la sphère.

$$\text{Aire} = 2 \int_0^r 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Exemple

Calculer l'aire de la sphère.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{Aire} = 2 \int_0^r 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Exemple

Calculer l'aire de la sphère.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{Aire} = 2 \int_0^r 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Exemple

Calculer l'aire de la sphère.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{Aire} = 2 \int_0^r 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx$$

Exemple

Calculer l'aire de la sphère.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{Aire} = 2 \int_0^r 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

Exemple

Calculer l'aire de la sphère.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{Aire} = 2 \int_0^r 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx$$

Exemple

Calculer l'aire de la sphère.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{Aire} = 2 \int_0^r 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 4\pi \int_0^r r dx$$

Exemple

Calculer l'aire de la sphère.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{Aire} = 2 \int_0^r 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 4\pi \int_0^r r dx = 4\pi r^2$$

Faites les exercices suivants

Section 3 # 16, 18

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Longueur d'arc
- ✓ Aire d'une surface de révolution

Devoir:

Section 3.3