

# 3.4 INTÉGRALE IMPROPRE

cours 19

## Au dernier cours, nous avons vu

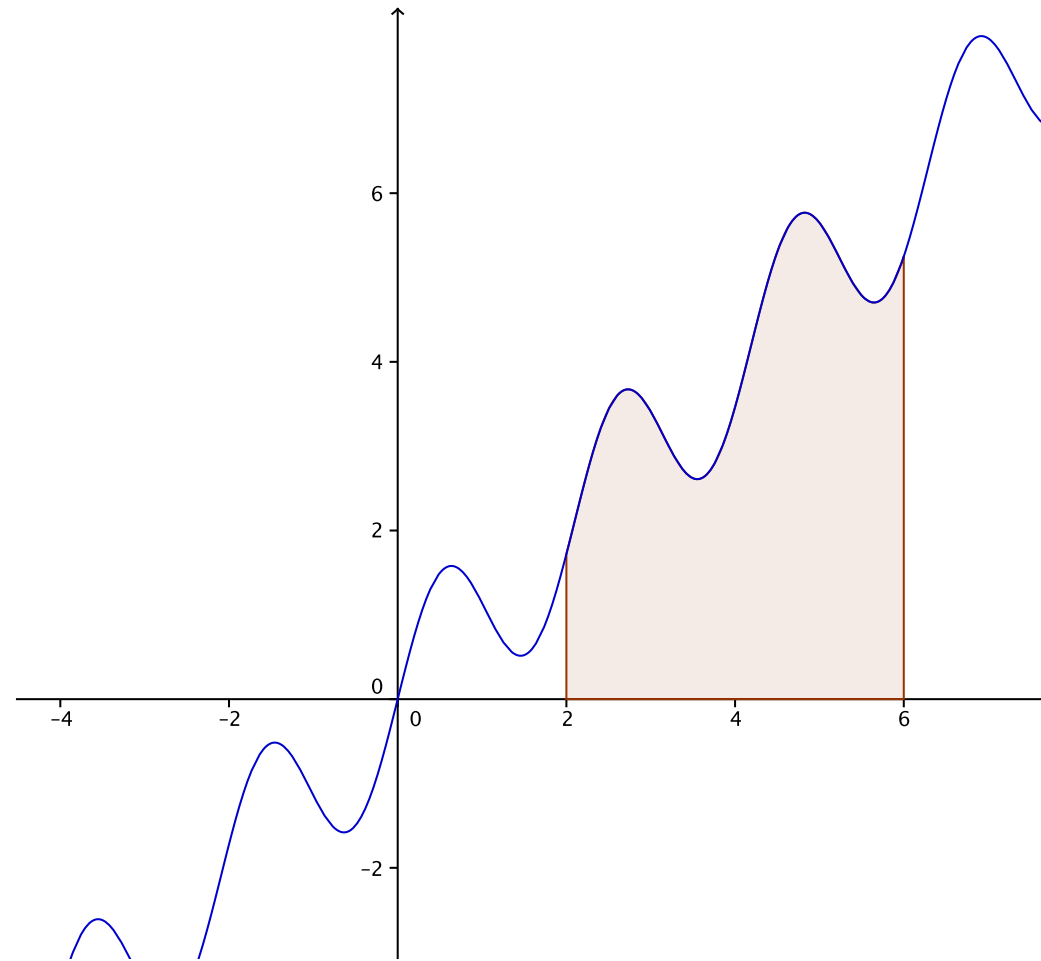
- ✓ Longueur d'arc.
- ✓ Aire d'une surface de révolution.

# Aujourd'hui, nous allons voir

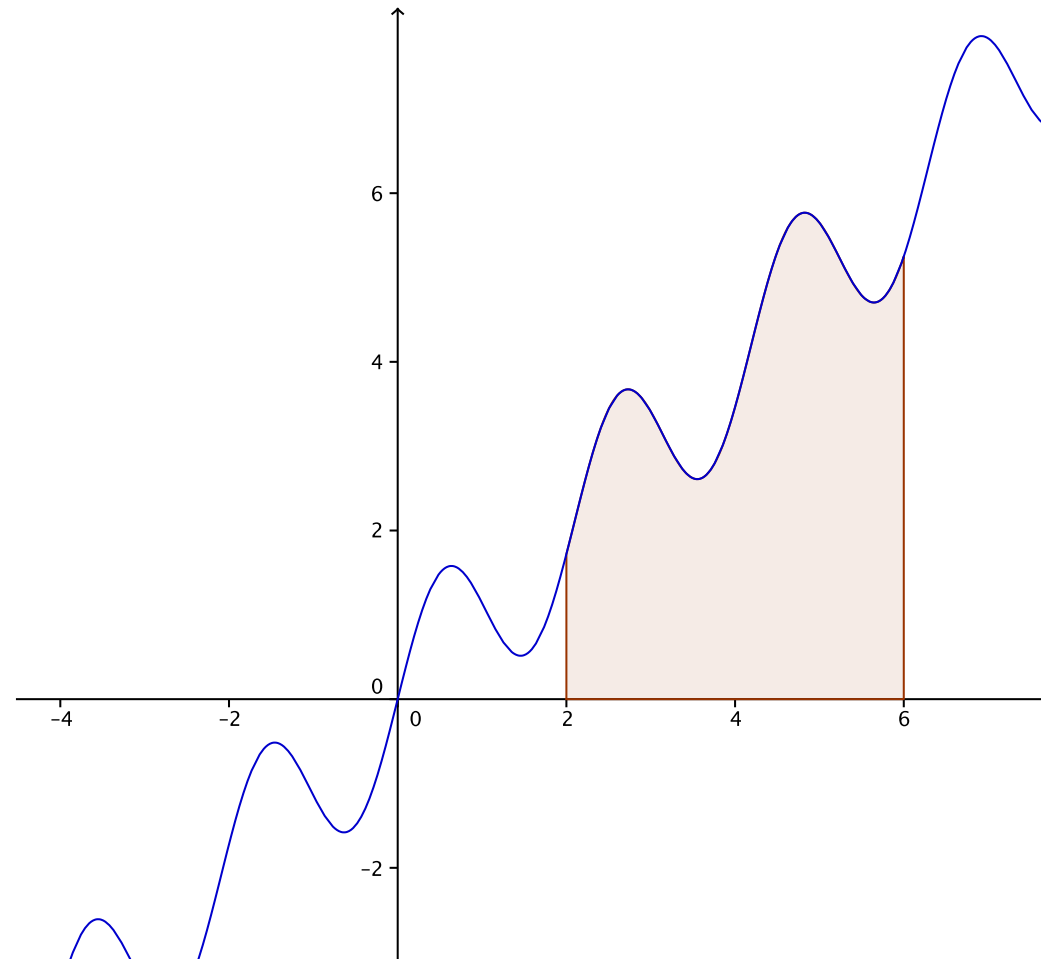
- ✓ L'intégrale impropre

On a vu que l'intégrale définie permet de calculer l'aire signée entre une fonction et l'axe des  $x$ .

On a vu que l'intégrale définie permet de calculer l'aire signée entre une fonction et l'axe des x.

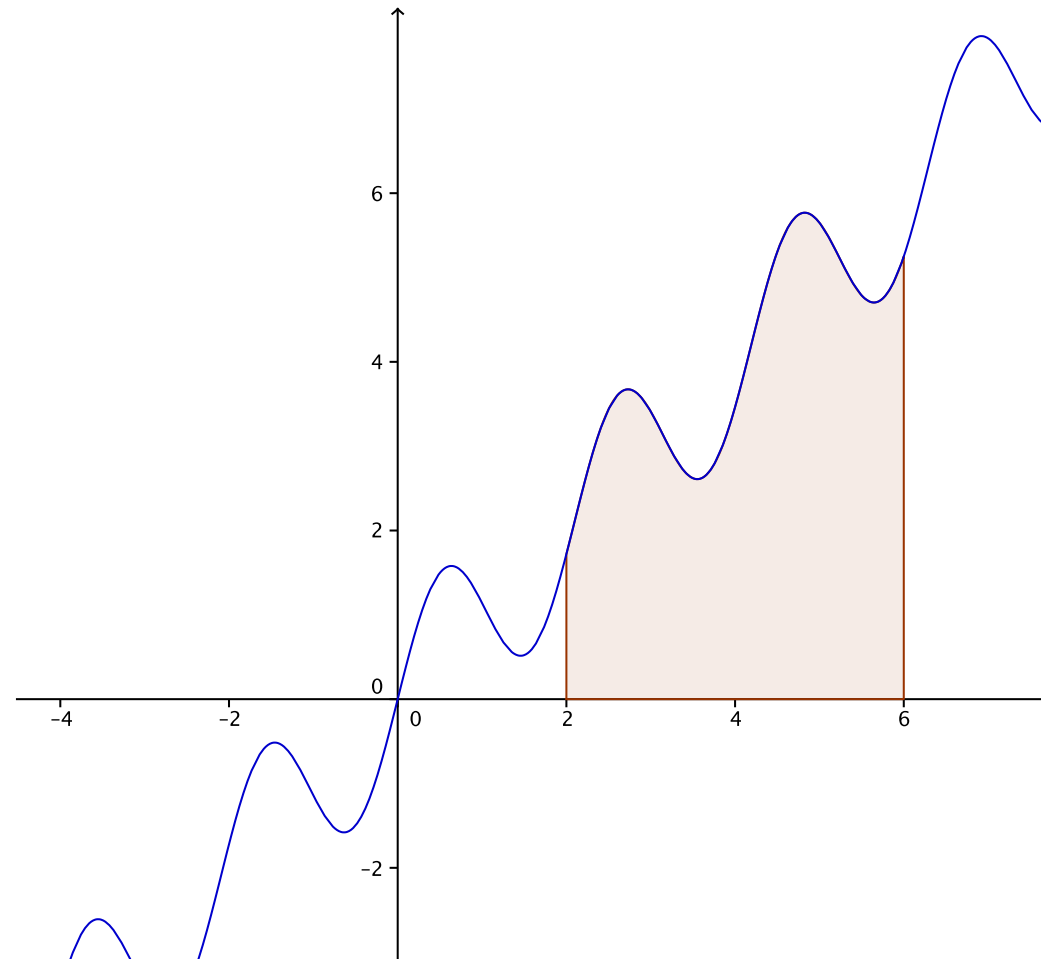


On a vu que l'intégrale définie permet de calculer l'aire signée entre une fonction et l'axe des x.



Or, on ne peut pas calculer l'intégrale définie d'une fonction sur n'importe quel intervalle.

On a vu que l'intégrale définie permet de calculer l'aire signée entre une fonction et l'axe des x.



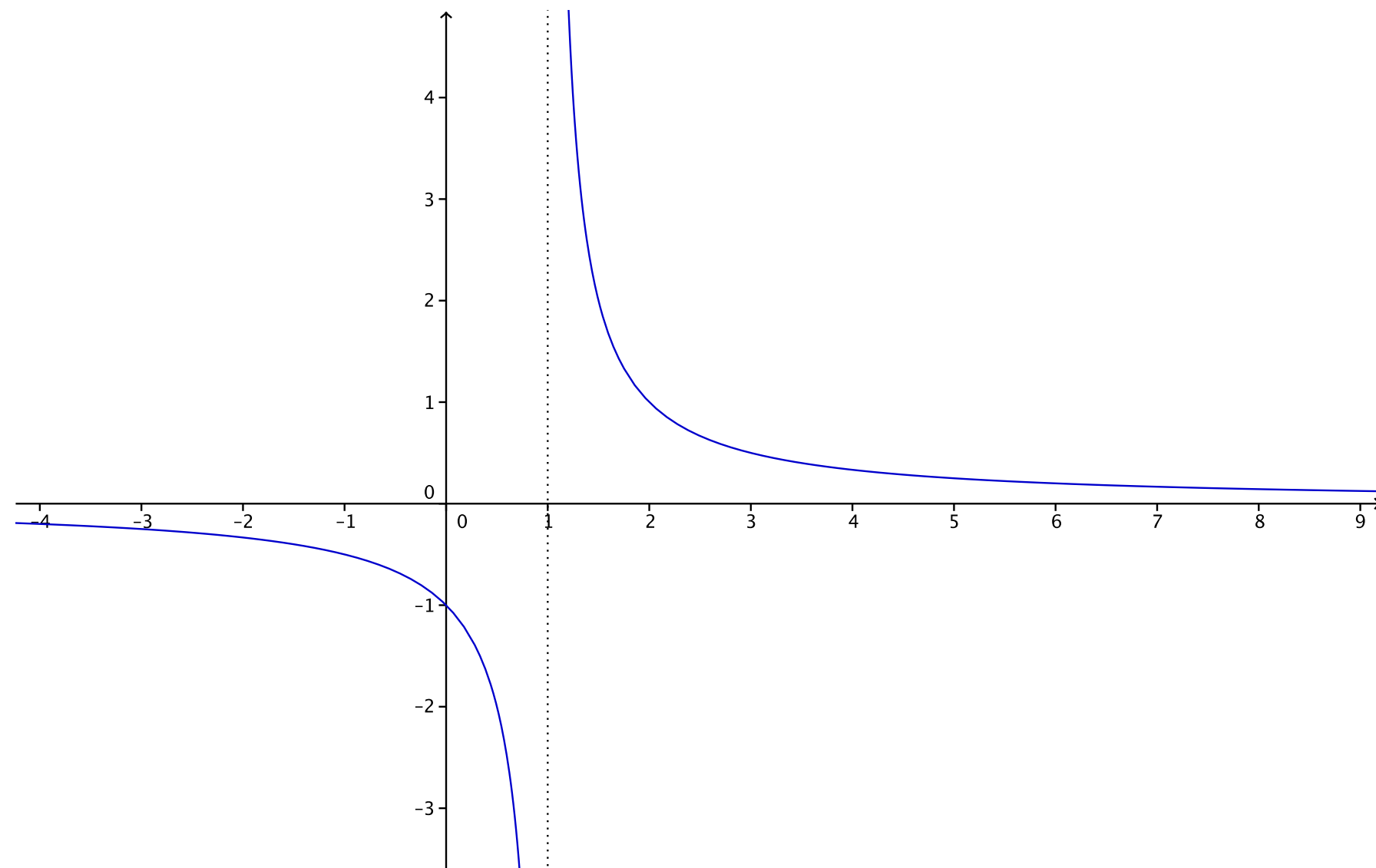
Or, on ne peut pas calculer l'intégrale définie d'une fonction sur n'importe quel intervalle.

Il faut que la fonction soit continue sur l'intervalle.

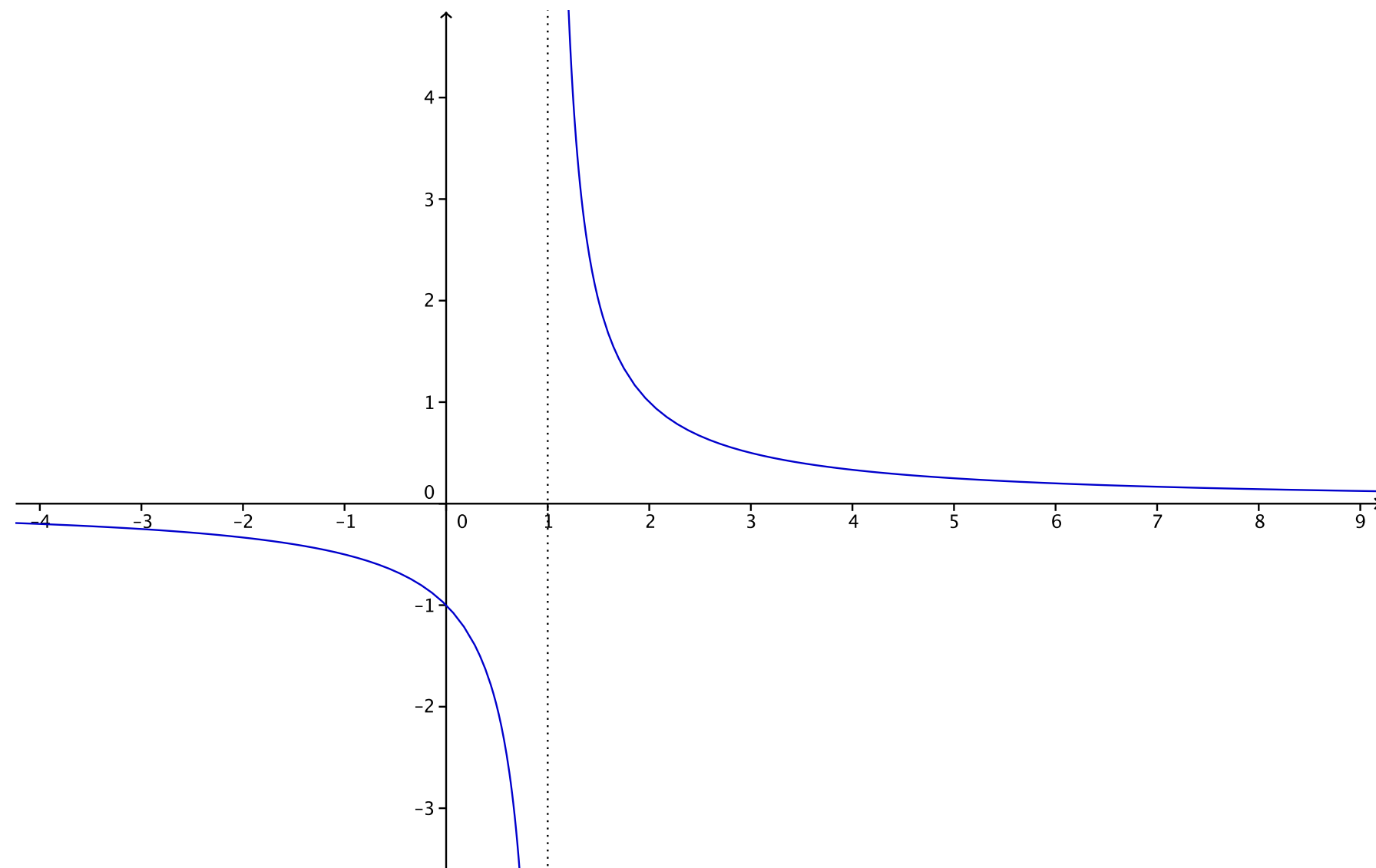
$$f(x) = \frac{1}{x - 1}$$



$$f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

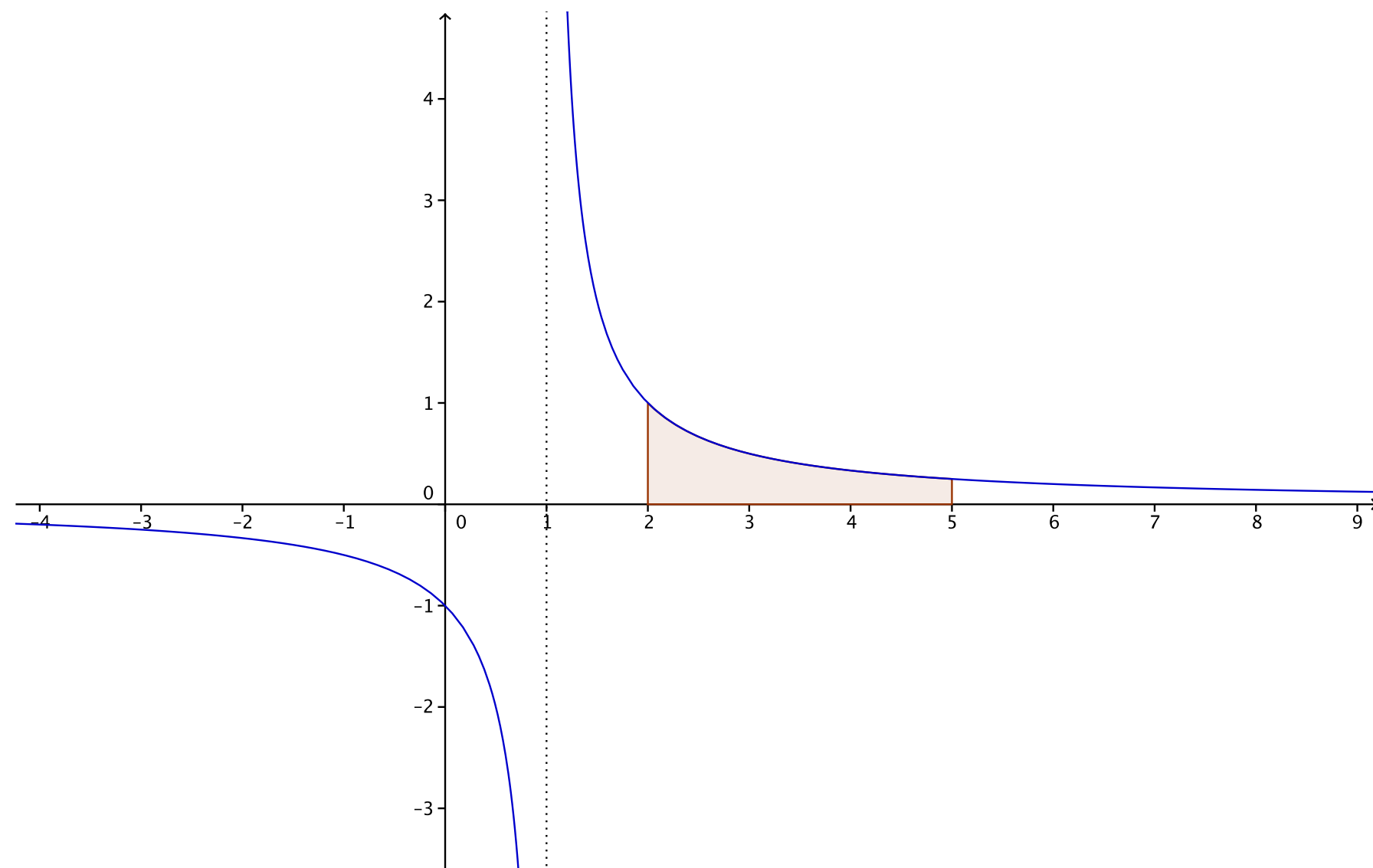


$f(x) = \frac{1}{x-1}$      $\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$     n'est pas une intégrale définie



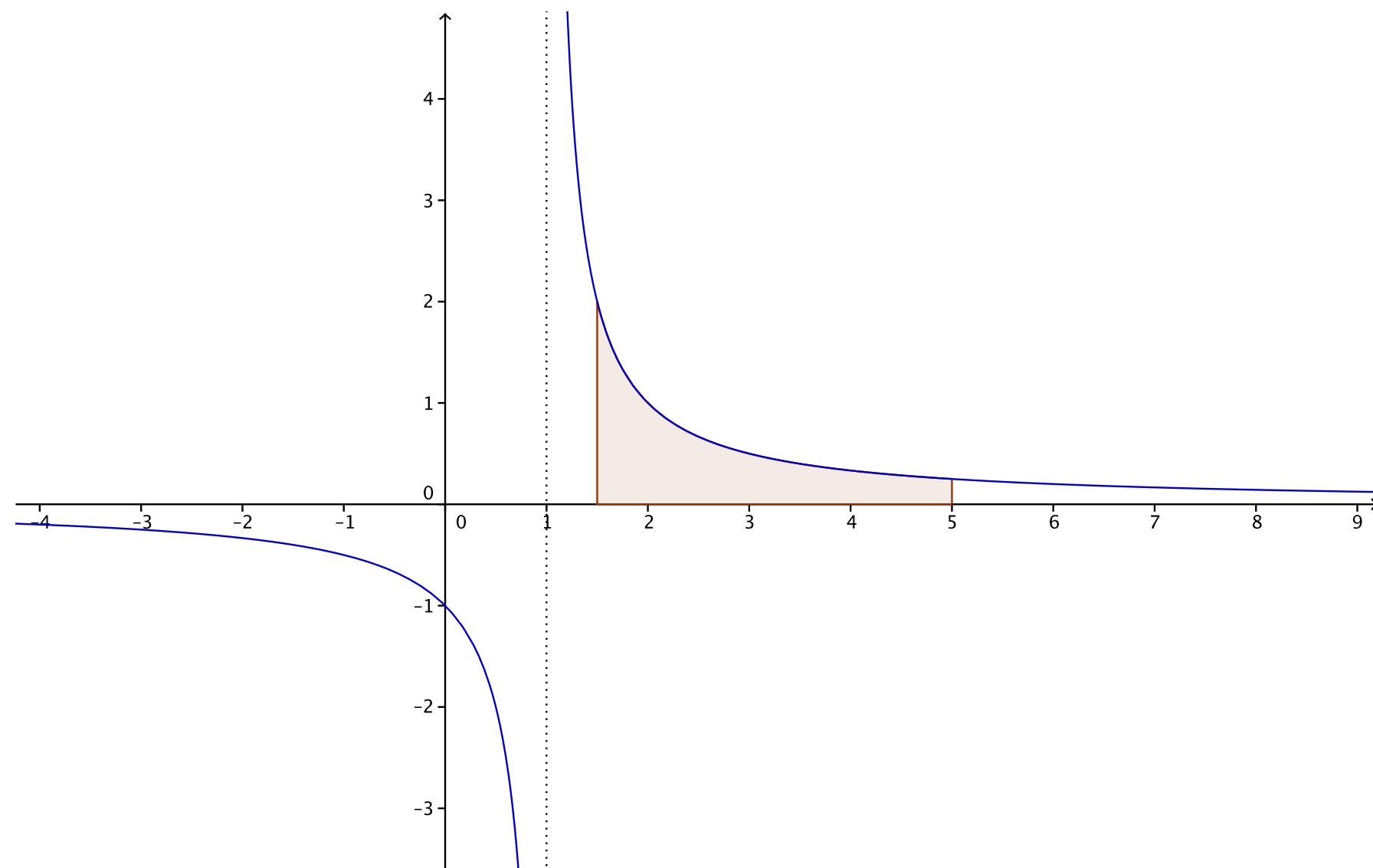
$f(x) = \frac{1}{x-1}$      $\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$     n'est pas une intégrale définie

$$\int_2^5 \frac{1}{x-1} dx$$



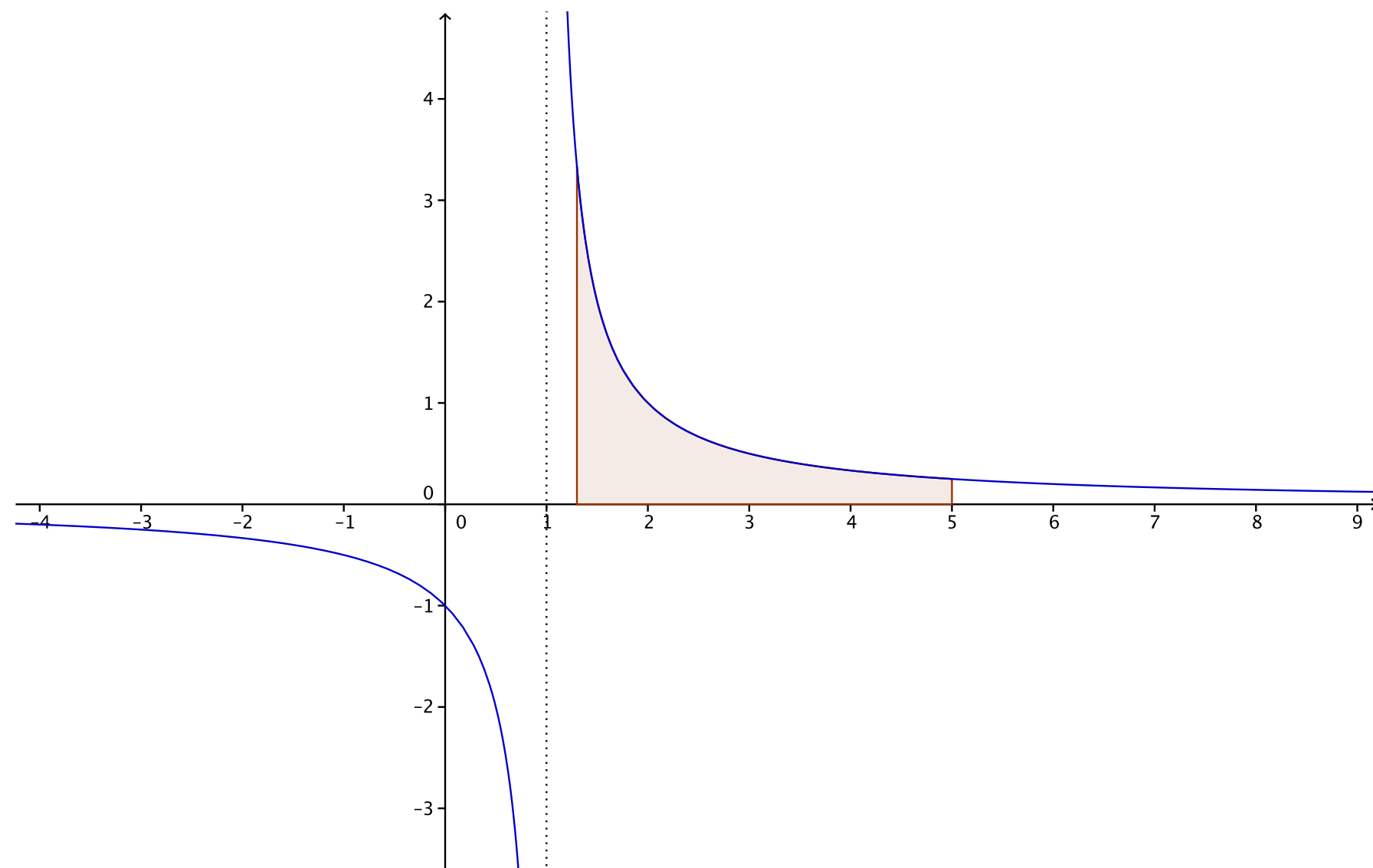
$f(x) = \frac{1}{x-1}$      $\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$     n'est pas une intégrale définie

$$\int_2^5 \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_{1,5}^5 \frac{1}{x-1} dx$$



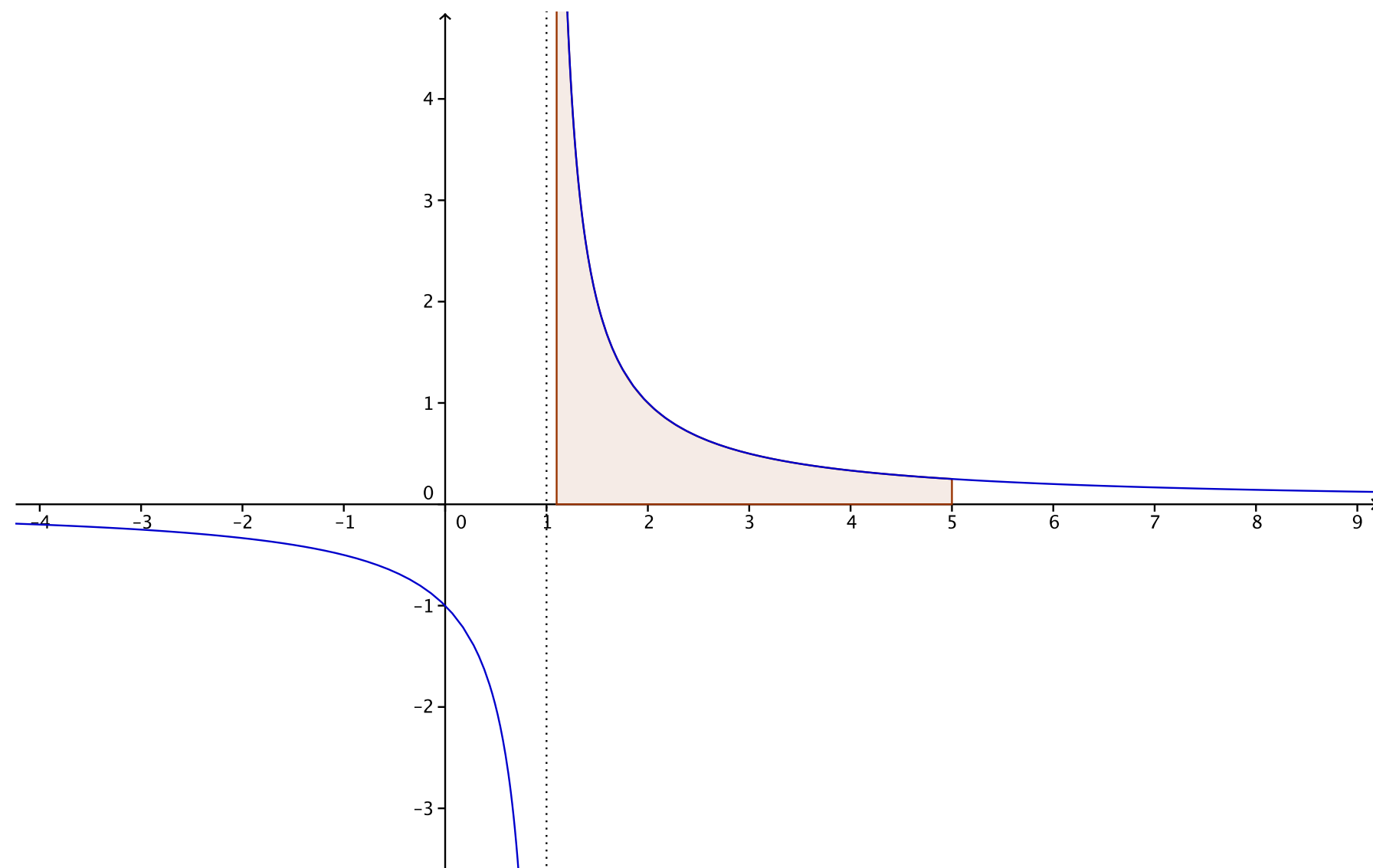
$f(x) = \frac{1}{x-1}$      $\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$     n'est pas une intégrale définie

$$\int_2^5 \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_{1,5}^5 \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_{1,3}^5 \frac{1}{x-1} dx$$



$f(x) = \frac{1}{x-1}$      $\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$     n'est pas une intégrale définie

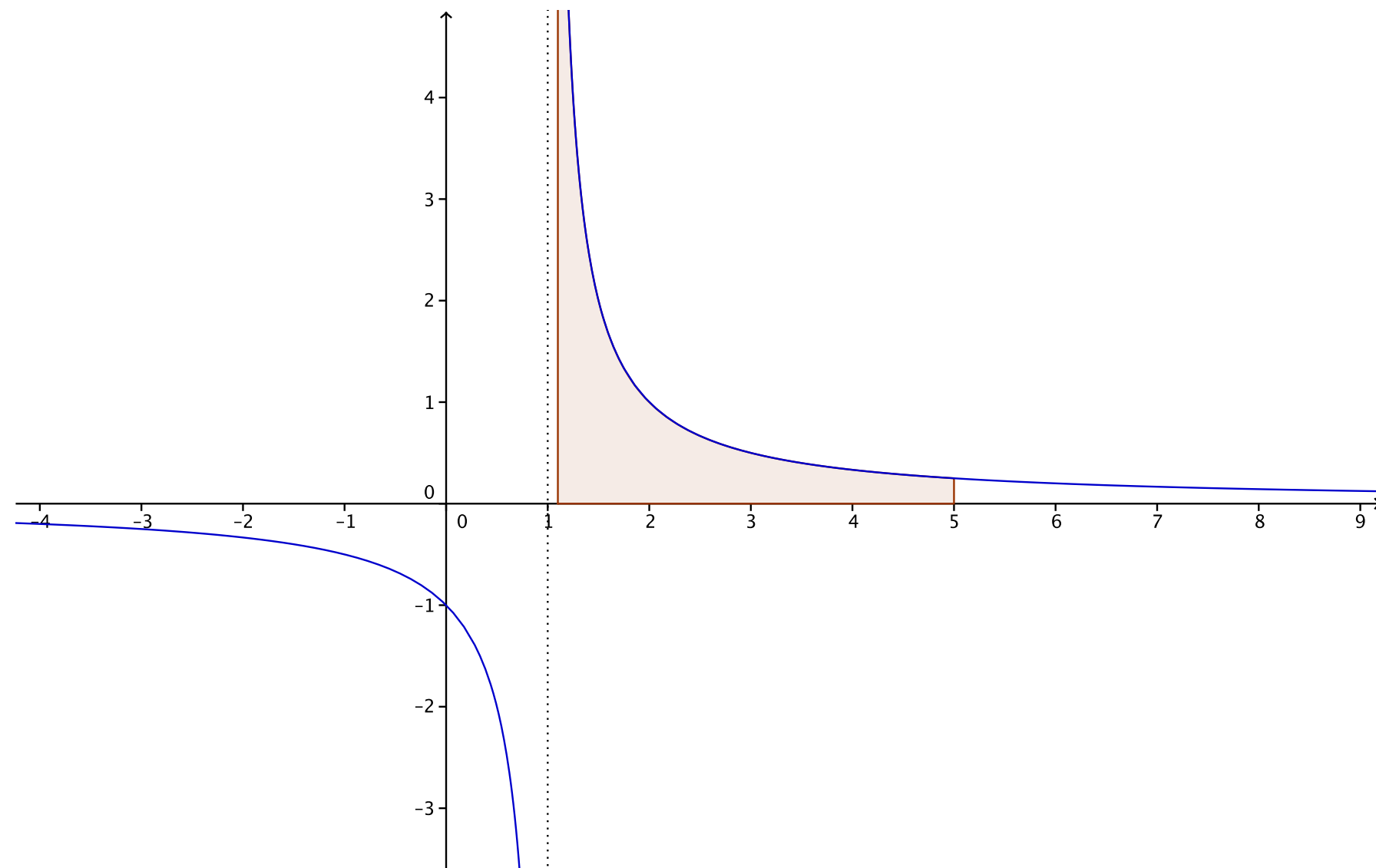
$$\int_2^5 \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_{1,5}^5 \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_{1,3}^5 \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_{1,1}^5 \frac{1}{x-1} dx$$



$f(x) = \frac{1}{x-1}$      $\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$     n'est pas une intégrale définie

$\int_2^5 \frac{1}{x-1} dx$  ,  $\int_{1,5}^5 \frac{1}{x-1} dx$  ,  $\int_{1,3}^5 \frac{1}{x-1} dx$  ,  $\int_{1,1}^5 \frac{1}{x-1} dx$

...

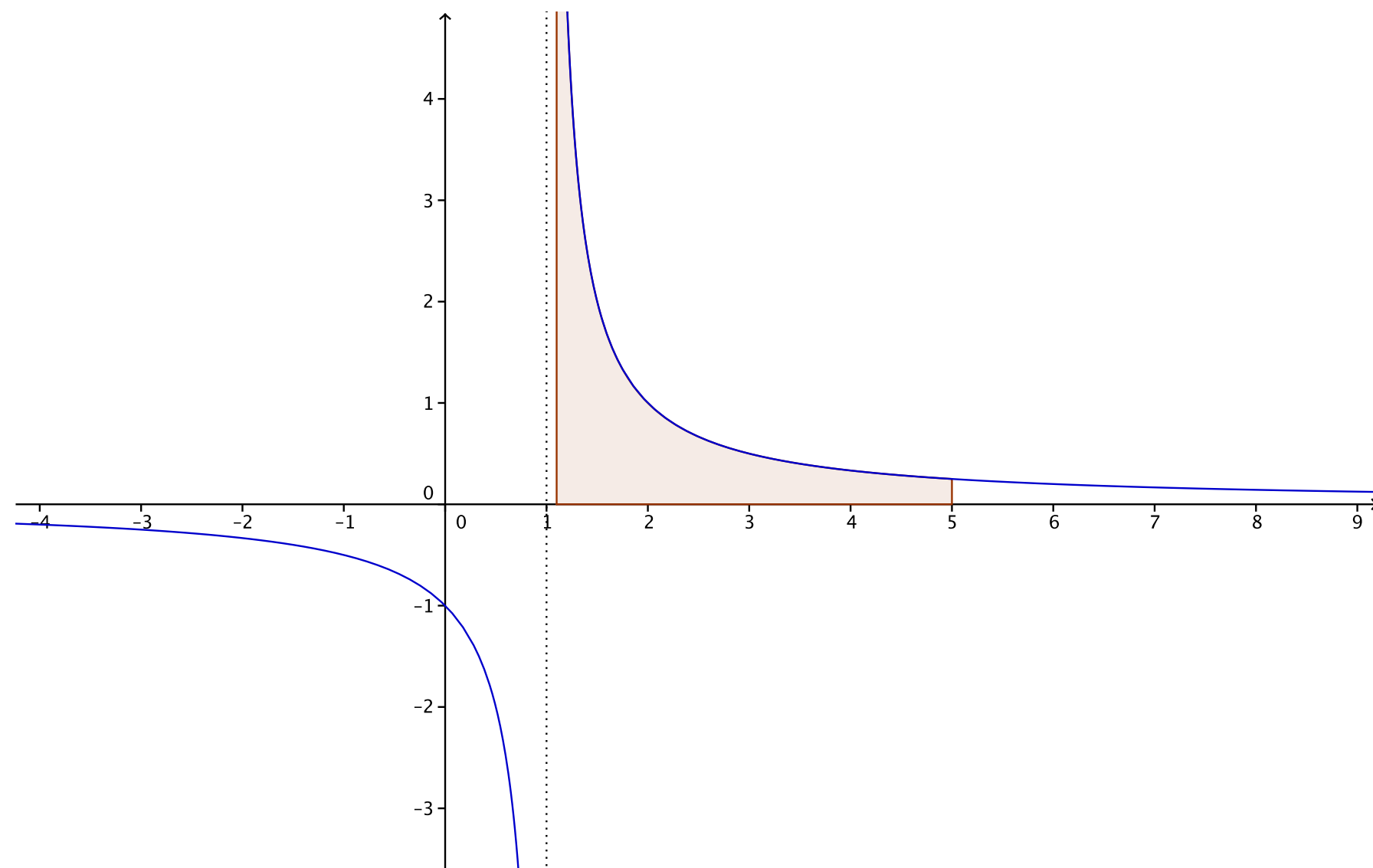


$f(x) = \frac{1}{x-1}$      $\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$     n'est pas une intégrale définie

$$\int_2^5 \frac{1}{x-1} dx, \int_{1,5}^5 \frac{1}{x-1} dx, \int_{1,3}^5 \frac{1}{x-1} dx, \int_{1,1}^5 \frac{1}{x-1} dx$$

...

$$A(s) = \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx$$

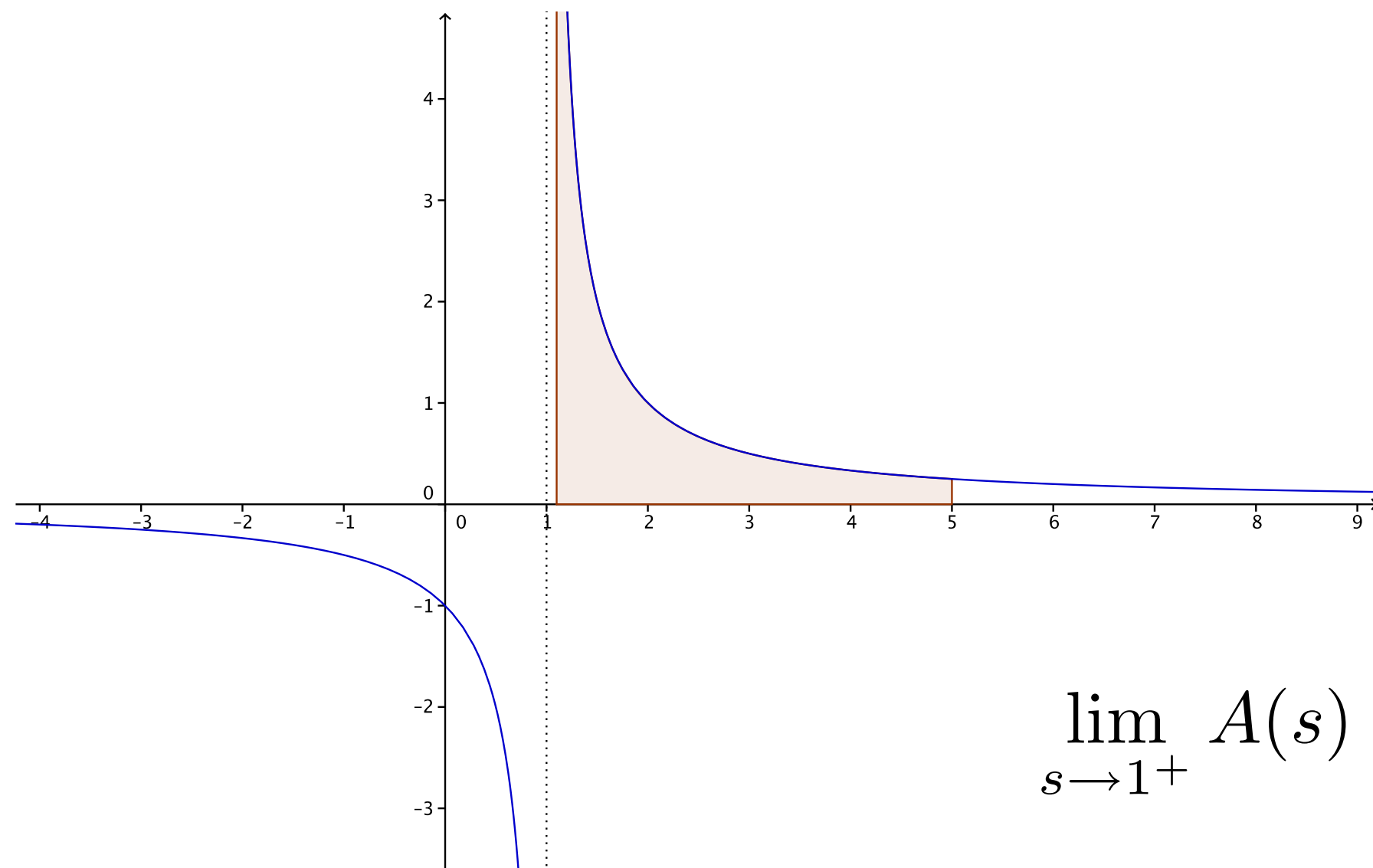




$f(x) = \frac{1}{x-1}$      $\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$     n'est pas une intégrale définie

$\int_2^5 \frac{1}{x-1} dx$  ,  $\int_{1,5}^5 \frac{1}{x-1} dx$  ,  $\int_{1,3}^5 \frac{1}{x-1} dx$  ,  $\int_{1,1}^5 \frac{1}{x-1} dx$

...

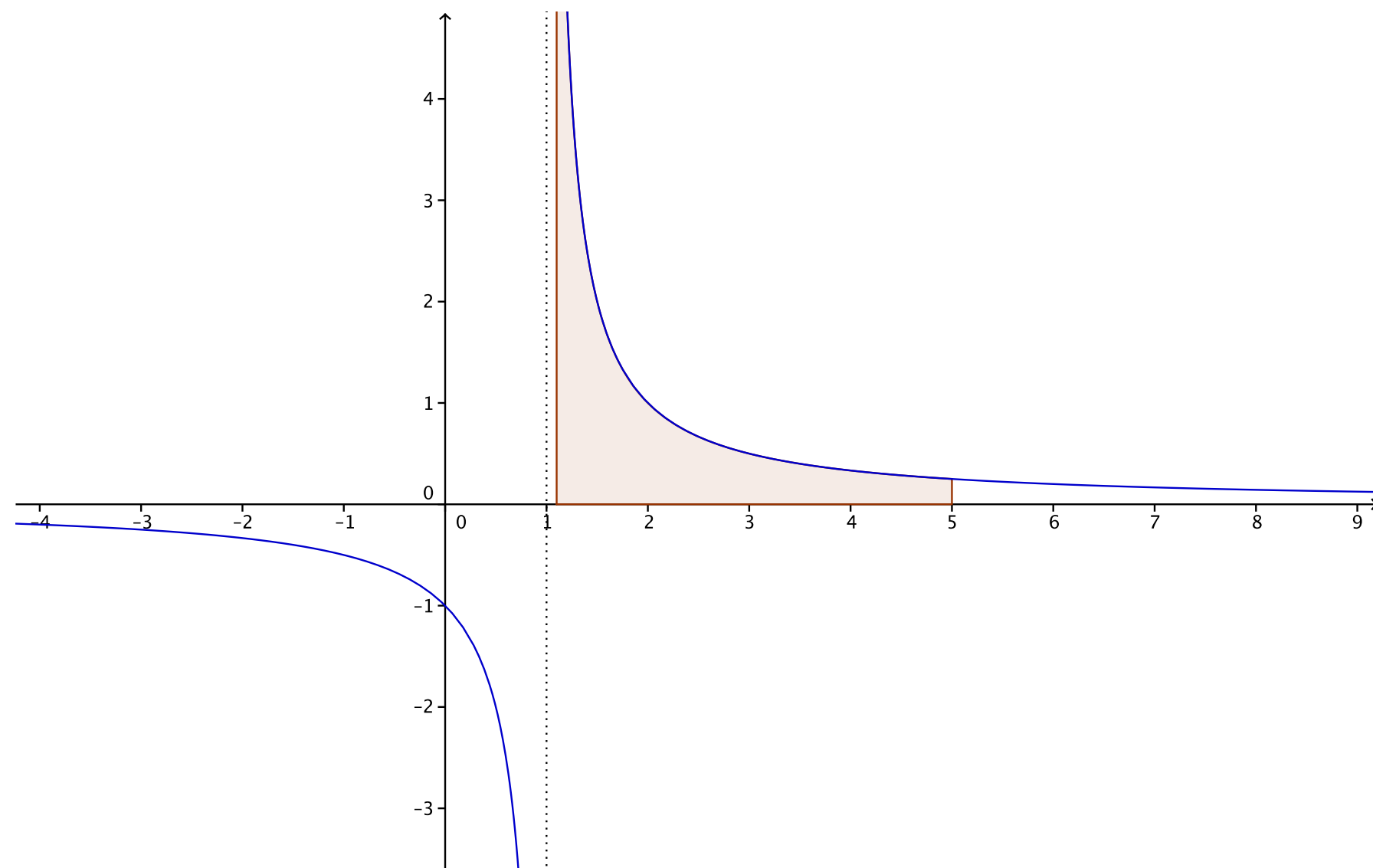


$$A(s) = \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} A(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx$$

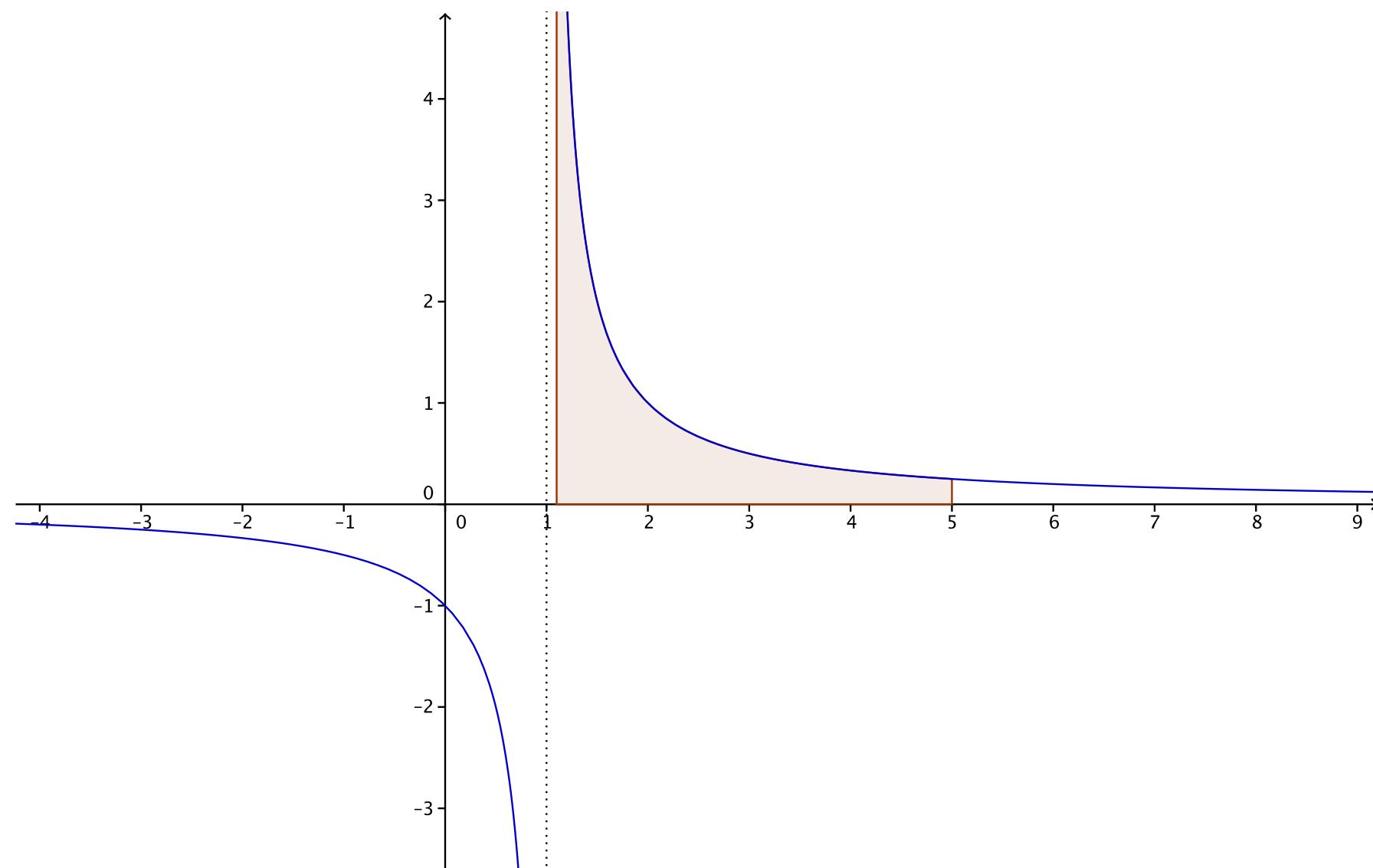
$f(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$  n'est pas une intégrale définie

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} A(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx$$



$f(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$  n'est pas une intégrale définie

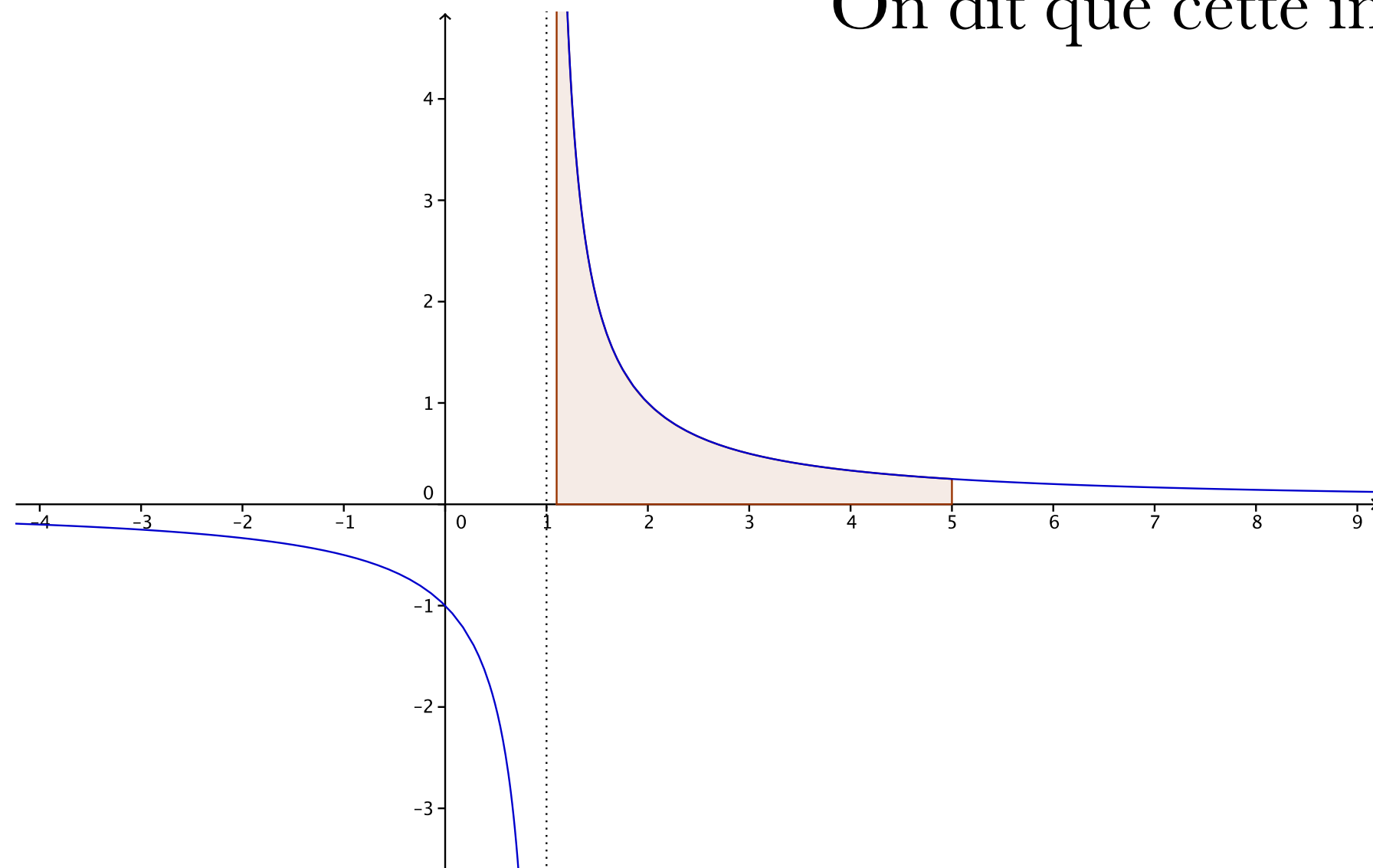
$$\lim_{s \rightarrow 1^+} A(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx = \int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$$



$f(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$  n'est pas une intégrale définie

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} A(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx = \int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$$

On dit que cette intégrale est impropre.



## Example

$$\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx$$

## Example

$$\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx$$

## Example

$$\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \ln |x-1| \Big|_s^5 \right)$$

## Example

$$\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \ln |x-1| \Big|_s^5 \right) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (\ln 4 - \ln |s-1|)$$



## Example

$$\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \ln |x-1| \Big|_s^5 \right) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (\ln 4 - \ln |s-1|)$$

$$= \ln 4 - \lim_{s \rightarrow 1^+} \ln |s-1|$$

## Example

$$\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \ln |x-1| \Big|_s^5 \right) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (\ln 4 - \ln |s-1|)$$

$$= \ln 4 - \lim_{s \rightarrow 1^+} \ln |s-1| = \ln 4 - (-\infty)$$

## Example

$$\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \ln |x-1| \Big|_s^5 \right) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (\ln 4 - \ln |s-1|)$$

$$= \ln 4 - \lim_{s \rightarrow 1^+} \ln |s-1| = \ln 4 - (-\infty) = \infty$$

## Exemple

$$\int_1^5 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^5 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \ln |x-1| \Big|_s^5 \right) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (\ln 4 - \ln |s-1|)$$

$$= \ln 4 - \lim_{s \rightarrow 1^+} \ln |s-1| = \ln 4 - (-\infty) = \infty$$

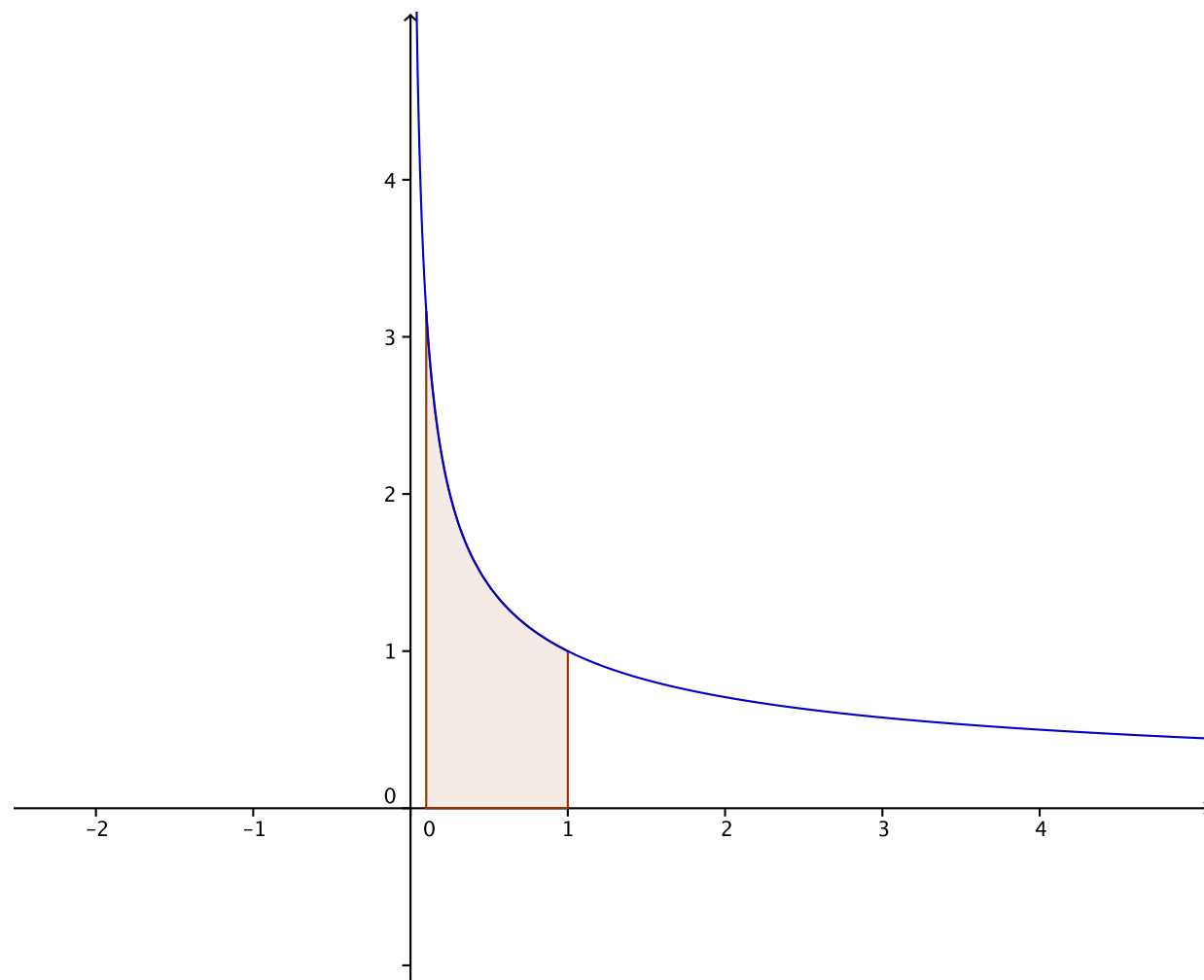
Si une intégrale impropre tend vers  $\infty$  ou  $-\infty$   
alors on dit que l'intégrale **diverge**.

## Example

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

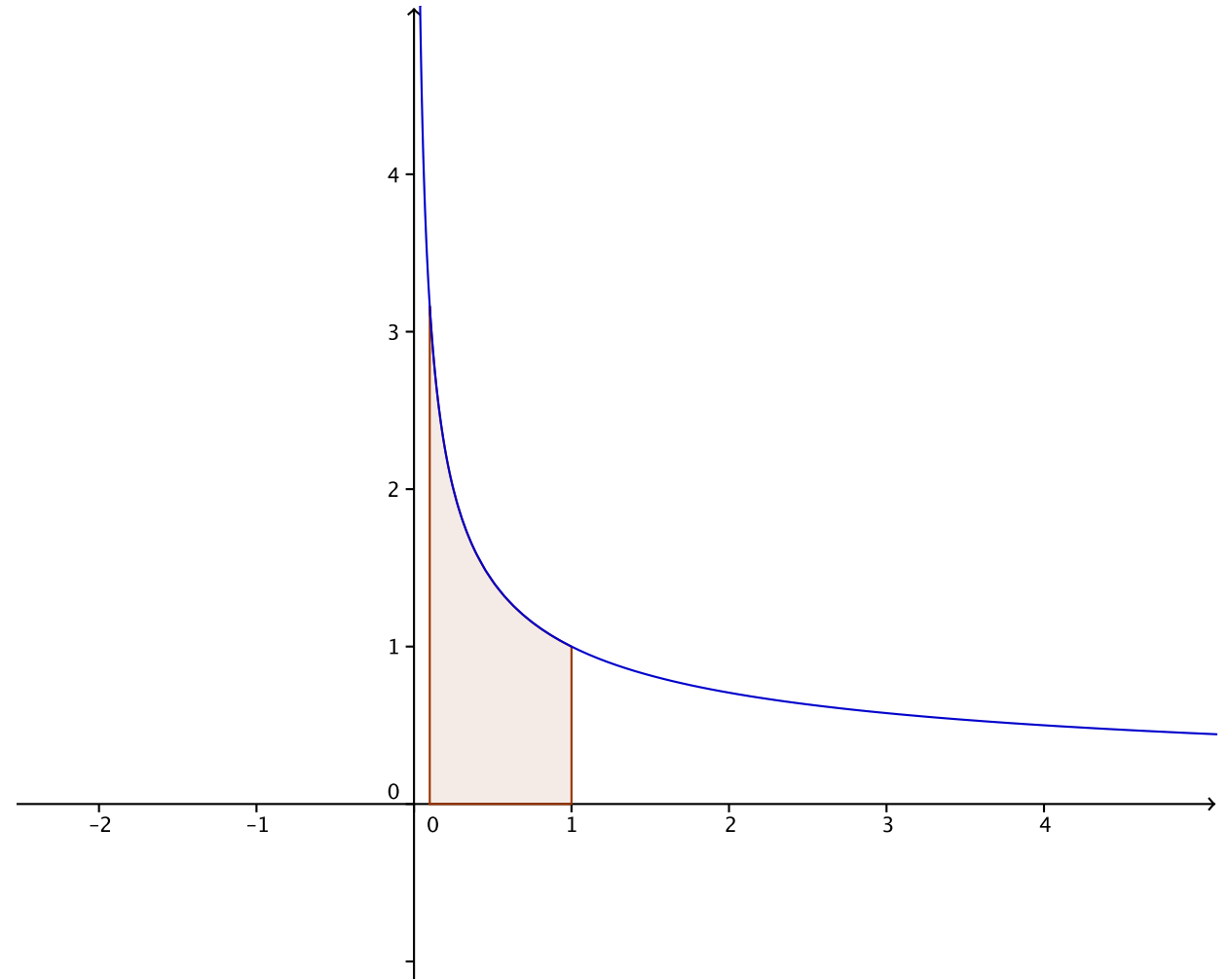
# Example

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$



# Example

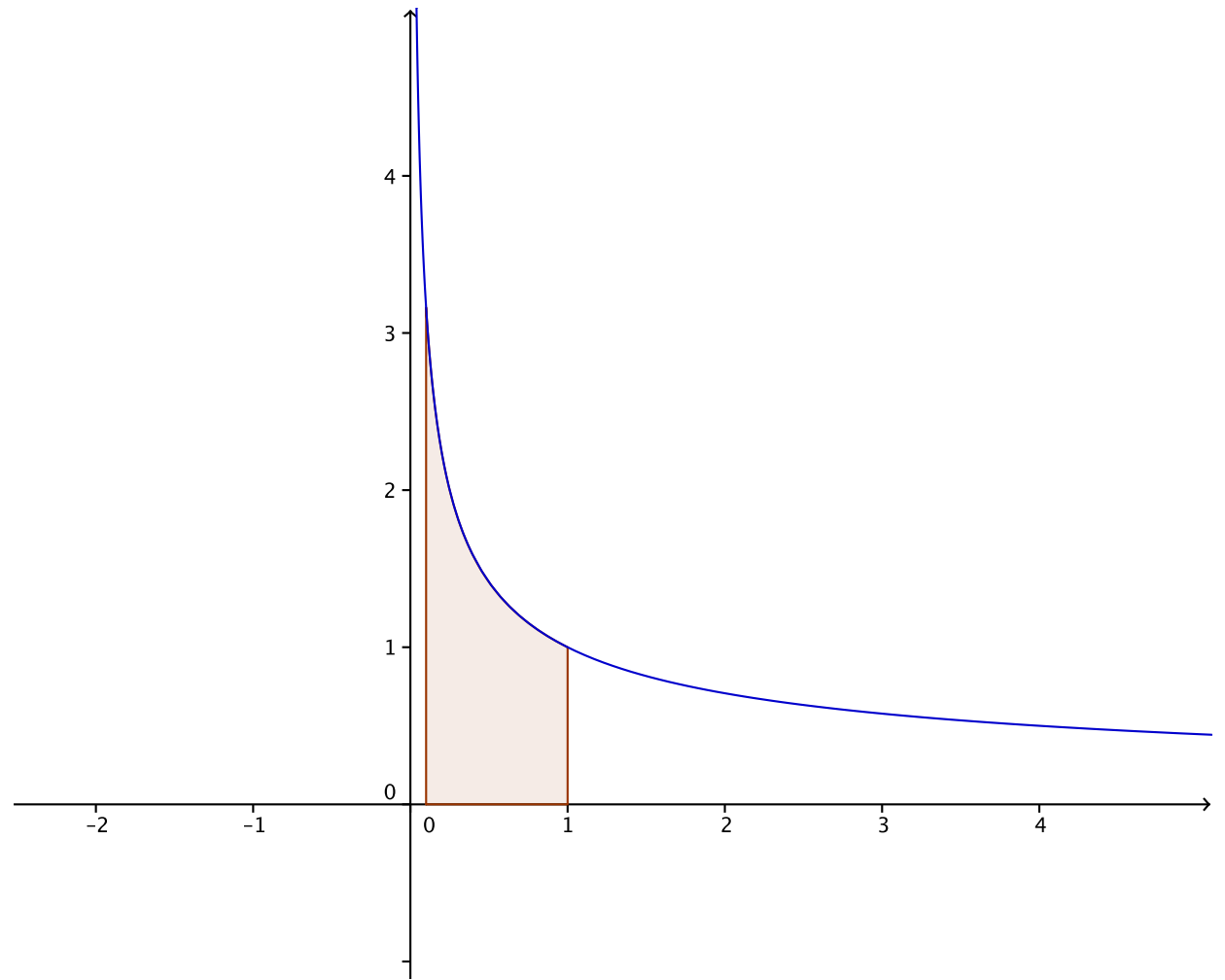
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$



# Example

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_s^1$$

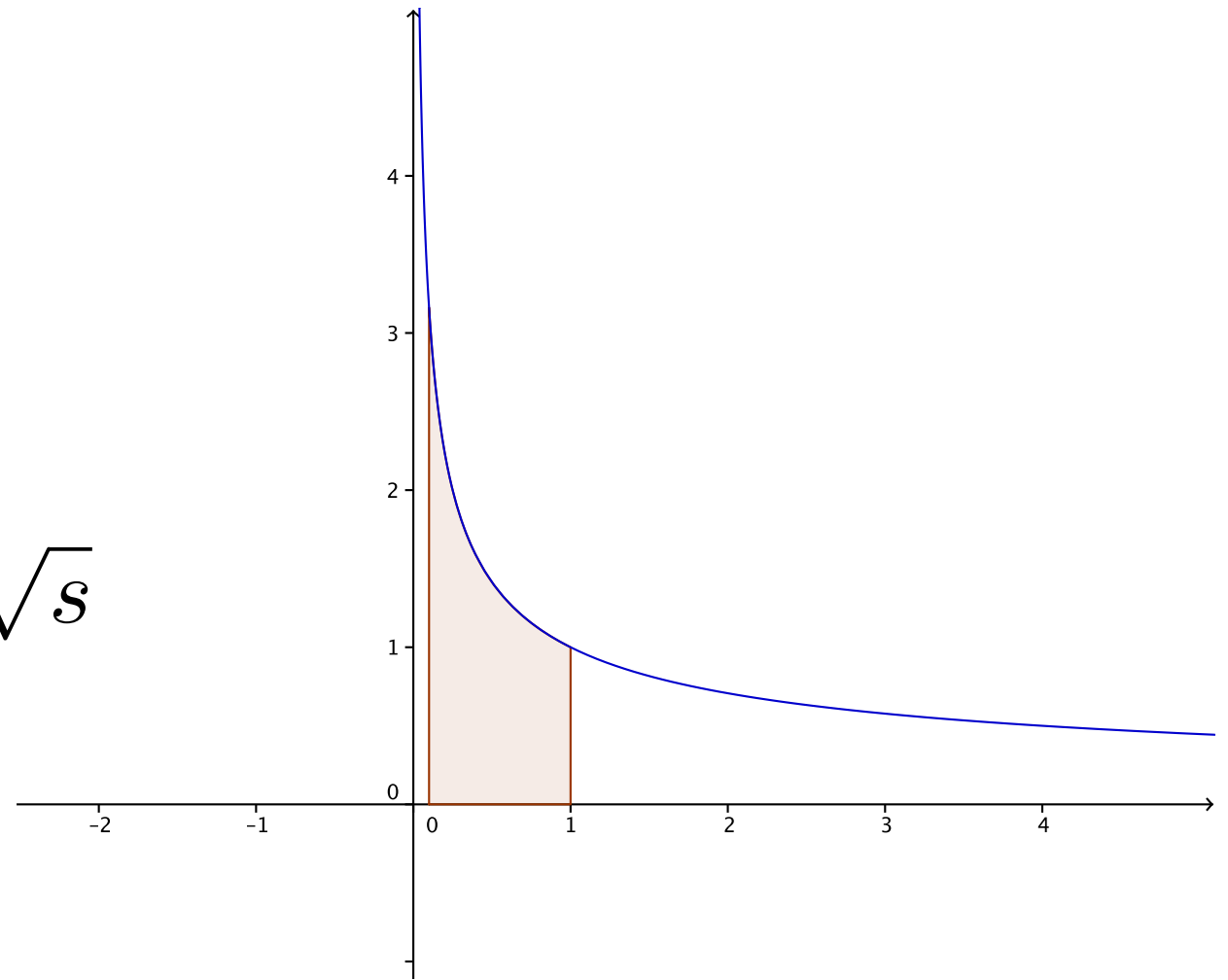




# Example

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_s^1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{s}$$

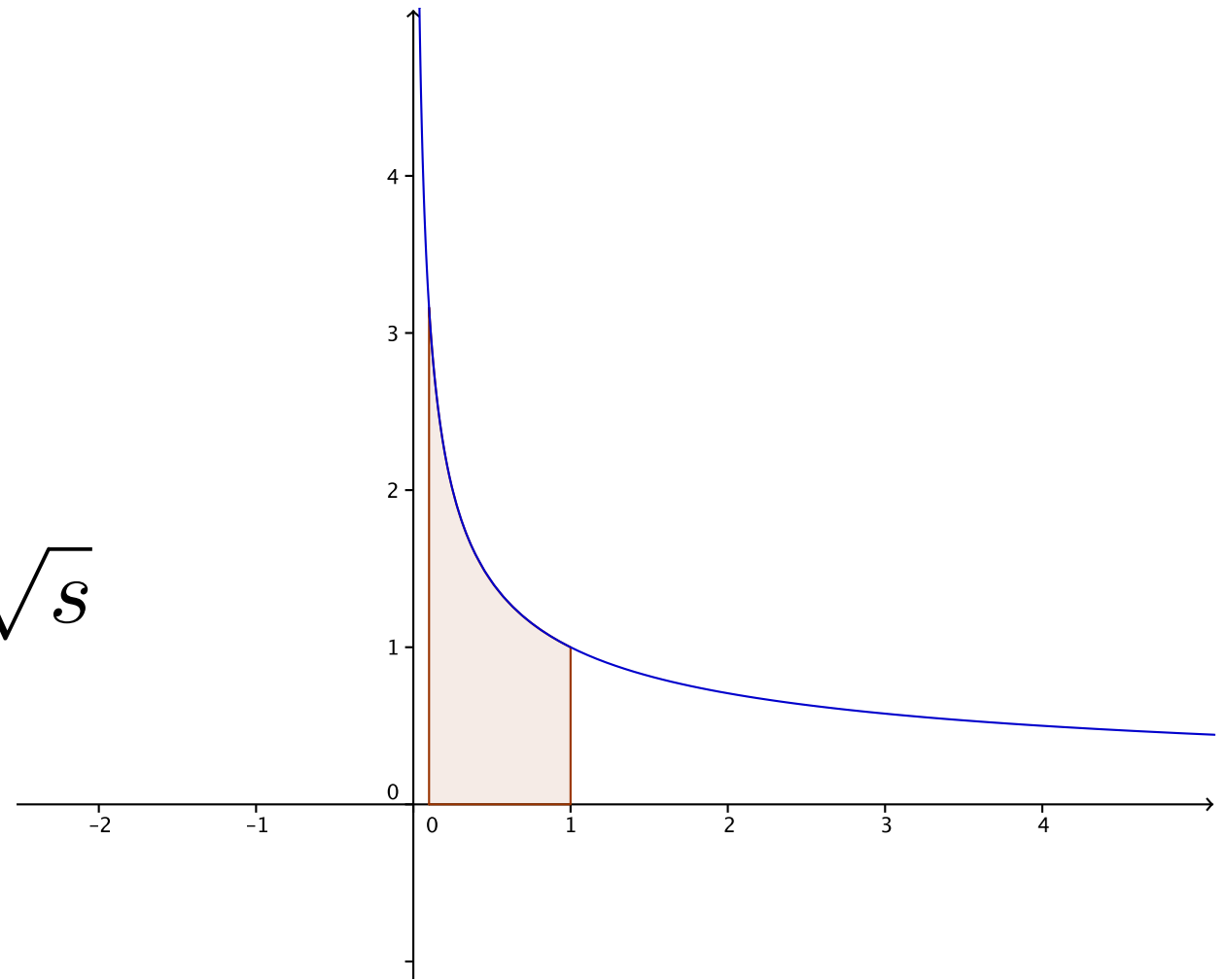


# Example

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_s^1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{s}$$

$$= 2$$

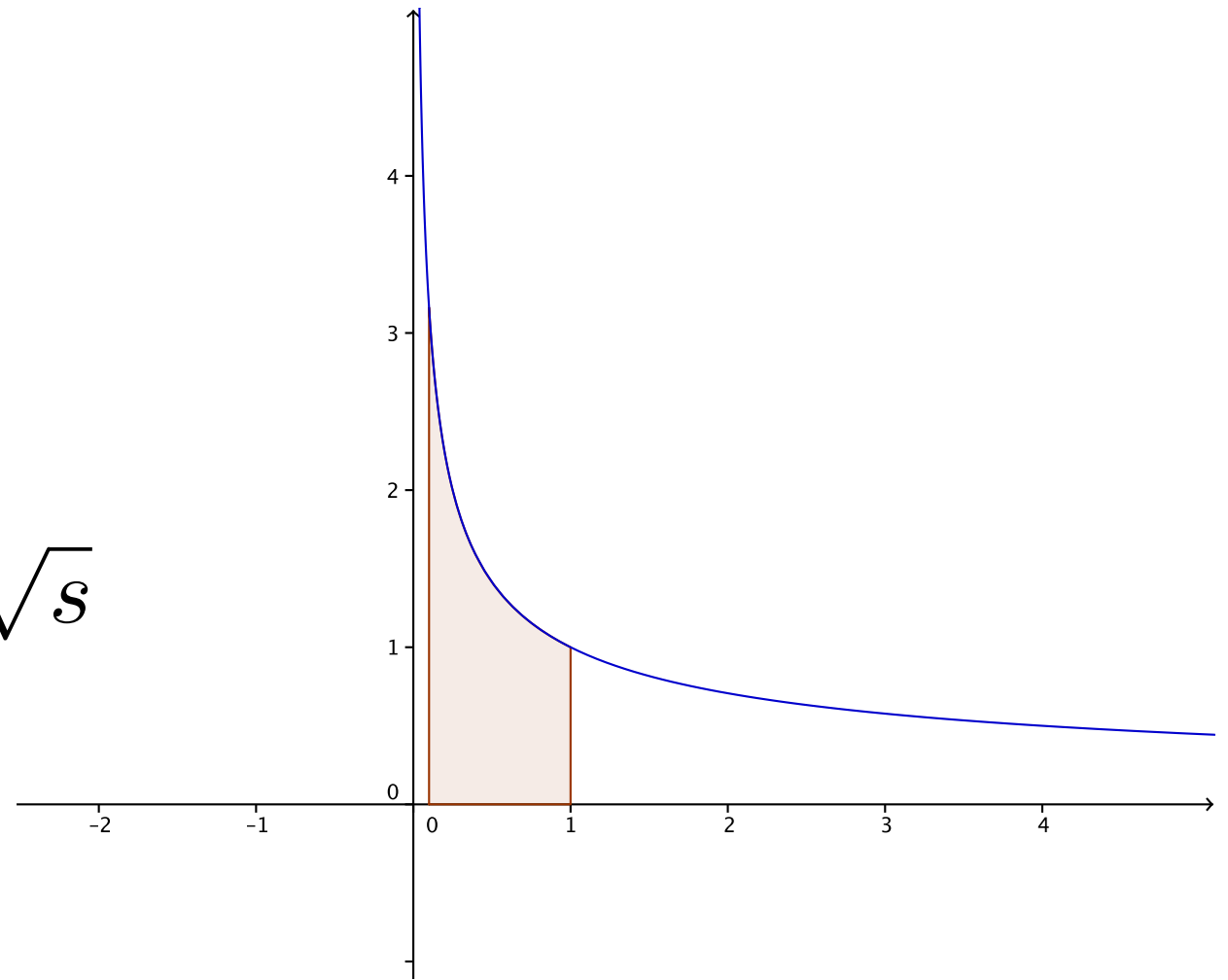


## Exemple

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_s^1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{s}$$

$$= 2$$



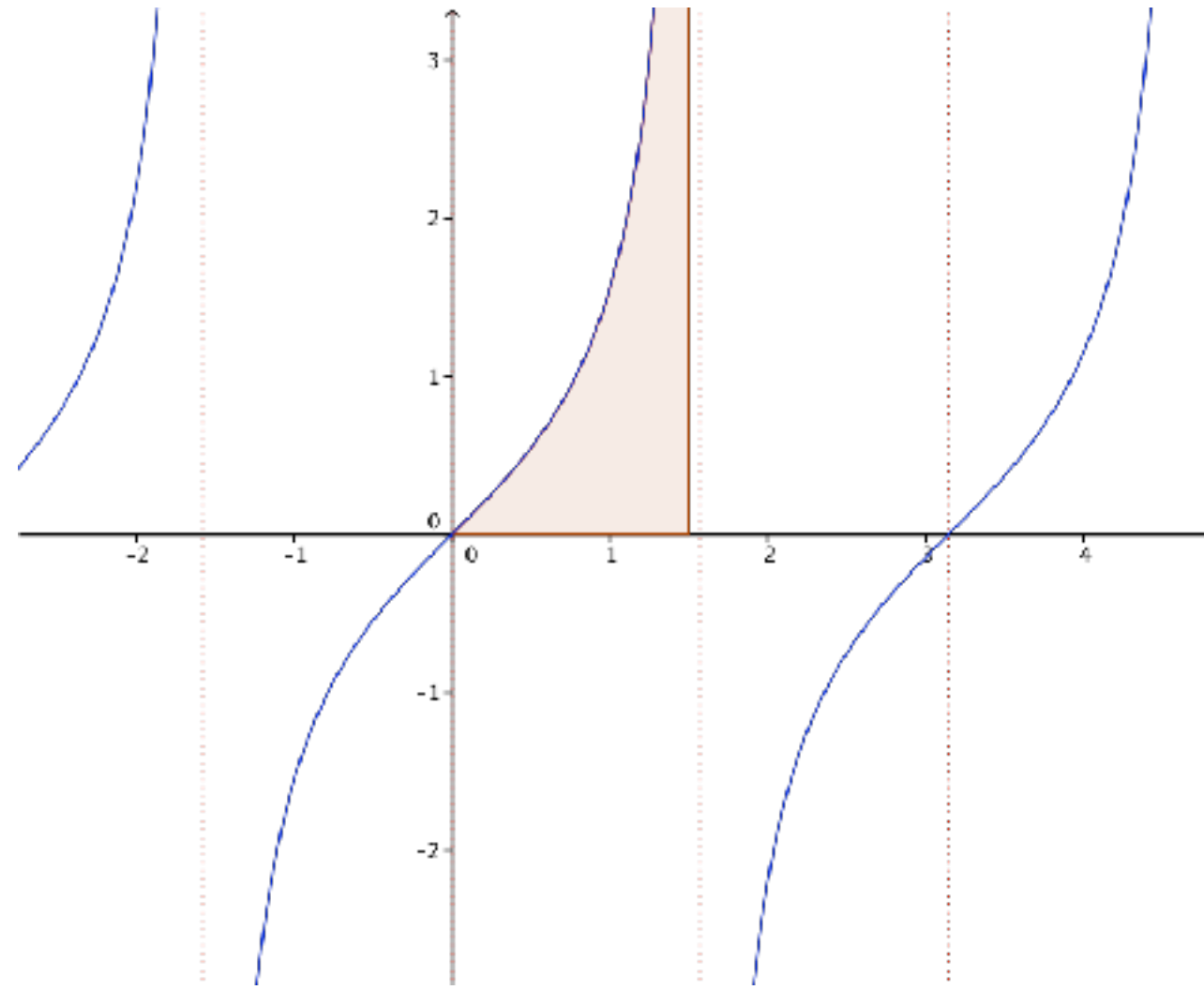
Si une intégrale impropre donne un nombre, on dit qu'elle **converge**.

# Example

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$$

# Example

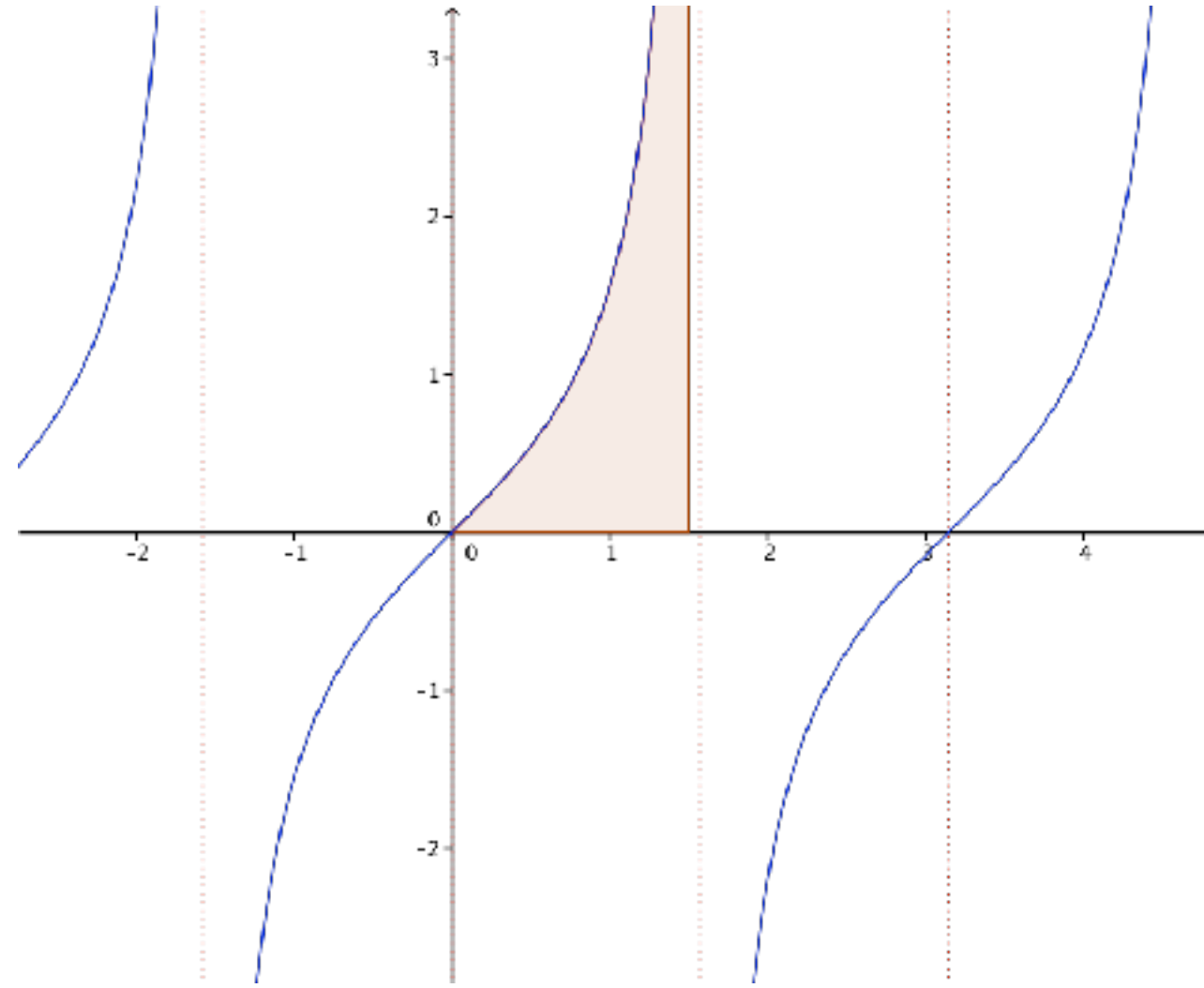
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$$



# Example

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x \, dx$$

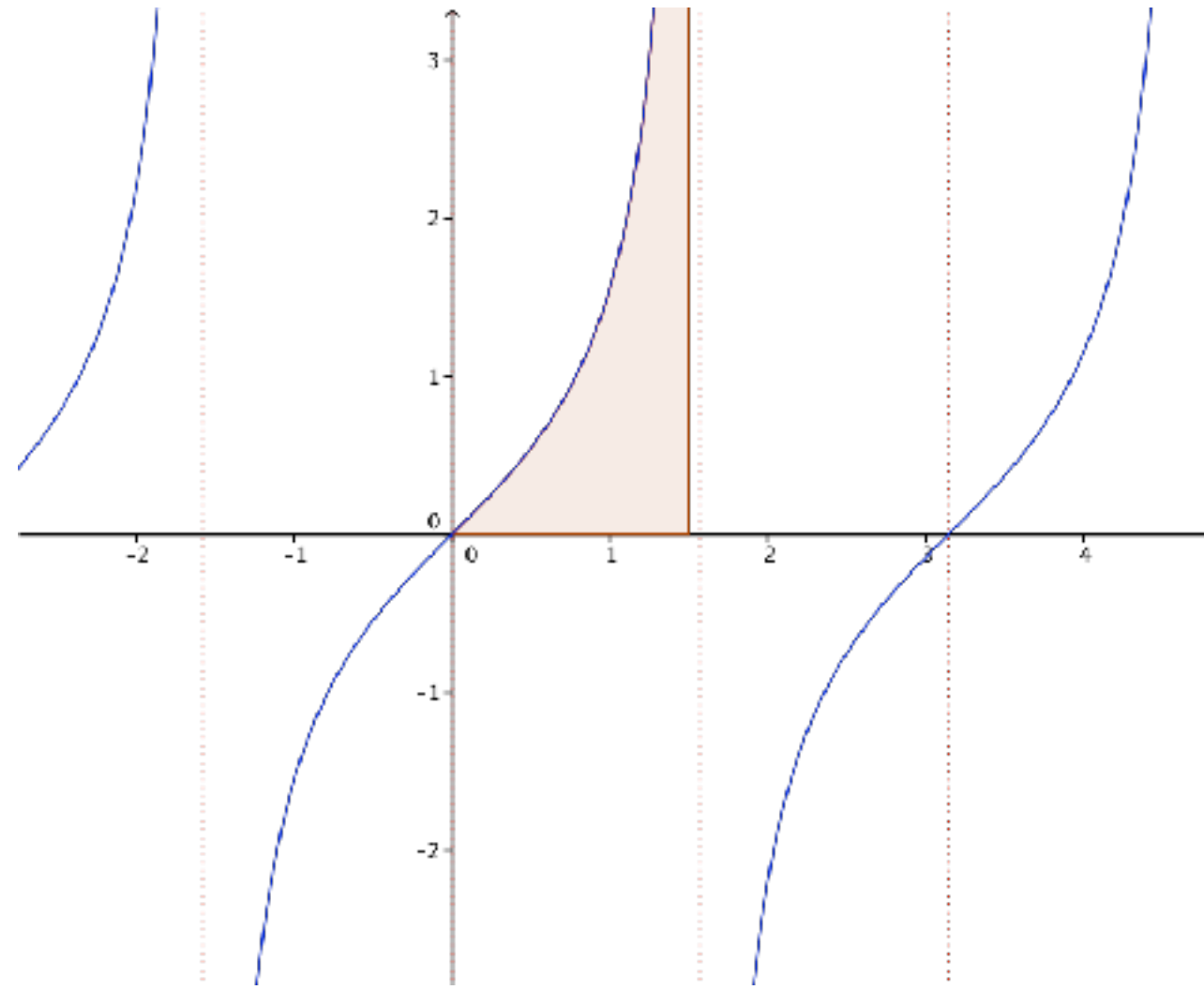


# Example

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln |\sec x| \Big|_0^t$$



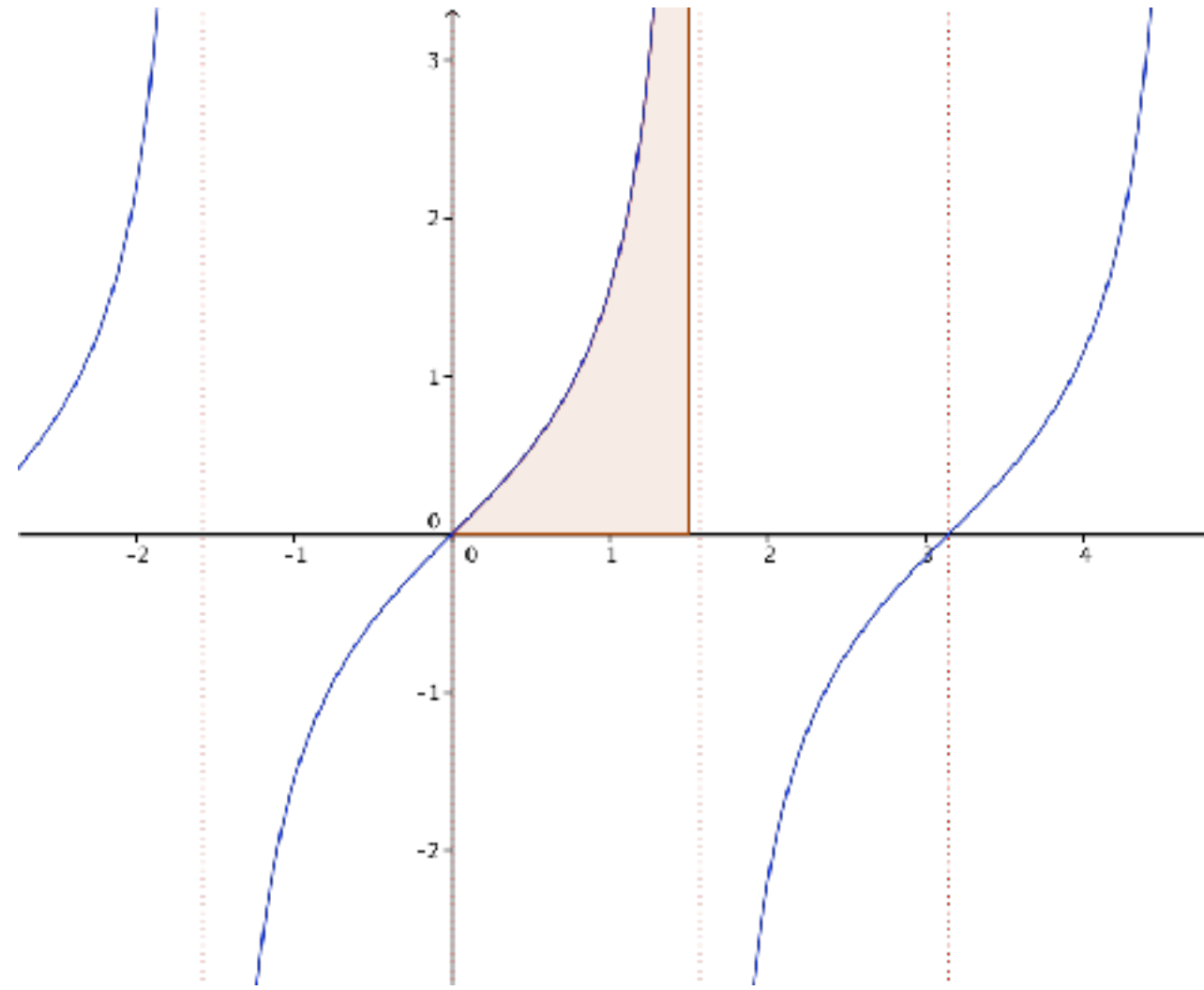
# Example

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln |\sec x| \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln |\sec t| - \ln |\sec 0|$$





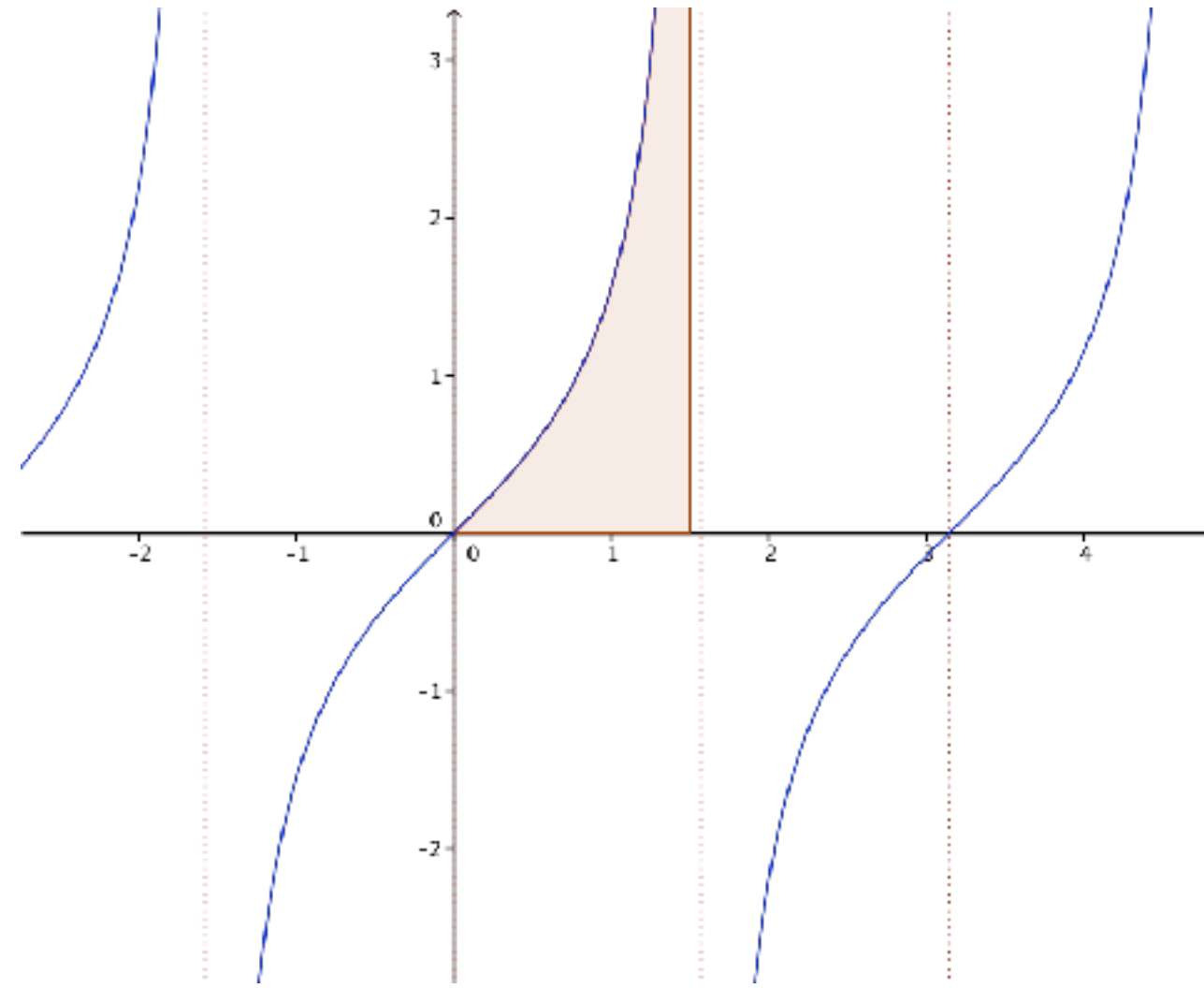
# Example

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln |\sec x| \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln |\sec t| - \ln |\sec 0| = \ln |\infty| - \ln |1|$$



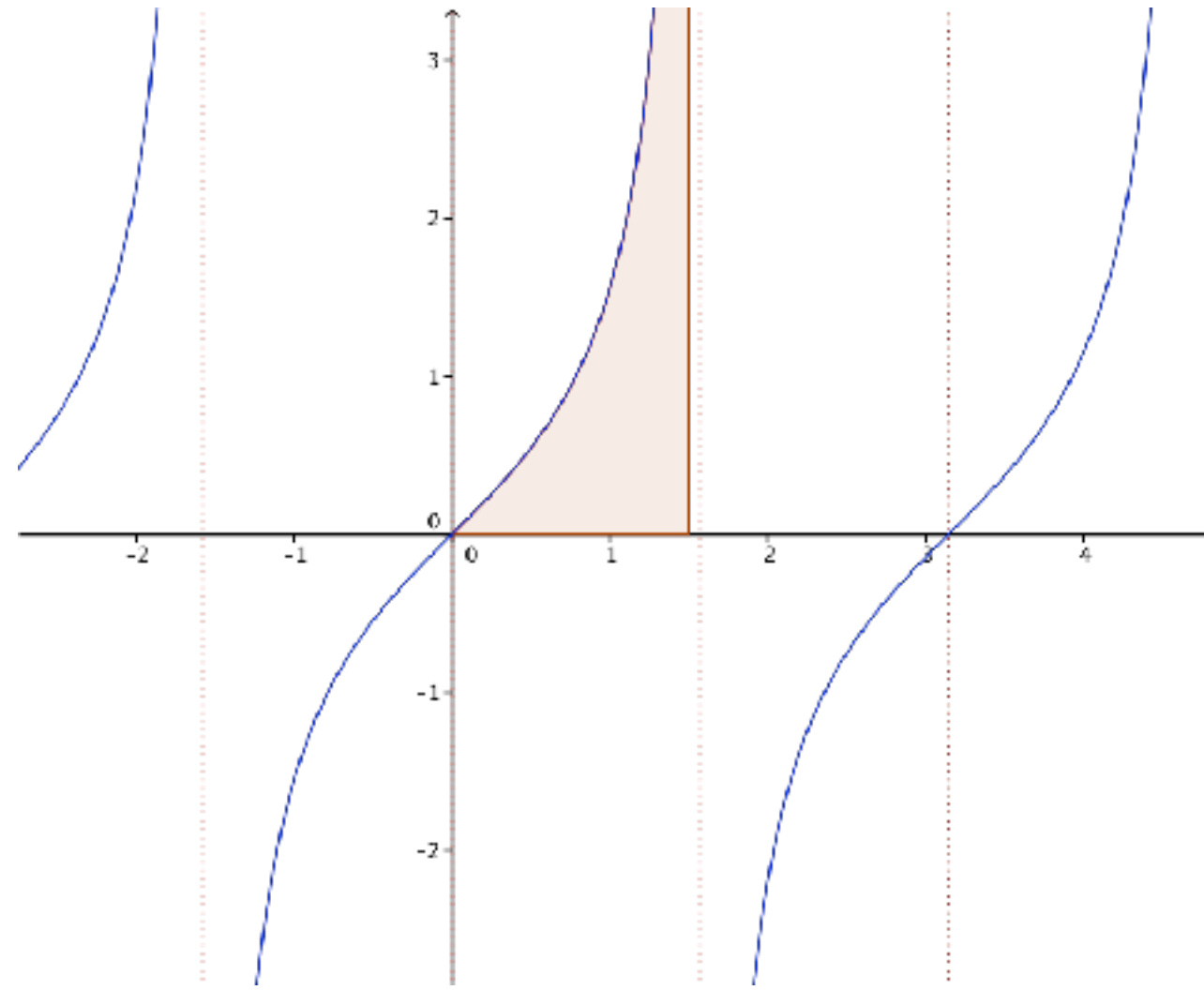
# Example

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln |\sec x| \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln |\sec t| - \ln |\sec 0| = \ln |\infty| - \ln |1| = \infty$$



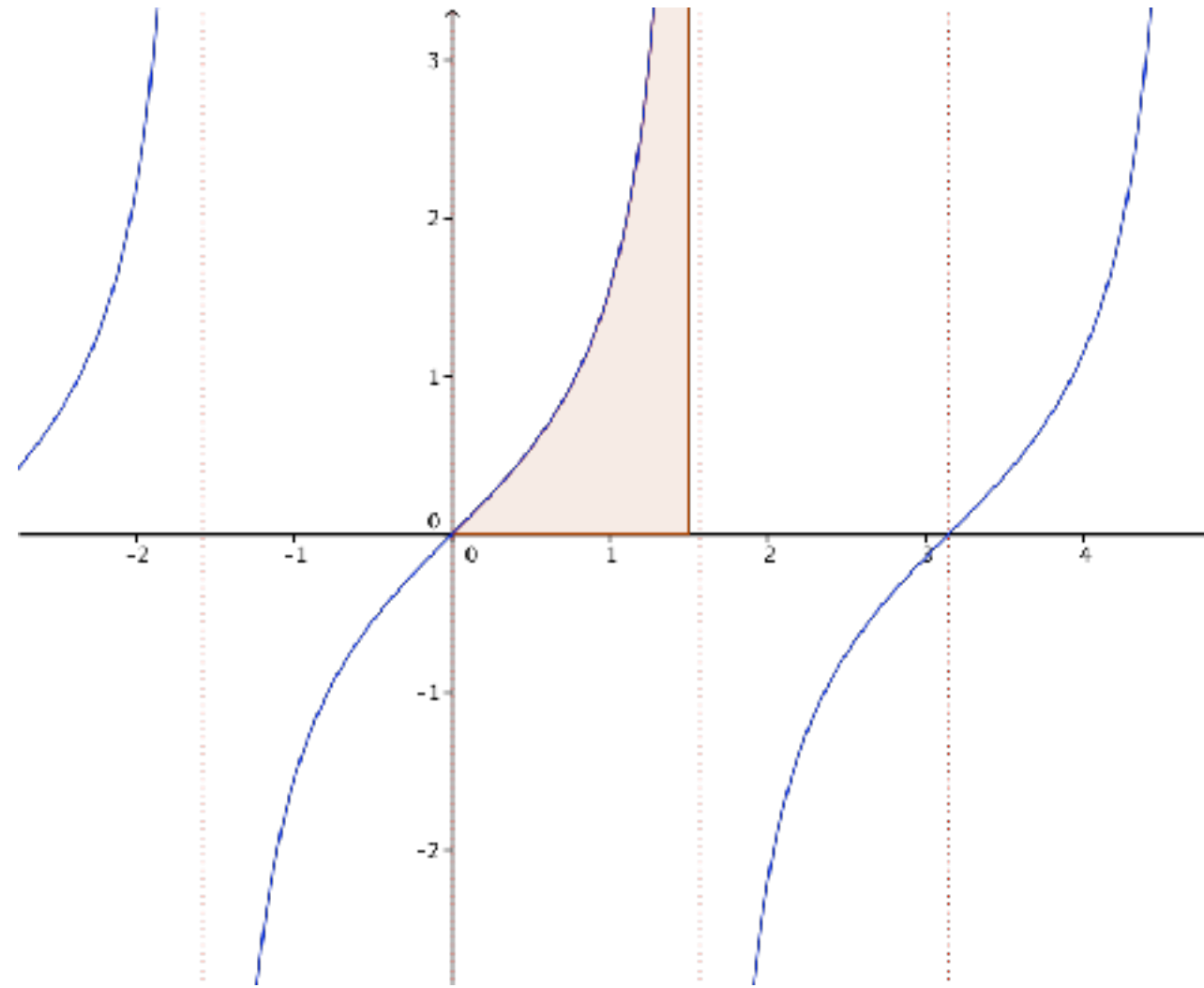
## Exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x \, dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln |\sec x| \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln |\sec t| - \ln |\sec 0| = \ln |\infty| - \ln |1| = \infty$$



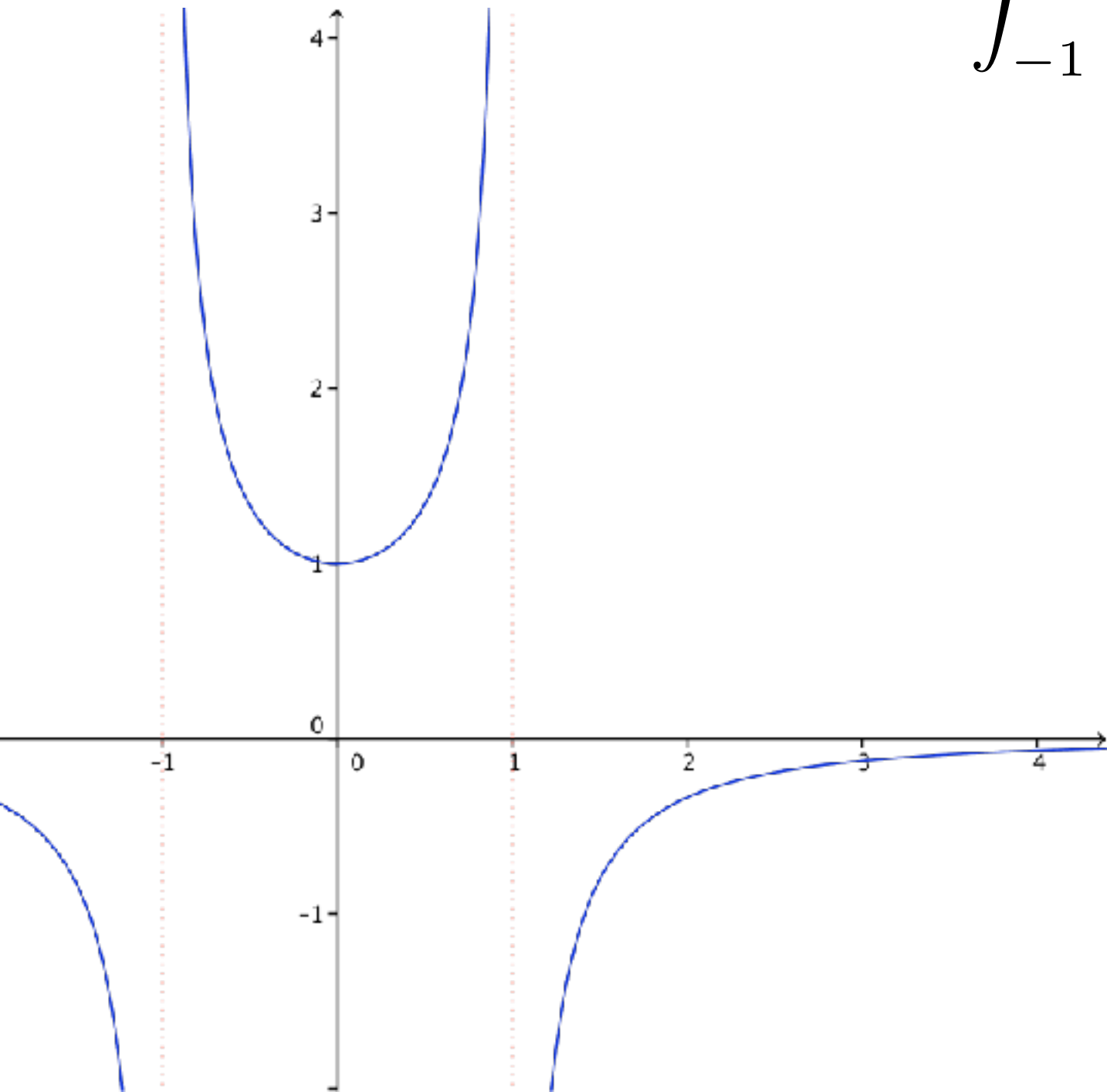
Donc l'intégrale impropre diverge.

Comment gérer une intégrale de la forme

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

Comment gérer une intégrale de la forme

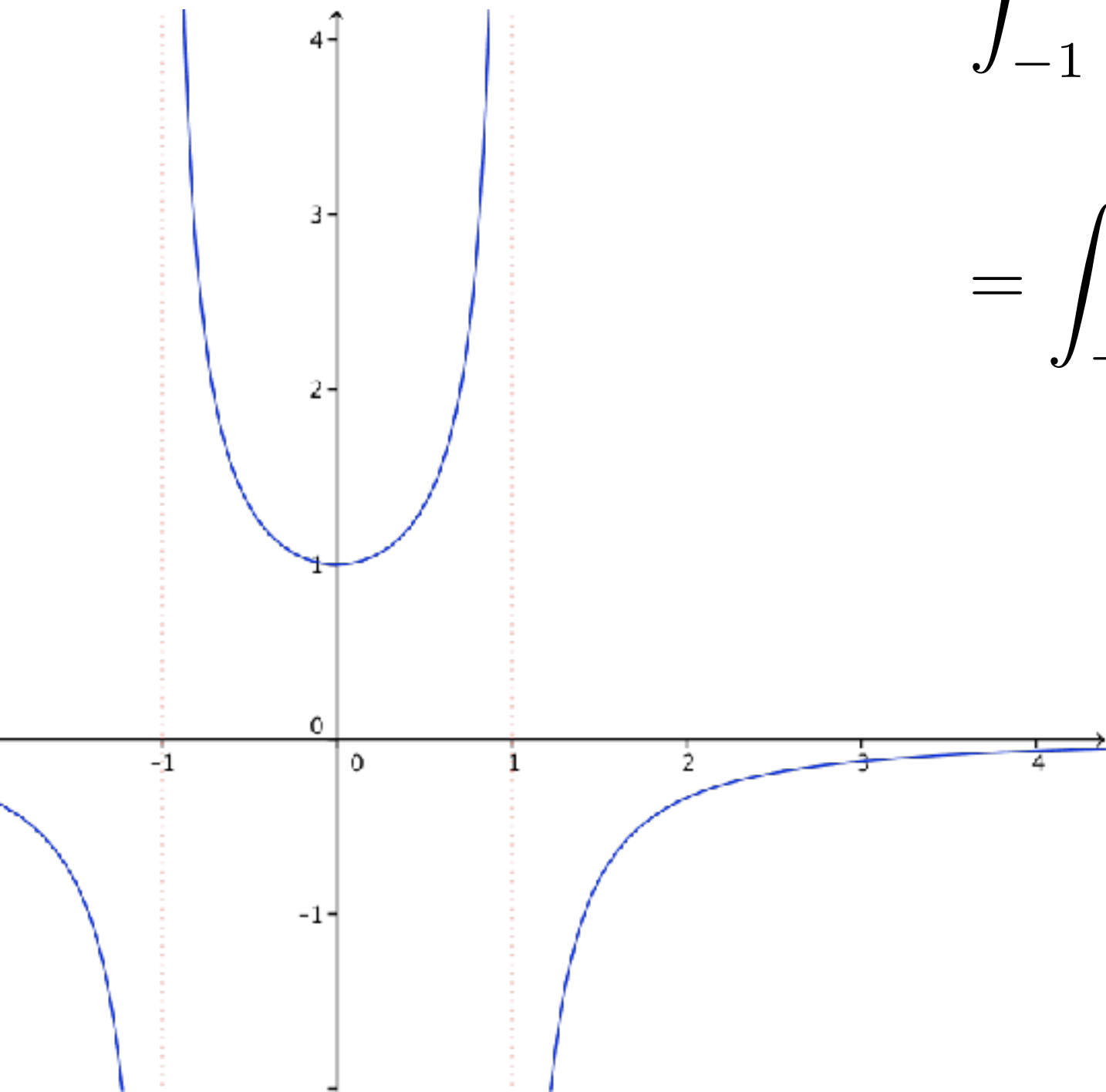
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$



Comment gérer une intégrale de la forme

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

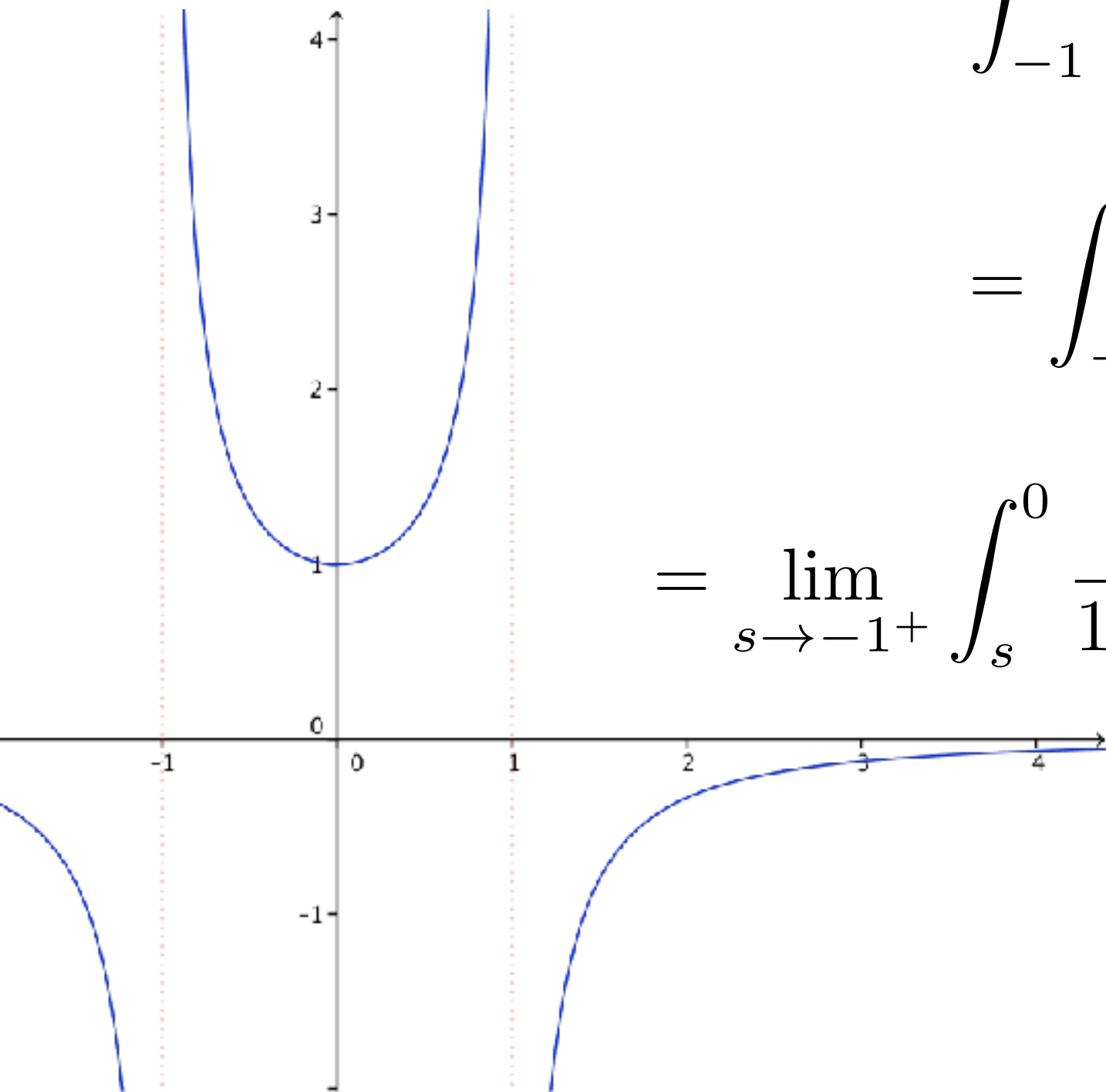


Comment gérer une intégrale de la forme

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow -1^+} \int_s^0 \frac{1}{1-x^2} dx + \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x^2} dx$$

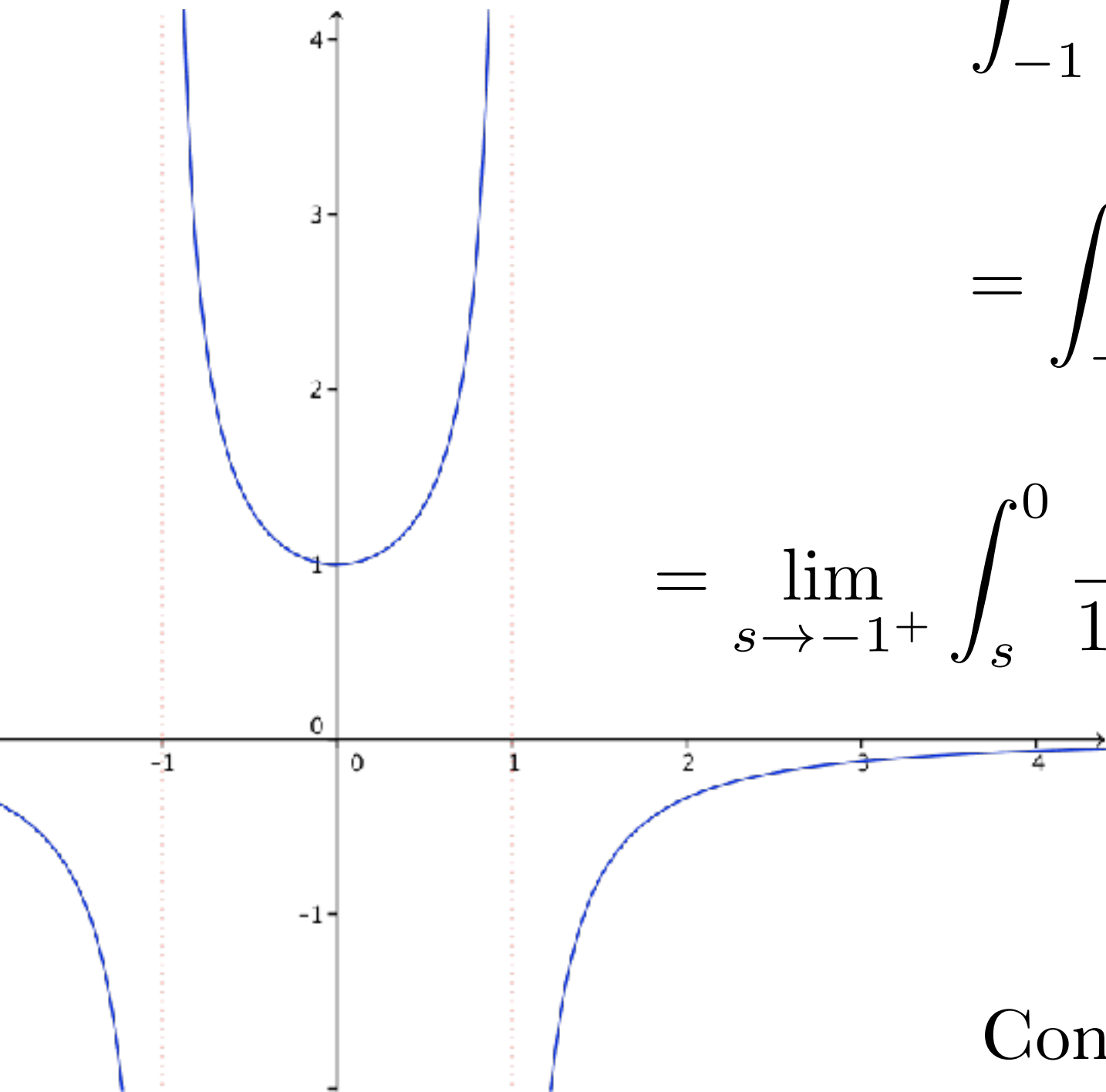


Comment gérer une intégrale de la forme

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$= \lim_{s \rightarrow -1^+} \int_s^0 \frac{1}{1-x^2} dx + \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x^2} dx$$



Converge si les DEUX convergent

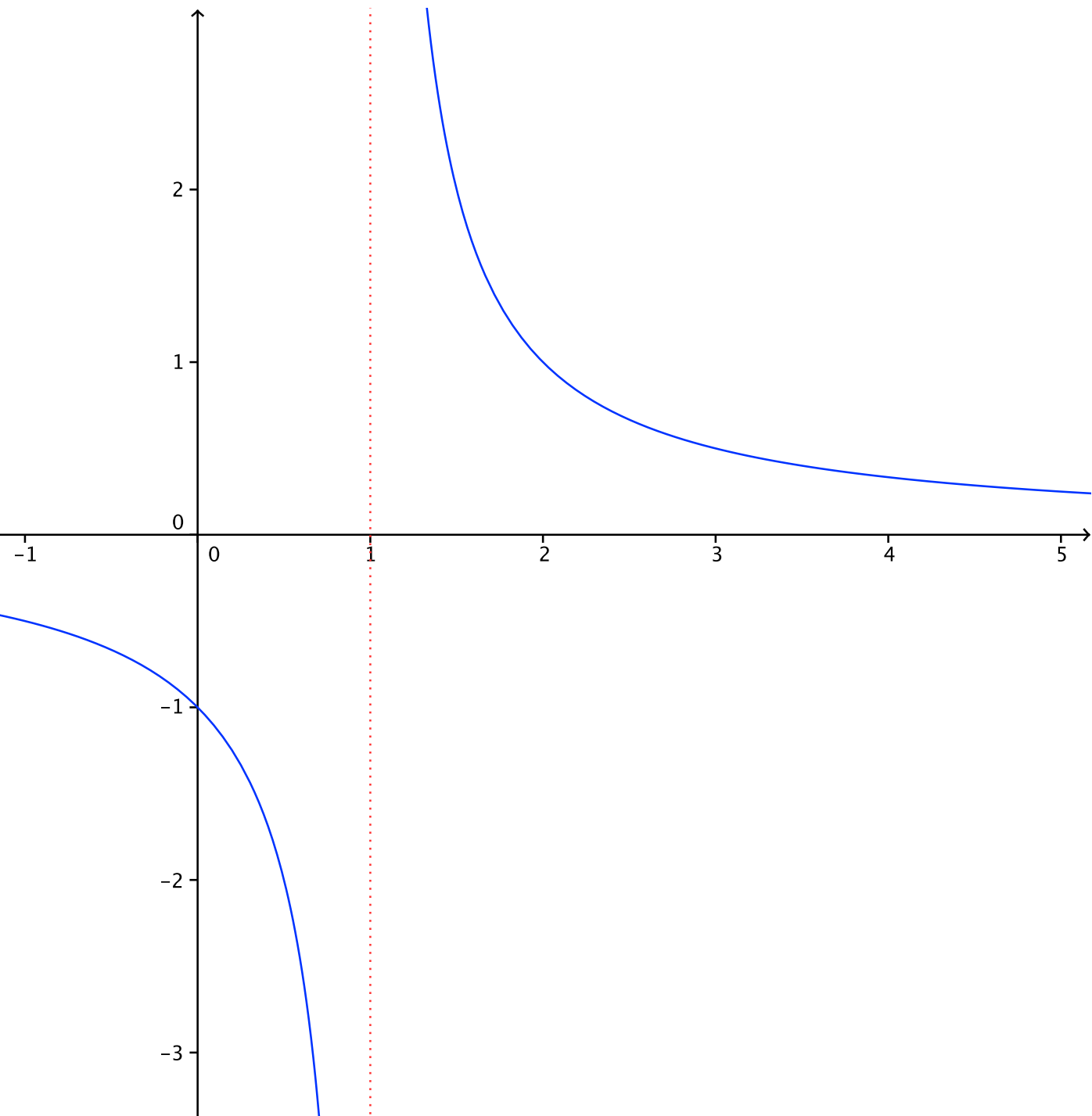


De la même manière

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$$

De la même manière

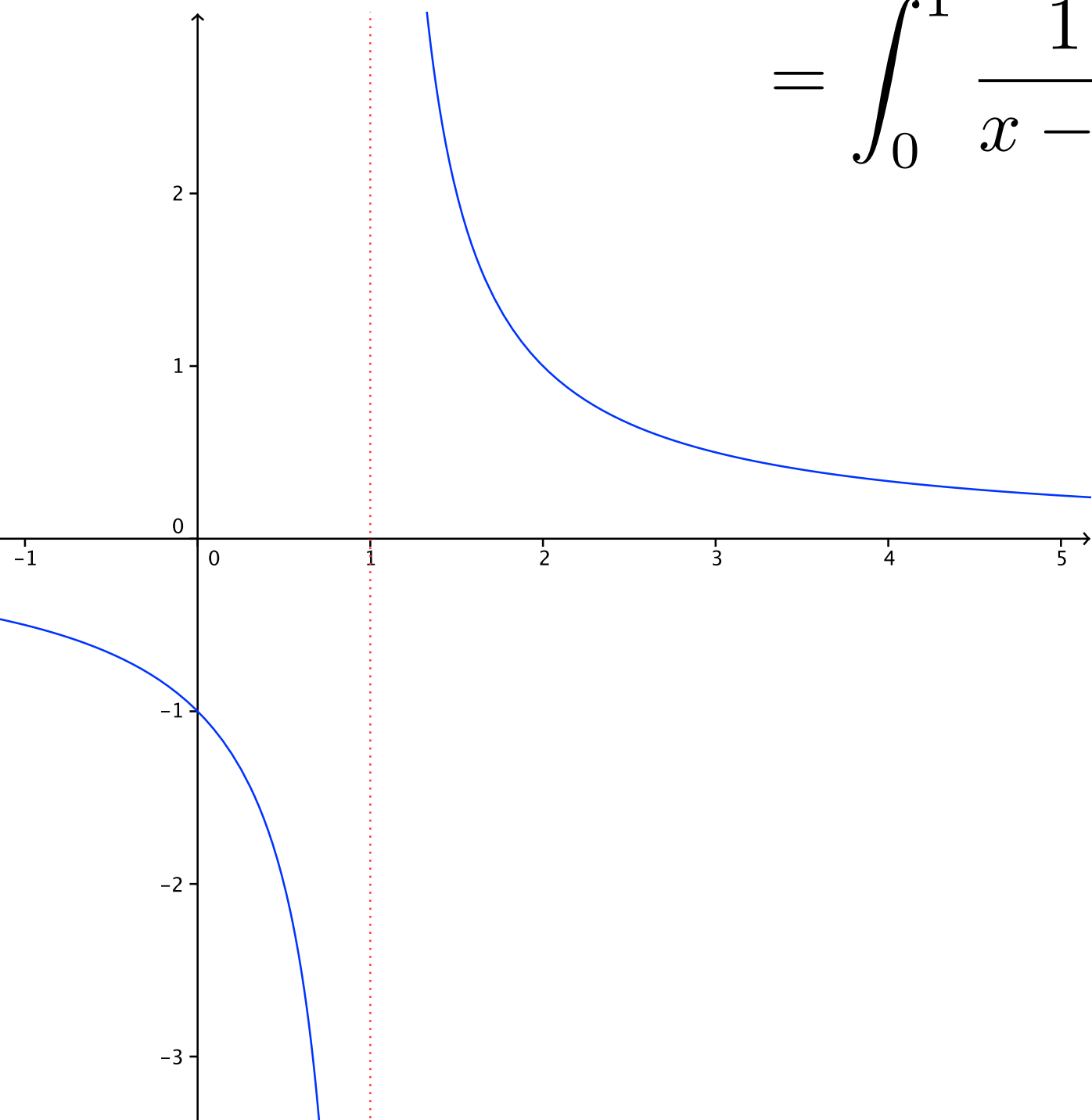
$$\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$$



De la même manière

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$$

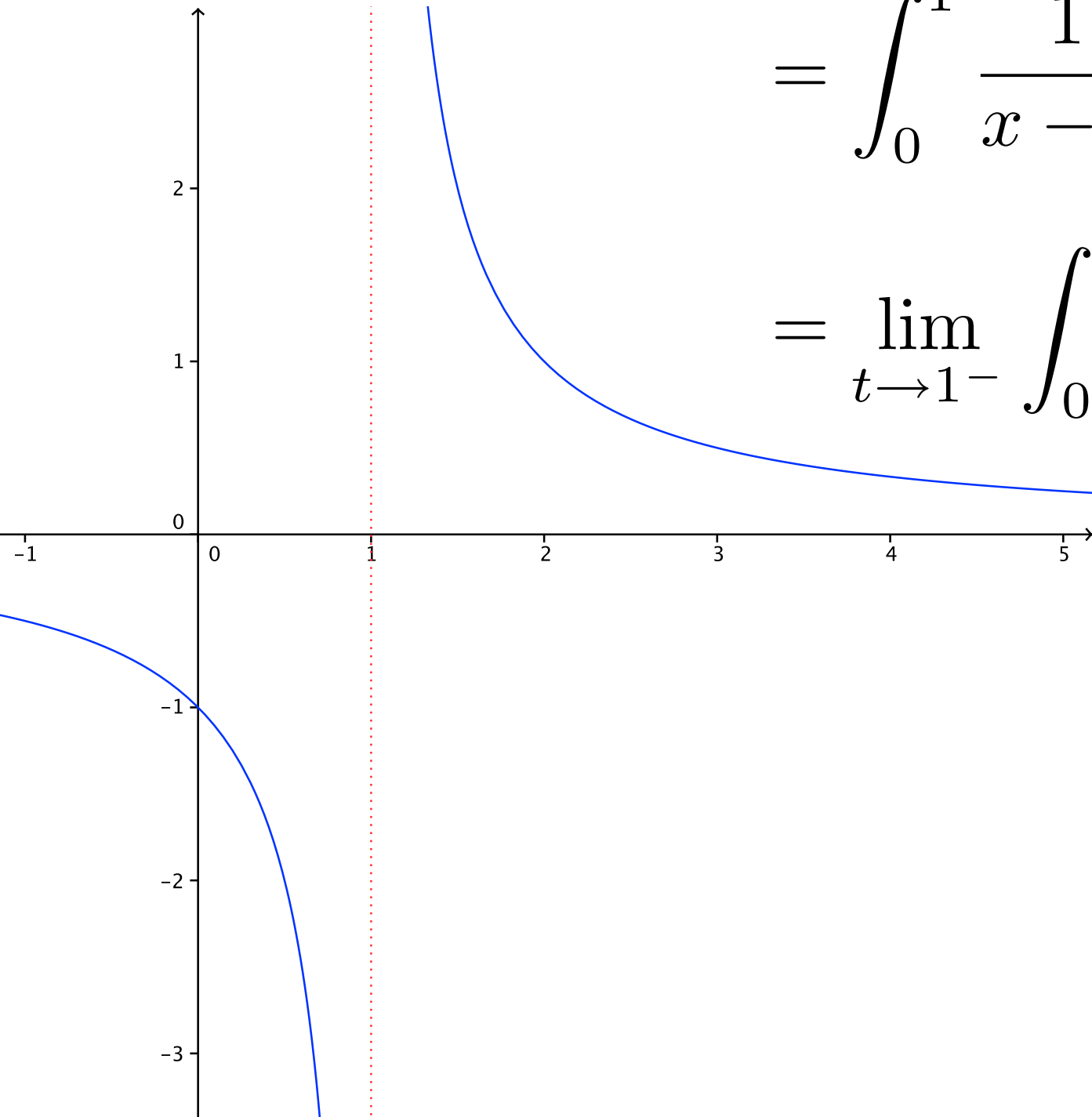


De la même manière

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^2 \frac{1}{x-1} dx$$

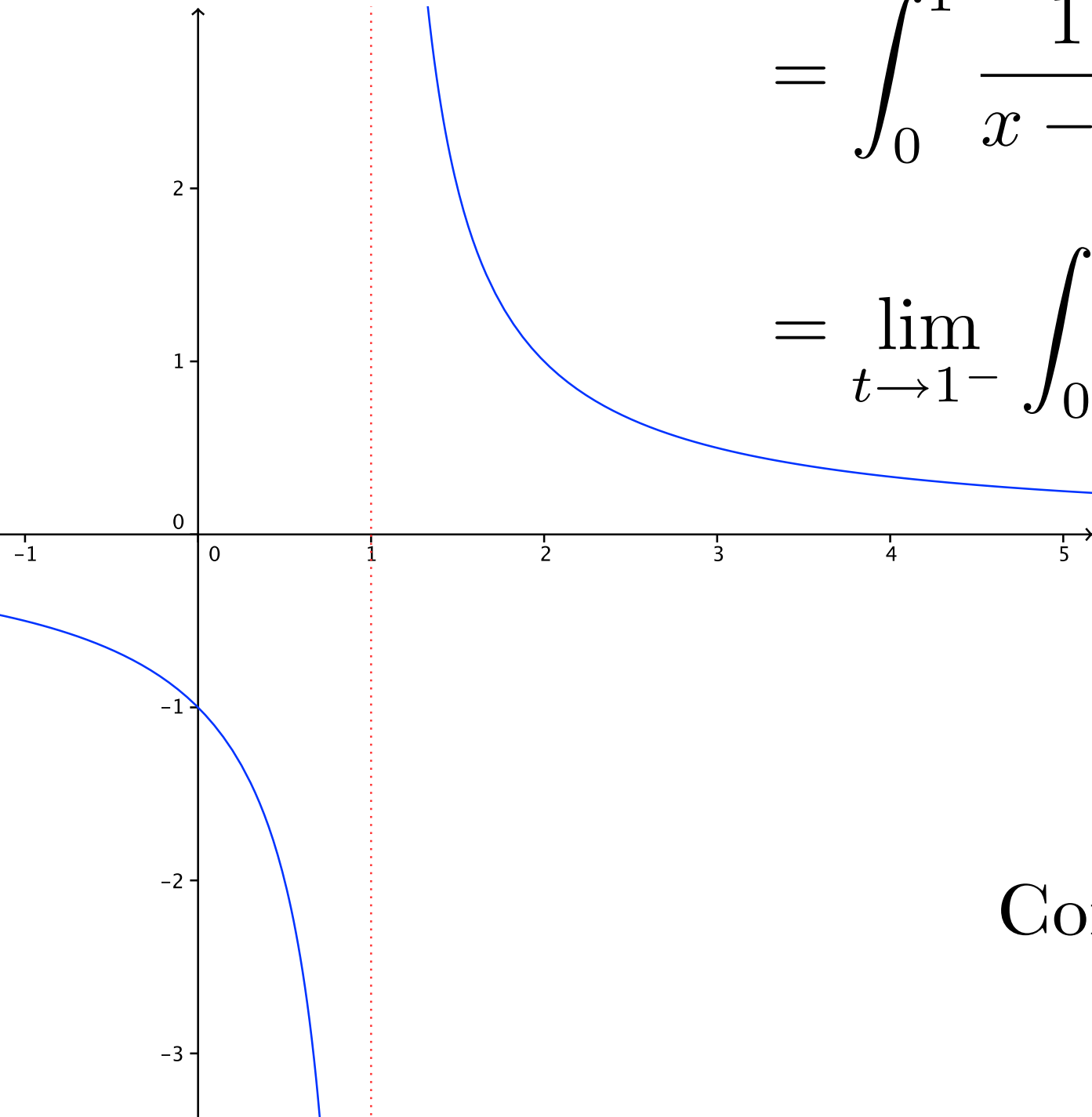


De la même manière

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^2 \frac{1}{x-1} dx$$



Converge si les **DEUX** convergent

Faites les exercices suivants

Section 3 # 19, 20

On peut aussi utiliser cette idée pour donner un sens à

On peut aussi utiliser cette idée pour donner un sens à

$$\int_a^\infty f(x) \, dx$$



On peut aussi utiliser cette idée pour donner un sens à

$$\int_a^\infty f(x) \, dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx$$

On peut aussi utiliser cette idée pour donner un sens à

$$\int_a^\infty f(x) \, dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx$$

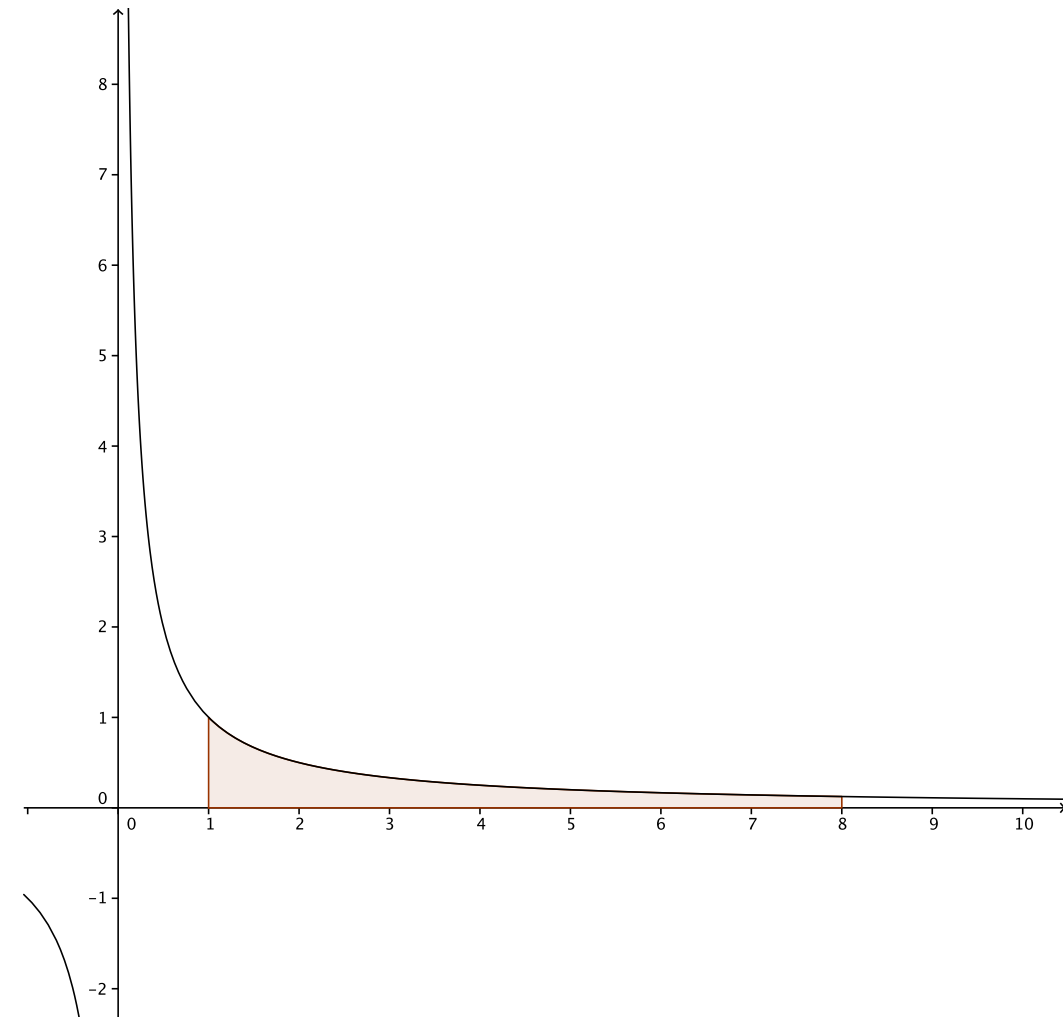
$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx$$

On peut aussi utiliser cette idée pour donner un sens à

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

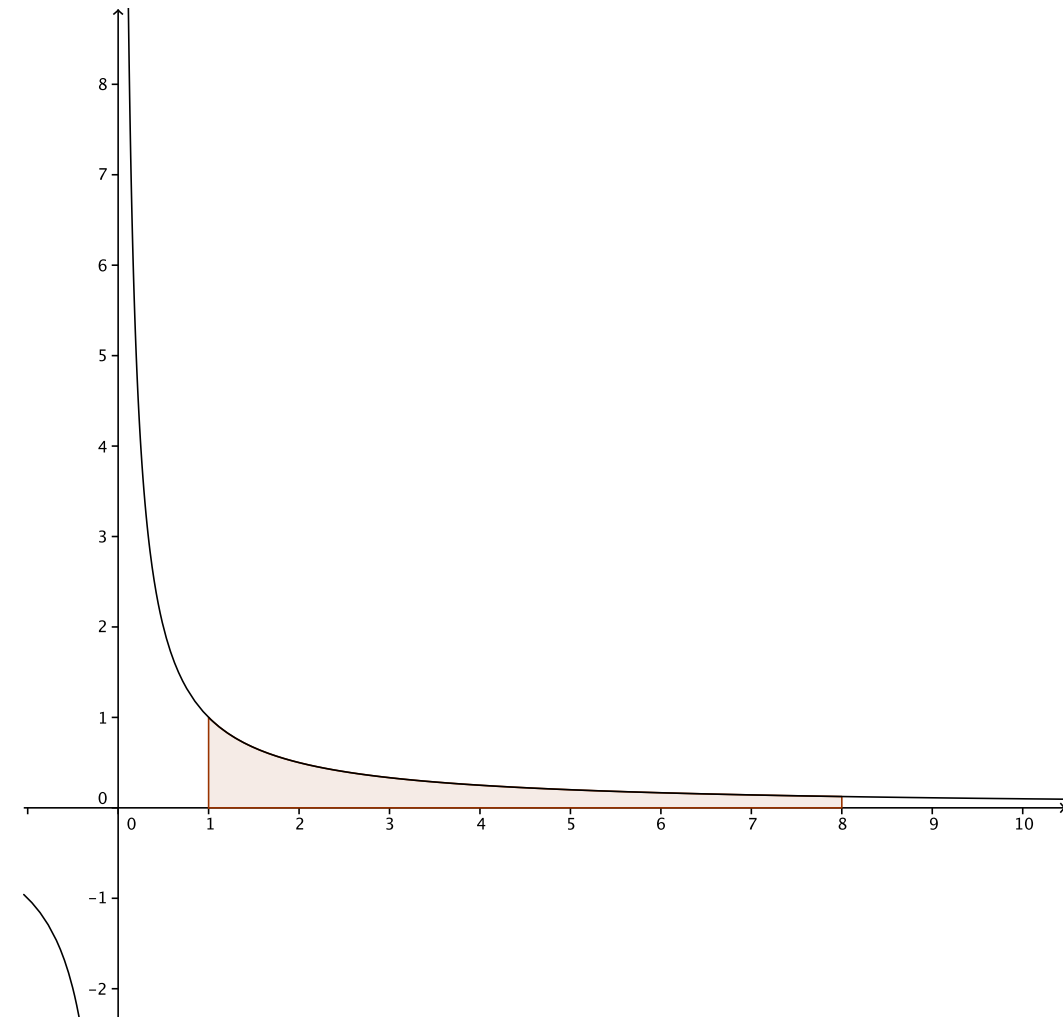


On peut aussi utiliser cette idée pour donner un sens à

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

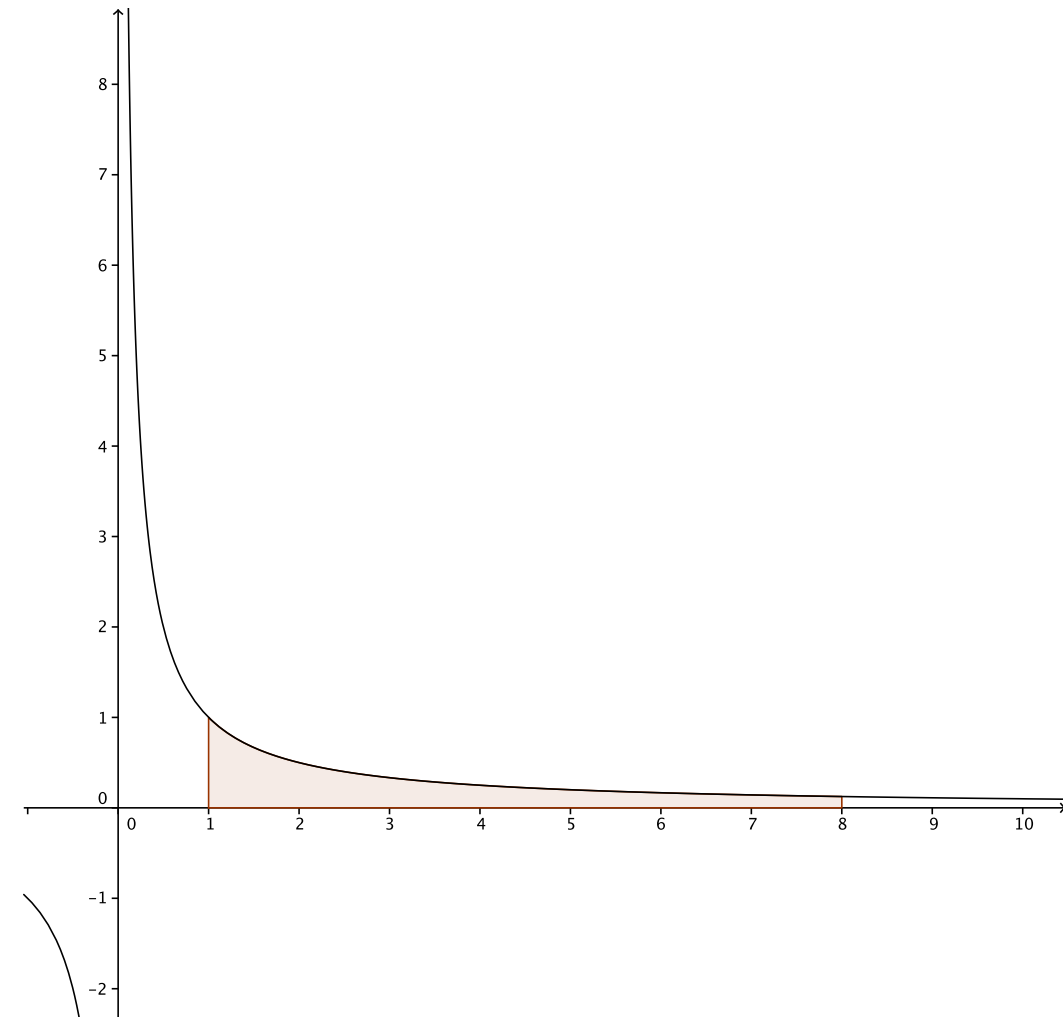


On peut aussi utiliser cette idée pour donner un sens à

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

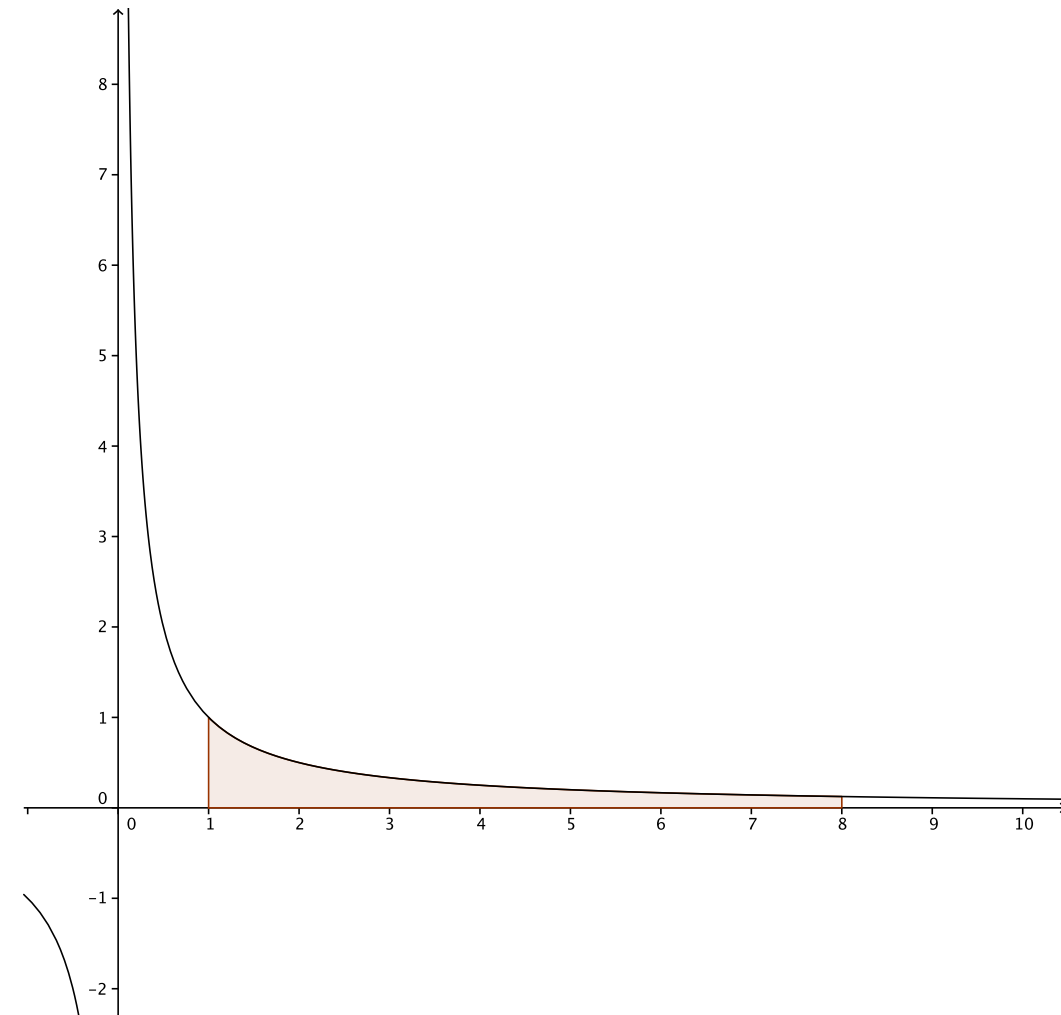


On peut aussi utiliser cette idée pour donner un sens à

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$$



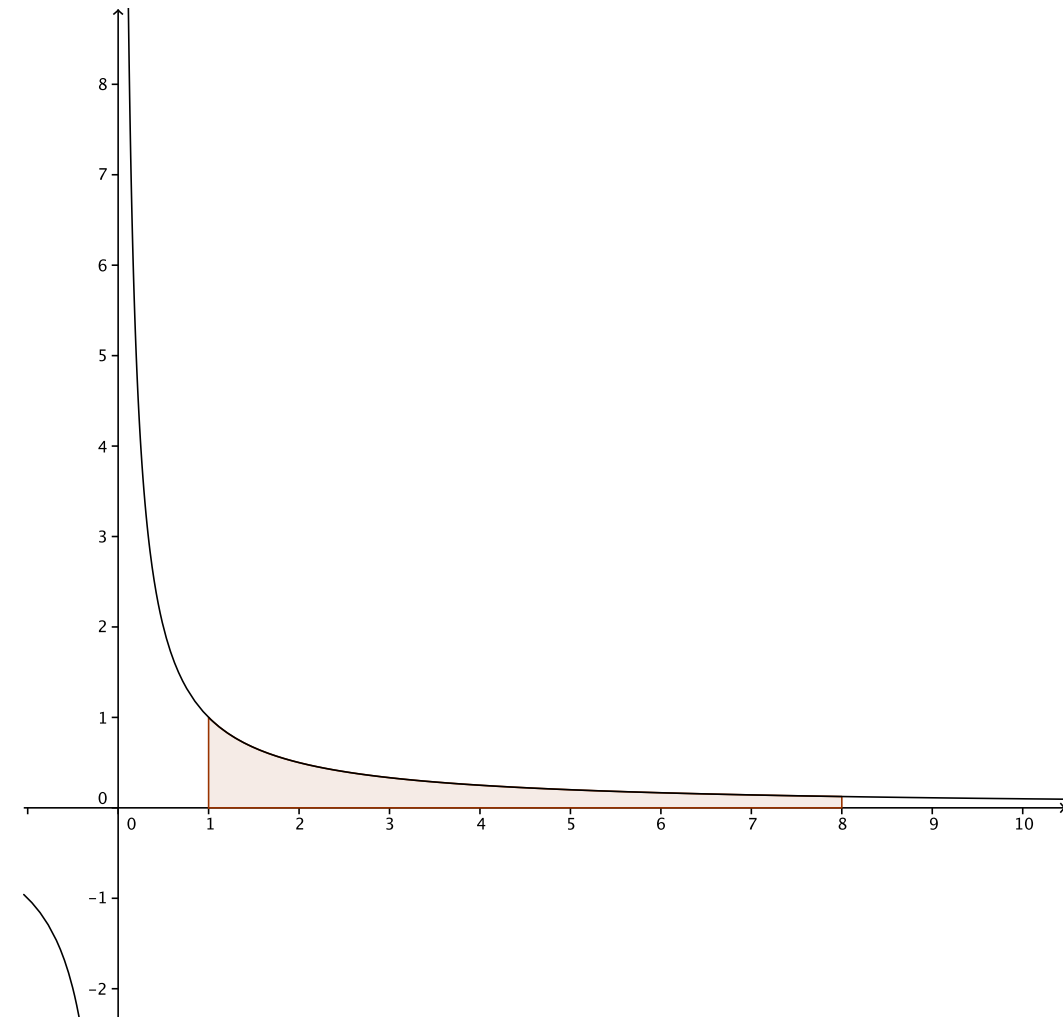
On peut aussi utiliser cette idée pour donner un sens à

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$$

$$= \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^c f(x) dx + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_c^M f(x) dx$$



Example

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$



Example

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx$$

Example

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M$$

## Example

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |M| - \ln |1|\end{aligned}$$

## Example

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |M| - \ln |1| = \infty \end{aligned}$$

## Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |M| - \ln |1| = \infty$$

Donc l'intégrale diverge.

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |M| - \ln |1| = \infty$$

Donc l'intégrale diverge.

Exemple

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |M| - \ln |1| = \infty$$

Donc l'intégrale diverge.

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |M| - \ln |1| = \infty$$

Donc l'intégrale diverge.

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx$$



Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |M| - \ln |1| = \infty$$

Donc l'intégrale diverge.

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^M$$

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |M| - \ln |1| = \infty$$

Donc l'intégrale diverge.

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^M$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{M} - \left( -\frac{1}{1} \right)$$

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |M| - \ln |1| = \infty$$

Donc l'intégrale diverge.

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^M$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{M} - \left( -\frac{1}{1} \right) = 1$$

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |M| - \ln |1| = \infty$$

Donc l'intégrale diverge.

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^M$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{M} - \left( -\frac{1}{1} \right) = 1$$

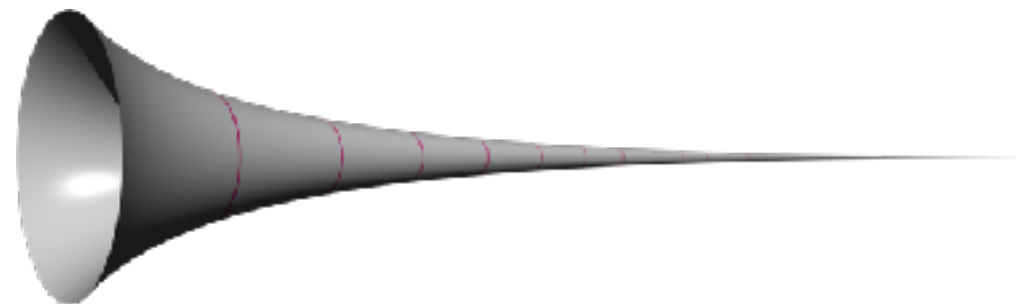
Donc l'intégrale converge.

Faites les exercices suivants

Section 3 # 21, 22

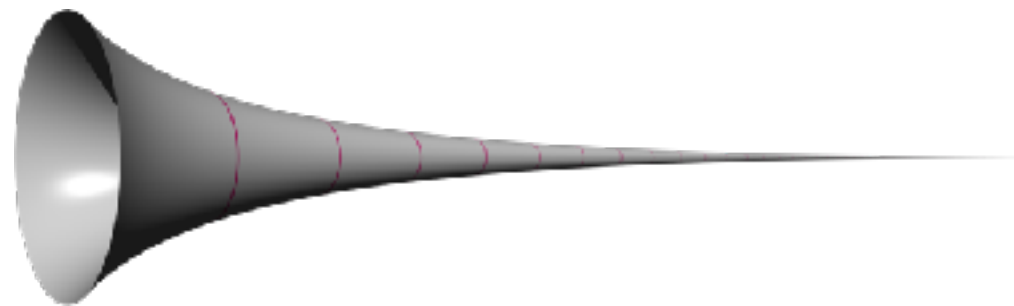
Exemple

(Trompette de Gabriel)



Exemple

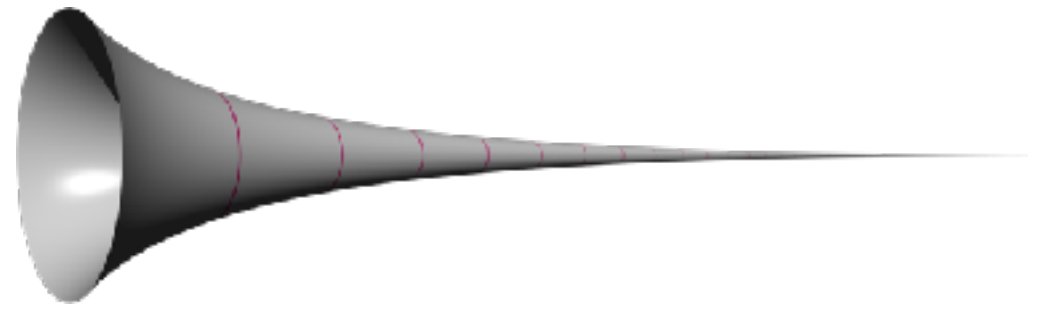
(Trompette de Gabriel)



$$\pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

# Exemple

(Trompette de Gabriel)

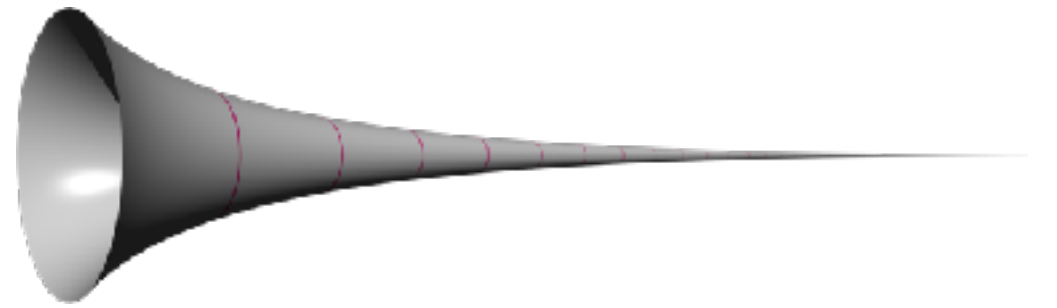


$$\pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \pi \int_1^M \frac{1}{x^2} dx$$



# Exemple

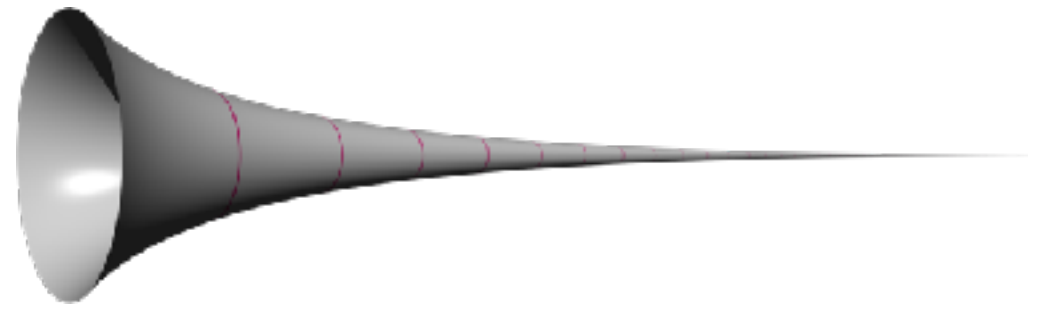
(Trompette de Gabriel)



$$\pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \pi \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^M$$

# Exemple

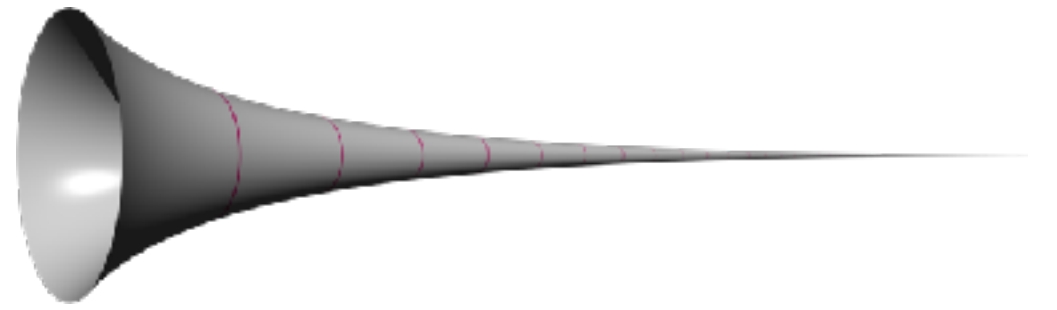
(Trompette de Gabriel)



$$\begin{aligned} \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \pi \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^M \\ &= \pi \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{M} + 1 \end{aligned}$$

# Exemple

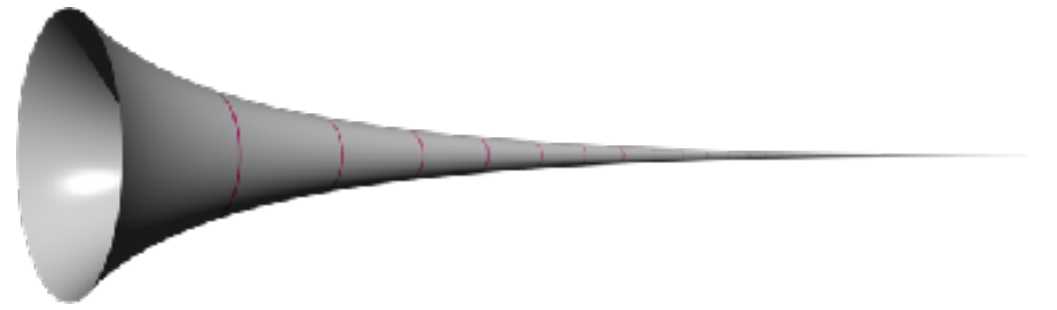
(Trompette de Gabriel)



$$\begin{aligned} \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \pi \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^M \\ &= \pi \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{M} + 1 = \pi \end{aligned}$$

## Exemple

(Trompette de Gabriel)

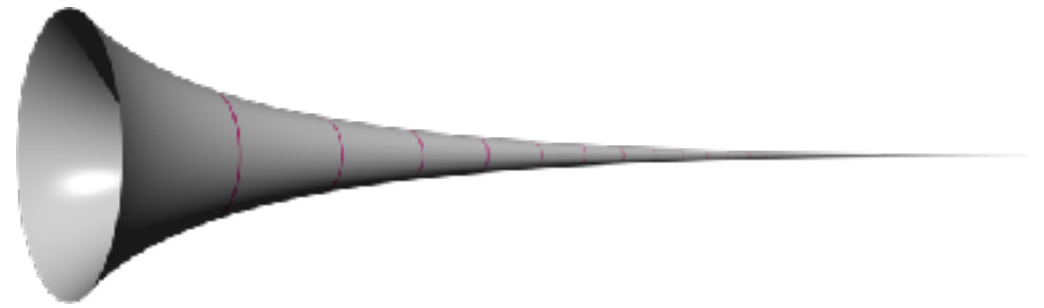


$$\begin{aligned}\pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \pi \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^M \\ &= \pi \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{M} + 1 = \pi\end{aligned}$$

Si on veut calculer l'aire du même solide

## Exemple

(Trompette de Gabriel)



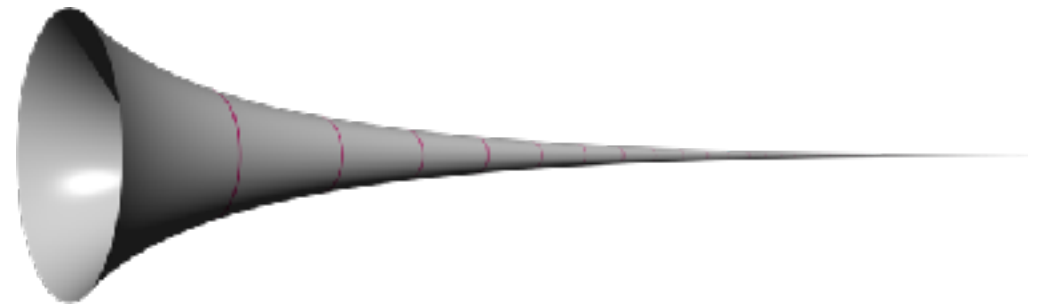
$$\begin{aligned}\pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \pi \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^M \\ &= \pi \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{M} + 1 = \pi\end{aligned}$$

Si on veut calculer l'aire du même solide

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx$$

# Exemple

(Trompette de Gabriel)



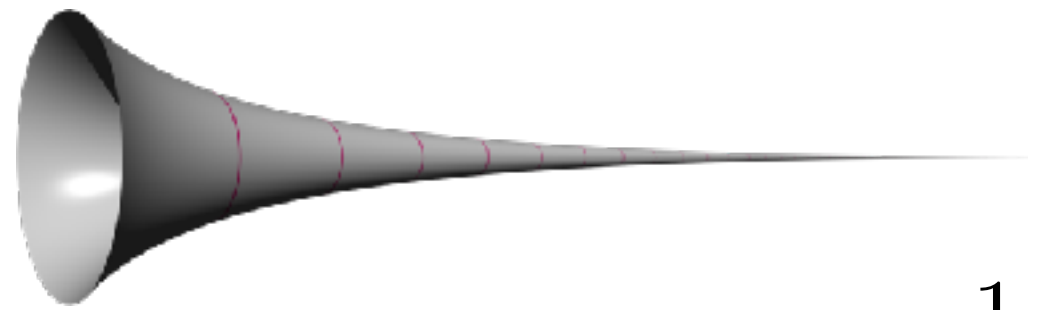
$$\begin{aligned} \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \pi \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^M \\ &= \pi \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{M} + 1 = \pi \end{aligned}$$

Si on veut calculer l'aire du même solide

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

## Exemple

(Trompette de Gabriel)



Calculer le «volume de révolution» de la région sous  $f(x) = \frac{1}{x}$   
 $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \pi \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^M \\ &= \pi \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{M} + 1 = \pi \end{aligned}$$

Si on veut calculer l'aire du même solide

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

## Example

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$



## Example

$$\begin{aligned} 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx &= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \\ &= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} dx \end{aligned}$$

## Example

$$\begin{aligned} 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx &= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \\ &= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} dx \\ &= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx \end{aligned}$$

## Exemple

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} dx$$

Mais

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx$$

## Exemple

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx$$

Mais

$$\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} \geq \frac{\sqrt{x^4}}{x^3}$$

## Exemple

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx$$

Mais

$$\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} \geq \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$$

## Exemple

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx$$

$$\geq 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx$$

Mais

$$\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} \geq \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$$

## Exemple

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} dx$$

Mais

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx$$

$$\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} \geq \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$$

$$\geq 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M$$

## Exemple

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} dx$$

Mais

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx$$

$$\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} \geq \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$$

$$\geq 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M = \infty$$



## Exemple

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}} dx$$

Mais

$$= 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx$$

$$\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} \geq \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$$

$$\geq 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = 2\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^M = \infty$$

donc  $2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx$  diverge.

Faites les exercices suivants

Section 3 # 22, 23

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Intégrales impropres.

Devoir:

Section 3.4