4.4 CRITÈRE DE CONVERGENCE

cours 26

Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Somme infinie

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique
- ✓ Critère du terme général

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Somme infinie
- ✓ Convergence et divergence de série
- ✓ Série harmonique
- ✓ Série géométrique
- ✓ Critère du terme général
- ✓ Critère de l'intégrale

Aujourd’hui, nous allons voir

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Série de Riemann

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d’Alembert

Aujourd'hui, nous allons voir

- Série de Riemann
- Critère de d'Alembert
- Critère de comparaison à l'aide d'une limite

Aujourd'hui, nous allons voir

- Série de Riemann
- Critère de d'Alembert
- Critère de comparaison à l'aide d'une limite
- Critère du polynôme

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d'Alembert
- ✓ Critère de comparaison à l'aide d'une limite
- ✓ Critère du polynôme
- ✓ Critère de Cauchy

Au dernier cours, on a vu que pour évaluer une série

Au dernier cours, on a vu que pour évaluer une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$$

Au dernier cours, on a vu que pour évaluer une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$$

il faut trouver une expression pour sa somme partielle.

Au dernier cours, on a vu que pour évaluer une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$$

il faut trouver une expression pour sa somme partielle.

Or, cette tâche est plutôt difficile à faire.

Au dernier cours, on a vu que pour évaluer une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$$

il faut trouver une expression pour sa somme partielle.

Or, cette tâche est plutôt difficile à faire.

On va donc utiliser plusieurs critères nous permettant, sous certaines conditions, de déterminer la convergence ou divergence d'une série.

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Avec le critère de l’intégrale, on peut déterminer la convergence d’un certain type de série.

Une série de la forme

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

est une série de Riemann

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

est une série de Riemann ou une série-p

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

est une série de Riemann ou une série-p

Si $p = 1$

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

est une série de Riemann ou une série-p

Si $p = 1$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1}$$

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

est une série de Riemann ou une série-p

Si $p = 1$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

est une série de Riemann ou une série-p

Si $p = 1$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ c'est la série harmonique et elle diverge

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

est une série de Riemann ou une série-p

Si $p = 1$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ c'est la série harmonique et elle diverge

Si $p = 0$

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

est une série de Riemann ou une série-p

Si $p = 1$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ c'est la série harmonique et elle diverge

Si $p = 0$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^0}$$

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

est une série de Riemann ou une série-*p*

Si $p = 1$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ c'est la série harmonique et elle diverge

Si $p = 0$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^0} = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

Avec le critère de l'intégrale, on peut déterminer la convergence d'un certain type de série.

Une série de la forme $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

est une série de Riemann ou une série-p

Si $p = 1$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ c'est la série harmonique et elle diverge

Si $p = 0$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^0} = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$ diverge par le critère du terme général si $\quad p < 0$

$$\text{si} \quad p < 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

si $\quad p < 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p}$$

si $p < 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p}$$

si $p < 0$ $\Longrightarrow -p > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p}$$

si $p < 0$ $\Longrightarrow -p > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p}$$

si $p < 0$ $\Longrightarrow -p > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p} = \infty$$

si $p < 0 \qquad \Longrightarrow \boxed{-p > 0}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{\boxed{-p}} = \infty \neq 0$$

si $p < 0 \quad \Longrightarrow \boxed{-p > 0}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \to \infty} n^{-p} = \infty \neq 0$$

Donc la série diverge par le critère du terme général.

si $p < 0 \implies \boxed{-p > 0}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p} = \infty \neq 0$$

Donc la série diverge par le critère du terme général.

$p > 0$

si $p < 0 \qquad \Longrightarrow \boxed{-p > 0}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p} = \infty \neq 0$$

Donc la série diverge par le critère du terme général.

$$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

si $p < 0 \qquad \Longrightarrow \boxed{-p > 0}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{\boxed{-p}} = \infty \neq 0$$

Donc la série diverge par le critère du terme général.

$$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \frac{1}{n^p} > 0$$

si $p < 0 \qquad \Longrightarrow \boxed{-p > 0}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p} = \infty \neq 0$$

Donc la série diverge par le critère du terme général.

$$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \frac{1}{n^p} > 0 \qquad \frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$$

si $p < 0 \qquad \Longrightarrow -p > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p} = \infty \neq 0$$

Donc la série diverge par le critère du terme général.

$$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \frac{1}{n^p} > 0 \qquad \frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$$

On peut donc appliquer le critère de l'intégrale si $p < 0 \qquad \Longrightarrow -p > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p} = \infty \neq 0$$

Donc la série diverge par le critère du terme général.

$$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \frac{1}{n^p} > 0 \qquad \frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$$

On peut donc appliquer le critère de l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

si $p < 0 \quad \Longrightarrow \boxed{-p > 0}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \to \infty} n^{\boxed{-p}} = \infty \neq 0$$

Donc la série diverge par le critère du terme général.

$$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \frac{1}{n^p} > 0 \qquad \frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$$

On peut donc appliquer le critère de l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^M x^{-p}\, dx$$

$$\text{si} \quad p < 0 \qquad \Longrightarrow \boxed{-p > 0}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{\boxed{-p}} = \infty \neq 0$$

Donc la série diverge par le critère du terme général.

$$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \qquad \frac{1}{n^p} > 0 \qquad \frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$$

On peut donc appliquer le critère de l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} x^{-p}\, dx = \lim_{M\to\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^M$$

$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^{M} x^{-p}\, dx = \lim_{M \to \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^M$$

$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\ dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} x^{-p}\ dx = \lim_{M\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{M^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

$p > 0$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} x^{-p}\, dx = \lim_{M\to\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{M^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

Si $p > 1$

$$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^{M} x^{-p}\, dx = \lim_{M \to \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^M$$

$$= \lim_{M \to \infty} \boxed{\frac{M^{-p+1}}{-p+1}} - \frac{1}{-p+1}$$

Si $p > 1$ $\qquad 0$

$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} x^{-p}\, dx = \lim_{M\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} \underbrace{\boxed{\frac{M^{-p+1}}{-p+1}}}_{0} - \frac{1}{-p+1}$$

Si $p > 1$ $\quad 0 \quad$ et l'intégrale converge, donc la série aussi

$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M x^{-p}\,dx = \lim_{M\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} \boxed{\frac{M^{-p+1}}{-p+1}} - \frac{1}{-p+1}$$

Si $p > 1$ $\quad 0 \quad$ et l'intégrale converge, donc la série aussi

Sinon, ça diverge

$p > 0 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^M x^{-p}\, dx = \lim_{M \to \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^M$$

$$= \lim_{M \to \infty} \frac{M^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

Si $p > 1$ $\qquad 0 \qquad$ et l'intégrale converge, donc la série aussi

Sinon, ça diverge

Donc $\displaystyle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge $\iff p > 1$

Faites les exercices suivants

Section 4 #17

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k > 0$$

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k > 0 \qquad \text{et posons} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k > 0 \qquad \text{et posons} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$R < 1 \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{converge}$$

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k > 0 \qquad \text{et posons} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$R < 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{converge} \qquad\qquad R > 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{diverge}$$

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k > 0 \qquad \text{et posons} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$R < 1 \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{converge} \qquad R > 1 \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{diverge}$$

Si $R = 1$???

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k > 0 \qquad \text{et posons} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$R < 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{converge} \qquad\qquad R > 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{diverge}$$

Si $R = 1$???

«Preuve»:

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k > 0 \qquad \text{et posons} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$R < 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{converge} \qquad R > 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{diverge}$$

Si $R = 1$???

«Preuve»: Si $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k > 0 \qquad \text{et posons} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$R < 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{converge} \qquad\qquad R > 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{diverge}$$

Si $R = 1$???

«Preuve»: Si $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\qquad R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k > 0 \qquad \text{et posons} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$R < 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge} \qquad R > 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverge}$$

$$\text{Si} \quad R = 1 \ ???$$

«Preuve»:

$$\text{Si} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_{N+1} \approx a_N R$$

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k > 0 \qquad \text{et posons} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$R < 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge} \qquad R > 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverge}$$

$$\text{Si} \quad R = 1 \ ???$$

«Preuve»:

$$\text{Si} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_{N+1} \approx a_N R$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots\}$$

Théorème (Critère de d'Alembert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad a_k > 0 \qquad \text{et posons} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$R < 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{converge} \qquad\qquad R > 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \text{diverge}$$

Si $R = 1$???

«Preuve»:

Si $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_{N+1} \approx a_N R$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots\}$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_N R, a_N R^2, a_N R^3, \ldots\}$$

«Preuve»:

Si $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_{N+1} \approx a_N R$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots\}$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_N R, a_N R^2, a_N R^3, \ldots\}$$

«Preuve»:

Si $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_{N+1} \approx a_N R$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots\}$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_N R, a_N R^2, a_N R^3, \ldots\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

«Preuve»:

Si $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_{N+1} \approx a_N R$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots\}$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_N R, a_N R^2, a_N R^3, \ldots\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

«Preuve»:

Si $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_{N+1} \approx a_N R$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots\}$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_N R, a_N R^2, a_N R^3, \ldots\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_N R^k$$

«Preuve»:

Si $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_{N+1} \approx a_N R$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots\}$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_N R, a_N R^2, a_N R^3, \ldots\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_N R^k$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + a_N \sum_{k=0}^{\infty} R^k$$

«Preuve»:

Si $R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_{N+1} \approx a_N R$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots\}$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_N R, a_N R^2, a_N R^3, \ldots\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_N R^k$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{N-1} a_k} + a_N \sum_{k=0}^{\infty} R^k$$

somme finie
donc
converge

«Preuve»:

Si $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$R \approx \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_{N+1} \approx a_N R$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots\}$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_N R, a_N R^2, a_N R^3, \ldots\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_N R^k$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + a_N \sum_{k=0}^{\infty} R^k$$

somme finie donc converge

Série géométrique converge si $R < 1$

Faites les exercices suivants

Section 4 #19

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\iff$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\iff$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge

«Preuve»:

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\iff$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge

«Preuve»:

$$a_N \approx L b_N$$

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\iff$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge

«Preuve»: $a_N \approx L b_N$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\iff$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge

«Preuve»:

$$a_N \approx L b_N$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\Longleftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge

«Preuve»:

$$a_N \approx L b_N$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} L b_n$$

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\iff$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge

«Preuve»:

$$a_N \approx L b_N$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} L b_n$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + L \sum_{k=N}^{\infty} b_n$$

Théorème

(Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\iff$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge

«Preuve»:

$$a_N \approx L b_N$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k} = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} L b_n$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + L \sum_{k=N}^{\infty} b_n$$

Théorème (Critère de comparaison à l'aide d'une limite)

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\iff$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge

«Preuve»:

$$a_N \approx Lb_N$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k} = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} Lb_n$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + L\boxed{\sum_{k=N}^{\infty} b_n}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+3}{5n^2-3n+7}}{\frac{1}{n}}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+3}{5n^2-3n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n}{5n^2-3n+7}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+3}{5n^2-3n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n}{5n^2-3n+7}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(4+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(5-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+3}{5n^2-3n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n}{5n^2-3n+7}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(4+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(5-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(4+\frac{3}{n}\right)}{\left(5-\frac{3}{k}+\frac{7}{n^2}\right)}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+3}{5n^2-3n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n}{5n^2-3n+7}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(4+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(5-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(4+\frac{3}{n}\right)}{\left(5-\frac{3}{k}+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{4}{5}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+3}{5n^2-3n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n}{5n^2-3n+7}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(4+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(5-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(4+\frac{3}{n}\right)}{\left(5-\frac{3}{k}+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{4}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

mais c'est la série harmonique qui diverge

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+3}{5n^2-3n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n}{5n^2-3n+7}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(4+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(5-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(4+\frac{3}{n}\right)}{\left(5-\frac{3}{k}+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{4}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ mais c'est la série harmonique qui diverge

donc $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+3}{5k^2-3k+7}$$ diverge.

Corolaire: (Critère du polynôme)

Corolaire: (Critère du polynôme)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

Corolaire: (Critère du polynôme)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

$P(x)$ un polynôme de degré p

Corolaire: (Critère du polynôme)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

$P(x)$ un polynôme de degré p

$Q(x)$ un polynôme de degré q

Corolaire: (Critère du polynôme)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

$P(x)$ un polynôme de degré p

$Q(x)$ un polynôme de degré q

posons $d = q - p$

Corolaire: (Critère du polynôme)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

$P(x)$ un polynôme de degré p

$Q(x)$ un polynôme de degré q

posons $d = q - p$

Si $d > 1$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$ converge

Corolaire: (Critère du polynôme)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

$P(x)$ un polynôme de degré p

$Q(x)$ un polynôme de degré q

posons $d = q - p$

Si $d > 1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$ converge

Si $d \leq 1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$ diverge

Corolaire: (Critère du polynôme)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

$P(x)$ un polynôme de degré p

$Q(x)$ un polynôme de degré q

posons $d = q - p$

Si $d > 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$ converge

Si $d \leq 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$ diverge

Preuve:

Corolaire: (Critère du polynôme)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

$P(x)$ un polynôme de degré p

$Q(x)$ un polynôme de degré q

posons $d = q - p$

Si $d > 1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$ converge

Si $d \leq 1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$ diverge

Preuve: Il suffit de faire un comparaison à l'aide d'une limite avec la série de Riemann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^d}$$

Faites les exercices suivants

Section 4 #18 et 21

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Si $\quad R < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Si $\quad R < 1 \quad$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Si $R = 1$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Si $R = 1$???

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Si $R = 1$???

«Preuve»:

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Si $R = 1$???

«Preuve»: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Si $R = 1$???

«Preuve»: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$ $\qquad \sqrt[N]{a_N} \approx R$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Si $R = 1$???

«Preuve»:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R \qquad \sqrt[N]{a_N} \approx R \qquad a_N \approx R^N$$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $\quad R < 1 \quad$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $\quad R > 1 \quad$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Si $\quad R = 1 \quad$???

«Preuve»: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R \qquad \sqrt[N]{a_N} \approx R \qquad a_N \approx R^N$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Si $R = 1$???

«Preuve»:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R \qquad \sqrt[N]{a_N} \approx R \qquad a_N \approx R^N$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Si $R = 1$???

«Preuve»: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$ $\sqrt[N]{a_N} \approx R$ $a_N \approx R^N$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} R^k$$

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Si $R = 1$???

«Preuve»:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R \qquad \sqrt[N]{a_N} \approx R \qquad a_N \approx R^N$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \boxed{\sum_{k=1}^{N-1} a_k} + \sum_{k=N}^{\infty} R^k$$

Somme finie

Théorème (Critère de Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

Si $R < 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Si $R > 1$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Si $R = 1$???

«Preuve»:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R \qquad \sqrt[N]{a_N} \approx R \qquad a_N \approx R^N$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} R^k$$

Somme finie Série géométrique

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^{k}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^{k}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^{n}}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^{k}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^{k}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^{k}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} < 1$$

Exemple $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^{k}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} < 1$$

Donc $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^{k}$ converge

Faites les exercices suivants

Section 4 # 20 et 22

Aujourd'hui, nous avons vu

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann

Aujourd’hui, nous avons vu

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d’Alembert

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d'Alembert
- ✓ Critère de comparaison à l'aide d'une limite

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d'Alembert
- ✓ Critère de comparaison à l'aide d'une limite
- ✓ Critère du polynôme

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d’Alembert
- ✓ Critère de comparaison à l’aide d’une limite
- ✓ Critère du polynôme
- ✓ Critère de Cauchy

Devoir:

Section 4.3