3.4 INTÉGRALE IMPROPRE

IMPROPRE

cours 19

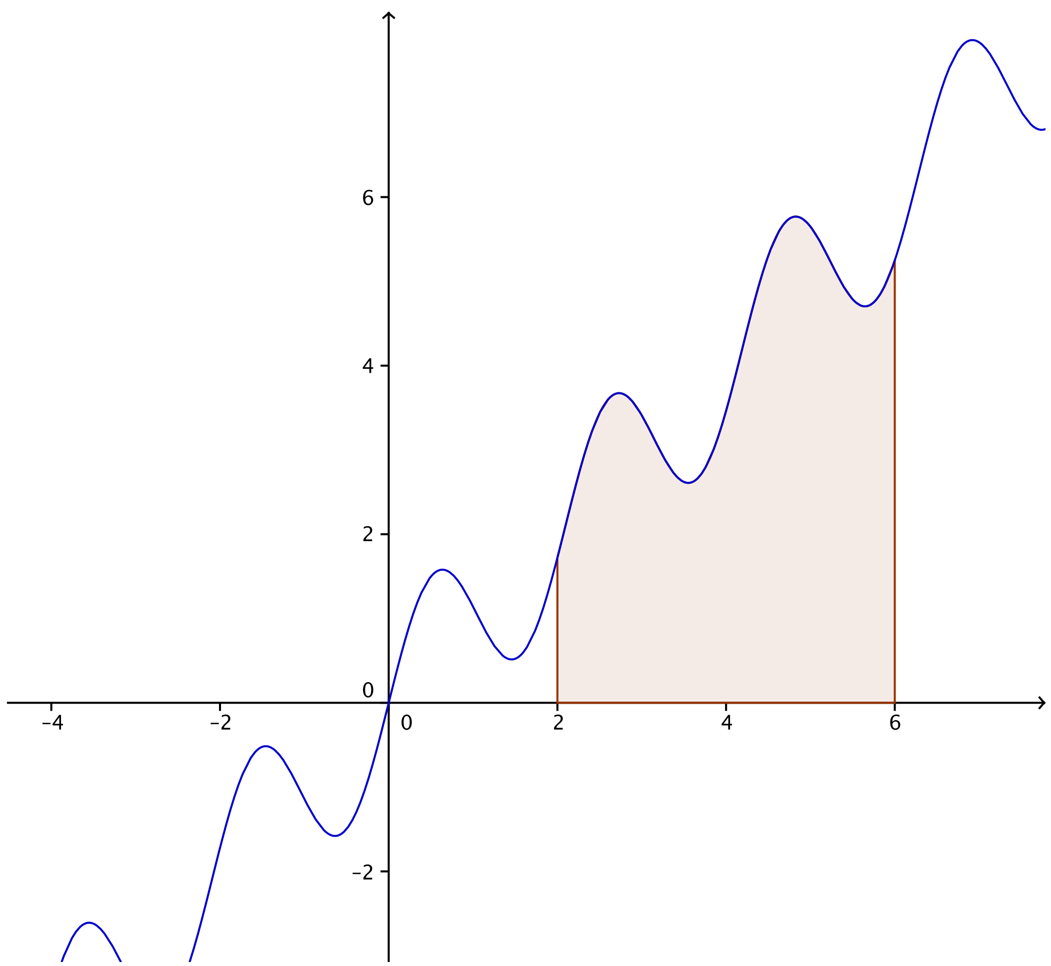
Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Longueur d’arc.
- ✓ Aire d’une surface de révolution.

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ L'intégrale impropre

On a vu que l'intégrale définie permet de calculer l'aire signée entre une fonction et l'axe des x.



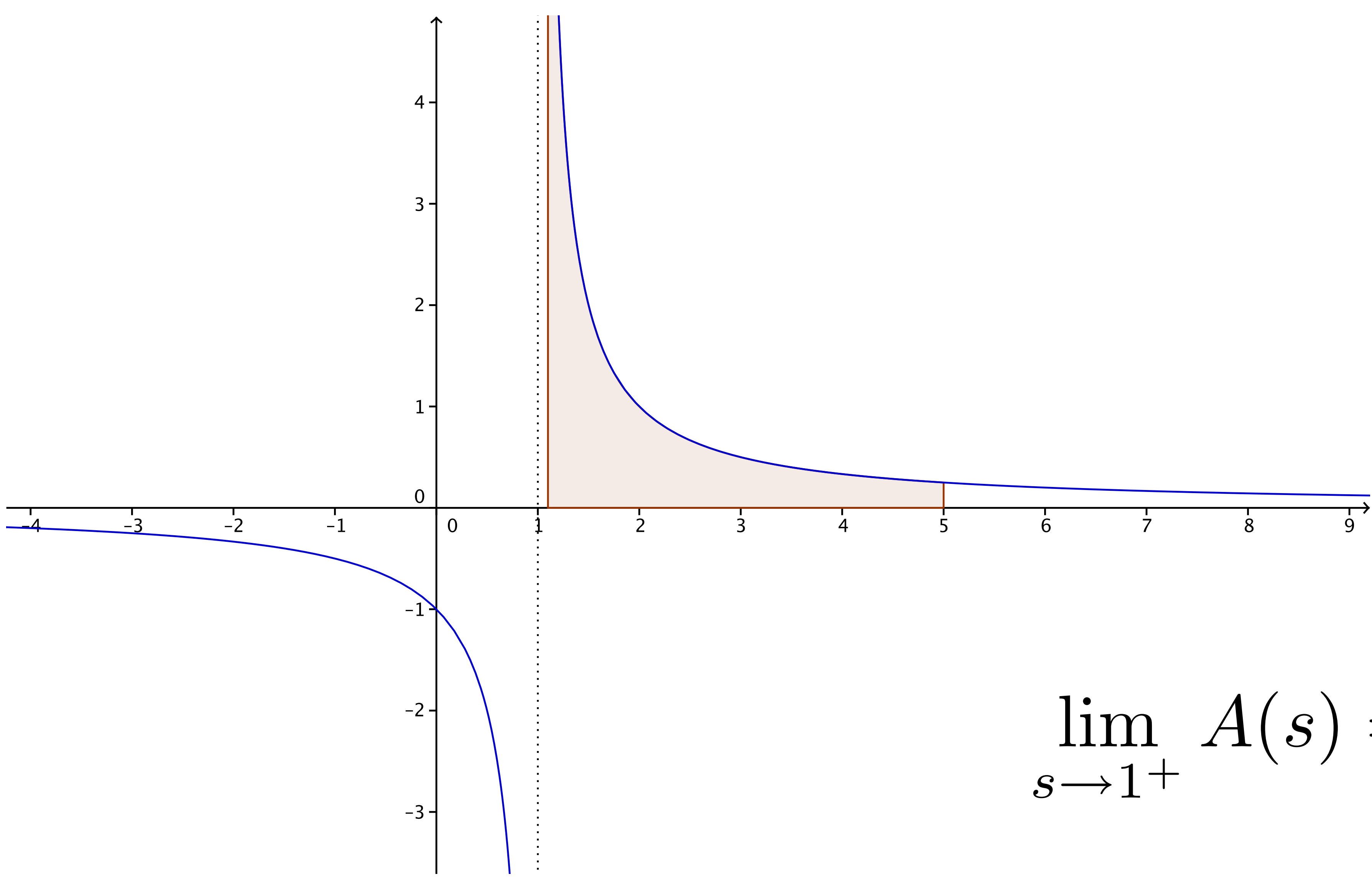
Or, on ne peut pas calculer l'intégrale définie d'une fonction sur n'importe quel intervalle.

Il faut que la fonction soit continue sur l'intervalle.

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \int_1^5 \frac{1}{x-1}\,dx$$ n'est pas une intégrale définie

$$\int_2^5 \frac{1}{x-1}\,dx\ ,\ \int_{1,5}^5 \frac{1}{x-1}\,dx\ ,\ \int_{1,3}^5 \frac{1}{x-1}\,dx\ ,\ \int_{1,1}^5 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$\cdots$$



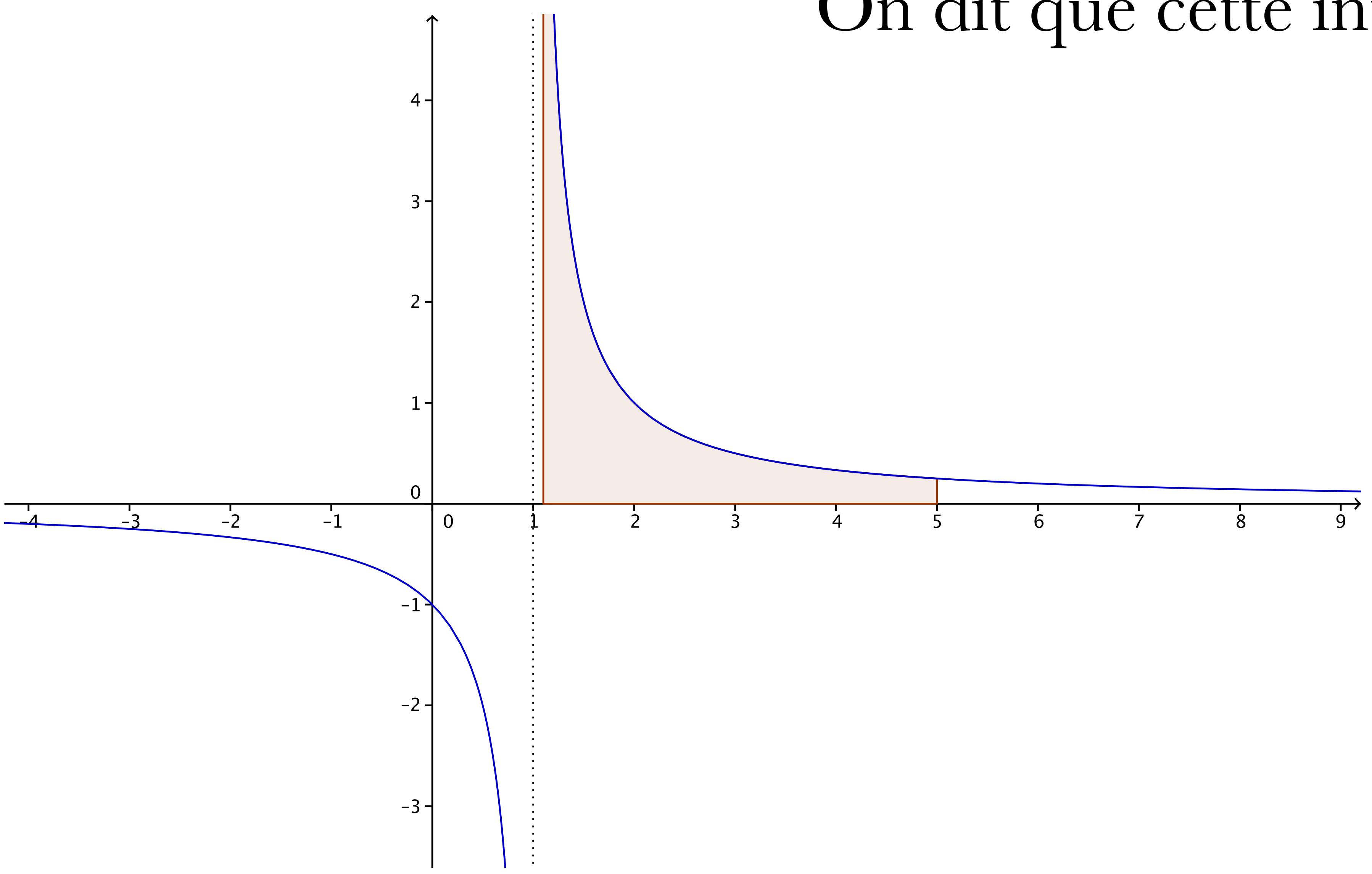
$$A(s) = \int_s^5 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$\lim_{s\to 1^+} A(s) = \lim_{s\to 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \int_1^5 \frac{1}{x-1}\, dx$$ n'est pas une intégrale définie

$$\lim_{s \to 1^+} A(s) = \lim_{s \to 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1}\, dx = \boxed{\int_1^5 \frac{1}{x-1}\, dx}$$

On dit que cette intégrale est impropre.



Exemple

$$\int_1^5 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{s\to 1^+}\int_s^5 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \lim_{s\to 1^+}\left(\ln|x-1|\Big|_s^5\right) = \lim_{s\to 1^+}\left(\ln 4 - \ln|s-1|\right)$$

$$= \ln 4 - \lim_{s\to 1^+}\ln|s-1| = \ln 4 - (-\infty) = \infty$$

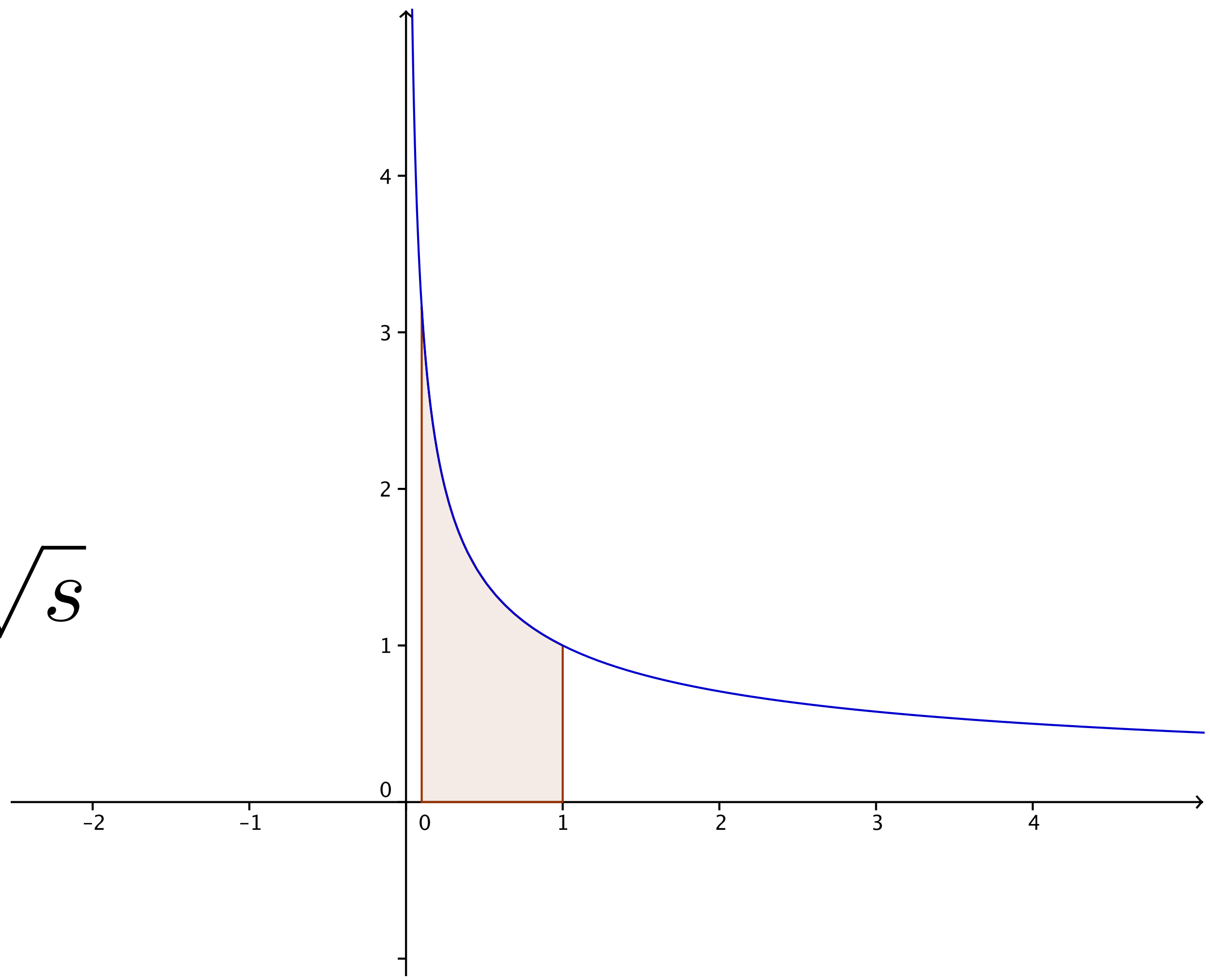
Si une intégrale impropre tend vers ∞ ou $-\infty$ alors on dit que l'intégrale diverge.

Exemple

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{s\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_s^1 = \lim_{s\to 0^+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{s}$$

$$= 2$$

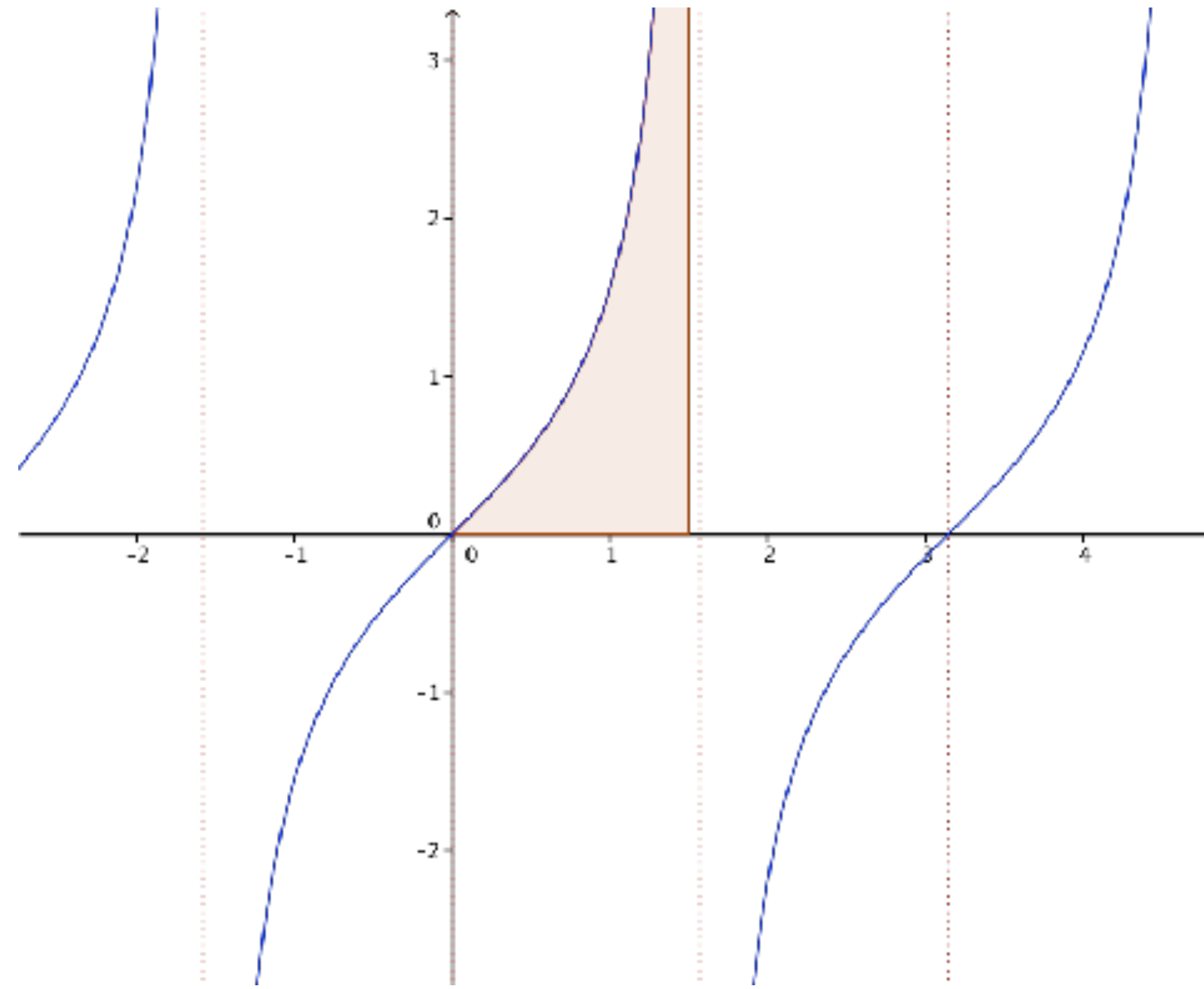


Si une intégrale impropre donne un nombre, on dit qu'elle converge.

Exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \; dx$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x \; dx$$



$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec x|\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec t| - \ln|\sec 0| \quad = \ln|\infty| - \ln|1| \; = \infty$$

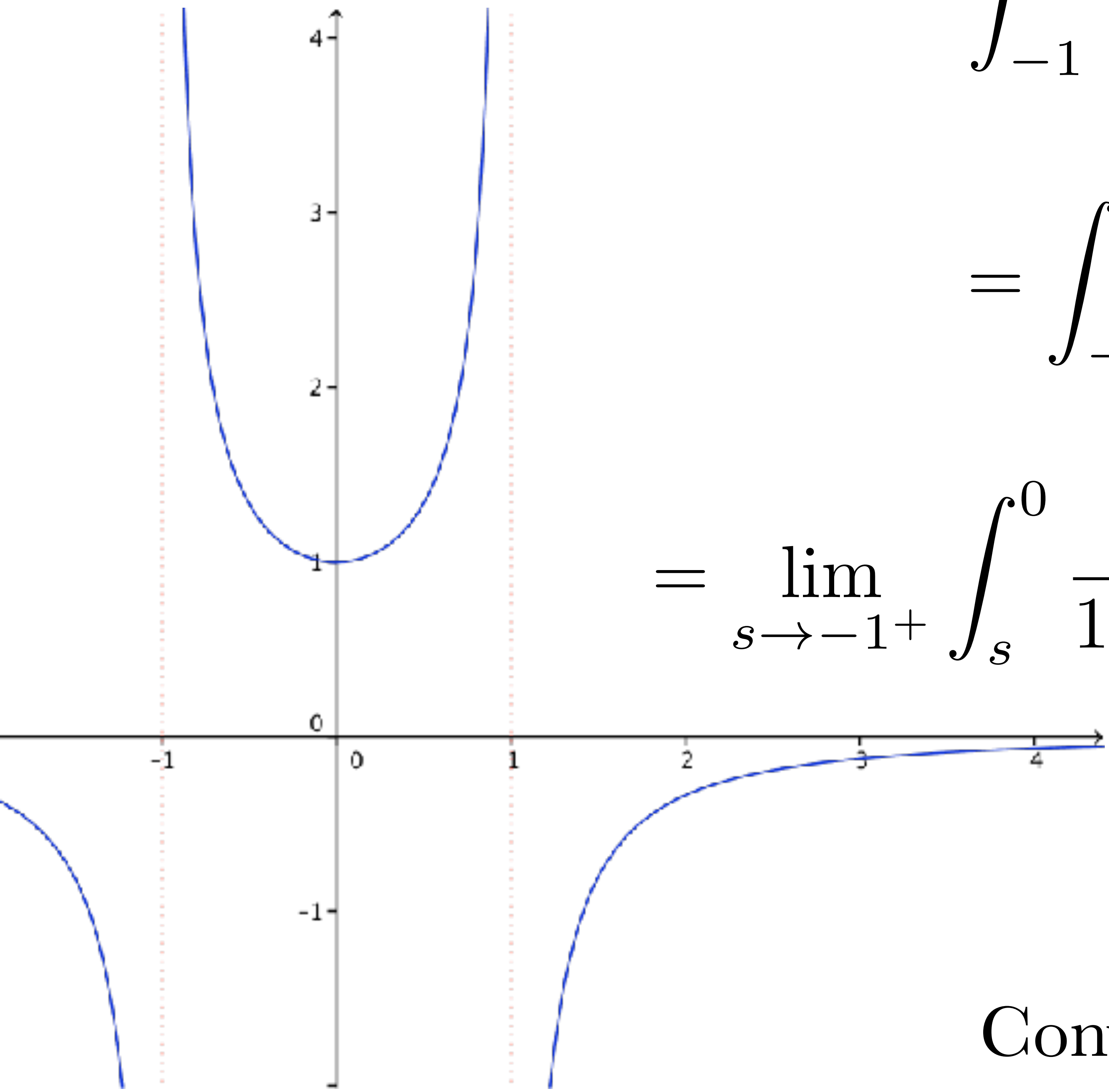
Donc l’intégrale impropre diverge.

Comment gérer une intégrale de la forme

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x^2}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{1-x^2}\, dx$$

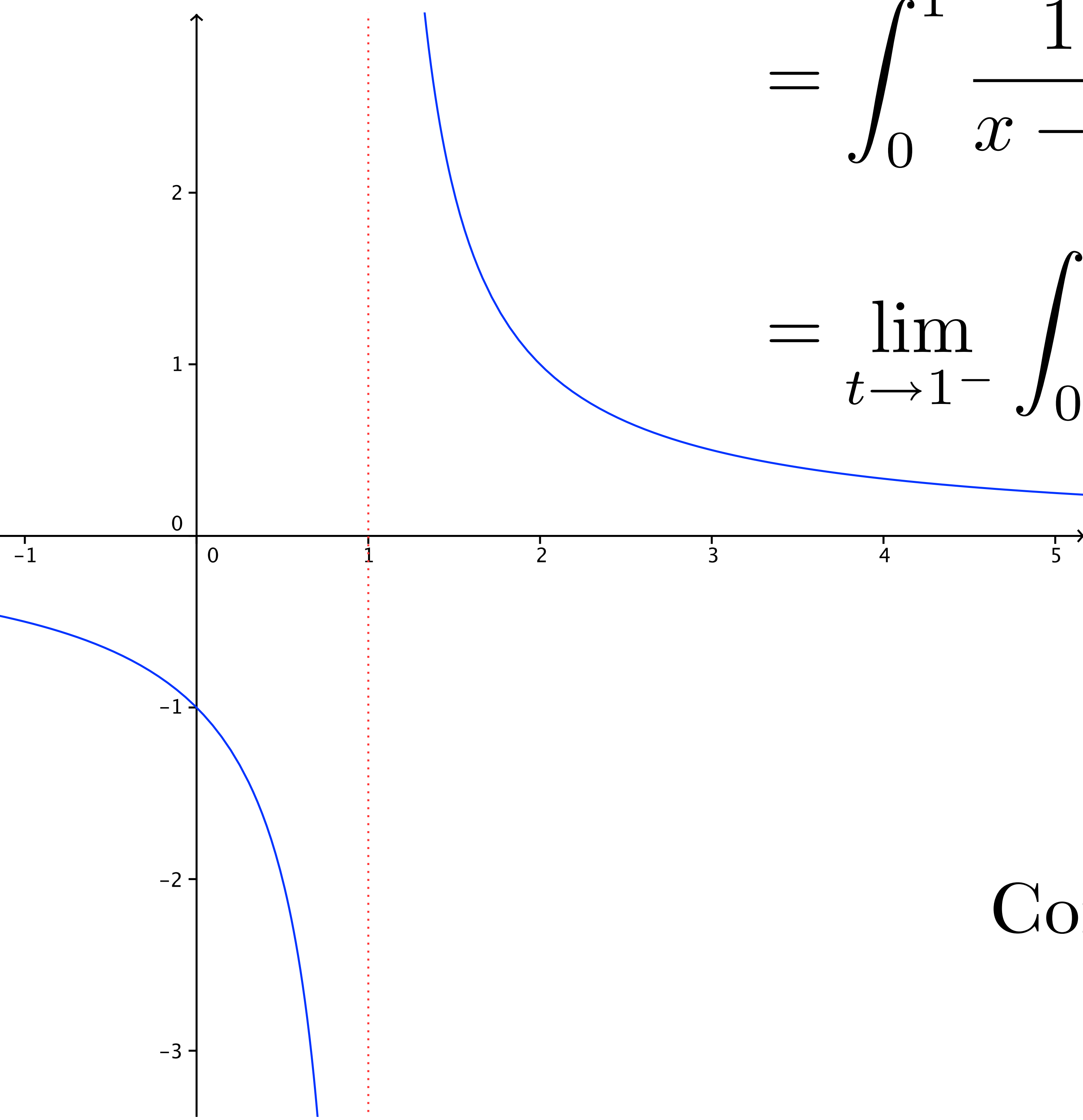
$$= \lim_{s\to -1^+} \int_{s}^{0} \frac{1}{1-x^2}\, dx + \lim_{t\to 1^-} \int_{0}^{t} \frac{1}{1-x^2}\, dx$$



Converge si les DEUX convergent

De la même manière

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1}\ dx$$



$$= \int_0^1 \frac{1}{x-1}\ dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1}\ dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1}\ dx + \lim_{s\to 1^+} \int_s^2 \frac{1}{x-1}\ dx$$

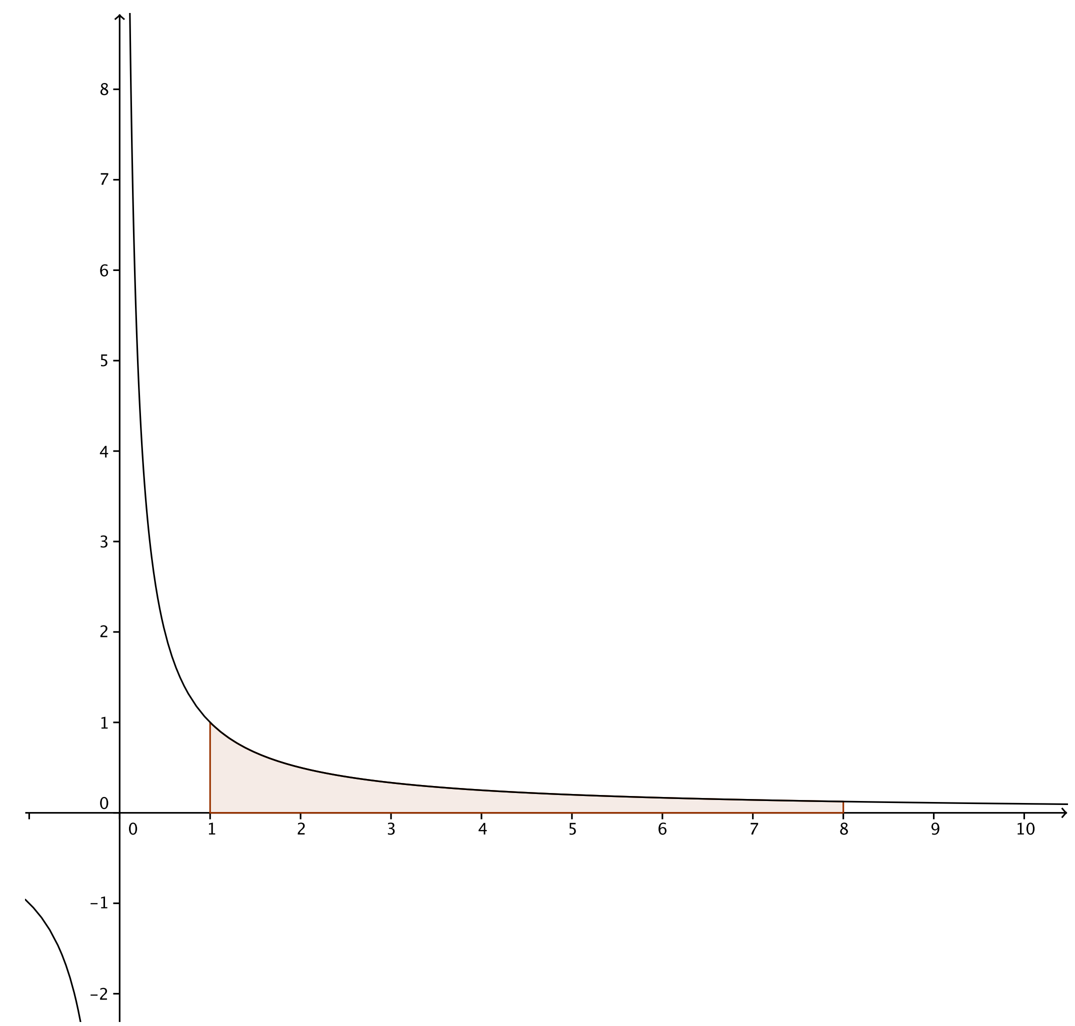
Converge si les DEUX convergent

Faites les exercices suivants

Section 3 # 19, 20

On peut aussi utiliser cette idée pour donner un sens à

$$\int_a^{\infty} f(x)\ dx \ = \lim_{M\to\infty}\int_a^{M} f(x)\ dx$$



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx \ = \lim_{N\to-\infty}\int_N^{b} f(x)\ dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx \ = \int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_c^{\infty} f(x)\ dx$$

$$= \lim_{N\to-\infty}\int_N^{c} f(x)\ dx + \lim_{M\to\infty}\int_c^{M} f(x)\ dx$$

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \ln|x| \Big|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} \ln|M| - \ln|1| = \infty$$

Donc l'intégrale diverge.

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{M} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1$$

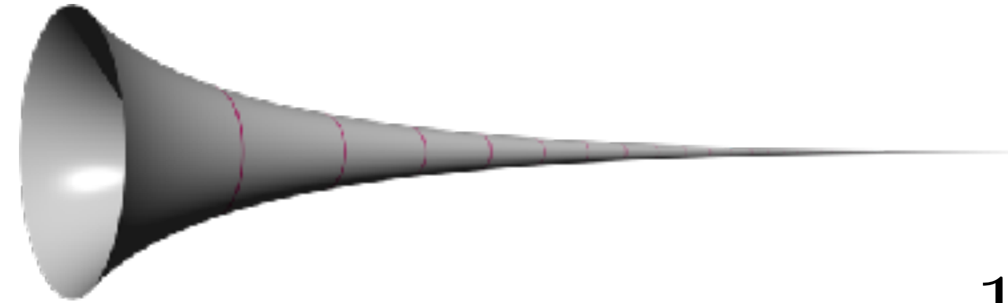
Donc l'intégrale converge.

Faites les exercices suivants

Faites les exercices suivants

Section 3 # 21, 22

Exemple (Trompette de Gabriel)



Calculer le «volume de révolution» de la région sous $f(x) = \dfrac{1}{x}$
$x \geq 1$

$$\pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{M\to\infty} \pi \int_1^{M} \frac{1}{x^2}\, dx \ = \pi \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^M$$

$$= \pi \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{M} + 1 \ = \pi$$

Si on veut calculer l'aire du même solide

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx \ = 2\pi \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

Exemple

$$2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx = 2\pi \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$$

$$= 2\pi \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}\,dx$$

$$= 2\pi \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx$$

$$\geq 2\pi \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = 2\pi \lim_{M\to\infty} \ln|x|\Big|_1^M = \infty$$

Mais

$$\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} \geq \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$$

donc $2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$ diverge.

Faites les exercices suivants

Section 3 # 22, 23

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Intégrales impropres.

Devoir: Section 3.4