4.2 SUITES

cours 24

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Polynôme de Taylor

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Les suites

On a vu au dernier cours que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(n)} \frac{(x-a)^n}{n!} + R_{n+1}$$

On aimerait comprendre ce qui se passe si l'on développe le polynôme de Taylor indéfiniment.

Pour ça, il faut comprendre un peu mieux les sommes infinis

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Et pour comprendre les sommes infinis, il faut comprendre les suites.

Une suite est tout simplement une liste infinie de nombre.

$$\{1, 1, 1, \ldots\}$$

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$$

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Il est pratique de voir une suite comme une fonction

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
n &\longmapsto f(n) = a_n
\end{aligned}
$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$$\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$$

$$f(n) = 2^n = a_n \qquad \{a_n\} = \{2^n\}$$

Terme général de la suite

Certaines suites sont déterminées à l'aide d'une règle algébrique.

$$\{n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\{2n\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

$$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} = \{1, 3, 6, 10, 5, \dots\}$$

Parfois, certaines suites sont définies par récurrence.

C'est-à-dire qu'on donne quelques premiers termes et les suivants sont définis à partir des précédents.

Exemple $a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$$a_2 = a_{2-1} + a_{2-2} = a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13$$

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \dots\}$$

Cette suite ce nomme la suite de Fibonacci

Faites les exercices suivants

Section 4 # 4 et 5

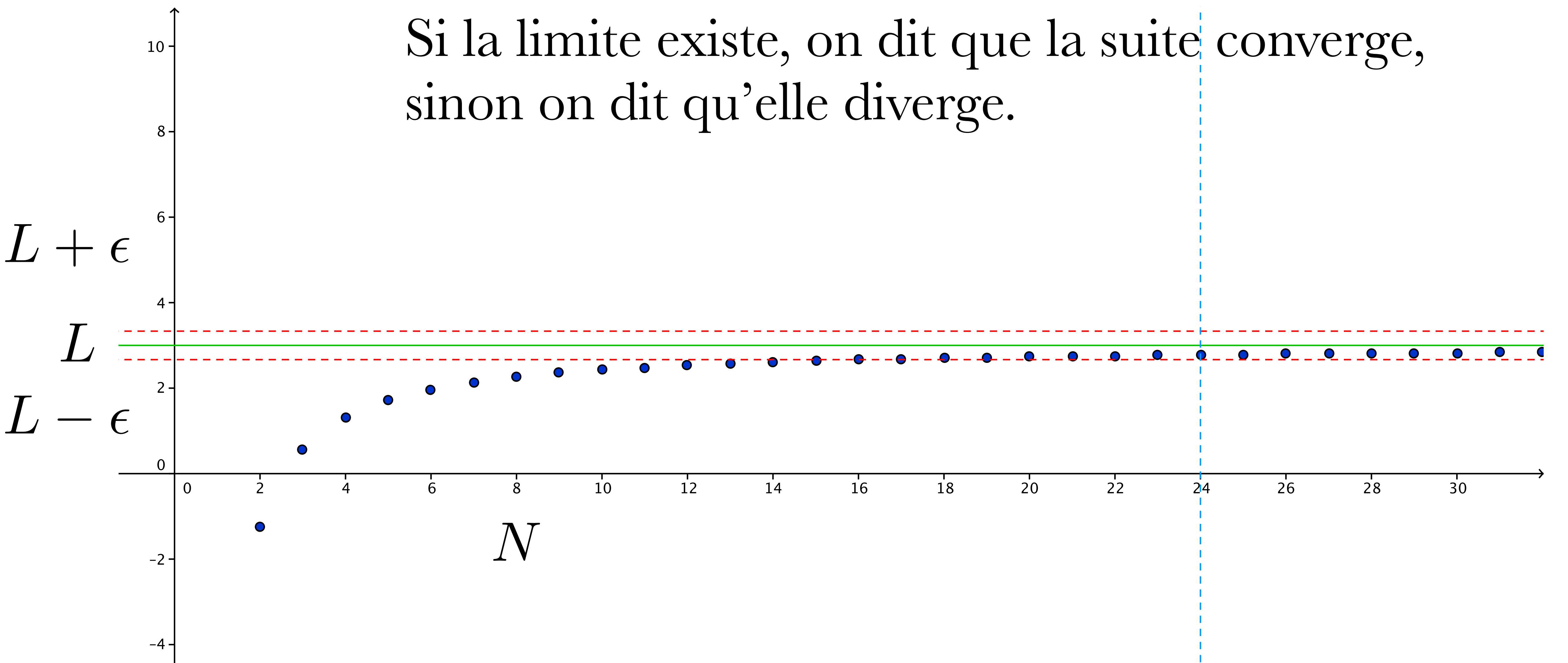
Définition

La limite d'une suite $\{a_n\}$ est L et on la note

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

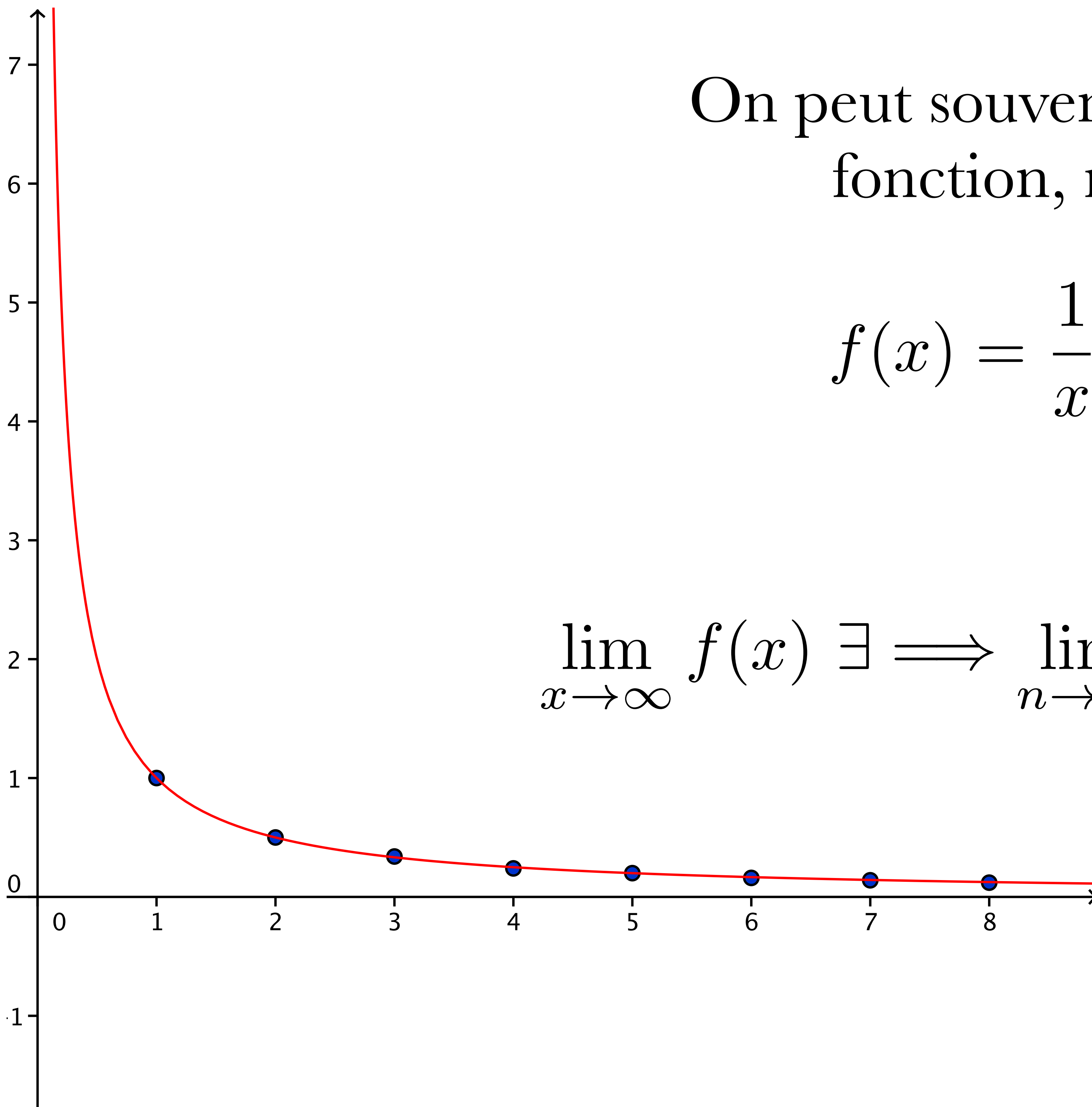
si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un N tel que pour tout $m > N$ on a $L - \epsilon < a_m < L + \epsilon$

Si la limite existe, on dit que la suite converge, sinon on dit qu'elle diverge.



Lorsqu'on a une suite définie à l'aide d'une règle

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \qquad f(n) = \frac{1}{n} \qquad f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$



On peut souvent considérer la même fonction, mais sur les réels

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \ \exists \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Faites les exercices suivants

Section 4 # 6

Malheureusement, on ne peut pas toujours trouver une fonction réelle qui donne la suite étudiée lorsqu'on la restreint aux nombres entiers.

Ce qui peut rendre l'évaluation de la limite difficile.

Mais dans plusieurs cas, on n'a pas besoin de connaître la valeur de la limite.

Déterminer si la suite est convergente ou divergente est suffisant.

Définition

On dit qu'une suite est **monotone** si elle est toujours croissante ou toujours décroissante.

Définition

On dit qu'une suite est **bornée supérieurement** s'il existe un nombre M tel que

$$\forall n, \quad a_n \leq M$$

On dit qu'une suite est **bornée inférieurement** s'il existe un nombre N tel que

$$\forall n, \quad a_n \geq N$$

On dit qu'une suite est **bornée** si elle est bornée supérieurement et inférieurement .

Théorème Si une suite converge alors elle est bornée.

Preuve: Si une suite converge alors $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

On peut prendre $\epsilon = 1$ il existe un certain N tel que

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots\}$$

sont bornés inférieurement par $L - 1$

et bornés supérieurement par $L + 1$

Un ensemble fini de nombres possède un plus grand et un plus petit.

Énoncé comme ça, ce théorème ne semble pas être très utile.

Par contre, sa contraposée fournit un outil simple et rapide pour déterminer si une suite diverge.

Théorème Si une suite n'est pas bornée alors elle diverge.

Théorème Une suite monotone bornée est convergente.

Preuve:

Supposons qu'elle est croissante et posons M sa plus petite borne supérieure.

Montrons que $\lim_{n \to \infty} a_n = M$ avec une preuve par contradiction

Fixons un certain ϵ et supposons qu'on ait jamais

$$M - \epsilon \leq a_m \leq M + \epsilon$$

Puisque la suite est croissante, on a donc que $a_m < M - \epsilon$

pour tout m.

Ce qui contredit le fait que M est la plus petite borne supérieure.

Faites les exercices suivants

Section 4 # 7, 8 et 9

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Suites
- ✓ Suites définis par récurrence
- ✓ Convergence et divergence de suite

Devoir: Section 4.2