4.3 SÉRIE

cours 25

Au dernier cours, nous avons vu

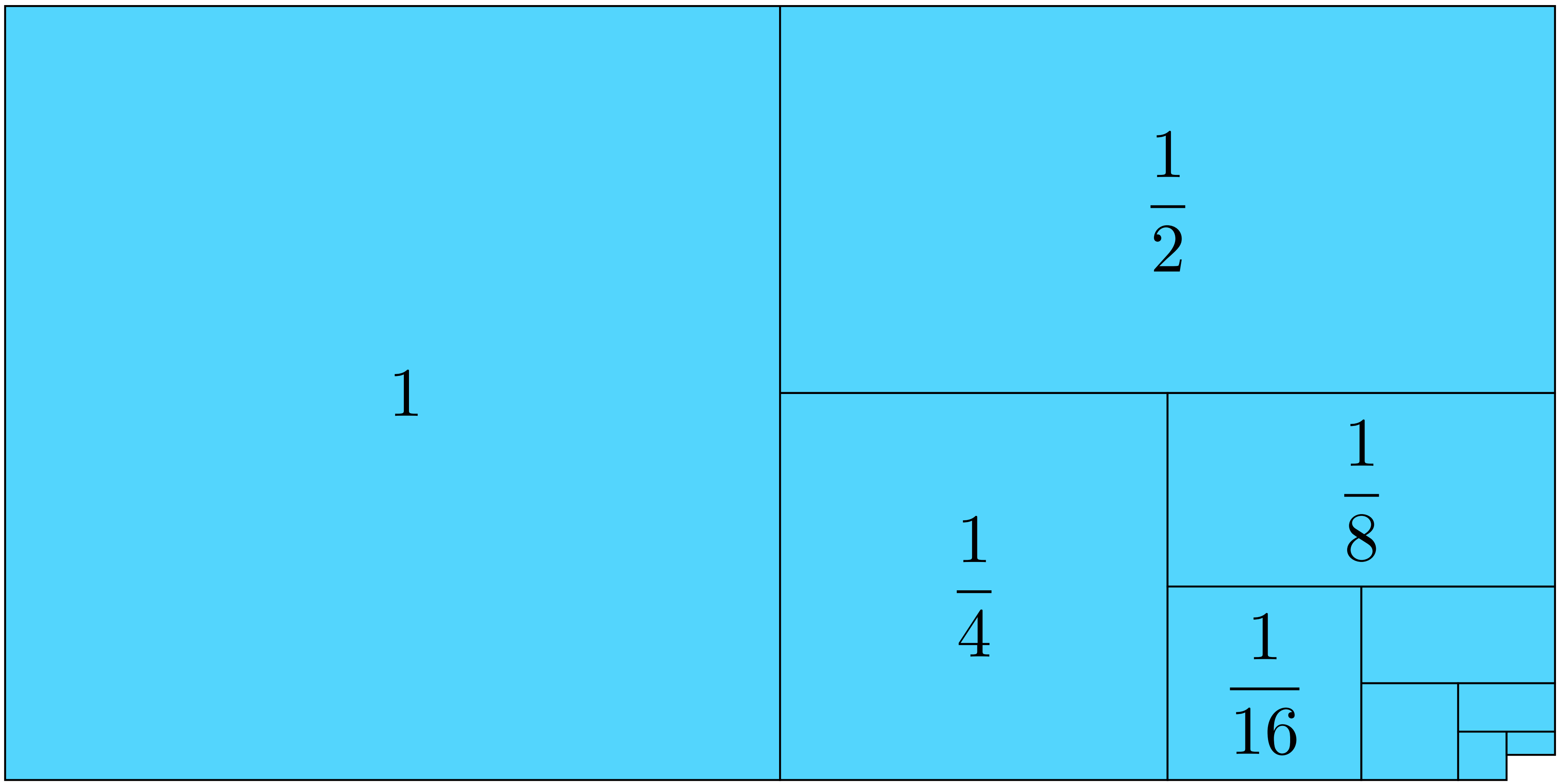
- ✓ Suites
- ✓ Suites définis par récurrence
- ✓ Convergence et divergence de suite

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique
- ✓ Critère du terme général
- ✓ Critère de l'intégrale

Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



Intuitivement, on aimerait dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

Par contre, faire une somme infinie est un nouveau type d'opération et requière d'être définie correctement.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{est bien déterminé}$$

Considérons la suite suivante:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \ldots\right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots\}$$

La suite des sommes partielles.

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \ldots\right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots\}$$

On définit la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$$

comme étant la limite de la suite des sommes partielles.

On dira que la série converge ou diverge dépendamment de la convergence ou divergence de la suite des sommes partielles.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$$

Malheureusement, on a vu en début de session qu'il n'était pas simple de trouver une expression pour une somme.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = ?$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} k$$

On a déjà vu que $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} k \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} = \infty$$

Donc la série diverge.

Mais bon... c'était un peu évident!

Faites les exercices suivants

Section 4 # 10

Comme il est difficile de trouver une expression pour une somme, nous allons plutôt essayer de déterminer si une série converge en la comparant à une série connue.

Pour ça, il nous faut connaître la convergence d'un certain nombre de série.

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \ldots$$

Donc la série harmonique diverge.

Faites les exercices suivants

Section 4 # 11

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{\cdots} + \cancel{ar^n}$$

$$-$$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{ar^6} + \cancel{\cdots} + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k = a - ar^{n+1}$$

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n} ar^k = a(1-r^{n+1})$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r}r^{n+1}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^{n+1}$$

si $\quad -1 < r < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$

si $\quad r > 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \infty$

si $\quad r < -1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} \quad \nexists$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n \to \infty} r^{n+1}$$

si $\quad -1 < r < 1$ $\qquad \lim_{n \to \infty} r^{n+1} = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

si $\quad r > 1$ $\qquad \lim_{n \to \infty} r^{n+1} = \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k \quad \text{diverge}$$

si $\quad r < -1$ $\qquad \lim_{n \to \infty} r^{n+1} \quad \nexists$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{4}{2^5}+\frac{4}{2^6}+\dots$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2}\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2^3}+\dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ la série converge vers $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 27\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3} = r}$$

La raison

Donc la série converge vers $\dfrac{\boxed{27}}{1-\boxed{\frac{1}{3}}} = \dfrac{27}{\frac{2}{3}} = \dfrac{81}{2}$

Faites les exercices suivants

Section 4 # 12 et 13

Théorème (Critère du terme général) Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Si le terme général ne tend pas vers 0 alors la série diverge.

$$\lim_{n\to\infty} a_k \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{diverge}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_k = 0$$

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Donc la série diverge.

Remarque L'inverse du théorème est faux.

$$\lim_{n\to\infty} a_k = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

La série harmonique diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{mais} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Faites les exercices suivants

Section 4 #15

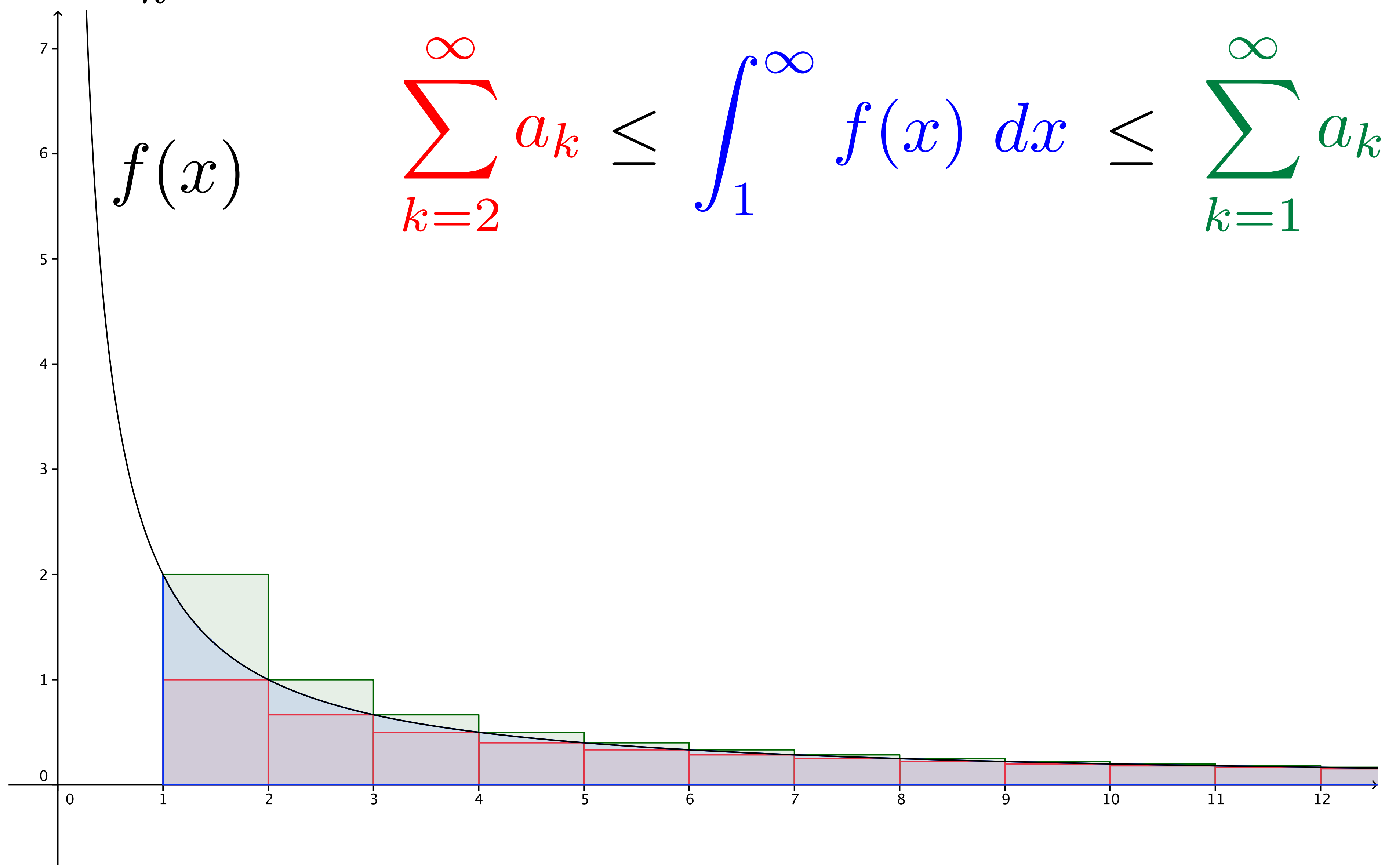
Considérons une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

et la suite des éléments sommés

$$\{a_k\} = \{f(k)\}$$

On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k



$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Donc si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

et si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ converge, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

En fait, on peut avoir une idée approximative de la valeur de la série lorsqu'elle converge

$$\boxed{0 \leq \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$a_1 \leq a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\ dx$$

$$a_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\ dx$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \qquad f(n) = \frac{1}{n^3} \qquad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge

$$a_1 = \frac{1}{1^3} = 1 \qquad 1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \le 1 + \frac{1}{2}$$

Faites les exercices suivants

Section 4 #16

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique
- ✓ Critère du terme général
- ✓ Critère de l'intégrale

Devoir: Section 4.3