4.5 SÉRIE DE PUISSANCE

cours 27

Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d'Alembert

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d'Alembert
- ✓ Critère de comparaison à l'aide d'une limite

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d'Alembert
- ✓ Critère de comparaison à l'aide d'une limite
- ✓ Critère du polynôme

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Série de Riemann
- ✓ Critère de d'Alembert
- ✓ Critère de comparaison à l'aide d'une limite
- ✓ Critère du polynôme
- ✓ Critère de Cauchy

Aujourd’hui, nous allons voir

Aujourd’hui, nous allons voir

- Série alternée

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Série alternée
- ✓ Critère de Leibnitz

Aujourd'hui, nous allons voir

- Série alternée
- Critère de Leibnitz
- Série de puissance

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Série alternée
- ✓ Critère de Leibniz
- ✓ Série de puissance
- ✓ Intervalle de convergence

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Série alternée
- ✓ Critère de Leibnitz
- ✓ Série de puissance
- ✓ Intervalle de convergence
- ✓ Rayon de convergence

Séries alternées

Séries alternées

Une série alternée est une série de la forme

Séries alternées

Une série alternée est une série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

Séries alternées

Une série alternée est une série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$$

Séries alternées

Une série alternée est une série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$$

où $\quad 0 < a_k$

Séries alternées

Une série alternée est une série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$$

où $\qquad 0 < a_k$

Séries alternées

Une série alternée est une série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots$$

où $\quad 0 < a_k$

Théorème (Critère de Leibniz)

Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k$$

Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \qquad 0 < a_k$$

Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \qquad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

$$\text{alors} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \quad \text{converge}$$

Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

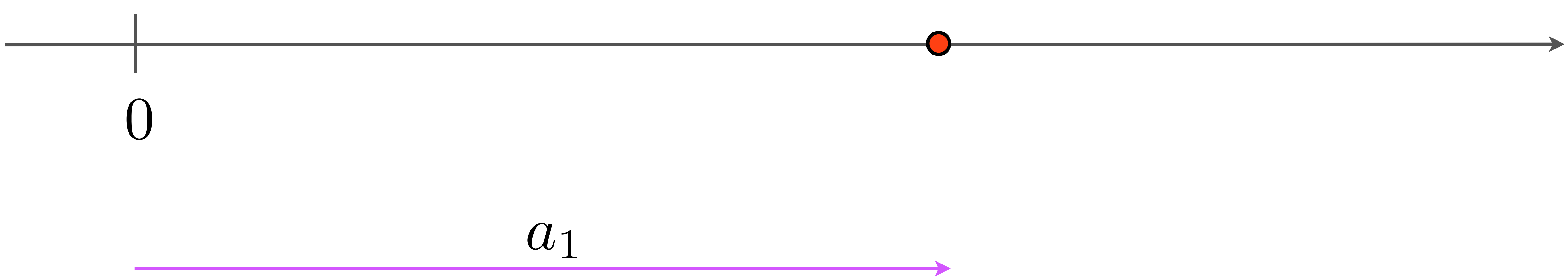
$$\text{alors} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \quad \text{converge}$$

Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \qquad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

$$\text{alors} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \quad \text{converge}$$

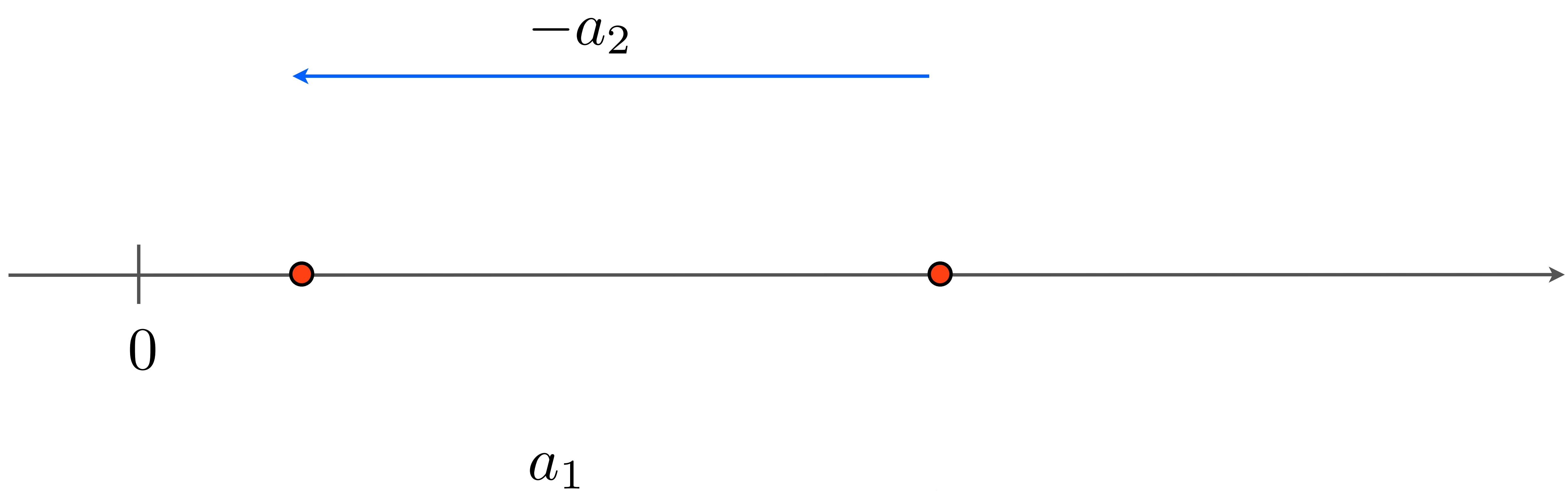


Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

$$\text{alors} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \quad \text{converge}$$

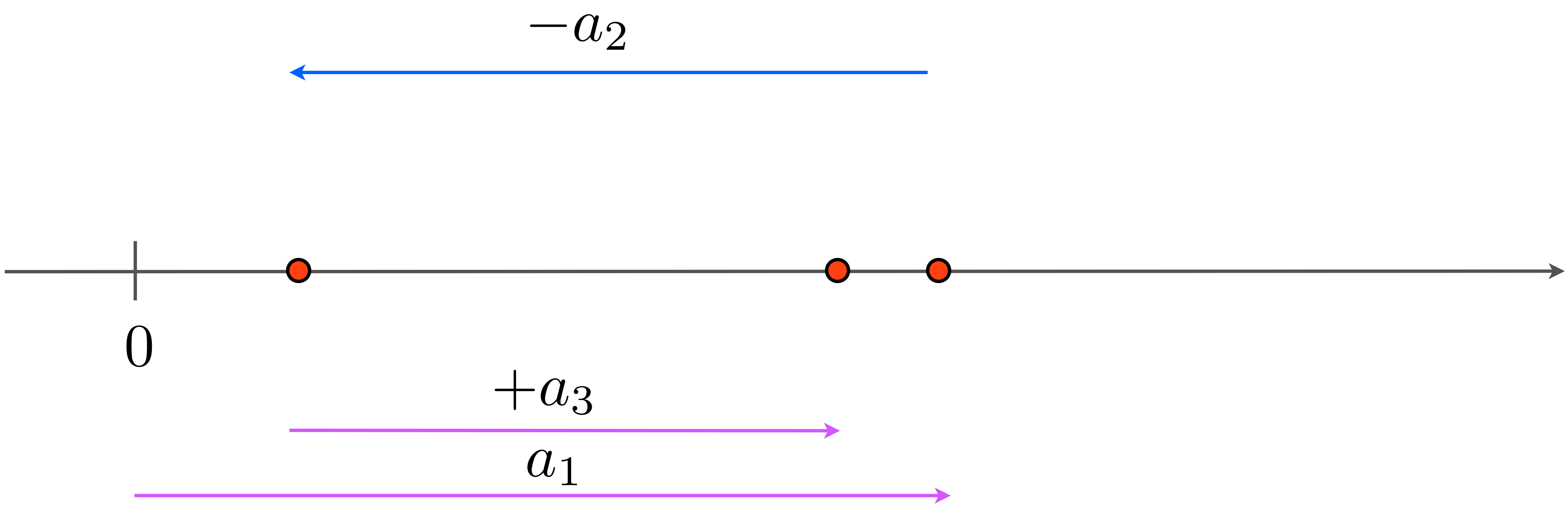


Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \qquad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

$$\text{alors} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \quad \text{converge}$$

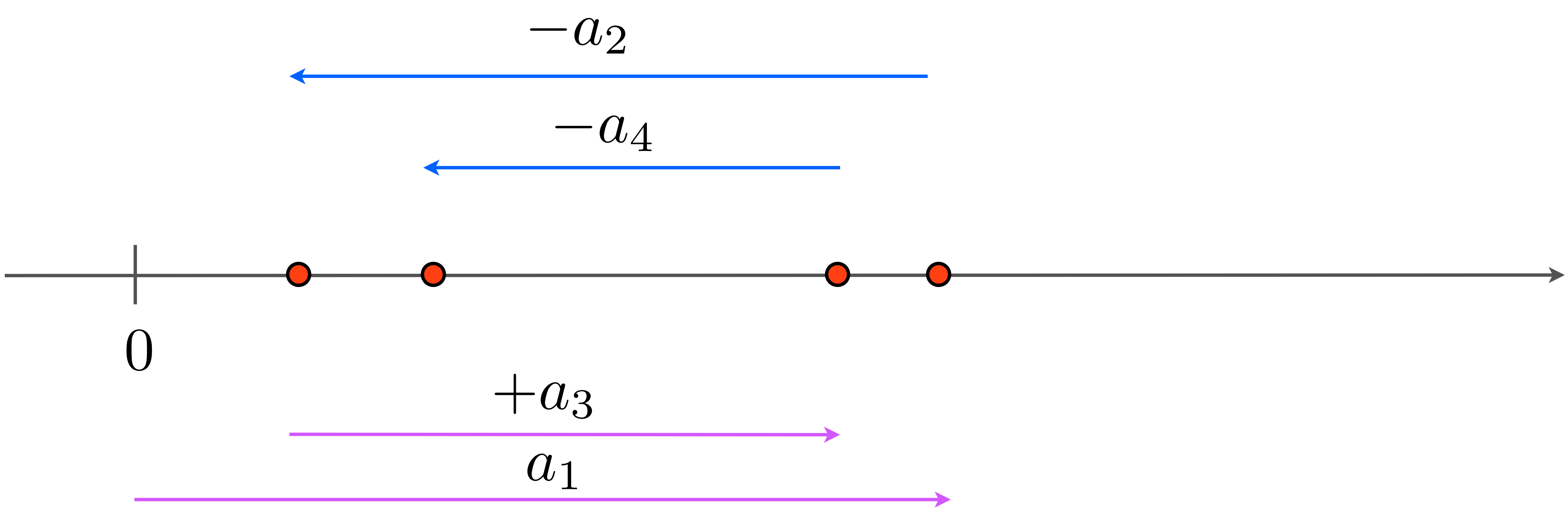


Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \qquad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

$$\text{alors} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \quad \text{converge}$$

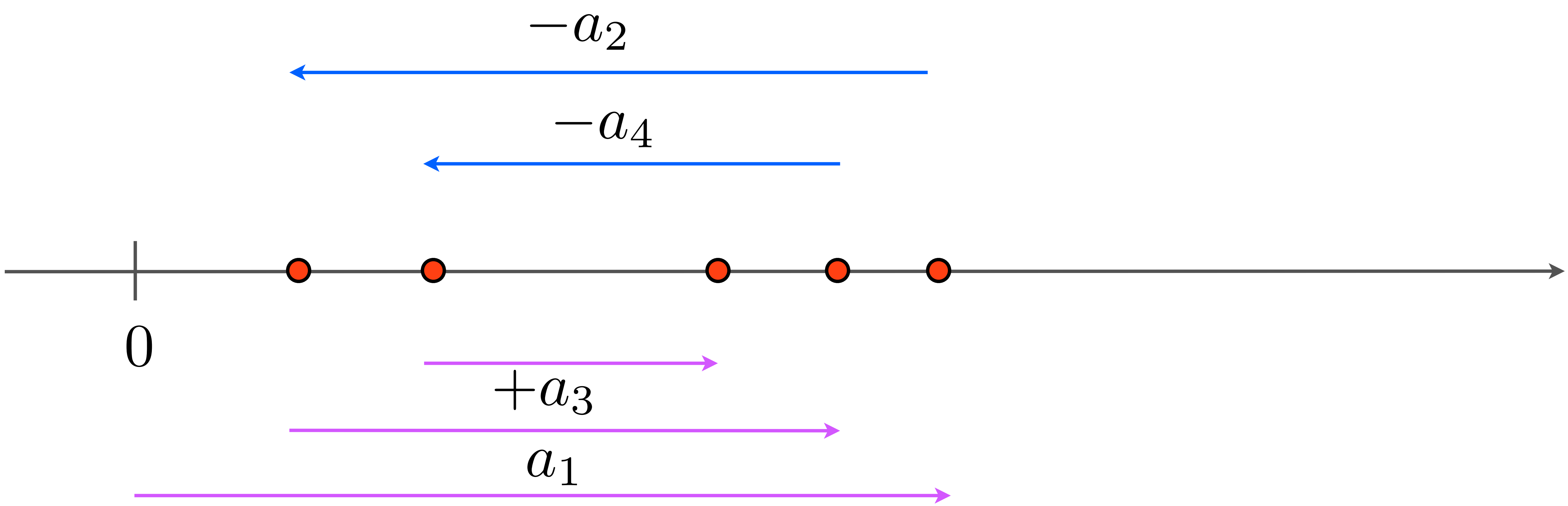


Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \qquad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

$$\text{alors} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \quad \text{converge}$$

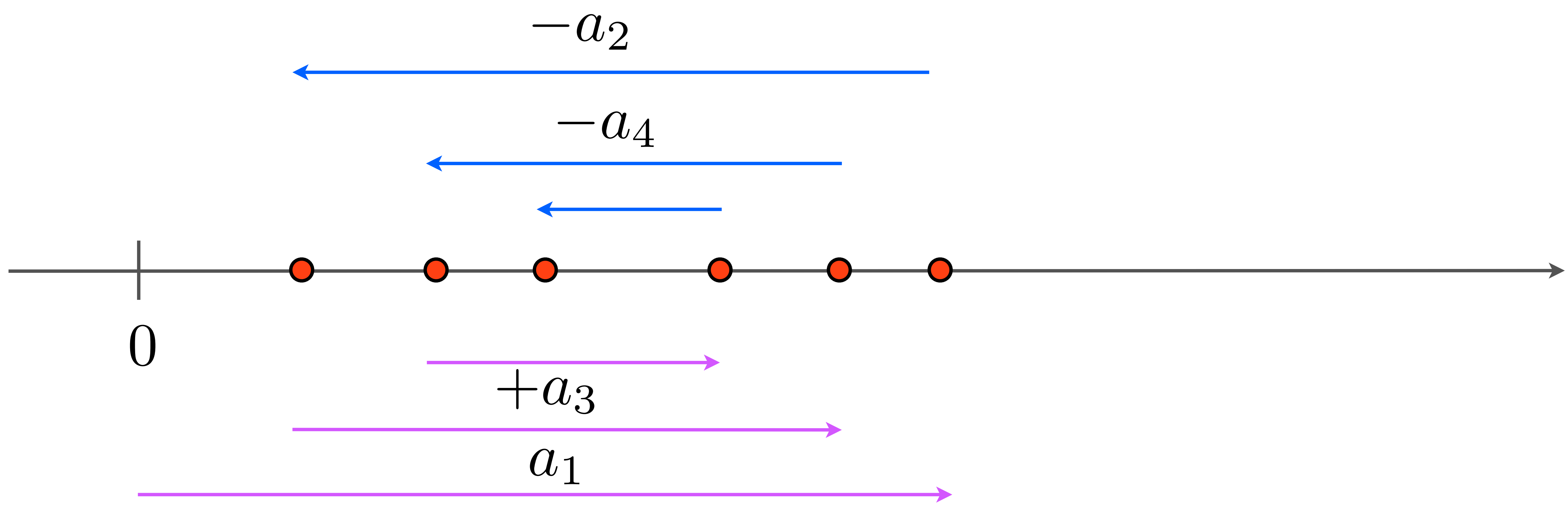


Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \qquad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

$$\text{alors} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \quad \text{converge}$$

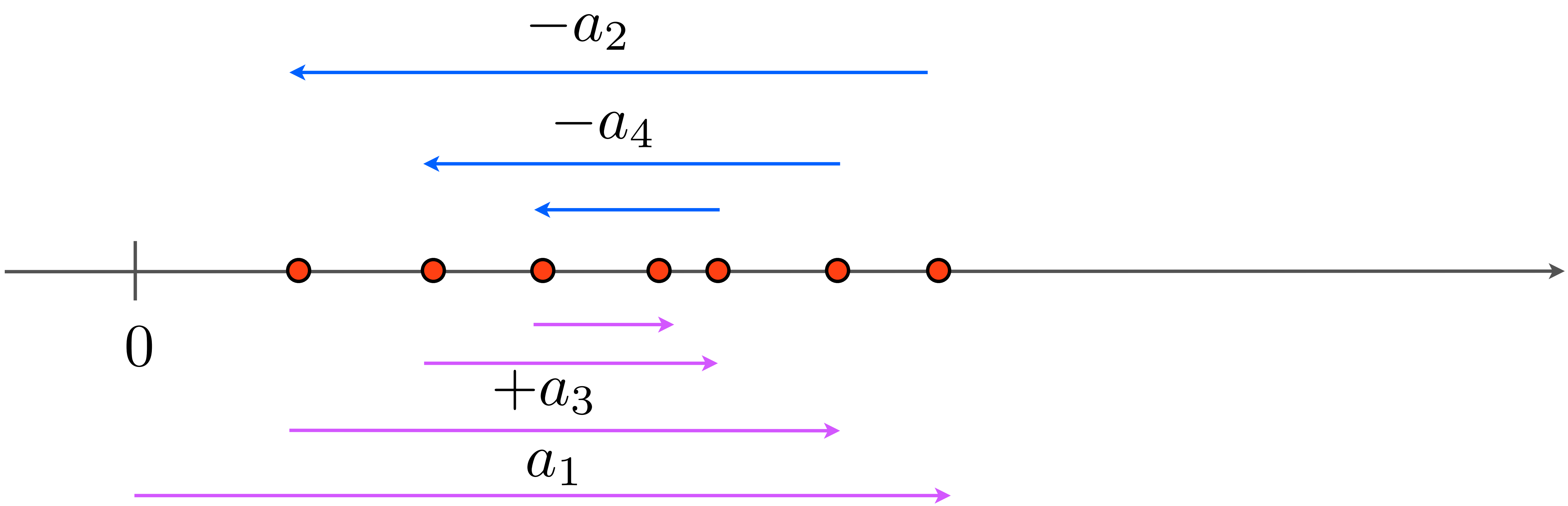


Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \quad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

$$\text{alors} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \quad \text{converge}$$

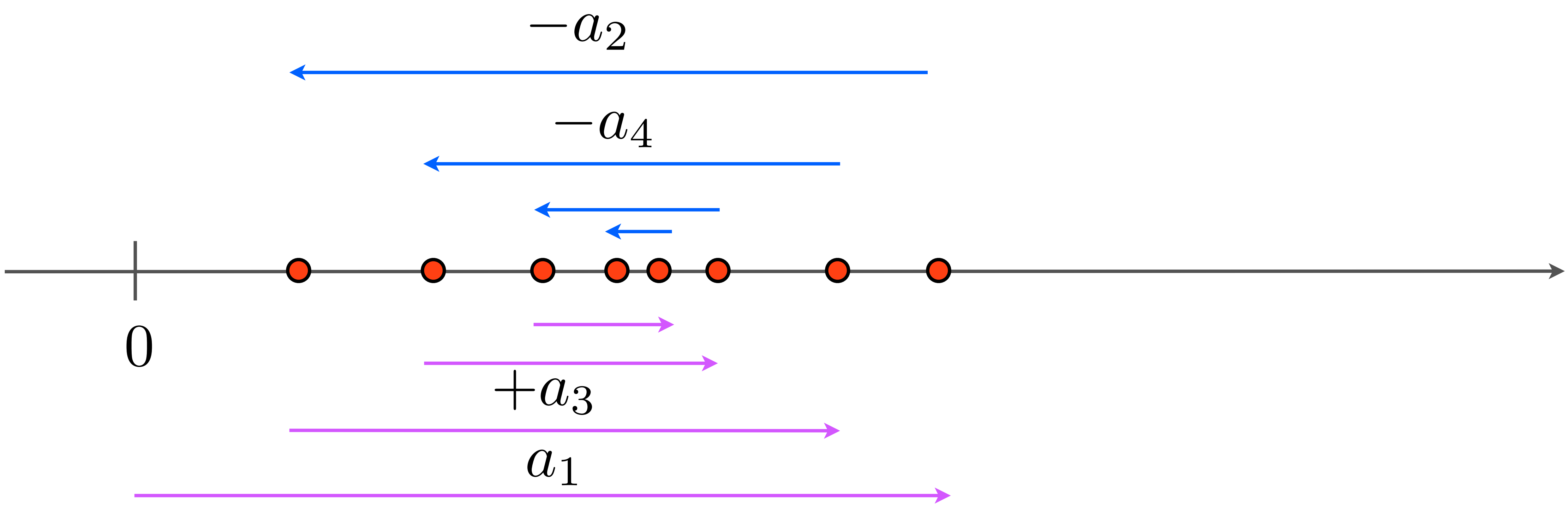


Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \qquad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

$$\text{alors} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \quad \text{converge}$$

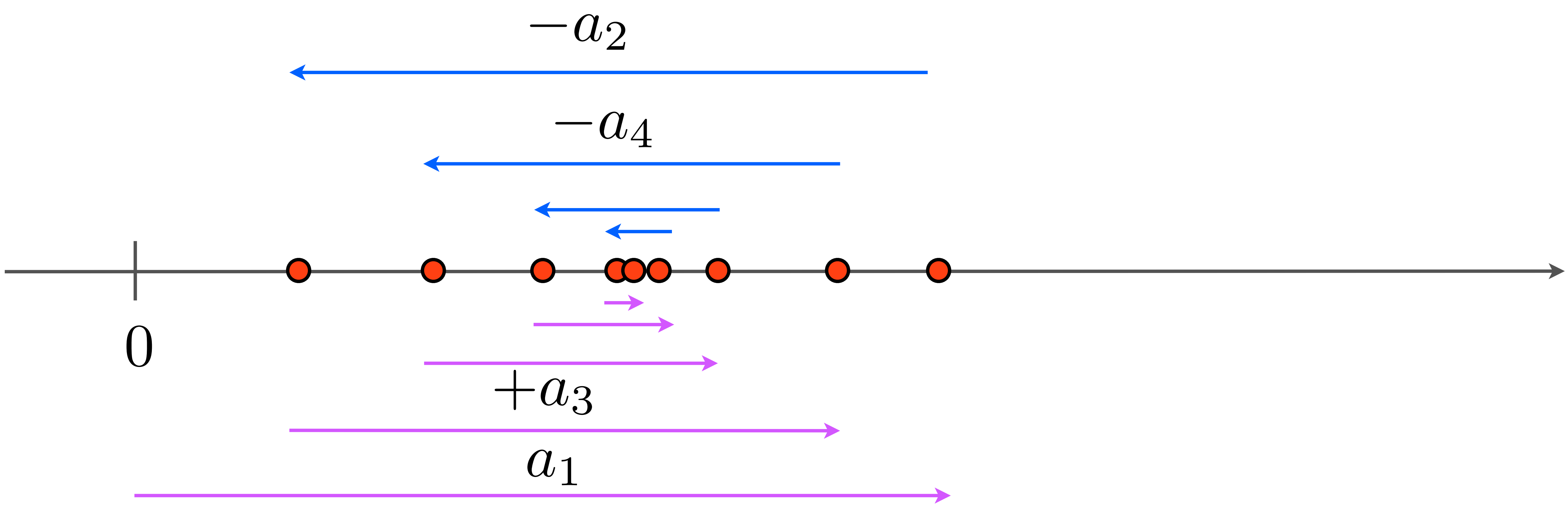


Théorème (Critère de Leibniz)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \qquad \text{avec} \qquad 0 < a_k$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad a_k > a_{k+1}$$

$$\text{alors} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k \quad \text{converge}$$



Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

On a $\displaystyle \frac{1}{k} > 0$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

On a $\dfrac{1}{k} > 0$ et $\dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{k+1}$

Exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

On a $\quad \dfrac{1}{k} > 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{k+1}$

de plus $\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

Exemple $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

On a $\frac{1}{k} > 0$ et $\frac{1}{k} > \frac{1}{k+1}$

de plus $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge

Si une série à terme positif converge

Si une série à terme positif converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

Si une série à terme positif converge $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots$$

Si une série à terme positif converge $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$$

Si une série à terme positif converge $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \ldots)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$$

Si une série à terme positif converge $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \ldots)$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$$

converge

Si une série à terme positif converge $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$$

converge

Si une série à terme positif converge $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}} + \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}}$$

converge

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$

Si une série à terme positif converge $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$$

converge

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ converge

Si une série à terme positif converge $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$$ converge

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ converge

Si une série à terme positif converge $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \ldots)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$$ converge

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ converge

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots) - (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \ldots)$$

Si une série à terme positif converge $\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}} + \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}}$$ converge

Donc $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}} - \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}}$ converge

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots) - (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + \dots$$

Si une série à terme positif converge $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}} + \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}}$$ converge

Donc $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}} - \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}}$ converge

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots) - (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

Définition

Soit une série $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Définition

Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

On dit que la série est **absolument convergente**

Définition Soit une série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

On dit que la série est **absolument convergente**

si $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge

Définition

Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

On dit que la série est **absolument convergente**

si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge

Théorème

Définition Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

On dit que la série est **absolument convergente**

si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge

Théorème Si une série est absolument convergente alors elle est convergente

Définition Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

On dit que la série est **absolument convergente**

si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge

Théorème Si une série est absolument convergente alors elle est convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ converge}$$

Définition Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

On dit que la série est **absolument convergente**

si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge

Théorème Si une série est absolument convergente alors elle est convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ converge} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge}$$

Remarque

L'implication inverse est fausse

Remarque

L'implication inverse est fausse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

Remarque

L'implication inverse est fausse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge}$$

Remarque L'implication inverse est fausse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge}$$

Exemple

Remarque L'implication inverse est fausse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge}$$

Exemple On a vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge

Remarque L'implication inverse est fausse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge}$$

Exemple On a vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge

mais $$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Remarque L'implication inverse est fausse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge}$$

Exemple On a vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge

$$\text{mais} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{diverge}$$

Remarque L'implication inverse est fausse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge}$$

Exemple On a vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge

mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge

Définition

Remarque L'implication inverse est fausse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge}$$

Exemple On a vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge

$$\text{mais} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{diverge}$$

Définition On dit qu'une série est **conditionnellement convergente** si

Remarque L'implication inverse est fausse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge}$$

Exemple On a vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge

$$\text{mais} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{diverge}$$

Définition On dit qu'une série est **conditionnellement convergente** si

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

Remarque L'implication inverse est fausse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \quad \not\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{converge}$$

Exemple On a vu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge

$$\text{mais} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{diverge}$$

Définition On dit qu'une série est **conditionnellement convergente** si

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \qquad \text{mais} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{diverge}$$

Faites les exercices suivants

Section 4 # 24

Séries de puissances

Séries de puissances

Maintenant qu'on a plusieurs outils nous permettant de déterminer la convergence d'une série, on peut pousser une peu plus loin l'idée d'une série en y insérant une variable.

Séries de puissances

Maintenant qu'on a plusieurs outils nous permettant de déterminer la convergence d'une série, on peut pousser une peu plus loin l'idée d'une série en y insérant une variable.

De manière générale on pourrait considérer des expressions de la forme

Séries de puissances

Maintenant qu'on a plusieurs outils nous permettant de déterminer la convergence d'une série, on peut pousser une peu plus loin l'idée d'une série en y insérant une variable.

De manière générale on pourrait considérer des expressions de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

Séries de puissances

Maintenant qu'on a plusieurs outils nous permettant de déterminer la convergence d'une série, on peut pousser une peu plus loin l'idée d'une série en y insérant une variable.

De manière générale on pourrait considérer des expressions de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \ = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \ldots$$

Séries de puissances

Maintenant qu'on a plusieurs outils nous permettant de déterminer la convergence d'une série, on peut pousser une peu plus loin l'idée d'une série en y insérant une variable.

De manière générale on pourrait considérer des expressions de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \dots$$

pour une valeur de x disons

Séries de puissances

Maintenant qu'on a plusieurs outils nous permettant de déterminer la convergence d'une série, on peut pousser une peu plus loin l'idée d'une série en y insérant une variable.

De manière générale on pourrait considérer des expressions de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \dots$$

pour une valeur de x disons $x = b$

Séries de puissances

Maintenant qu'on a plusieurs outils nous permettant de déterminer la convergence d'une série, on peut pousser une peu plus loin l'idée d'une série en y insérant une variable.

De manière générale on pourrait considérer des expressions de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \;= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \dots$$

pour une valeur de x disons $x = b$

si on pose $a_n = f_n(b)$

Séries de puissances

Maintenant qu'on a plusieurs outils nous permettant de déterminer la convergence d'une série, on peut pousser une peu plus loin l'idée d'une série en y insérant une variable.

De manière générale on pourrait considérer des expressions de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \ = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \dots$$

pour une valeur de x disons $x = b$

si on pose $a_n = f_n(b)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(b) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Séries de puissances

Maintenant qu'on a plusieurs outils nous permettant de déterminer la convergence d'une série, on peut pousser une peu plus loin l'idée d'une série en y insérant une variable.

De manière générale on pourrait considérer des expressions de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \; = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \dots$$

pour une valeur de x disons $x = b$

si on pose $a_n = f_n(b)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(b) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{est une série}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

À priori on pourrait prendre n'importe quel type de fonction pour les

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

À priori on pourrait prendre n'importe quel type de fonction pour les

$$f_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

À priori on pourrait prendre n'importe quel type de fonction pour les

$$f_k(x)$$

Par exemple si on prend

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

À priori on pourrait prendre n'importe quel type de fonction pour les

$$f_k(x)$$

Par exemple si on prend

$$f_k(x) = a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

À priori on pourrait prendre n'importe quel type de fonction pour les

$$f_k(x)$$

Par exemple si on prend

$$f_k(x) = a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)$$

On obtient $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

À priori on pourrait prendre n'importe quel type de fonction pour les

$$f_k(x)$$

Par exemple si on prend

$$f_k(x) = a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)$$

On obtient $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)$$

qui est une série de Fourier

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

À priori on pourrait prendre n'importe quel type de fonction pour les

$$f_k(x)$$

Par exemple si on prend

$$f_k(x) = a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)$$

On obtient $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)$$

qui est une série de Fourier

Les séries de Fourier sont utile pour comprendre les fonctions d'onde

Mais on va se concentrer sur les fonctions

Mais on va se concentrer sur les fonctions

$$f_k(x) = a_k(x-a)^k$$

Mais on va se concentrer sur les fonctions

$$f_k(x) = a_k(x-a)^k$$

On nomme une série de la forme

Mais on va se concentrer sur les fonctions

$$f_k(x) = a_k(x-a)^k$$

On nomme une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

Mais on va se concentrer sur les fonctions

$$f_k(x) = a_k(x-a)^k$$

On nomme une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

une série de puissance.

Mais on va se concentrer sur les fonctions

$$f_k(x) = a_k(x-a)^k$$

On nomme une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

une série de puissance.

Remarque

Mais on va se concentrer sur les fonctions

$$f_k(x) = a_k(x-a)^k$$

On nomme une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

une série de puissance.

Remarque Dans le cas fini

Mais on va se concentrer sur les fonctions

$$f_k(x) = a_k(x-a)^k$$

On nomme une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

une série de puissance.

Remarque Dans le cas fini $$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$$

Mais on va se concentrer sur les fonctions

$$f_k(x) = a_k(x-a)^k$$

On nomme une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

une série de puissance.

Remarque

Dans le cas fini $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$

en posant $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{n!}$

Mais on va se concentrer sur les fonctions

$$f_k(x) = a_k(x-a)^k$$

On nomme une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

une série de puissance.

Remarque

Dans le cas fini $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$

en posant $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{n!}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$

Mais on va se concentrer sur les fonctions

$$f_k(x) = a_k(x-a)^k$$

On nomme une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

une série de puissance.

Remarque

Dans le cas fini $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$

en posant $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{n!}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$

On obtient le polynôme de Taylor de degré n

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Pour trouver les valeurs qui rendent la série convergente, on utilise souvent le critère de d'Alembert généralisé et le critère de Cauchy généralisé.

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Pour trouver les valeurs qui rendent la série convergente, on utilise souvent le critère de d'Alembert généralisé et le critère de Cauchy généralisé.

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = R$$

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Pour trouver les valeurs qui rendent la série convergente, on utilise souvent le critère de d'Alembert généralisé et le critère de Cauchy généralisé.

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = R \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = R$$

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Pour trouver les valeurs qui rendent la série convergente, on utilise souvent le critère de d'Alembert généralisé et le critère de Cauchy généralisé.

Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = R$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = R$

si $R < 1$

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Pour trouver les valeurs qui rendent la série convergente, on utilise souvent le critère de d'Alembert généralisé et le critère de Cauchy généralisé.

Si $\quad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = R \qquad$ ou $\qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = R$

si $\quad R < 1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad$ converge

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Pour trouver les valeurs qui rendent la série convergente, on utilise souvent le critère de d'Alembert généralisé et le critère de Cauchy généralisé.

Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = R$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = R$

si $R < 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge

si $R > 1$

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Pour trouver les valeurs qui rendent la série convergente, on utilise souvent le critère de d'Alembert généralisé et le critère de Cauchy généralisé.

Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = R$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = R$

si $R < 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge

si $R > 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ diverge

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Pour trouver les valeurs qui rendent la série convergente, on utilise souvent le critère de d'Alembert généralisé et le critère de Cauchy généralisé.

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = R \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = R$$

si $\quad R < 1 \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad$ converge

si $\quad R > 1 \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad$ diverge

si $\quad R = 1$

Une série de puissance peut converger ou diverger dépendamment des valeurs de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Pour trouver les valeurs qui rendent la série convergente, on utilise souvent le critère de d'Alembert généralisé et le critère de Cauchy généralisé.

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = R \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = R$$

$$\text{si} \quad R < 1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{converge}$$

$$\text{si} \quad R > 1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{diverge}$$

$$\text{si} \quad R = 1 \quad \text{on ne peut rien conclure}$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right|$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right|$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3| < 1$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)| = |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases}$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3| < 1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1 < x-3 < 1$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1<x-3<1 \qquad 2<x<4$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1<x-3<1 \qquad 2<x<4$$

si

$$|x-3|=1$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1<x-3<1 \qquad 2<x<4$$

si soit

$$|x-3|=1 \qquad x=2$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1<x-3<1 \qquad 2<x<4$$

si $|x-3|=1$ soit $x=2$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1<x-3<1 \qquad 2<x<4$$

si $|x-3|=1$ soit $x=2$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ div.

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1 < x-3 < 1 \qquad 2 < x < 4$$

si $|x-3|=1$ soit $x=2$ $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ div. soit $x=4$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1 < x-3 < 1 \qquad 2 < x < 4$$

si $|x-3|=1$ soit $x=2$ $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ div. soit $x=4$ $\sum_{k=0}^{\infty}(1)^k$

Exemple $$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$
$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1<x-3<1 \qquad 2<x<4$$

si $|x-3|=1$ soit $x=2$ $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ div. soit $x=4$ $\sum_{k=0}^{\infty}(1)^k$ div.

Exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$
$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$-1 < x-3 < 1 \qquad 2 < x < 4$

si $|x-3|=1$ soit $x=2$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ div. soit $x=4$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1)^k$ div.

On nomme $]\,2,4\,[$ l'intervalle de convergence

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$

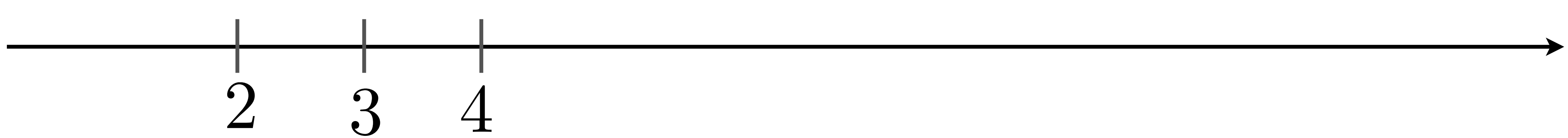
$$= |x-3|$$

Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1<x-3<1 \qquad 2<x<4$$

si $|x-3|=1$ soit $x=2$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ div. soit $x=4$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1)^k$ div.

On nomme $]\,2,4\,[$ l'intervalle de convergence



Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$
$$= |x-3|$$

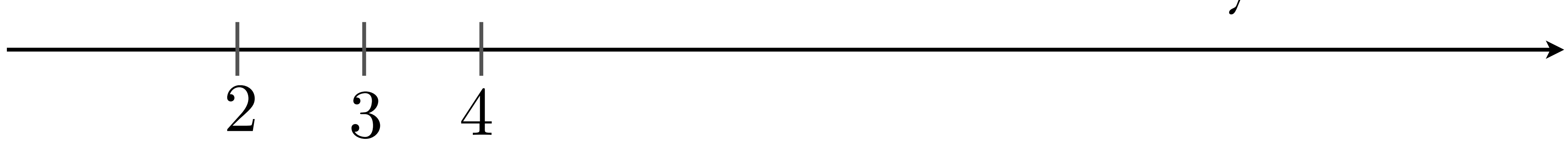
Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1<x-3<1 \qquad 2<x<4$$

si $|x-3|=1$ soit $x=2$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ div. soit $x=4$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1)^k$ div.

On nomme $]\,2,4\,[$ l'intervalle de convergence

et 1 est le rayon de convergence



Exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n(x-3)}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(x-3)|$$
$$= |x-3|$$

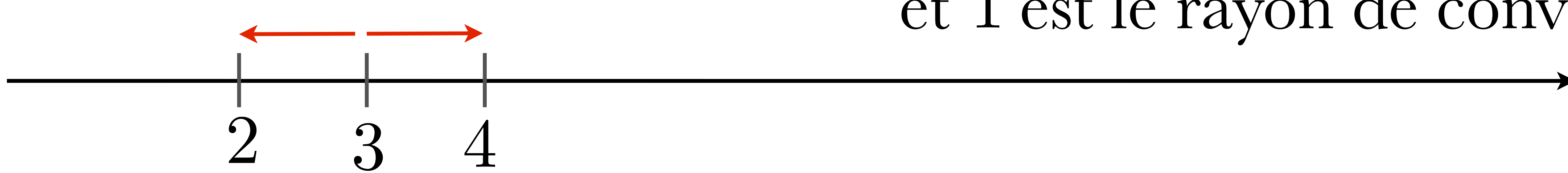
Converge si $|x-3|<1 \implies \begin{cases} x-3<1 \\ -(x-3)<1 \end{cases} = \begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$

$$-1 < x-3 < 1 \qquad 2 < x < 4$$

si $|x-3|=1$ soit $x=2$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ div. soit $x=4$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1)^k$ div.

On nomme $]\,2,4\,[$ l'intervalle de convergence

et 1 est le rayon de convergence



Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+2)^n}{n!}} \right|$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+2)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} n!}{(x+2)^n (n+1)!} \right|$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+2)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} n!}{(x+2)^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)}{(n+1)} \right|$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+2)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} n!}{(x+2)^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)}{(n+1)} \right|$$

$$= |x+2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)} \right|$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+2)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} n!}{(x+2)^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)}{(n+1)} \right|$$

$$= |x+2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)} \right| = 0$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+2)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} n!}{(x+2)^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)}{(n+1)} \right|$$

$$= |x+2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)} \right| = 0 \ < 1$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+2)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} n!}{(x+2)^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)}{(n+1)} \right|$$

$$= |x+2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)} \right| = 0 \; < 1$$

Et ce, peut importe la valeur de x

Exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+2)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} n!}{(x+2)^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)}{(n+1)} \right|$$

$$= |x+2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)} \right| = 0 \; < 1$$

Et ce, peut importe la valeur de x

Dans ce cas, on dit que l'intervalle de convergence est $\mathbb{R}$

Exemple $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+2)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} n!}{(x+2)^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)}{(n+1)} \right|$$

$$= |x+2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)} \right| = 0 \; < 1$$

Et ce, peut importe la valeur de x

Dans ce cas, on dit que l'intervalle de convergence est $\mathbb{R}$

et que le rayon de convergence est infini.

Faites les exercices suivants

Faites les exercices suivants

Section 4 # 25, 26, 27

Aujourd’hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ Série alternée

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Série alternée
- ✓ Critère de Leibnitz

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Série alternée
- ✓ Critère de Leibnitz
- ✓ Série de puissance

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Série alternée
- ✓ Critère de Leibnitz
- ✓ Série de puissance
- ✓ Intervalle de convergence

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Série alternée
- ✓ Critère de Leibnitz
- ✓ Série de puissance
- ✓ Intervalle de convergence
- ✓ Rayon de convergence

Devoir: Section 4.4, 4.5 et # 23