4.1 POLYNÔME DE TAYLOR

cours 23

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Trouver une approximation d’une fonction

Les fonctions apparaissent naturellement dans beaucoup de situations où on modélise un phénomène de la vie.

Les fonctions qui en découlent ne sont pas toujours très simples, ce qui peut rendre l'analyse du phénomène difficile, voire impossible.

Or, rares sont les phénomènes étudiés dont la précision des mesures est infinie.

Ça serait bien si on pouvait trouver une façon de trouver une fonction simple à partir d'une fonction compliquée, mais que les deux fonctions aient les mêmes valeurs à une certaine précision près.

On a vu dans le cours de calcul différentiel qu'on peut utiliser la dérivée pour donner une approximation linéaire d'une fonction.

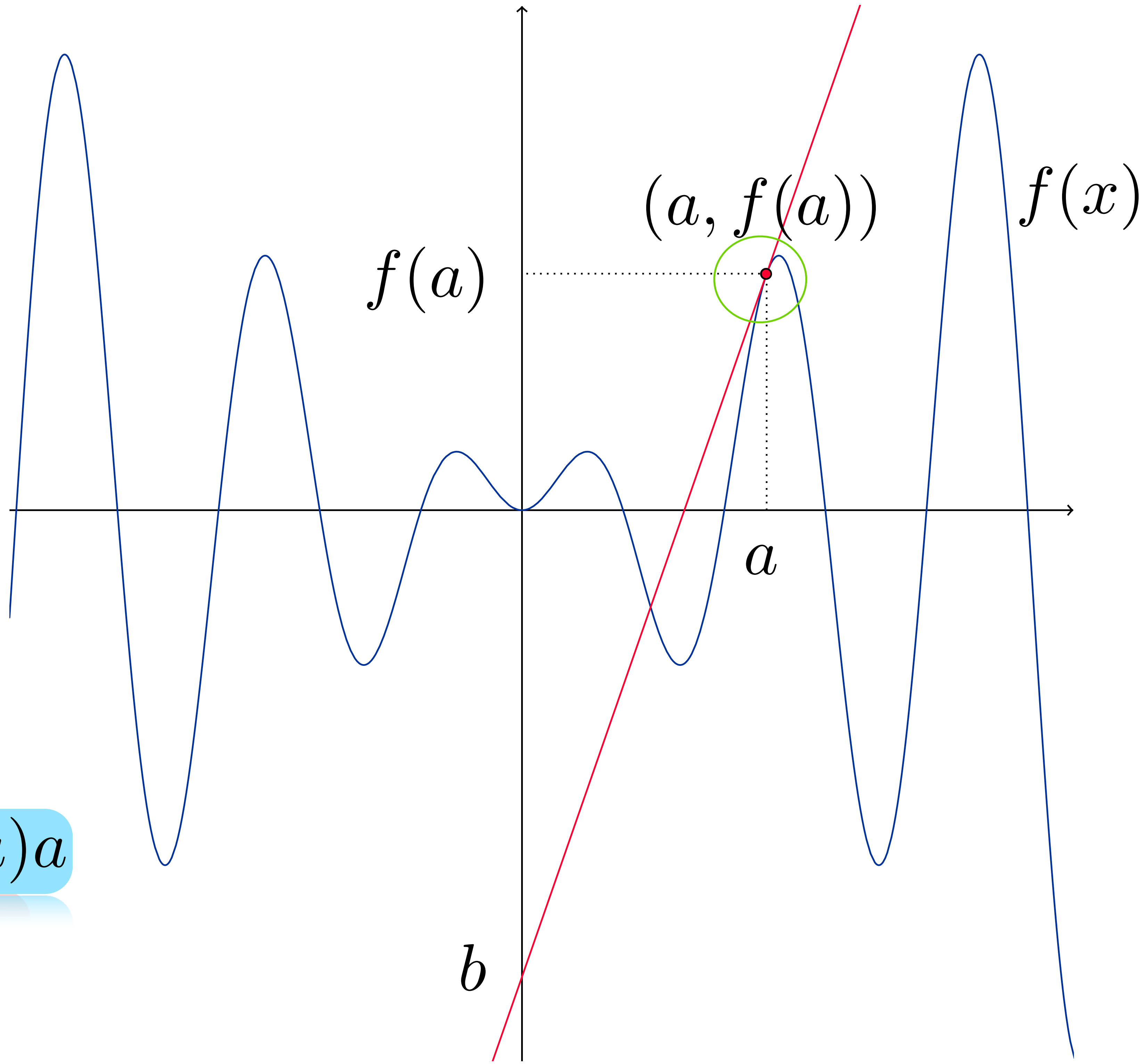
$$y = mx + b$$

$$m = f'(a)$$

$$y = f'(a)x + b$$

$$f(a) = f'(a)a + b$$

$$b = f(a) - f'(a)a$$



$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$$

$$= f'(a)(x - a) + f(a)$$

La droite tangente à une fonction est une approximation raisonnable de la fonction pour les valeurs de x qui sont près de a.

$$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$$

Naturellement, remplacer une fonction par une droite simplifie grandement les calculs.

Or, l'approximation est grossière, voire inutilisable, dès qu'on prend des valeurs trop loin de a.

La droite est un peu trop simple.

Quelles sont les fonctions les plus simples d'un point de vue du calcul différentiel?

Les polynômes!

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

$u = f'(t)$ $\qquad$ $dv = dt$

Une constante

$du = f''(t)dt$ $\qquad$ $v = t - x$

$= -(x - t)$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

$$= f(a) - f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)dt$$

$$= f(a) - \big(f'(x)(\cancel{x-x}) - f'(a)(x-a)\big) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt$$

$$= \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{Linéarisation}} + \int_a^x (x-t)f''(t)dt$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt$$

$$u = f''(t) \qquad dv = (x-t)\,dt$$

$$du = f^{(3)}(t)\,dt \qquad v = -\frac{(x-t)^2}{2}$$

$$\int_a^x (x-t) f''(t)\,dt = -\frac{f''(t)(x-t)^2}{2}\bigg|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2 f^{(3)}(t)}{2}\,dt$$

$$= \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{(x-t)^2 f^{(3)}(t)}{2}\,dt$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}\,dt$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \boxed{\int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt}$$

$$u = f^{(3)}(t) \qquad dv = \frac{(x-t)^2}{2}\ dt$$

$$du = f^{(4)}(t)\ dt \qquad v = -\frac{(x-t)^3}{3!}$$

$$\boxed{\int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt} = -\frac{f^{(3)}(t)(x-t)^3}{3!}\Bigg|_a^x + \int_a^x f^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}dt$$

$$= \boxed{\frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{3!} + \int_a^x f^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}dt}$$

$$= f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+\boxed{f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\int_a^x f^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}dt}$$

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + R_{n+1}(x)$$

Polynôme de Taylor d'ordre n

le reste

$$P_{f,n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

$$P_{f,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

Exemple Trouver le polynôme de Taylor de la fonction suivante autour de 0.

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 6 \qquad f(0) = 6$$

$$f(x)' = 6x^2 + 2x - 5 \qquad f'(0) = -5$$

$$f(x)'' = 12x + 2 \qquad f''(0) = 2$$

$$f(x)^{(3)} = 12 \qquad f^{(3)}(0) = 12$$

$$f(x)^{(4)} = 0 \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(x)\frac{x^3}{3!}$$

$$= 6 - 5x + 2\frac{x^2}{2} + 12\frac{x^3}{3 \cdot 2} = 6 - 5x + x^2 + 2x^3$$

Exemple Trouver le polynôme de Taylor de la fonction suivante autour de 1.

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 6 \qquad f(1) = 4$$

$$f(x)' = 6x^2 + 2x - 5 \qquad f'(1) = 3$$

$$f(x)'' = 12x + 2 \qquad f''(1) = 14$$

$$f(x)^{(3)} = 12 \qquad f^{(3)}(1) = 12$$

$$f(x)^{(4)} = 0 \qquad f^{(4)}(1) = 0$$

$$f(x) = 4 + 3(x-1) + \frac{14(x-1)^2}{2} + \frac{12(x-1)^3}{6}$$

$$= 4 + 3x - 3 + 7(x-1)^2 + 2(x-1)^3$$

Exemple Trouver le polynôme de Taylor de la fonction suivante autour de 1.

$$f(x) = \boxed{2x^3 + x^2 - 5x + 6}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 + 3(x-1) + \frac{14(x-1)^2}{2} + \frac{12(x-1)^3}{6} \\ &= 4 + 3x - 3 + 7(x-1)^2 + 2(x-1)^3 \\ &= 1 + 3x + 7(x^2 - 2x + 1) + 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ &= 1 + 3x + 7x^2 - 14x + 7 + 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 \\ &= \boxed{2x^3 + x^2 - 5x + 6} \end{aligned}$$

Exemple Trouver le polynôme de degré 5 de la fonction suivante autour de 0.

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$

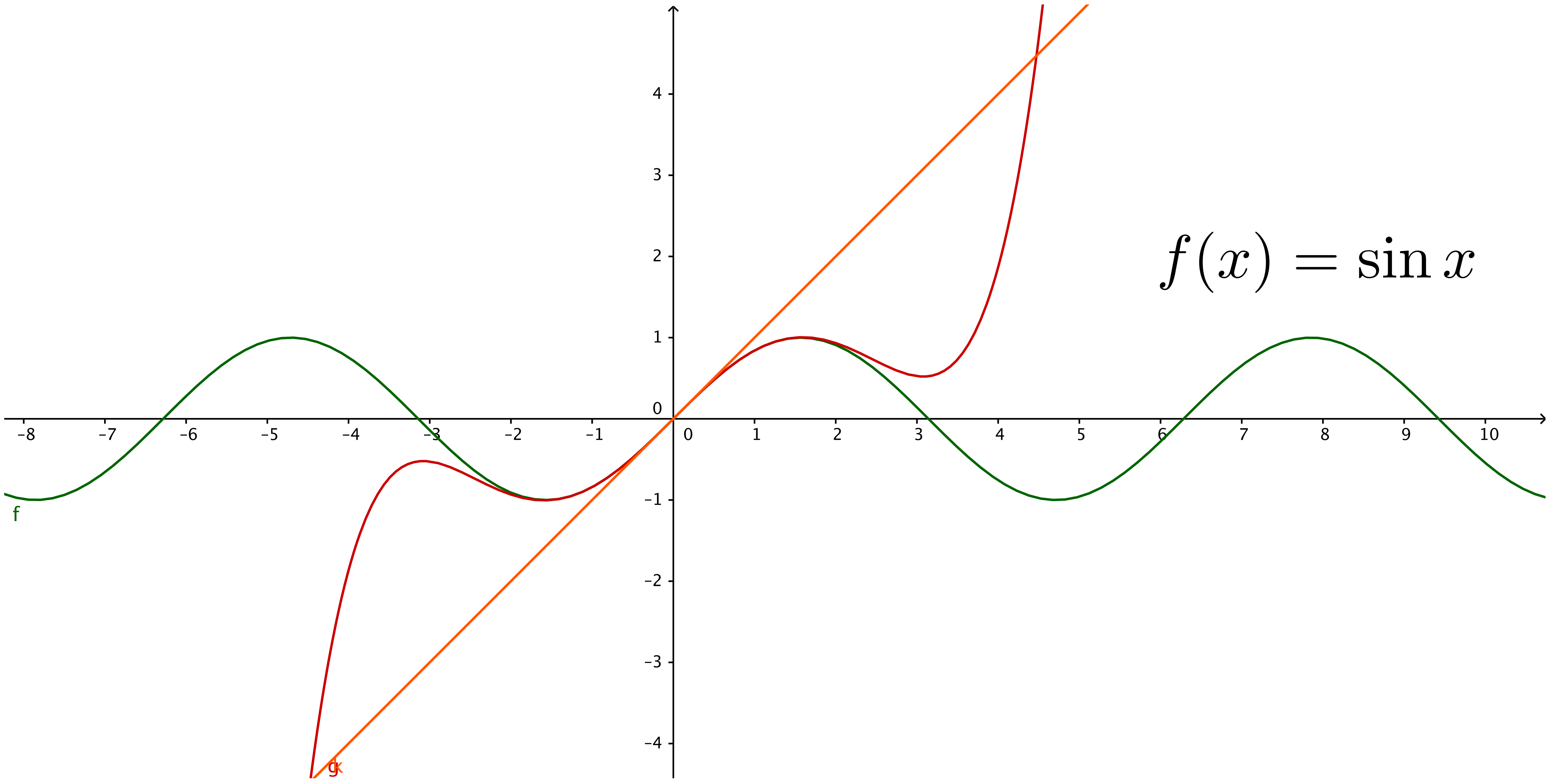
$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(3)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \qquad f^{(5)}(0) = 1$$

$$P_f(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$



$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Faites les exercices suivants

Q.1

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \boxed{\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}\, dt}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \boxed{R_{n+1}(x)}$$

En d'autres termes,

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

Et le reste nous donne une idée de l'erreur d'approximation.

Dans un cours plus avancé, on essaie de trouver une borne au reste.

Exemple Trouver une approximation de $\sin(0{,}1)$ et $\sin(1)$

à l'aide du polynôme de Taylor de degré 5 autour de 0

$$P_{\sin x,5,0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \approx \sin(x)$$

$$P_5(0,1) = 0,1 - \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^5}{5!} = 0{,}0998334166666\ldots$$

$$\sin(0{,}1) = 0{,}0998334166468 28\ldots$$

$$P_5(1) = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} = 0{,}841666666666666\ldots$$

$$\sin(1) = 0{,}841470984807897\ldots$$

Qu'arrive-t-il si on poursuit le processus indéfiniment?

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

Est-ce que cette égalité est vraie pour toutes les valeurs de x?

L'objectif du reste de la session est de comprendre la validité et les limitations de cette égalité.

Dans un premier temps, nous allons explorer des suites de nombres.

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$$

Les suites nous fourniront le cadre adéquat pour mieux comprendre

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Pour finalement mieux comprendre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

Pourquoi les suites?

Regardons $$\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots$$

pour comprendre cette somme infinie, on regarde

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1 + 2 &= 3 \\
1 + 2 + 3 &= 6 \\
1 + 2 + 3 + 4 &= 10 \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 &= 15 \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 &= 21 \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 &= 28 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Pourquoi les suites?

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots$$

$$\{\ 1\,, \quad 3\,, \quad 6\,, \quad 10, \quad 15, \quad 21, \quad 28, \quad \ldots\ \}$$

On obtient une suite de nombre qu'on nomme:

la suite des sommes partielles

$$\left\{ \sum_{k=1}^{1} k, \sum_{k=1}^{2} k, \sum_{k=1}^{3} k, \sum_{k=1}^{4} k, \sum_{k=1}^{5} k, \ldots \right\}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} k \right\}$$

L'autre difficulté est que si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

et que pour simplifier la compréhension on pose $a = 2$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boxed{f^{(k)}(2)}(x-2)^k}{\boxed{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-2)^k$$

un nombre

$$a = 2$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)(x-2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-2)^k$$

Si on prend un nombre près de 2

$$f(2{,}1) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (2{,}1 - 2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

Va devenir très près de 0

Par contre si on s'éloigne de 2

$$f(1002) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (1000)^k$$

Va devenir très grand

On aimerait donc savoir à quel point on peut s'éloigner de 2 pour que ait un sens

C'est quoi le rapport avec le calcul intégral?

On a pu constater qu'on n'est pas en mesure de calculer l'intégrale de certaines fonctions.

$$\int \sqrt{f(x)}\,dx = ?$$

$$\int \sin(x^2)\,dx = ?$$

$$\int e^{x^2}\,dx = ?$$

Donc si l'on est en mesure de trouver une expression du genre

$$\sin(x^2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

on sera en mesure de calculer

$$\int \sin(x^2)\, dx = \int a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots\, dx$$

$$= a_0 \int dx + a_1 \int x\, dx + a_2 \int x^2\, dx + a_3 \int x^3\, dx + a_4 \int x^4\, dx + \ldots\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int x^k\, dx$$

Faites les exercices suivants

#Q.2 et Q.3

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Polynôme de Taylor
- ✓ Un prélude aux prochains cours

Devoir: Section 4.1