4.3 SÉRIE

cours 25

Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Suites

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Suites
- ✓ Suites définis par récurrence

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Suites
- ✓ Suites définis par récurrence
- ✓ Convergence et divergence de suite

Aujourd’hui, nous allons voir

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Somme infinie

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique
- ✓ Critère du terme général

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique
- ✓ Critère du terme général
- ✓ Critère de l’intégrale

Regardons la somme suivante

Regardons la somme suivante

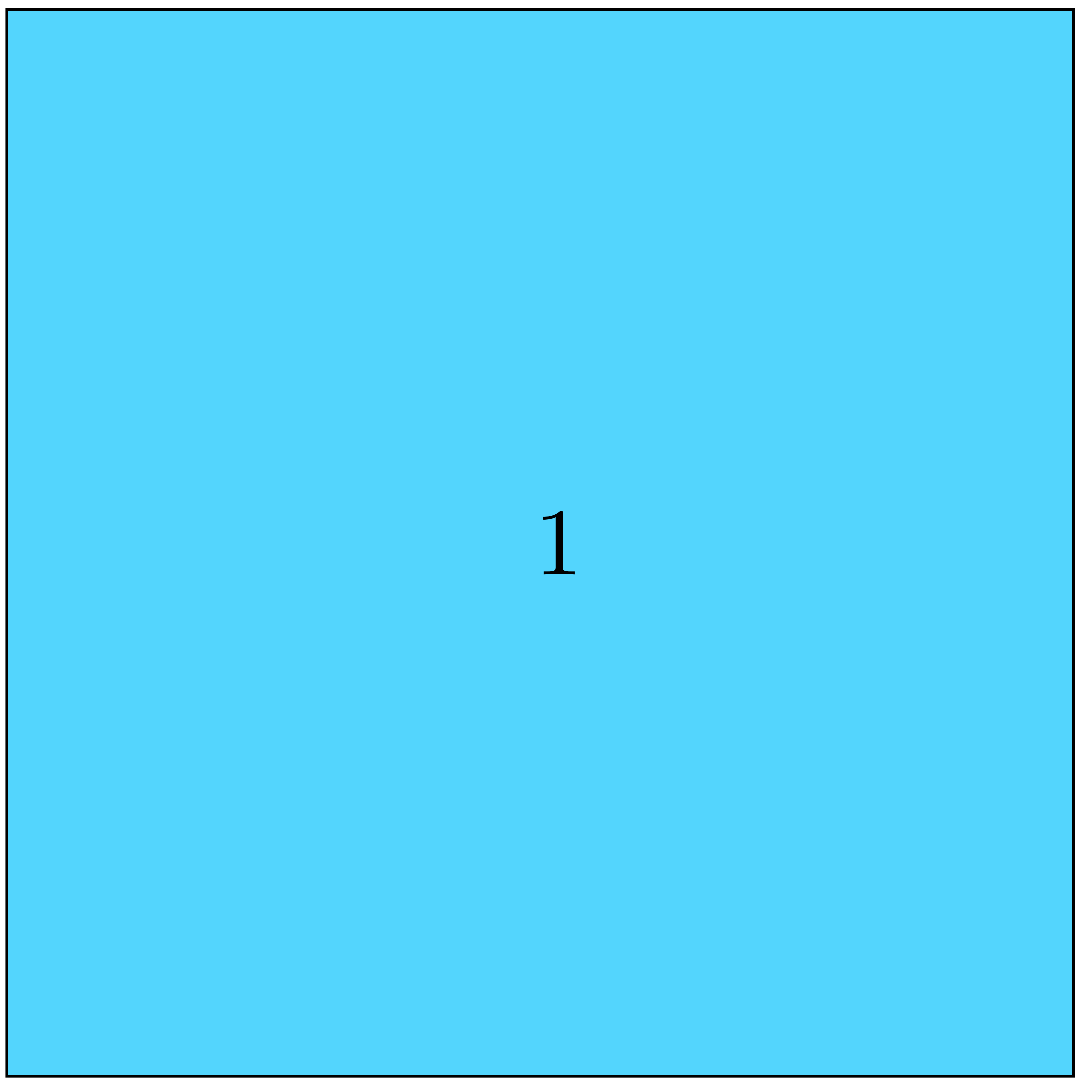
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

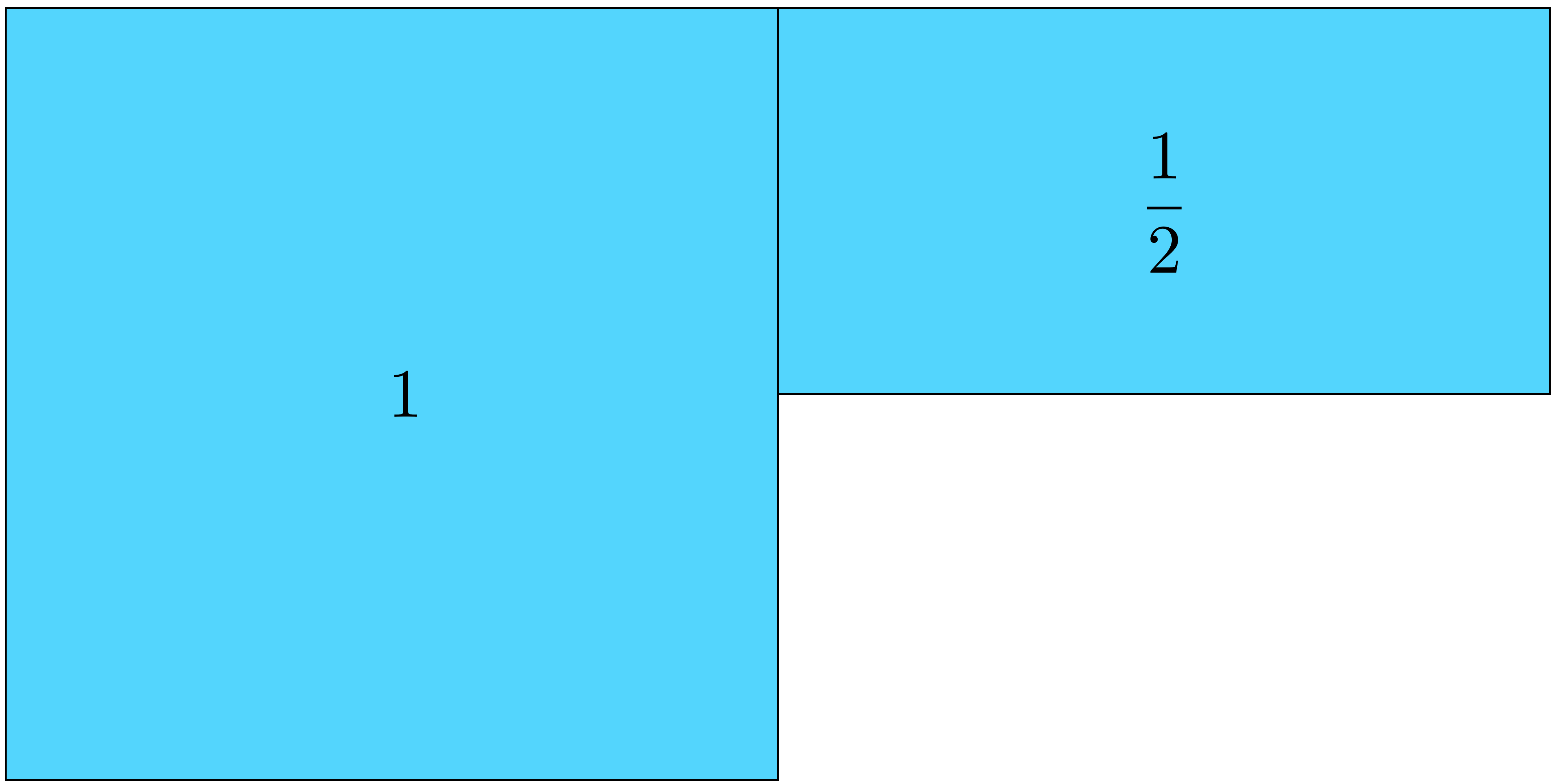
Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



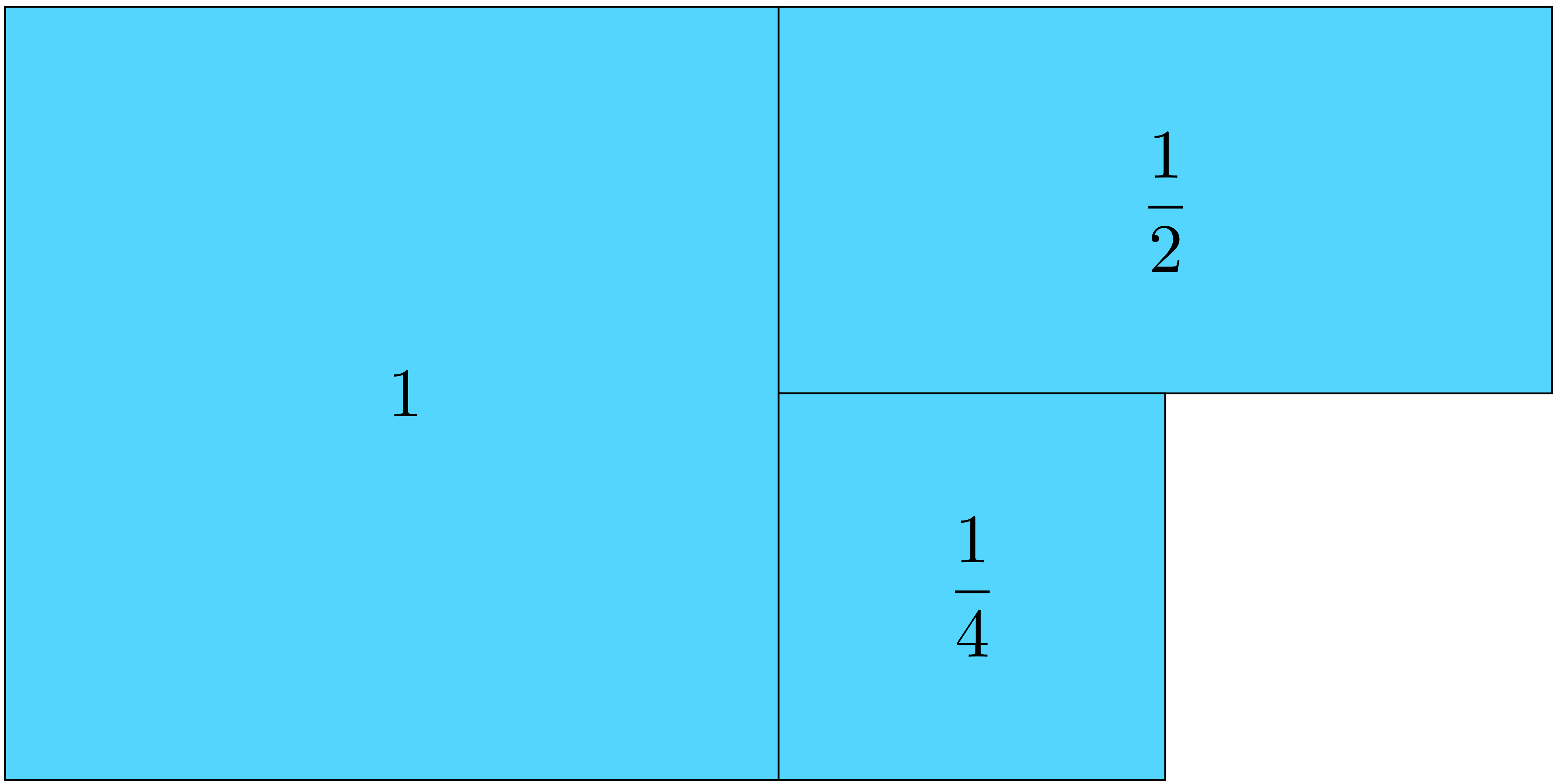
Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



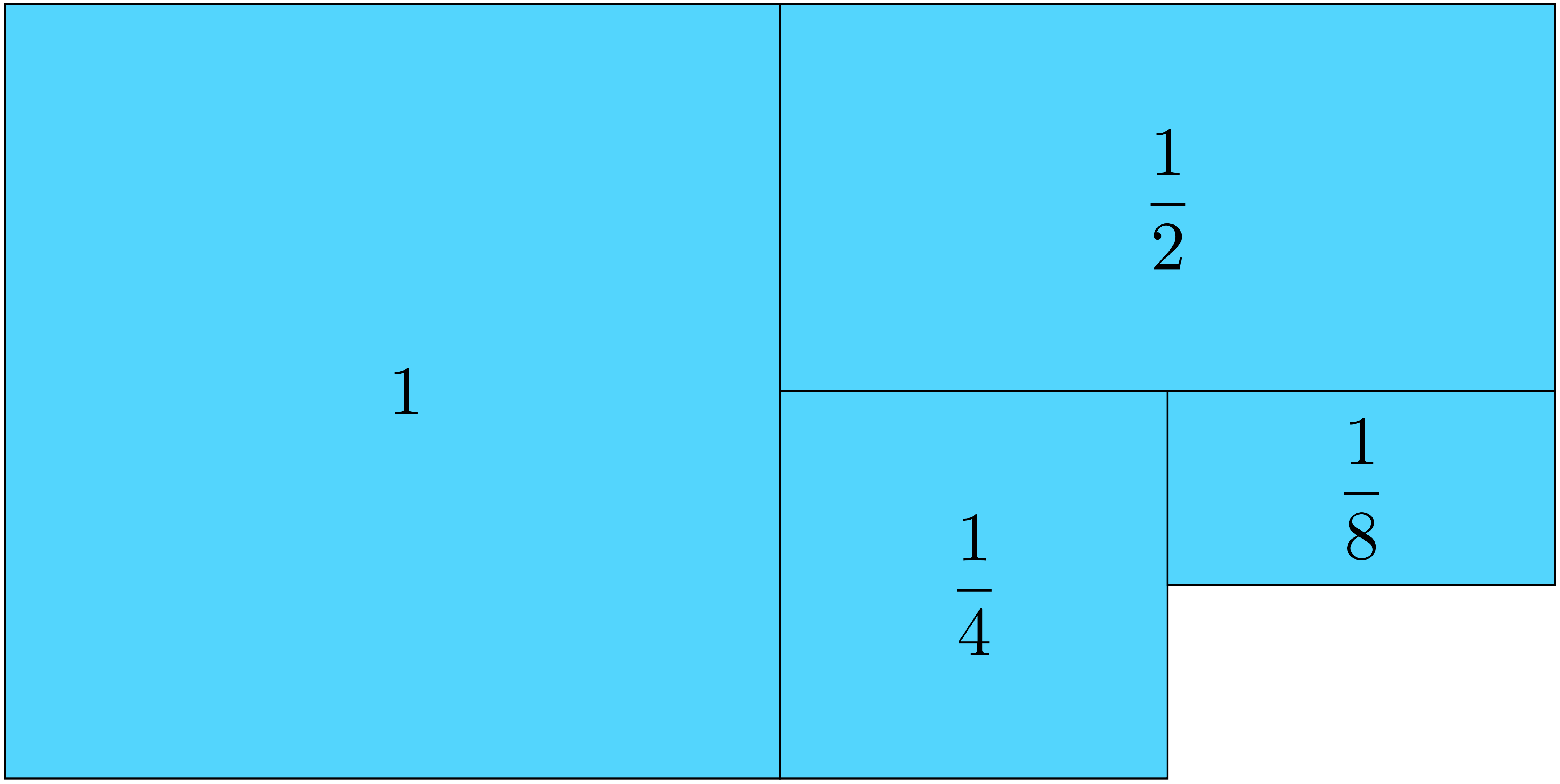
Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



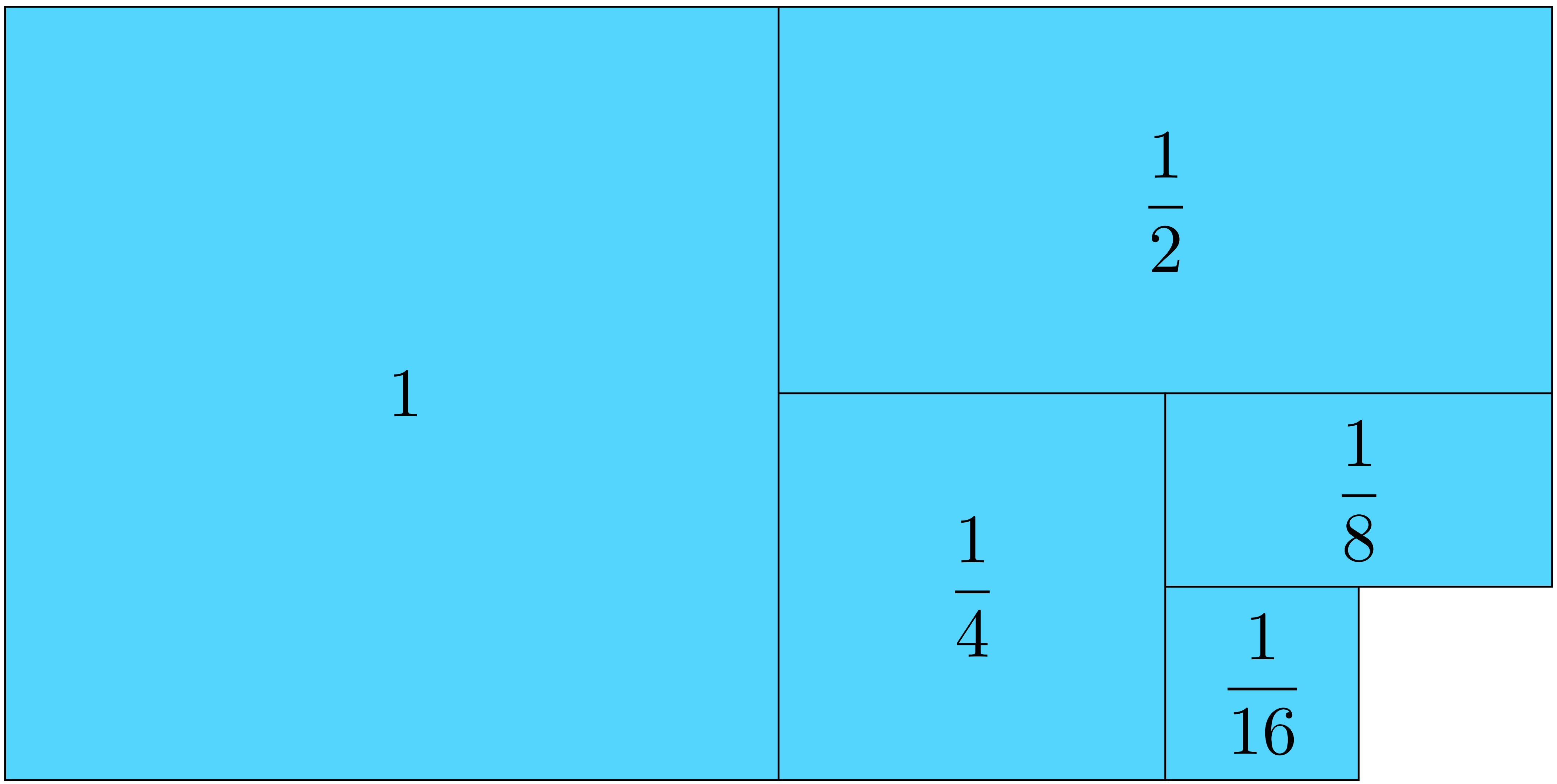
Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



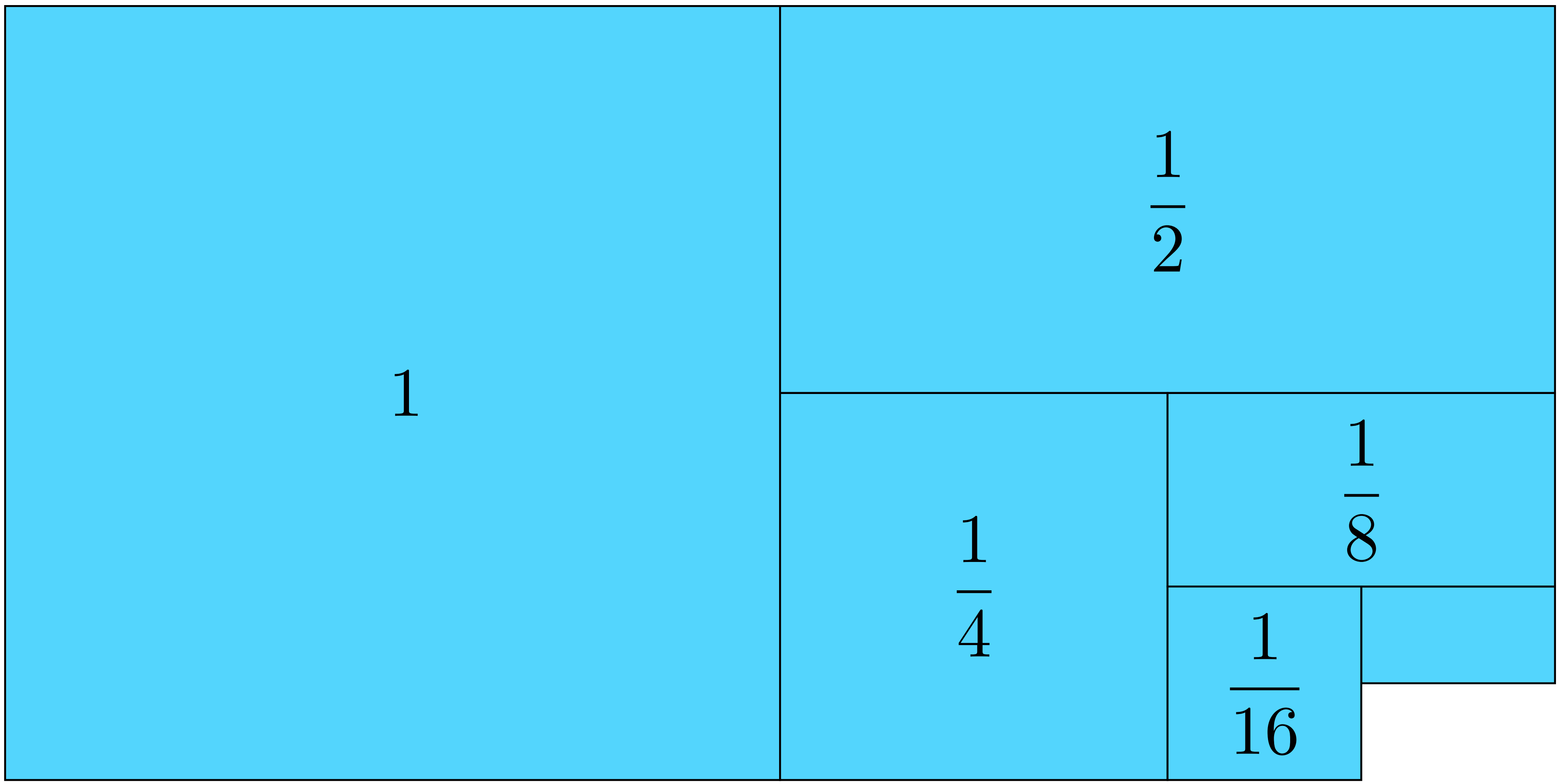
Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



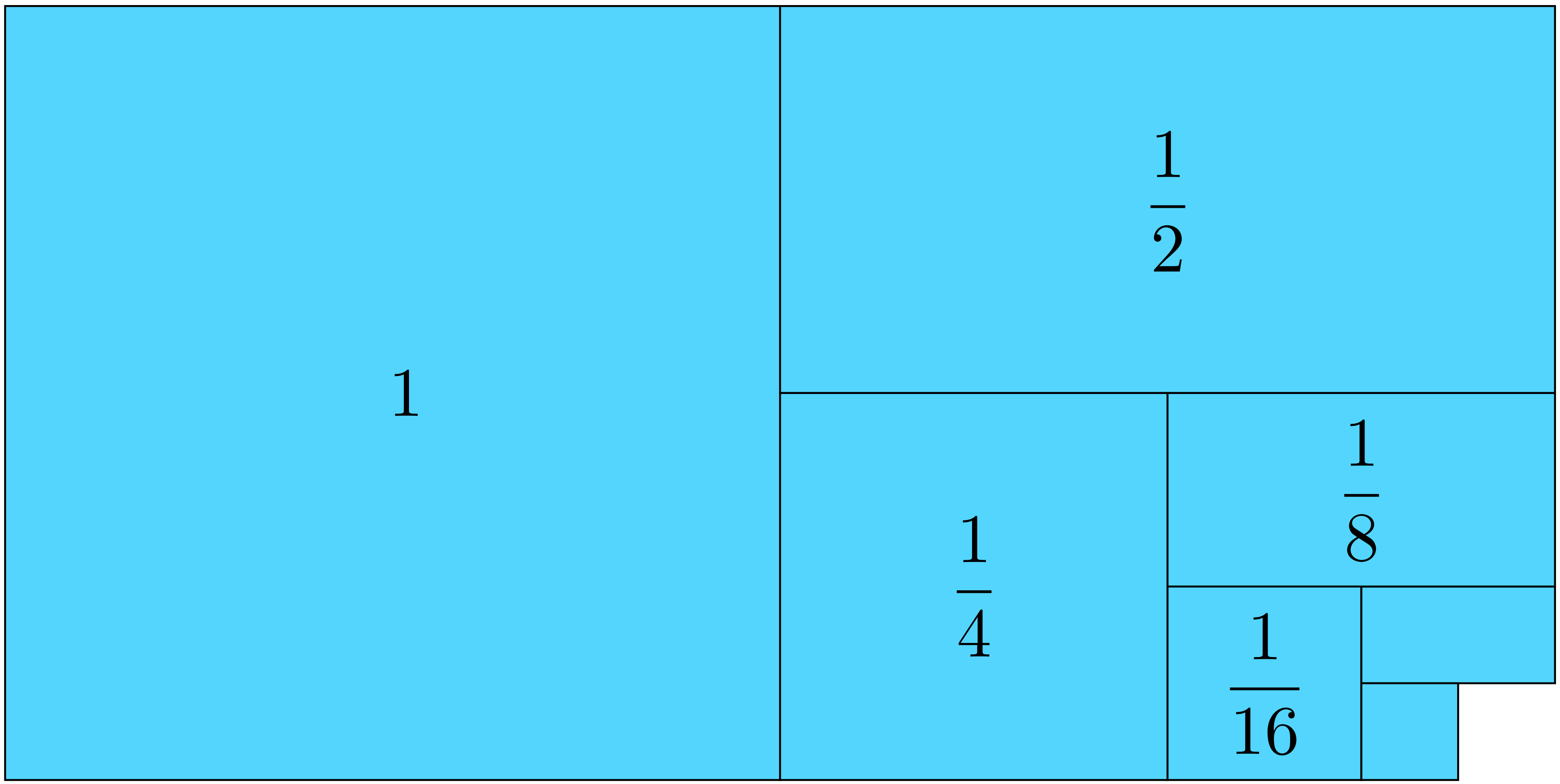
Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



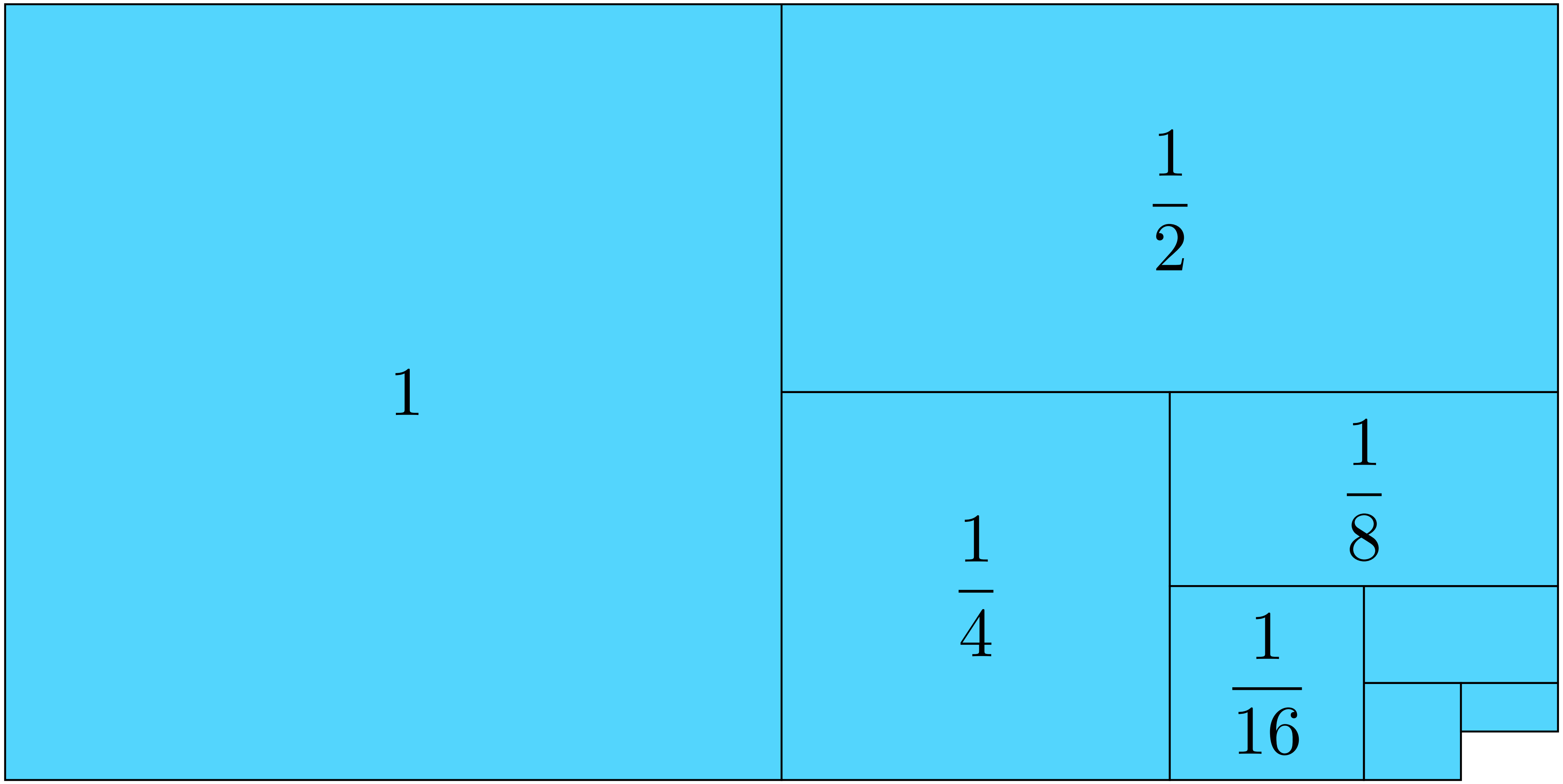
Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



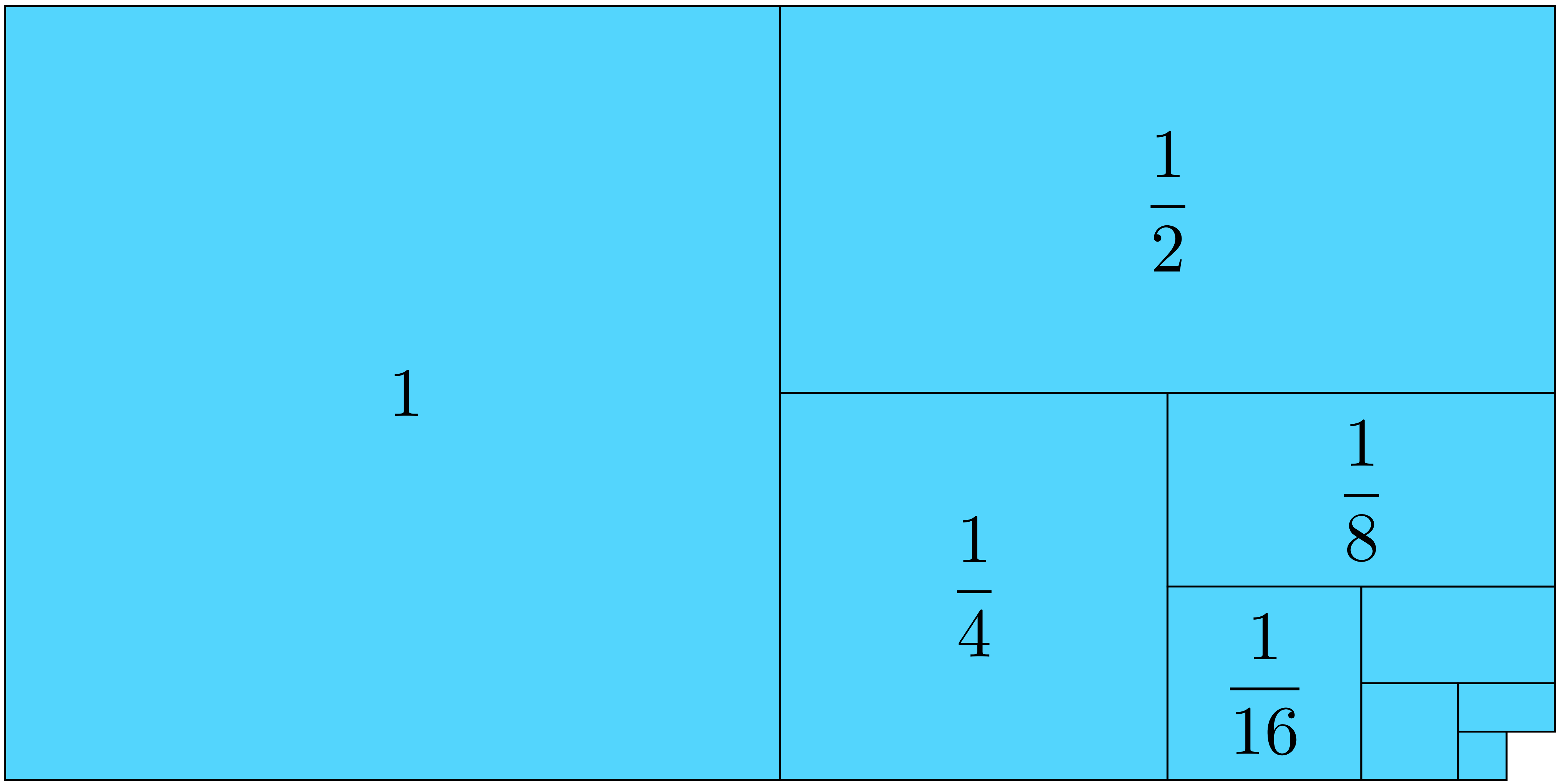
Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



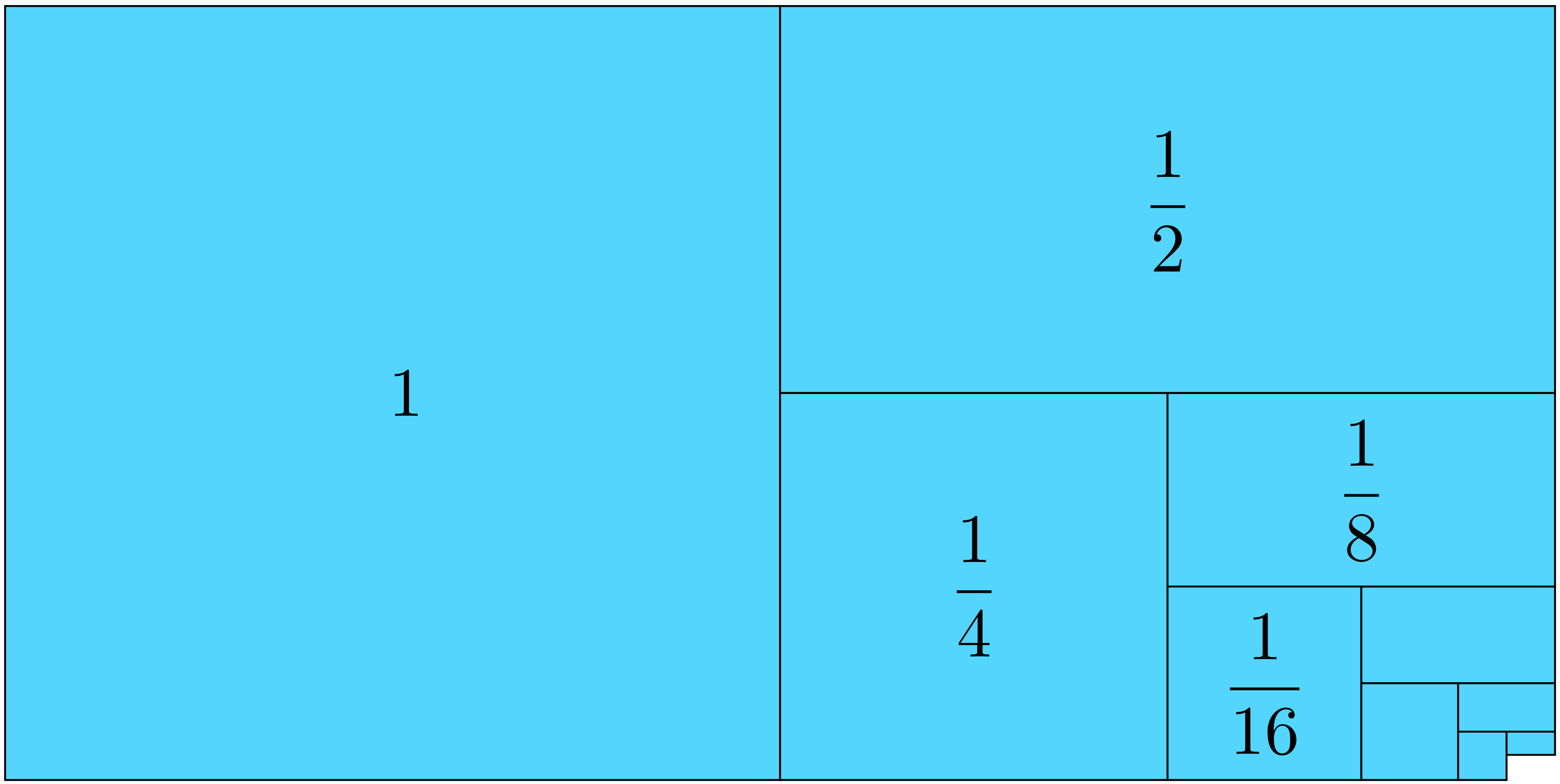
Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



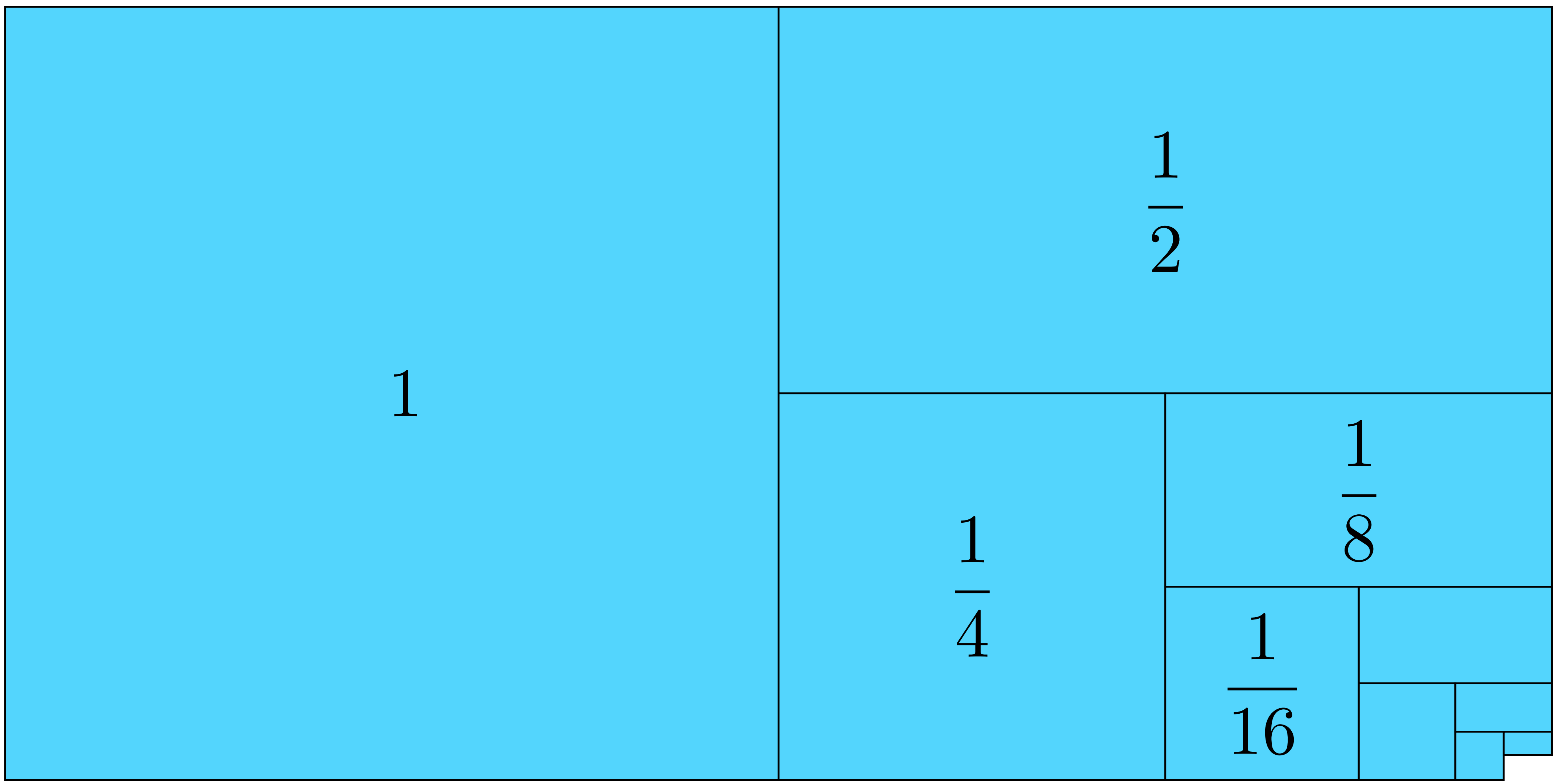
Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



Regardons la somme suivante

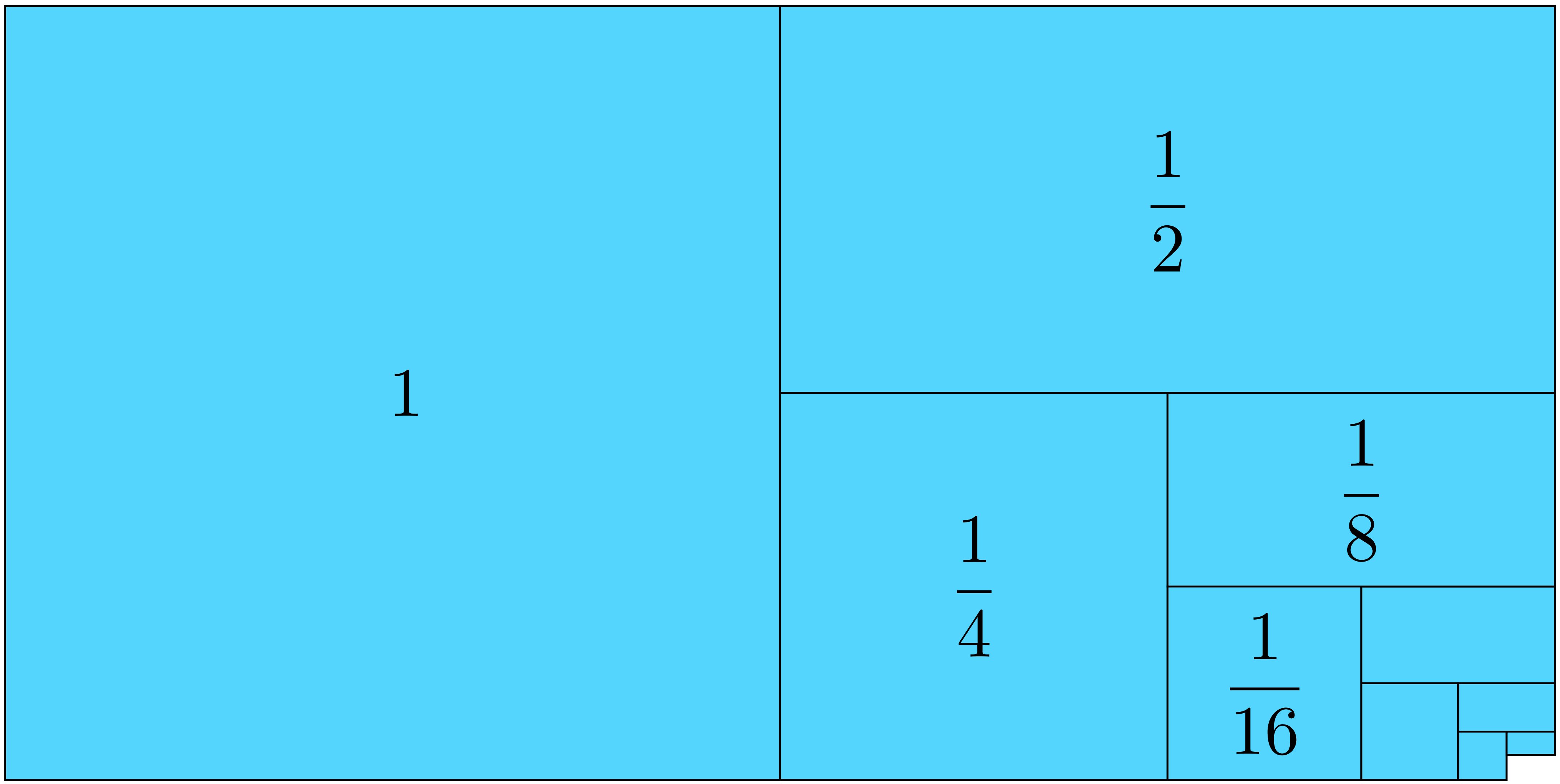
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



Intuitivement, on aimerait dire que

Regardons la somme suivante

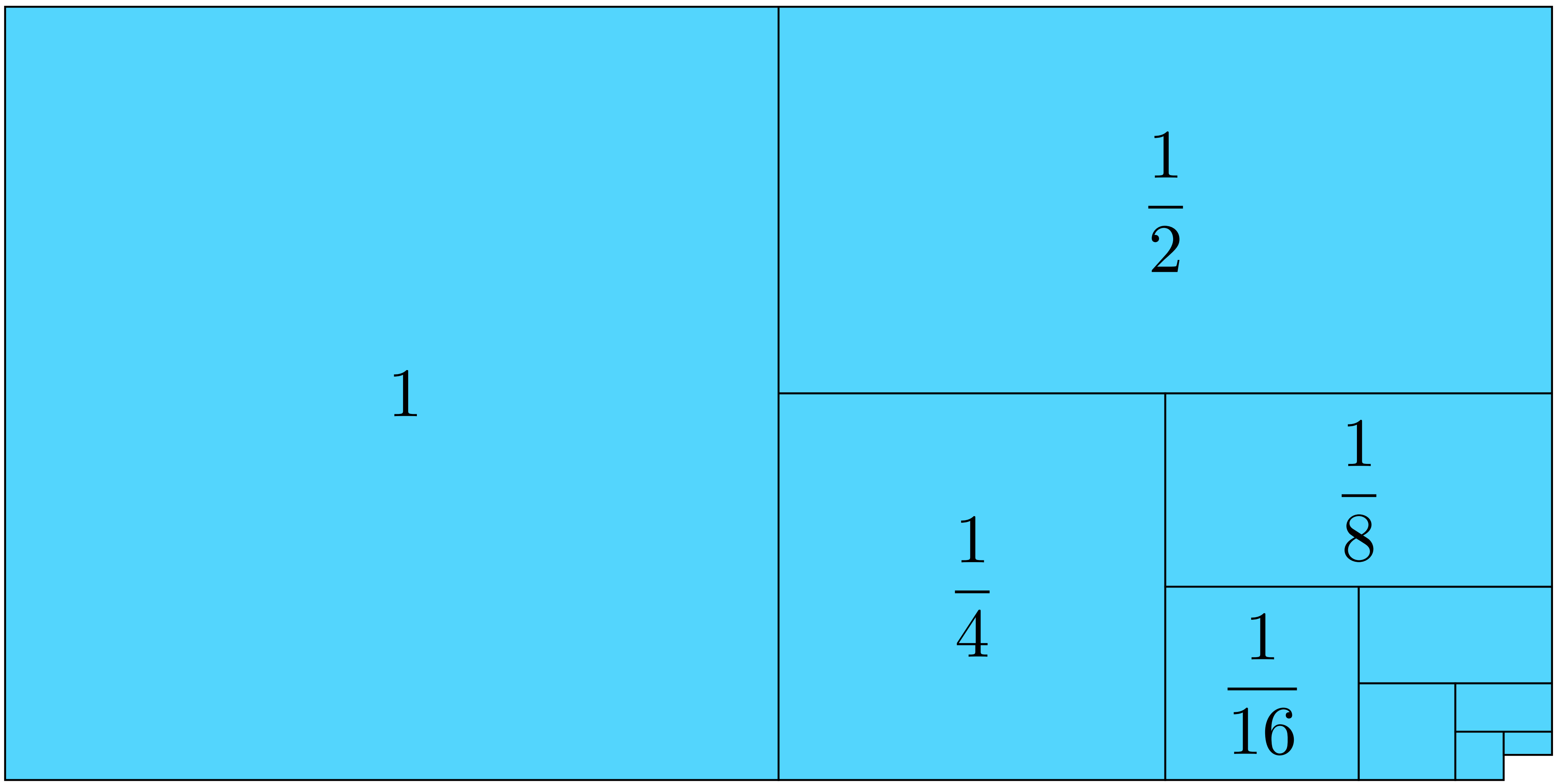
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



Intuitivement, on aimerait dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

Regardons la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



Intuitivement, on aimerait dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

Par contre, faire une somme infinie est un nouveau type d'opération et requière d'être définie correctement.

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

Par contre, faire une somme infinie est un nouveau type d'opération et requière d'être définie correctement.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{est bien déterminé}$$

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

Par contre, faire une somme infinie est un nouveau type d'opération et requière d'être définie correctement.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{est bien déterminé}$$

Considérons la suite suivante:

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

Par contre, faire une somme infinie est un nouveau type d'opération et requière d'être définie correctement.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{est bien déterminé}$$

Considérons la suite suivante:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$$

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

Par contre, faire une somme infinie est un nouveau type d'opération et requière d'être définie correctement.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{est bien déterminé}$$

Considérons la suite suivante:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \ldots\right\}$$

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

Par contre, faire une somme infinie est un nouveau type d'opération et requière d'être définie correctement.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{est bien déterminé}$$

Considérons la suite suivante:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \dots\right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots\}$$

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

Par contre, faire une somme infinie est un nouveau type d'opération et requière d'être définie correctement.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{est bien déterminé}$$

Considérons la suite suivante:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \ldots\right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots\}$$

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

Par contre, faire une somme infinie est un nouveau type d'opération et requière d'être définie correctement.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{est bien déterminé}$$

Considérons la suite suivante:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \dots\right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots\}$$

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

Par contre, faire une somme infinie est un nouveau type d'opération et requière d'être définie correctement.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{est bien déterminé}$$

Considérons la suite suivante:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \dots \right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots\}$$

On comprend bien ce que veut dire faire une somme finie de terme.

Par contre, faire une somme infinie est un nouveau type d'opération et requière d'être définie correctement.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{est bien déterminé}$$

Considérons la suite suivante:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \ldots \right\}$$

$$= \{ a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots \}$$

La suite des sommes partielles.

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \ldots\right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots\}$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \dots\right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots\}$$

On définit la série

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \ldots\right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots\}$$

On définit la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \ldots\right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots\}$$

On définit la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \ldots\right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots\}$$

On définit la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$$

comme étant la limite de la suite des sommes partielles.

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \sum_{k=1}^{3} a_k, \sum_{k=1}^{4} a_k, \dots\right\}$$

$$= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots\}$$

On définit la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$$

comme étant la limite de la suite des sommes partielles.

On dira que la série converge ou diverge dépendamment de la convergence ou divergence de la suite des sommes partielles.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$$

Malheureusement, on a vu en début de session qu'il n'était pas simple de trouver une expression pour une somme.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$$

Malheureusement, on a vu en début de session qu'il n'était pas simple de trouver une expression pour une somme.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = ?$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} k$$

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k$

On a déjà vu que

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} k$$

On a déjà vu que $$\sum_{k=1}^{n} k$$

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k$

On a déjà vu que $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple $\sum_{k=1}^{\infty} k$

On a déjà vu que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} k \right\}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} k$$

On a déjà vu que $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} k$$

On a déjà vu que $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} k \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} = \infty$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} k$$

On a déjà vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} = \infty$$

Donc la série diverge.

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} k$$

On a déjà vu que $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} = \infty$$

Donc la série diverge.

Mais bon... c'était un peu évident!

Faites les exercices suivants

Section 4 # 10

Comme il est difficile de trouver une expression pour une somme, nous allons plutôt essayer de déterminer si une série converge en la comparant à une série connue.

Comme il est difficile de trouver une expression pour une somme, nous allons plutôt essayer de déterminer si une série converge en la comparant à une série connue.

Pour ça, il nous faut connaître la convergence d'un certain nombre de série.

Série harmonique

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots$$

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \dots$$

Série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \dots$$

Donc la série harmonique diverge.

Faites les exercices suivants

Section 4 # 11

Série géométrique

Série géométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$

Série géometrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ldots$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \cdots + ar^n$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \cdots + ar^n$$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \cdots + ar^n$$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ar^6 + \cdots + ar^{n+1}$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \cdots + ar^n$$

$-$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ar^6 + \cdots + ar^{n+1}$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \cdots + ar^n$$

$-$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ar^6 + \cdots + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + \cancel{ar} + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \cdots + ar^n$$

$-$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \cancel{ar} + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ar^6 + \cdots + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \cdots + ar^n$$

$-$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ar^6 + \cdots + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + ar^4 + ar^5 + \cdots + ar^n$$

$-$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + ar^4 + ar^5 + ar^6 + \cdots + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + \cancel{ar} + \cancel{ar}^2 + \cancel{ar}^3 + \cancel{ar}^4 + ar^5 + \cdots + ar^n$$

$-$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \cancel{ar} + \cancel{ar}^2 + \cancel{ar}^3 + \cancel{ar}^4 + ar^5 + ar^6 + \cdots + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cdots + ar^n$$

$-$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + ar^6 + \cdots + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{\cdots} + ar^n$$

$-$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{ar^6} + \cdots + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{\cdots} + \cancel{ar^n}$$

$-$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{ar^6} + \cancel{\cdots} + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{\cdots} + \cancel{ar^n}$$

$-$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{ar^6} + \cancel{\cdots} + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k = a - ar^{n+1}$$

Série géometrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{\cdots} + \cancel{ar^n}$$

$-$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{ar^6} + \cancel{\cdots} + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k = a - ar^{n+1}$$

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n} ar^k = a(1-r^{n+1})$$

Série géométrique

Le premier terme

La raison

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{\cdots} + \cancel{ar^n}$$

$$-$$

$$r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{ar^4} + \cancel{ar^5} + \cancel{ar^6} + \cancel{\cdots} + ar^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k = a - ar^{n+1}$$

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n} ar^k = a(1-r^{n+1})$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \right\}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} r^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r}r^{n+1}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} r^{n+1}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^{n+1}$$

$$\text{si} \quad -1 < r < 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} r^{n+1}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^{n+1}$$

si $\quad -1 < r < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r}r^{n+1}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^{n+1}$$

si $\quad -1 < r < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$

si $\quad r > 1$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r}r^{n+1}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^{n+1}$$

si $\quad -1 < r < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$

si $\quad r > 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \infty$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r}r^{n+1}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^{n+1}$$

si $\quad -1 < r < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$

si $\quad r > 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \infty$

si $\quad r < -1$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} r^{n+1}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^{n+1}$$

si $\quad -1 < r < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$

si $\quad r > 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \infty$

si $\quad r < -1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} \quad \nexists$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^{n+1}$$

si $\quad -1 < r < 1 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$

si $\quad r > 1 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \infty$

si $\quad r < -1 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} \quad \nexists$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^{n+1}$$

si $\quad -1 < r < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

si $\quad r > 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \infty$

si $\quad r < -1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} \nexists$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n \to \infty} r^{n+1}$$

si $\quad -1 < r < 1 \qquad \lim_{n \to \infty} r^{n+1} = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

si $\quad r > 1 \qquad \lim_{n \to \infty} r^{n+1} = \infty$

si $\quad r < -1 \qquad \lim_{n \to \infty} r^{n+1} \quad \nexists$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k \quad \text{diverge}$$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k}$$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^3} + \dots$$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Puisque $\quad -1 < \dfrac{1}{2} < 1$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Puisque $\quad -1 < \frac{1}{2} < 1$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ la série converge vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ la série converge vers $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ la série converge vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ la série converge vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{4}{2^5}+\frac{4}{2^6}+\dots$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2}\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2^3}+\dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ la série converge vers $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ la série converge vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

Exemple

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ la série converge vers $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n$$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad\qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad\qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n}$$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad\qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n}$$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad\qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad\qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots$$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad\qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots$$

Premier terme

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad\qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9}$$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = r$$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3} = r}$$

La raison

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 27 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3} = r}$$

La raison

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 27 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3} = r}$$

La raison

Donc la série converge vers

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} 27 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = r$$

La raison

Donc la série converge vers $\dfrac{27}{1-\frac{1}{3}}$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad\qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} 27\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3} = r}$$

La raison

Donc la série converge vers $\dfrac{\boxed{27}}{1-\frac{1}{3}}$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 27 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3} = r}$$

La raison

Donc la série converge vers $\dfrac{27}{1 - \frac{1}{3}}$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 27 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3} = r}$$

La raison

Donc la série converge vers $\dfrac{\boxed{27}}{1 - \boxed{\frac{1}{3}}} = \dfrac{27}{\frac{2}{3}}$

Une façon simple de trouver la raison d'une série géométrique

$$a_n = ar^n \qquad a_{n+1} = ar^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{n+1}}{ar^n} = \frac{rr^n}{r^n} = r$$

Exemple

$$\boxed{27} + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 27 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Premier terme

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3} = r}$$

La raison

Donc la série converge vers $\dfrac{\boxed{27}}{1 - \boxed{\frac{1}{3}}} = \dfrac{27}{\frac{2}{3}} = \dfrac{81}{2}$

Faites les exercices suivants

Section 4 # 12 et 13

Théorème (Critère du terme général)

Théorème (Critère du terme général) Soit une série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Théorème (Critère du terme général) Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Si le terme général ne tend pas vers 0 alors la série diverge.

Théorème (Critère du terme général) Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Si le terme général ne tend pas vers 0 alors la série diverge.

$$\lim_{n \to \infty} a_k \neq 0$$

Théorème (Critère du terme général) Soit une série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Si le terme général ne tend pas vers 0 alors la série diverge.

$$\lim_{n\to\infty} a_k \neq 0 \qquad \Longrightarrow$$

Théorème (Critère du terme général) Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Si le terme général ne tend pas vers 0 alors la série diverge.

$$\lim_{n\to\infty} a_k \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{diverge}$$

Théorème (Critère du terme général) Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Si le terme général ne tend pas vers 0 alors la série diverge.

$$\lim_{n \to \infty} a_k \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{diverge}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

Théorème (Critère du terme général) Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Si le terme général ne tend pas vers 0 alors la série diverge.

$$\lim_{n\to\infty} a_k \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{diverge}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_k = 0$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^n}{n^2}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{e^n}{n^2} \quad = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2} \quad = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \quad \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \quad \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2}$$

Exemple $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Donc la série diverge.

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Donc la série diverge.

Remarque

Exemple $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Donc la série diverge.

Remarque L'inverse du théorème est faux.

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Donc la série diverge.

Remarque L'inverse du théorème est faux.

$$\lim_{n\to\infty} a_k = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Donc la série diverge.

Remarque L'inverse du théorème est faux.

$$\lim_{n\to\infty} a_k = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

La série harmonique diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Donc la série diverge.

Remarque L'inverse du théorème est faux.

$$\lim_{n\to\infty} a_k = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

La série harmonique diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{mais} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Faites les exercices suivants

Section 4 #15

Considérons une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Considérons une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k$$

Considérons une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \begin{array}{l} \text{avec} \quad 0 < a_k \\ \text{et} \quad a_k > a_{k+1} \end{array}$$

Considérons une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \quad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

et la suite des éléments sommés

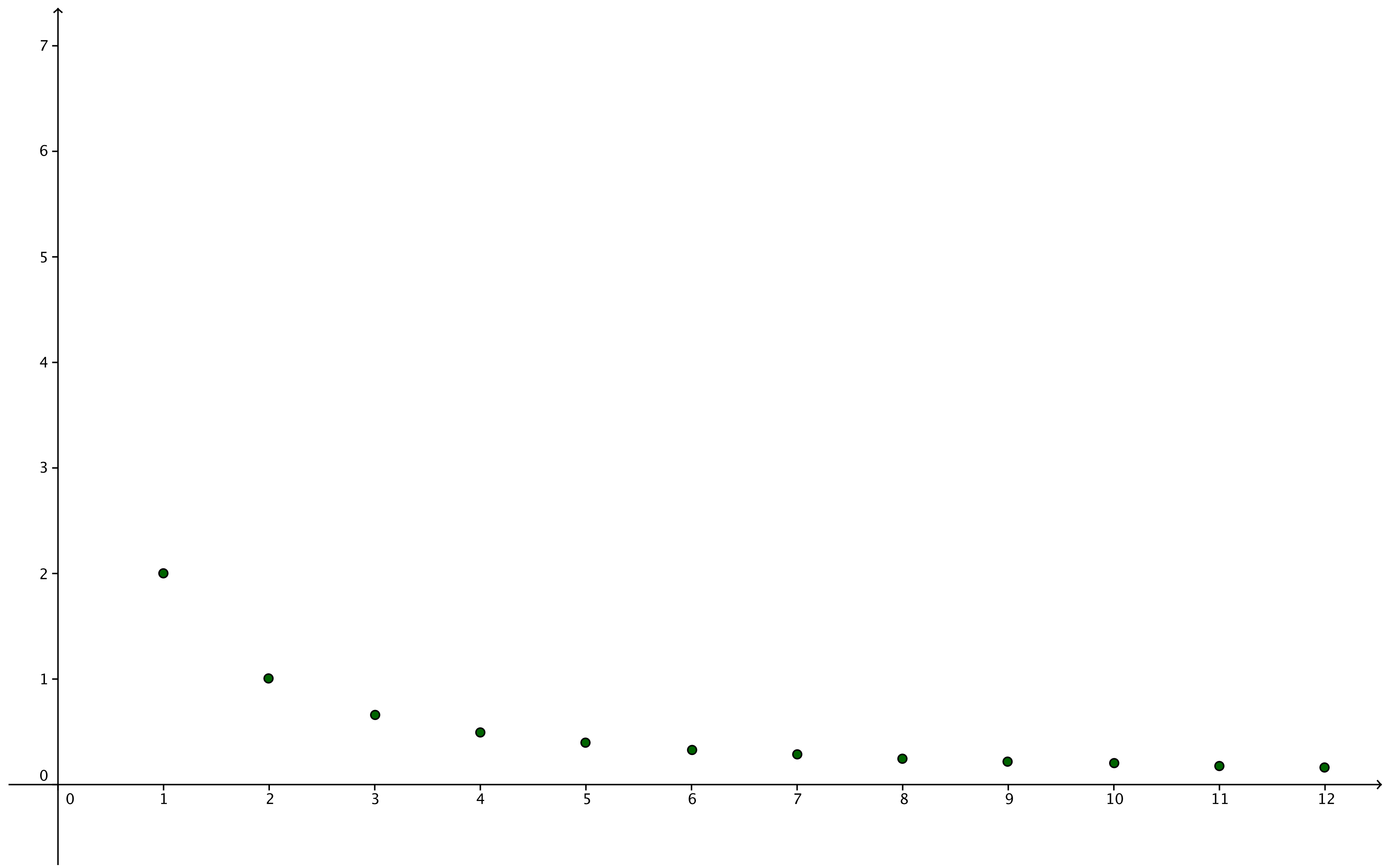
$$\{a_k\}$$

Considérons une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{avec} \quad 0 < a_k \quad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

et la suite des éléments sommés

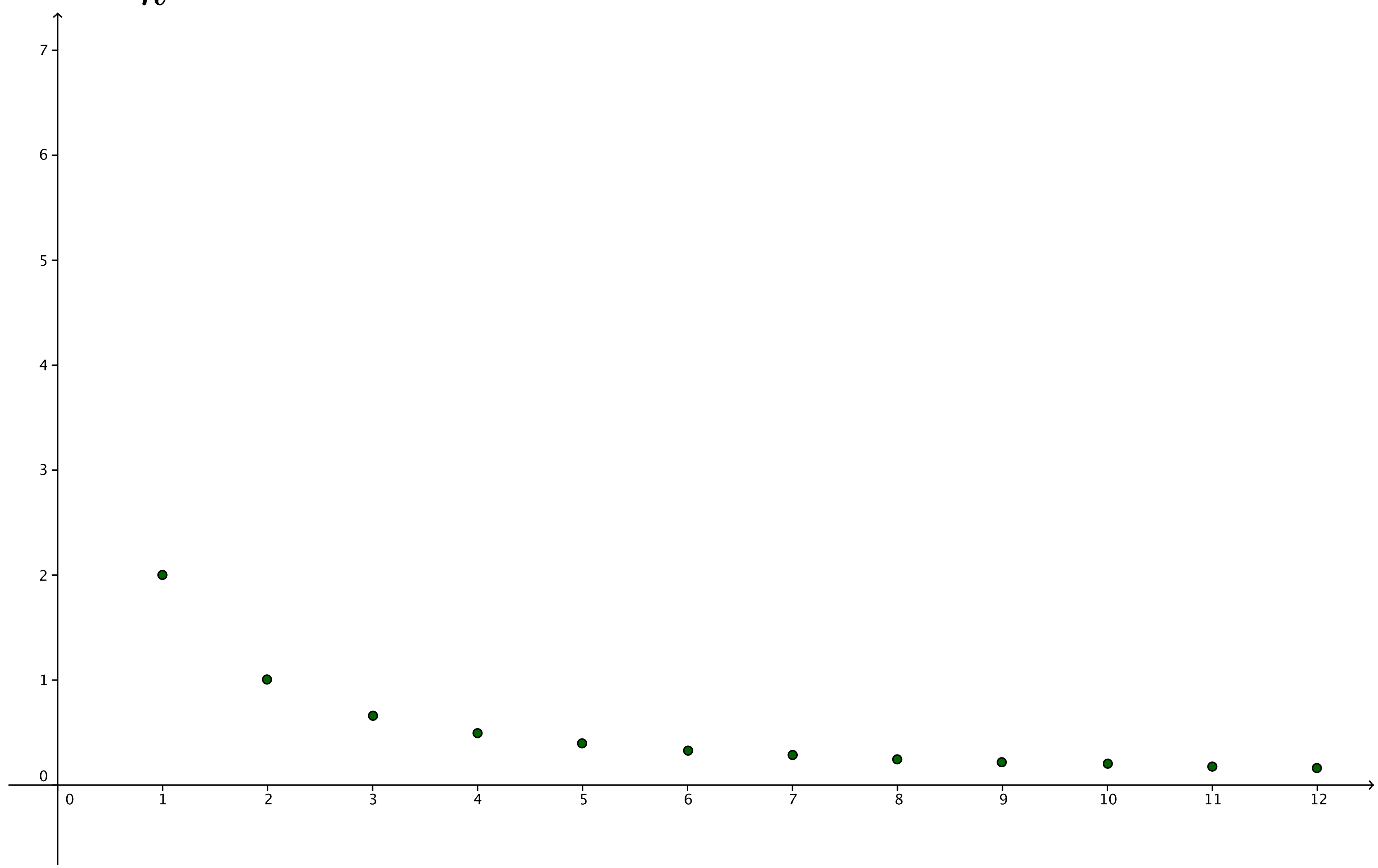
$$\{a_k\}$$



Considérons une série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ avec $0 < a_k$ et $a_k > a_{k+1}$

et la suite des éléments sommés $\{a_k\}$

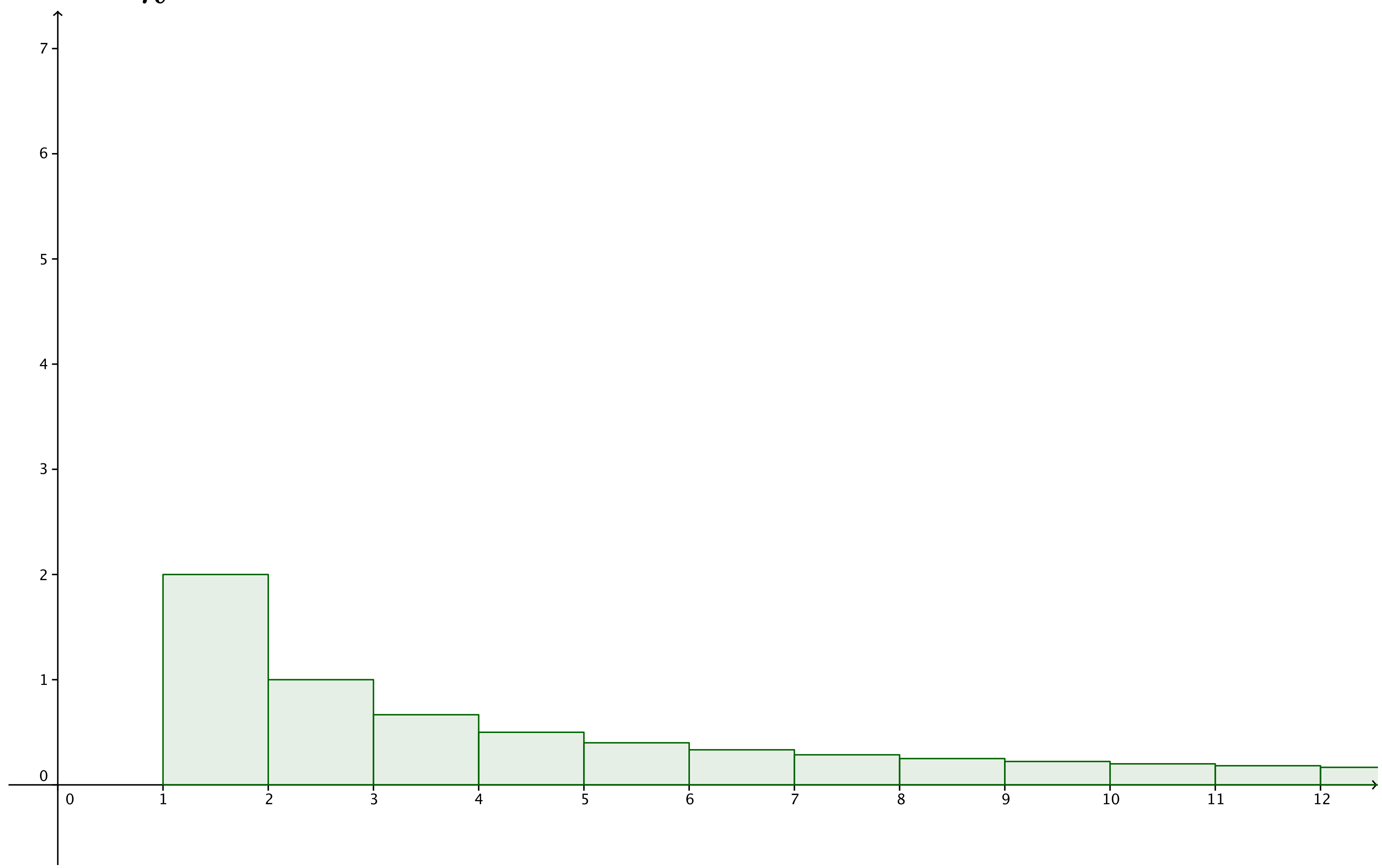
On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k



Considérons une série et la suite des éléments sommés

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{avec} \quad 0 < a_k \quad \text{et} \quad a_k > a_{k+1} \qquad \{a_k\}$$

On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k

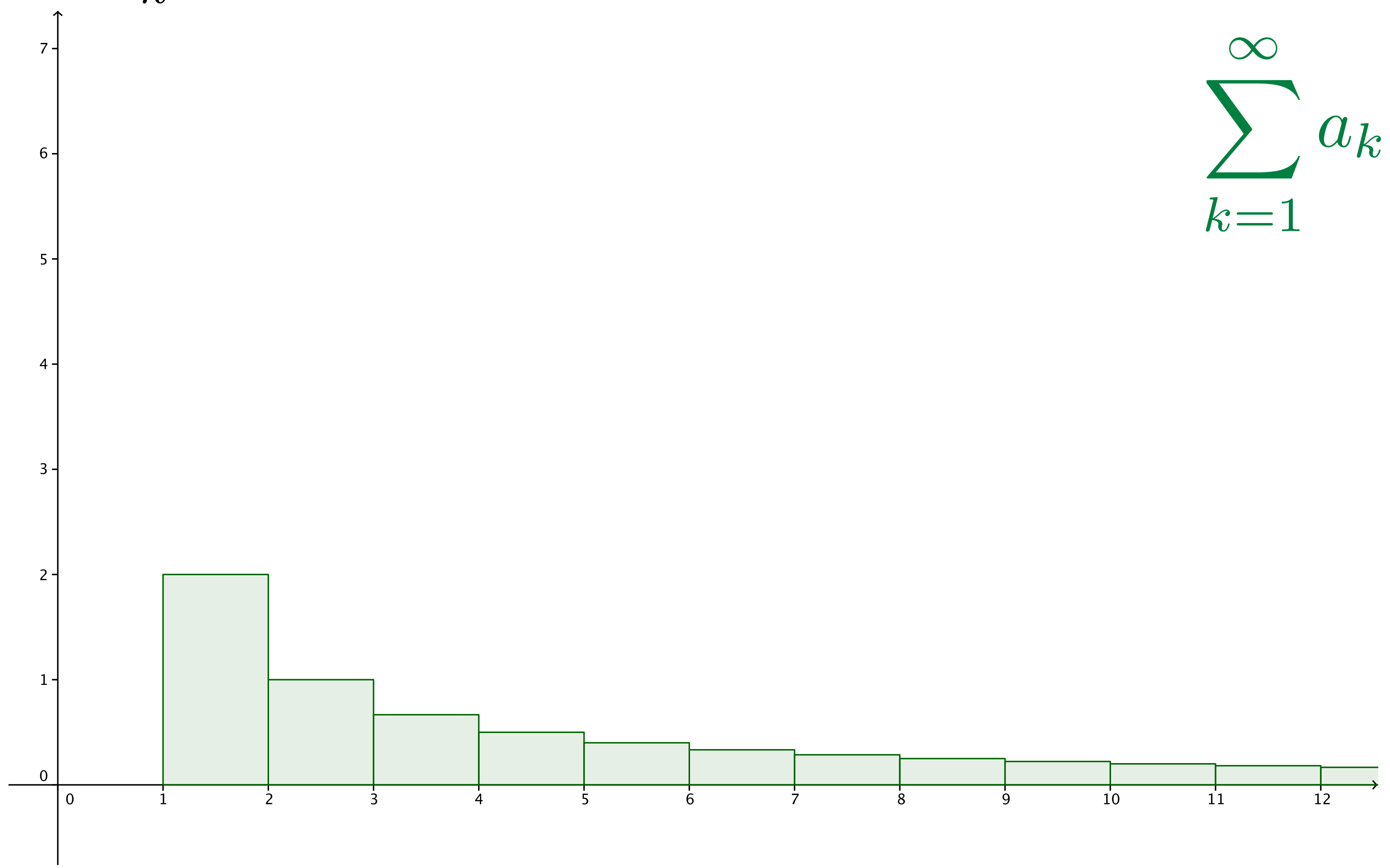


Considérons une série et la suite des éléments sommés

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{avec} \quad 0 < a_k \quad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\{a_k\}$$

On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k

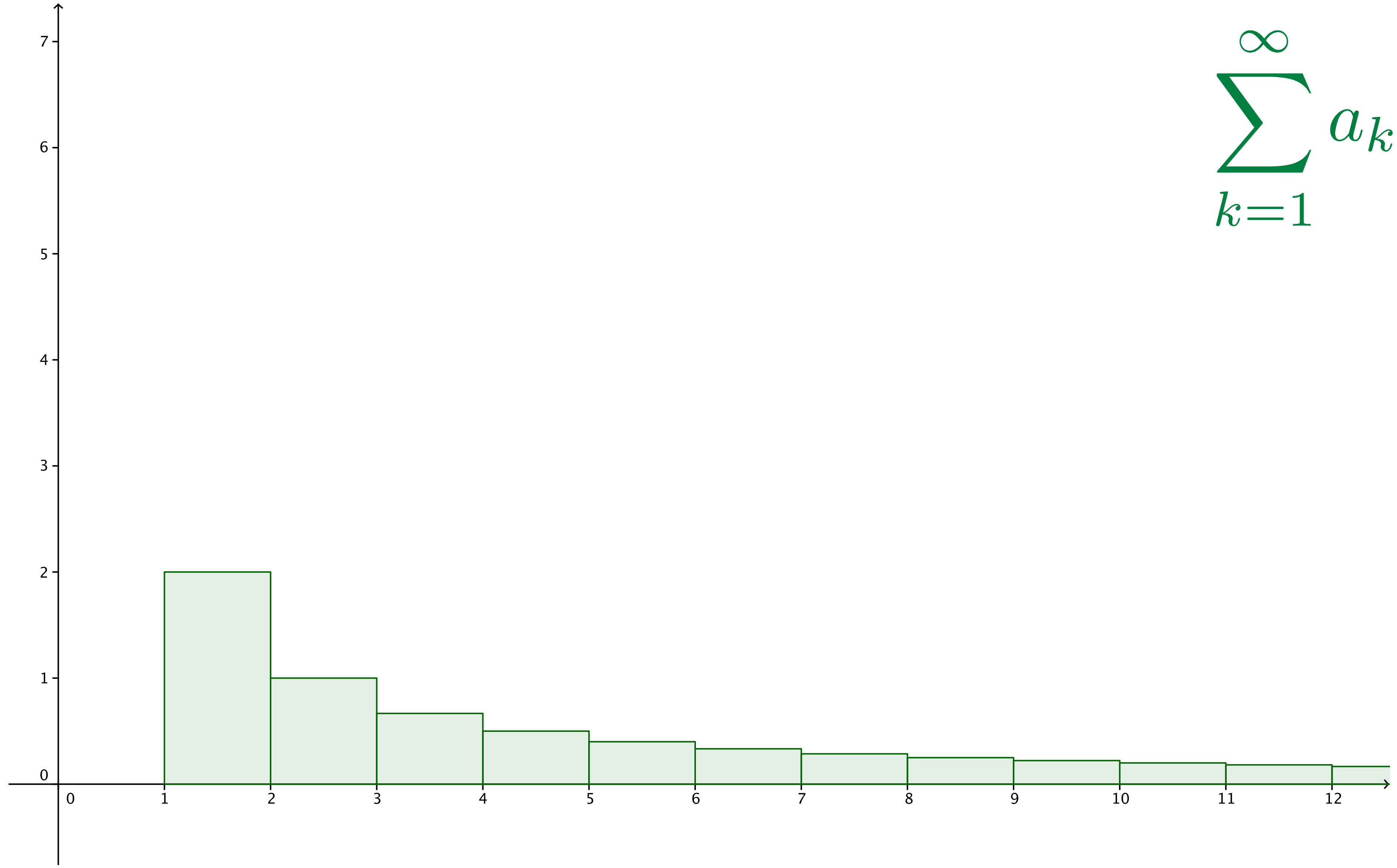


Considérons une série et la suite des éléments sommés

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{avec} \quad 0 < a_k \quad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\{a_k\} = \{f(k)\}$$

On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k



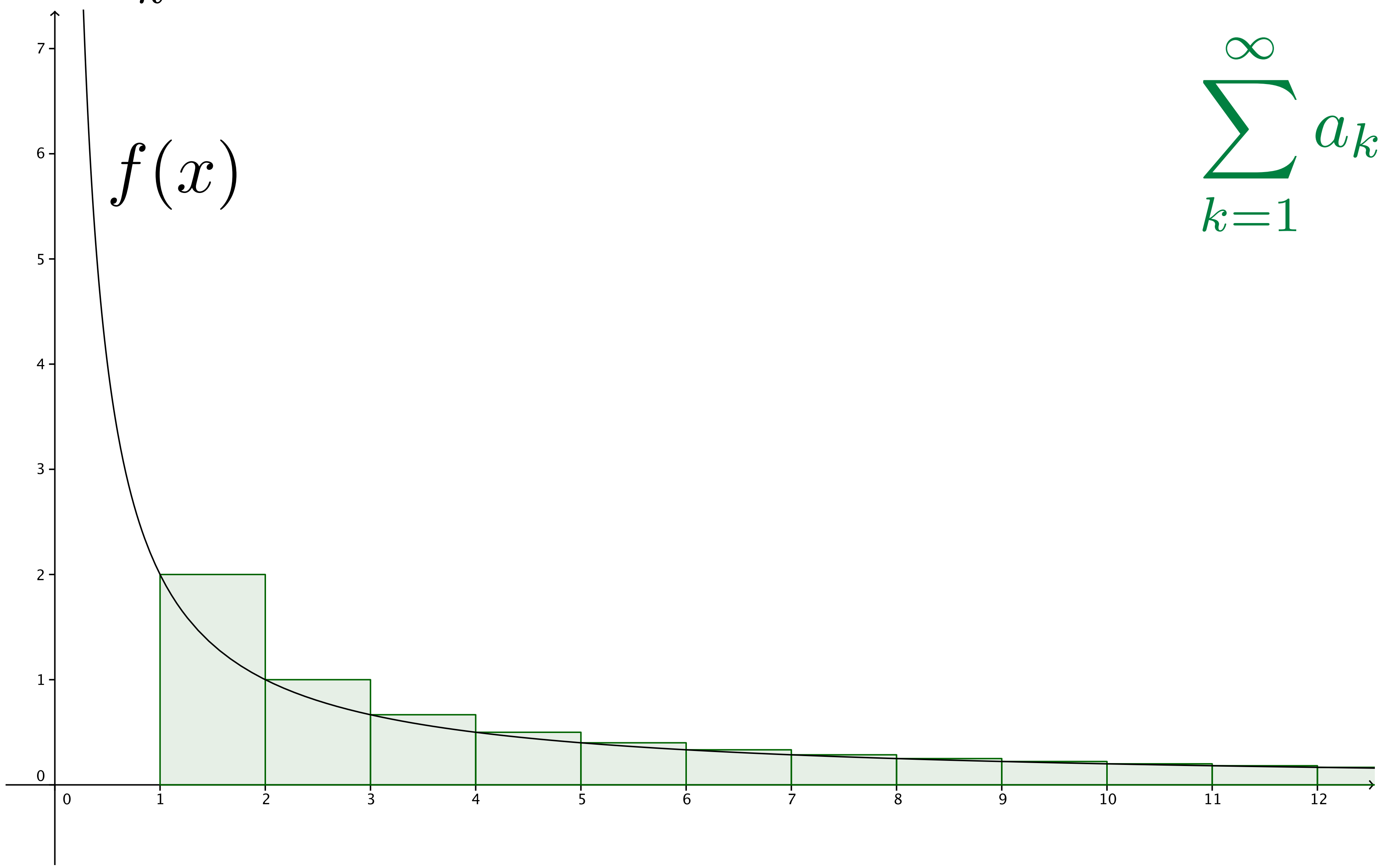
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Considérons une série et la suite des éléments sommés

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{avec} \quad 0 < a_k \quad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\{a_k\} = \{f(k)\}$$

On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k



Considérons une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

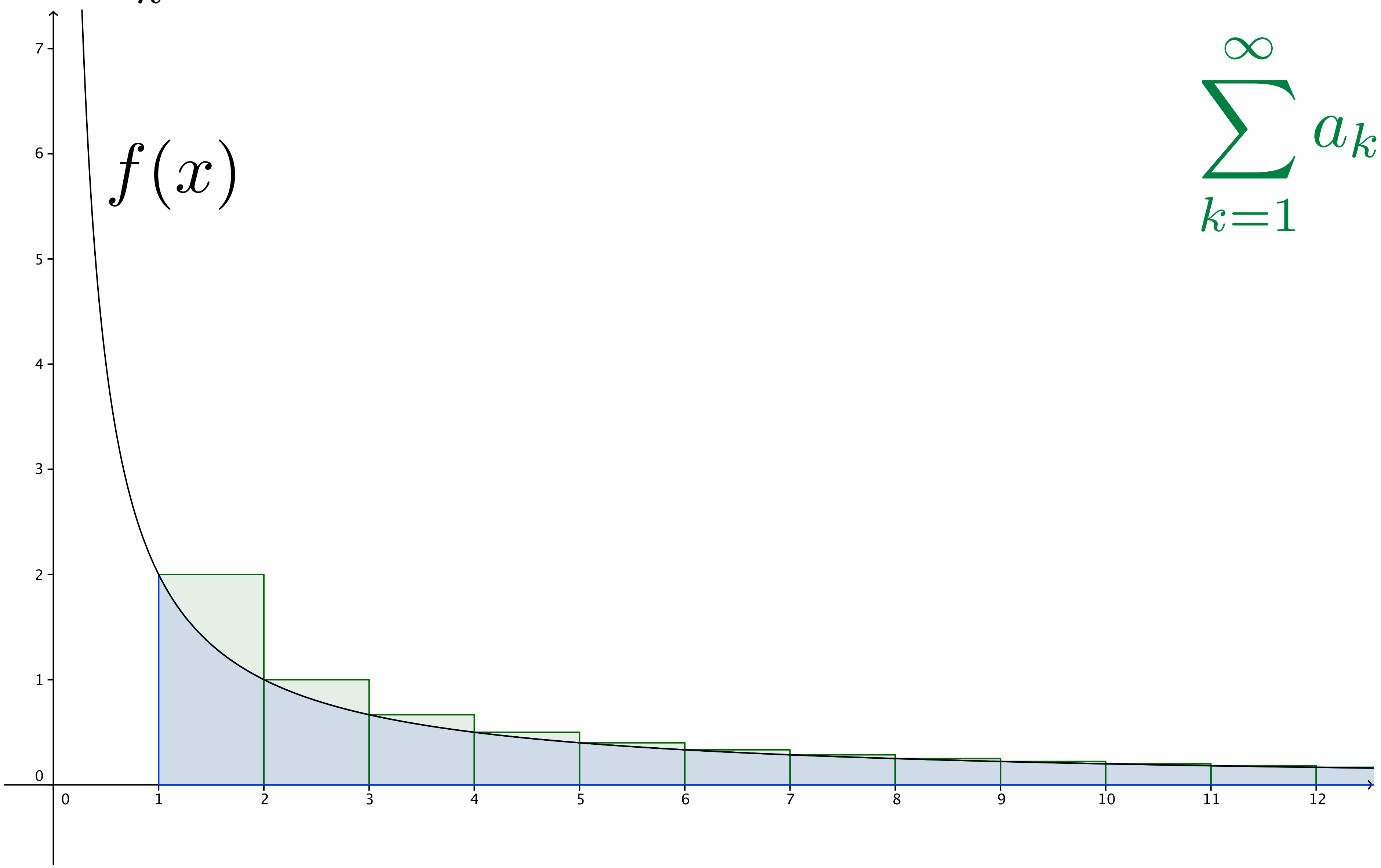
avec $0 < a_k$

et $a_k > a_{k+1}$

et la suite des éléments sommés

$$\{a_k\} = \{f(k)\}$$

On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k

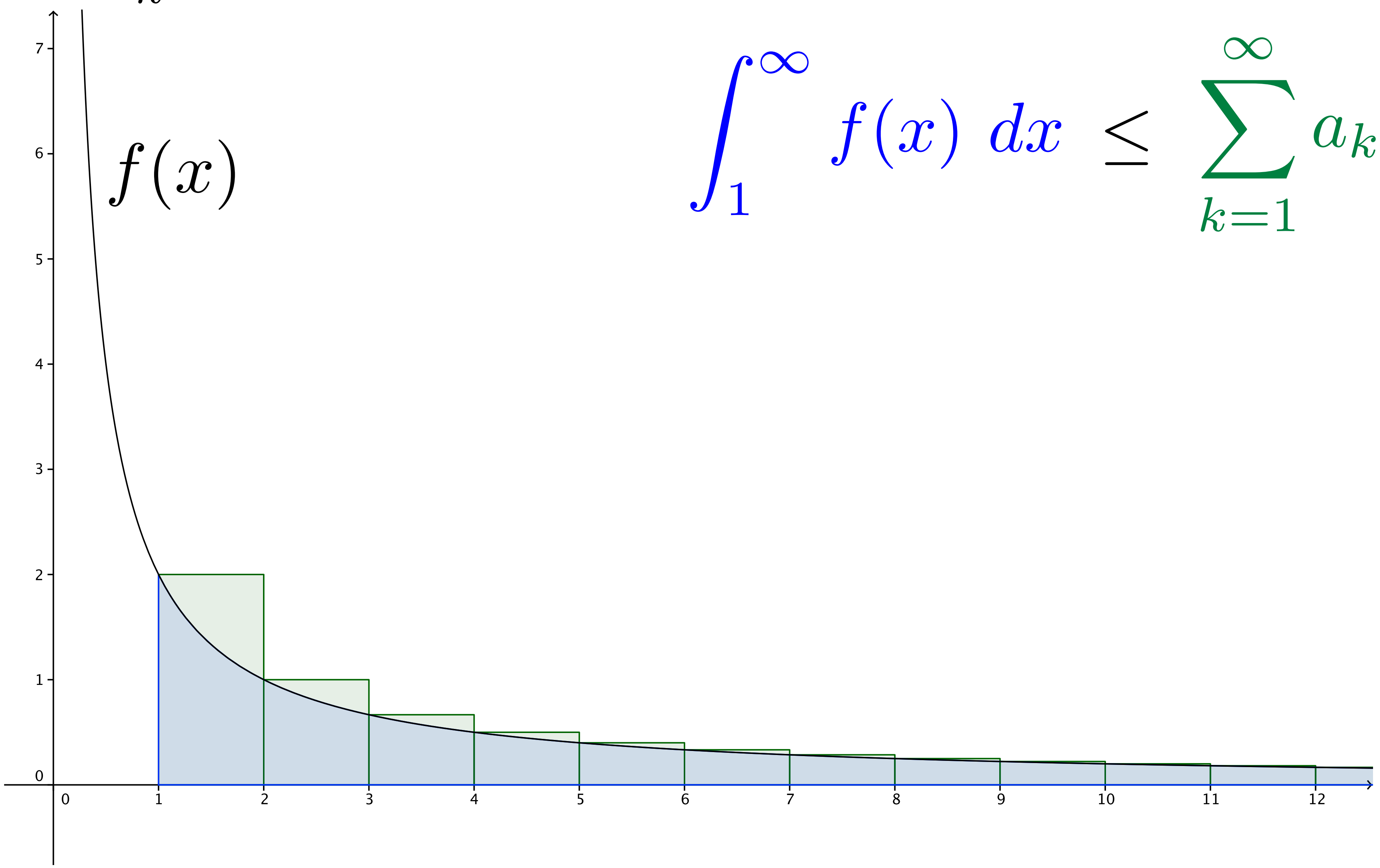


Considérons une série et la suite des éléments sommés

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\{a_k\} = \{f(k)\}$$

On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k



$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Considérons une série

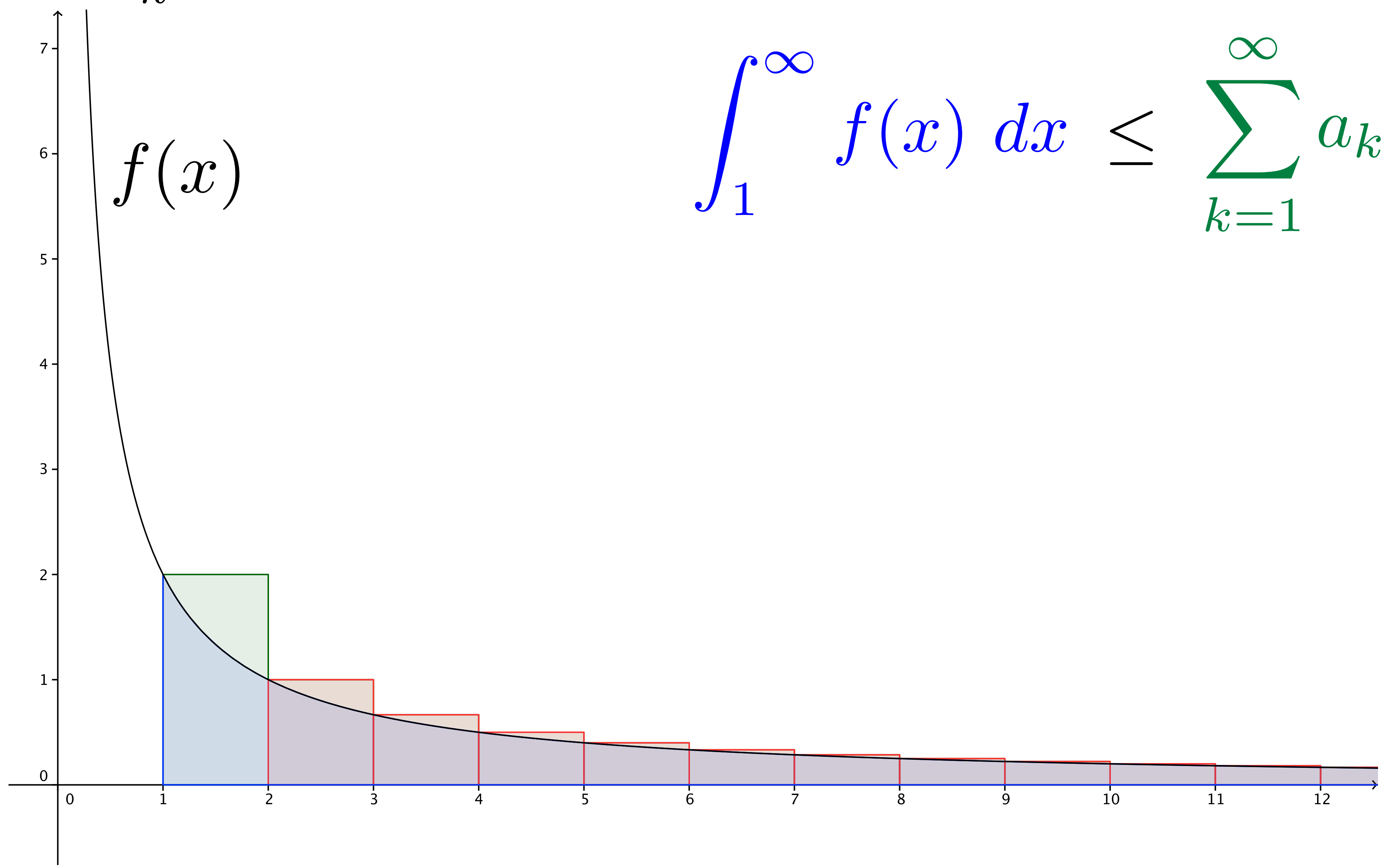
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

et la suite des éléments sommés

$$\{a_k\} = \{f(k)\}$$

On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$



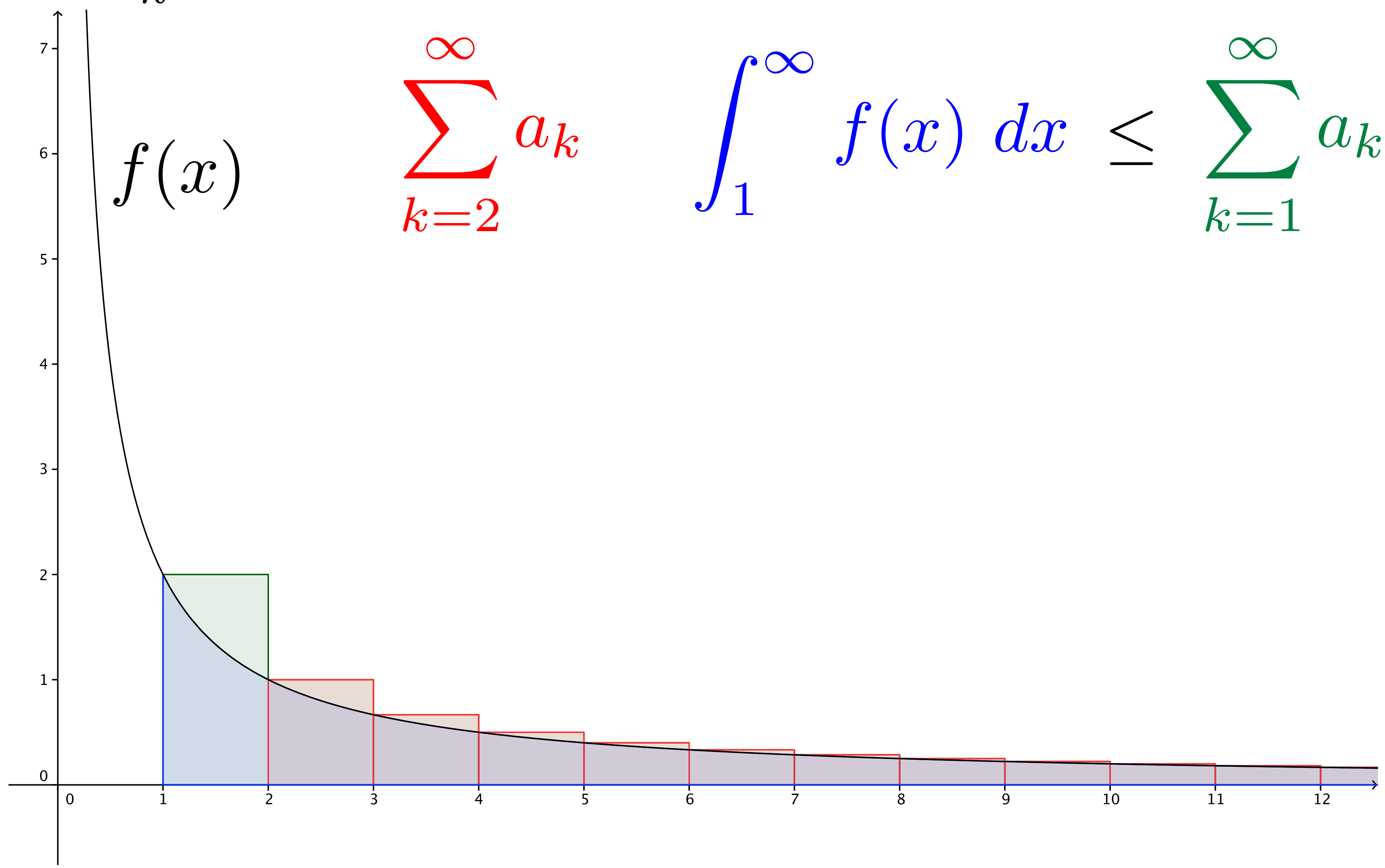
Considérons une série et la suite des éléments sommés

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \quad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\{a_k\} = \{f(k)\}$$

On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \qquad \int_1^{\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

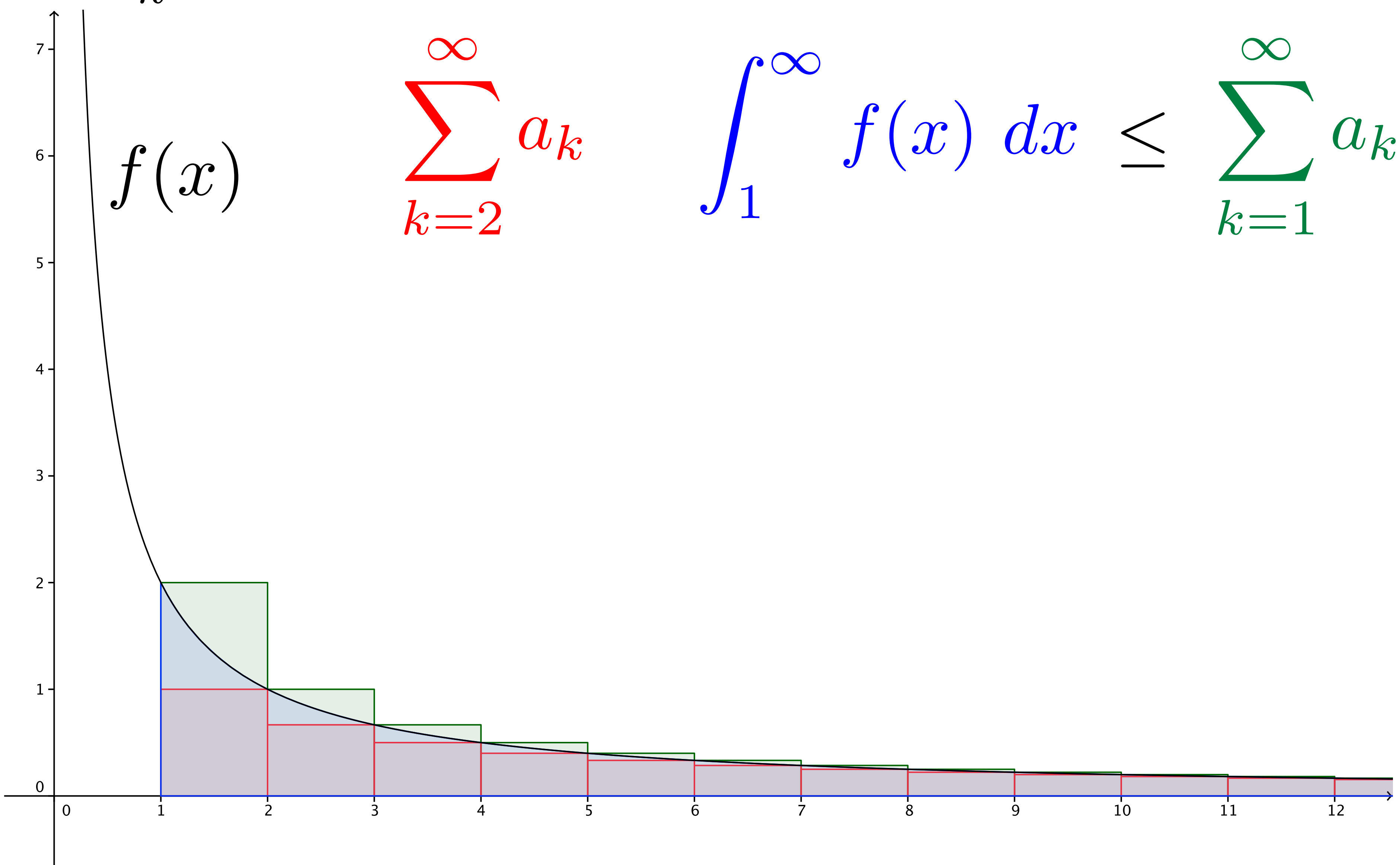


Considérons une série et la suite des éléments sommés

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\{a_k\} = \{f(k)\}$$

On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k

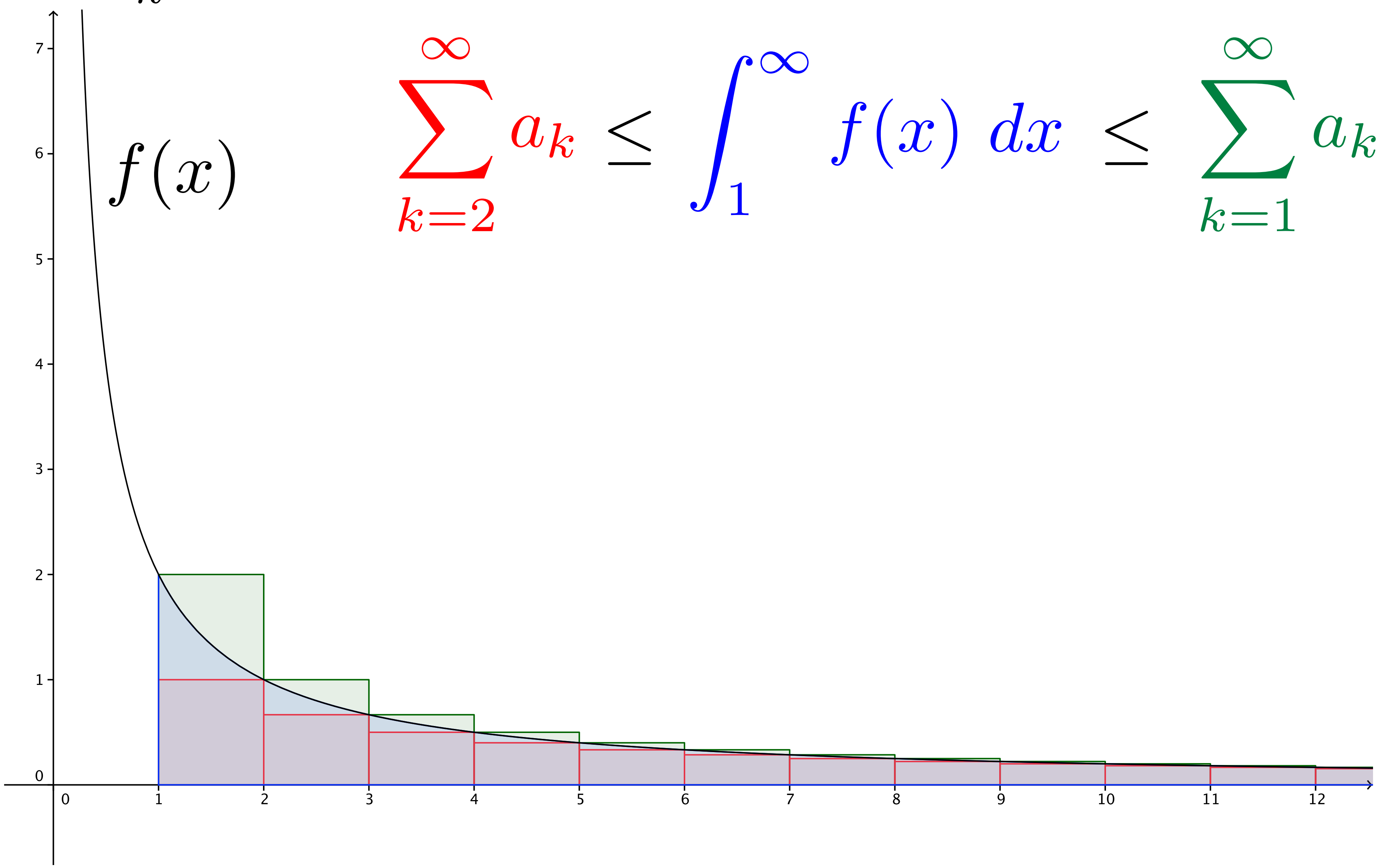


$$\color{red}{\sum_{k=2}^{\infty} a_k} \qquad \color{blue}{\int_1^{\infty} f(x)\, dx} \leq \color{green}{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

Considérons une série et la suite des éléments sommés

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1} \qquad \{a_k\} = \{f(k)\}$$

On peut voir chaque a_k comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur a_k



$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Donc si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ diverge, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \boxed{\int_1^{\infty} f(x)\ dx \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

Donc si $\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ diverge, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \boxed{\int_1^{\infty} f(x)\ dx \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

Donc si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \boxed{\int_1^{\infty} f(x)\ dx \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

Donc si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

et si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ converge, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Donc si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

et si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ converge, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k \qquad \text{et} \quad a_k > a_{k+1}$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

Donc si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

et si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ converge, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

En fait, on peut avoir une idée approximative de la valeur de la série lorsqu’elle converge

En fait, on peut avoir une idée approximative de la valeur de la série lorsqu'elle converge

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

En fait, on peut avoir une idée approximative de la valeur de la série lorsqu'elle converge

$$0 \leq \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

En fait, on peut avoir une idée approximative de la valeur de la série lorsqu'elle converge

$$\boxed{0 \leq \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

En fait, on peut avoir une idée approximative de la valeur de la série lorsqu'elle converge

$$\boxed{0 \leq \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$a_1 \leq a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\ dx$$

En fait, on peut avoir une idée approximative de la valeur de la série lorsqu'elle converge

$$\boxed{0 \leq \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$a_1 \leq a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\ dx$$

$$a_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\ dx$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

$$f(n) = \frac{1}{n^3}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

$$f(n) = \frac{1}{n^3}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

$$f(n) = \frac{1}{n^3}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \qquad f(n) = \frac{1}{n^3} \qquad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^3}\, dx$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \qquad f(n) = \frac{1}{n^3} \qquad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{M}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \qquad f(n) = \frac{1}{n^3} \qquad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \qquad f(n) = \frac{1}{n^3} \qquad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ $\quad f(n) = \frac{1}{n^3}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^3}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \quad \text{converge}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \qquad f(n) = \frac{1}{n^3} \qquad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge

$$a_1 = \frac{1}{1^3}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \qquad f(n) = \frac{1}{n^3} \qquad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge

$$a_1 = \frac{1}{1^3} = 1$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \qquad f(n) = \frac{1}{n^3} \qquad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge

$$a_1 = \frac{1}{1^3} = 1 \qquad 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \qquad f(n) = \frac{1}{n^3} \qquad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge

$$a_1 = \frac{1}{1^3} = 1 \qquad 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \qquad f(n) = \frac{1}{n^3} \qquad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge

$$a_1 = \frac{1}{1^3} = 1 \qquad 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

Faites les exercices suivants

Section 4 #16

Aujourd’hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Somme infinie

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique
- ✓ Critère du terme général

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique
- ✓ Critère du terme général
- ✓ Critère de l'intégrale

Devoir: Section 4.3