

4.4 CRITÈRE DE CONVERGENCE

cours 26

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique
- ✓ Critère du terme général
- ✓ Critère de l'intégrale

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d'Alembert
- ✓ Critère de comparaison à l'aide d'une limite
- ✓ Critère du polynôme
- ✓ Critère de Cauchy

Au dernier cours, on a vu que pour évaluer une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}$$

il faut trouver une expression pour sa somme partielle.

Or, cette tâche est plutôt difficile à faire.

On va donc utiliser plusieurs critères nous permettant, sous certaines conditions, de déterminer la convergence ou divergence d'une série.

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

est une série de Riemann ou une série- p

Si $p = 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ c'est la série harmonique et elle diverge

Si $p = 0$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^0} = \sum_{k=1}^{\infty} 1$ diverge par le critère du terme général

$$\text{si } p < 0 \quad \implies \quad -p > 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} = \infty \neq 0$$

Donc la série diverge par le critère du terme général.

$$p > 0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \quad \frac{1}{n^p} > 0 \quad \frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$$

On peut donc appliquer le critère de l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M x^{-p} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^M$$

$$p > 0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M x^{-p} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^M$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

Si $p > 1$

0

et l'intégrale converge, donc la série aussi

Sinon, ça diverge

Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ converge } \iff p > 1$$

Faites les exercices suivants

Section 4 #17

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad a_k > 0 \quad \text{et posons} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$R < 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge} \quad R > 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverge}$$

Si $R = 1$???

«Preuve»:

$$\text{Si } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_{N+1} \approx a_N R$$

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \dots\}$$

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N, a_N R, a_N R^2, a_N R^3, \dots\}$$

«Preuve»:

$$\text{Si } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$
$$a_{N+1} \approx a_N R$$

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \dots\}$$

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N, a_N R, a_N R^2, a_N R^3, \dots\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_N R^k$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + a_N \sum_{k=0}^{\infty} R^k$$

somme finie
donc
converge

Série géométrique
converge si $R < 1$

Faites les exercices suivants

Section 4 #19

Théorème

(Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\iff \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge

«Preuve»:

$$a_N \approx Lb_N$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} Lb_n \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + L \sum_{k=N}^{\infty} b_n \end{aligned}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n+3}{5n^2-3n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+3n}{5n^2-3n+7}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(4 + \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(4 + \frac{3}{n}\right)}{\left(5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right)} = \frac{4}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

mais c'est la série harmonique qui diverge

donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7}$ diverge.

Corolaire:

(Critère du polynôme)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

$P(x)$ un polynôme de degré p

$Q(x)$ un polynôme de degré q

posons $d = q - p$

Si $d > 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$ converge

Si $d \leq 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$ diverge

Preuve:

Il suffit de faire un comparaison à l'aide d'une limite avec la série de Riemann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^d}$$

Faites les exercices suivants

Section 4 #18 et 21

Théorème

(Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Si $R < 1$

alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converge

Si $R > 1$

alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

diverge

Si $R = 1$

???

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

«Preuve»:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

$$\sqrt[N]{a_N} \approx R$$

$$a_N \approx R^N$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} R^k$$

Somme finie

Série géométrique

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$ converge

Faites les exercices suivants

Section 4 # 20 et 22

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d'Alembert
- ✓ Critère de comparaison à l'aide d'une limite
- ✓ Critère du polynôme
- ✓ Critère de Cauchy

Devoir:

Section 4.3