4.5 SÉRIE DE PUISSANCE

cours 27

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d'Alembert
- ✓ Critère de comparaison à l'aide d'une limite
- ✓ Critère du polynôme
- ✓ Critère de Cauchy

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Série alternée
- ✓ Critère de Leibniz
- ✓ Série de puissance
- ✓ Intervalle de convergence
- ✓ Rayon de convergence

Séries alternées

Une série alternée est une série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots$$

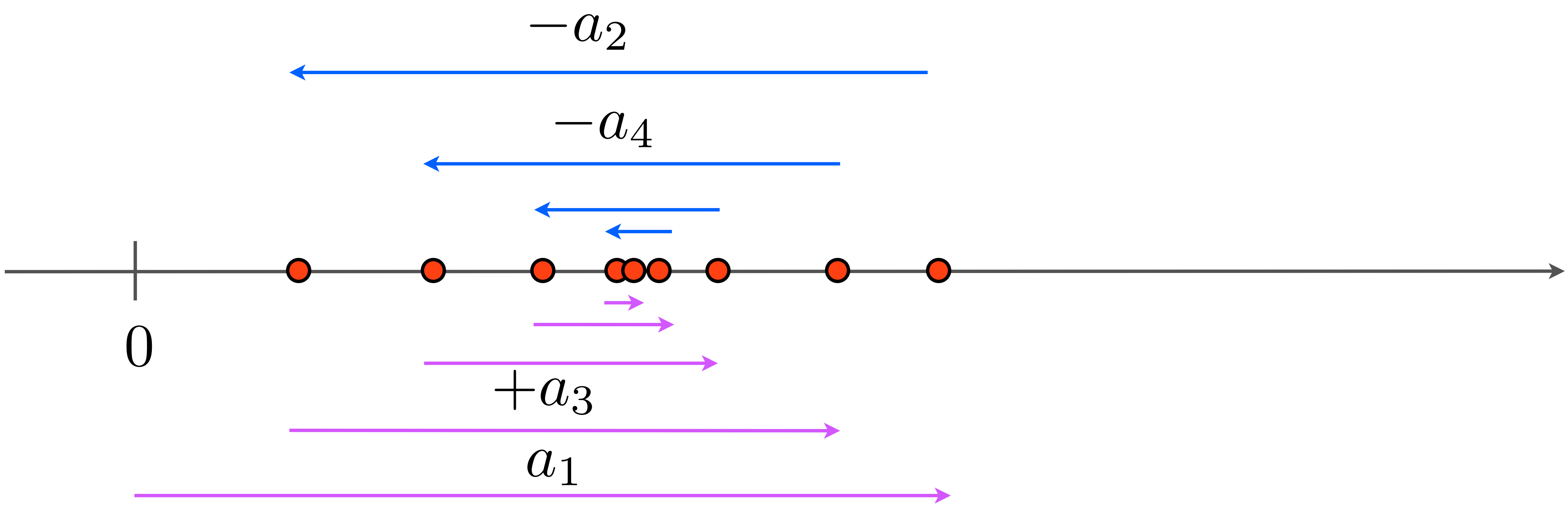
où $\quad 0 < a_k$

Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \qquad 0 < a_k$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ et $a_k > a_{k+1}$

alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k$ converge



Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

On a $\quad \dfrac{1}{k} > 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{k+1}$

de plus $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad$ converge

Si une série à terme positif converge $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$$

converge

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ converge

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots) - (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

Définition

Soit une série $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

On dit que la série est **absolument convergente**

si $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge}$$

Théorème

Si une série est absolument convergente alors elle est convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

Remarque L'implication inverse est fausse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge}$$

Exemple On a vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge

mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge

Définition On dit qu'une série est **conditionnellement convergente** si

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \qquad \text{mais} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{diverge}$$

Faites les exercices suivants

Section 4 # 24

Séries de puissances

Maintenant qu'on a plusieurs outils nous permettant de déterminer la convergence d'une série, on peut pousser une peu plus loin l'idée d'une série en y insérant une variable.

De manière générale on pourrait considérer des expressions de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \;= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \dots$$

pour une valeur de x disons $x = b$

si on pose $a_n = f_n(b)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(b) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{est une série}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

À priori on pourrait prendre n'importe quel type de fonction pour les

$$f_k(x)$$

Par exemple si on prend

$$f_k(x) = a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)$$

On obtient $\displaystyle \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)$

qui est une série de Fourier

Les séries de Fourier sont utile pour comprendre les fonctions d'onde

Mais on va se concentrer sur les fonctions

$$f_k(x) = a_k(x-a)^k$$

On nomme une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

une série de puissance.

Remarque

Dans le cas fini $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$

en posant $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{n!}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$

On obtient le polynôme de Taylor de degré n

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Pour trouver les valeurs qui rendent la série convergente, on utilise souvent le critère de d'Alembert généralisé et le critère de Cauchy généralisé.

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = R \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = R$$

si $\quad R < 1 \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge

si $\quad R > 1 \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ diverge

si $\quad R = 1$ on ne peut rien conclure

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

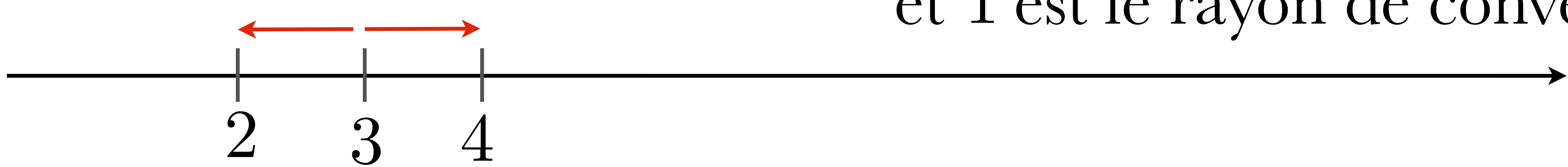
Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1<x-3<1 \qquad 2<x<4$$

si $|x-3|=1$ soit $x=2$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ div. soit $x=4$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1)^k$ div.

On nomme $]\,2,4\,[$ l'intervalle de convergence

et 1 est le rayon de convergence



Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+2)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} n!}{(x+2)^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)}{(n+1)} \right|$$

$$= |x+2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)} \right| = 0 \ < 1$$

Et ce, peut importe la valeur de x

Dans ce cas, on dit que l'intervalle de convergence est $\mathbb{R}$

et que le rayon de convergence est infini.

Faites les exercices suivants

Section 4 # 25, 26, 27

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Série alternée
- ✓ Critère de Leibnitz
- ✓ Série de puissance
- ✓ Intervalle de convergence
- ✓ Rayon de convergence

Devoir: Section 4.4, 4.5 et # 23