

3.5 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

cours 20

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Intégrales impropres.

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Équations différentielles

Lorsqu'on vous présente des applications des mathématiques, la très grande majorité du temps, les équations qui régissent le système vous sont données.

Or, il a bien fallu que quelqu'un, un jour, la trouve cette équation.

Habituellement, les équations sont trouvées en se basant sur des observations et des raisonnements.

Souvent, comprendre comment un système varie, peut nous permettre de trouver l'équation.

Exemple

Un objet en chute libre sur terre.

$$a = -9,8 \text{ m/sec}^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -9,8 \quad dv = -9,8 dt \quad \int dv = \int -9,8 dt$$

$$v(t) = -9,8t + C \quad v(0) = -9,8(0) + C = C = v_0$$

$$v = -9,8t + v_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -9,8t + v_0 \quad dx = -9,8t + v_0 dt$$
$$\int dx = \int -9,8t + v_0 dt$$

$$x(t) = -4,9t^2 + v_0t + C$$

$$x(0) = -4,9(0)^2 + v_0(0) + C = C = x_0$$

$$x(t) = -4,9t^2 + v_0t + x_0$$

Définition:

Une équation différentielle est une équation qui fait intervenir une fonction, sa variable ainsi que ses dérivées d'ordre n .

Exemple

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y \quad y'' = -y$$

Définition:

Une solution d'une équation différentielle est une fonction qui satisfait à l'équation.

Exemple

$y = \sin x$ est une solution de $y'' = -y$

$$y'' = (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x = -y$$

Mais $y = \cos x$ aussi

$$y'' = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x = -y$$

Faites les exercices suivants

Section 3 # 24

Il est en générale très difficile de résoudre une équation différentielle.

Par contre certains types d'équations différentielles
sont à notre portée.

Un équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme

$$f(x) dx = g(y) dy$$

est dite séparable.

Exemple

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3}{y} \quad \Longrightarrow \quad y \, dy = x^2 + 3 \, dx$$

$$\Longrightarrow \int y \, dy = \int x^2 + 3 \, dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + 3x + C$$

$$\Longrightarrow y^2 = \frac{2x^3}{3} + 6x + C \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{2x^3}{3} + 6x + C}$$

ou

$$\Longrightarrow y = -\sqrt{\frac{2x^3}{3} + 6x + C}$$

Faites les exercices suivants

Section 3 # 25

Exemple

Population $P(t) = ?$

Dépend du taux de mortalité et du taux de naissance

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \frac{dP}{P} = k dt$$

$$\int \frac{1}{P} dP = \int k dt$$

$$\ln P = kt + C$$

$$P = e^{\ln P} = e^{kt+C} = e^{kt} e^C = C_1 e^{kt}$$

$$P(t) = C e^{kt}$$

$$P(0) = C e^0 = C = P_0$$

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Exemple

Loi de refroidissement de Newton.

T : température d'un objet A : température ambiante

$$\frac{dT}{dt} = k(T - A)$$

k : constante de proportionnalité qui dépend de l'objet.

$$\frac{1}{T - A} dT = k dt \quad \int \frac{1}{T - A} dT = \int k dt$$

$$\ln |T - A| = kt + C$$

$$|T - A| = e^{kt+C}$$

Faites les exercices suivants

Section 3 # 27, 28

Exemple

Équation logistique

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = k dt$$

$$\int \frac{1}{P} + \frac{1}{K \left(1 - \frac{P}{K}\right)} dP = \int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int k dt$$

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{1 - \frac{P}{K}} = \frac{A \left(1 - \frac{P}{K}\right) + BP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)}$$
$$= \frac{\left(B - \frac{A}{K}\right) P + A}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K \left(1 - \frac{P}{K}\right)}$$

$$A = 1$$

$$B - \frac{A}{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{K}$$

Exemple

Équation logistique

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

$$\int \frac{1}{P} + \frac{1}{K \left(1 - \frac{P}{K} \right)} dP = \int k dt$$

$$u = 1 - \frac{P}{K}$$

$$du = -\frac{1}{K} dP$$

$$-K du = dP$$

$$\ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{K}} \right| = \ln |P| - \ln \left| 1 - \frac{P}{K} \right| = kt + C$$

$$\frac{P}{1 - \frac{P}{K}} = e^{kt+C} = e^{kt} e^C = e^{kt} C$$

$$t = 0$$

$$C = \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{K}}$$

Exemple

Équation logistique

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

$$t = 0 \quad C = \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{K}}$$

$$\frac{P}{1 - \frac{P}{K}} = e^{kt} C$$

$$P = C e^{kt} - \frac{P}{K} C e^{kt}$$

$$P \left(1 + \frac{C}{K} e^{kt} \right) = P + \frac{P}{K} C e^{kt} = C e^{kt}$$

$$P(t) = \frac{C e^{kt}}{1 + \frac{C}{K} e^{kt}}$$

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Équations différentielles

Devoir:

Section 3.5