4.6 SÉRIE DE TAYLOR

cours 28

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Série alternée
- ✓ Critère de Leibnitz
- ✓ Série de puissance
- ✓ Intervalle de convergence
- ✓ Rayon de convergence

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Dérivée de série de puissance
- ✓ Intégrale de série de puissance
- ✓ Série de Taylor et Maclaurin

Au dernier cours, on a vu qu'une série de puissance

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

peut converger ou diverger dépendamment de la valeur de x

On peut donc créer une fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

dont le domaine est l'intervalle de convergence

La dérivée et l'intégrale sont des opérateurs linéaires.

C'est à dire que

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

Bien que ces propriétés s'étendent aisément à une somme finie de fonctions, le passage à une somme infinie de fonctions est moins évident.

On va accepter cette généralisation sans démonstration.

Soit une série de puissance

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

ayant comme intervalle de convergence I

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots$$

$$f'(x) = \left(a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots\right)'$$

$$= 0 + a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}(x-a)^k \quad = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots$$

$$\int f(x)\, dx = \int a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots \, dx$$

$$= a_0 x + a_1 \frac{(x-a)^2}{2} + a_2 \frac{(x-a)^3}{3} + a_3 \frac{(x-a)^4}{4} + \dots + C_1$$

$$= a_0 x - a_0 a + a_1 \frac{(x-a)^2}{2} + a_2 \frac{(x-a)^3}{3} + a_3 \frac{(x-a)^4}{4} + \dots + C$$

$$= a_0 (x-a) + a_1 \frac{(x-a)^2}{2} + a_2 \frac{(x-a)^3}{3} + a_3 \frac{(x-a)^4}{4} + \dots + C$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + C$$

Exemple

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

est une série géométrique de raison $-x$

et converge pour $x \in]-1, 1[$ vers $\dfrac{1}{1-(-x)} = \dfrac{1}{1+x}$

On a donc une égalité

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

qui est valide pour tout $x \in]-1, 1[$

Exemple

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

qui est valide pour tout $x \in \,]-1, 1[$

$$\ln|1+x| = \int \frac{1}{1+x}\, dx = \int 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\, dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots + C$$

$x = 0$ $$\ln 1 = 0 - \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + \frac{0^5}{5} - \cdots + C$$

$C = 0$

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

Exemple

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

qui est valide pour tout $x \in \,]-1, 1[$

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} n}{x^n (n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{xn}{n+1} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x|$$

donc converge pour $x \in \,]-1, 1[$ si $x = 1$ ou $x = -1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \sum_{k=1} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = \sum_{k=1} \frac{(-1)}{k} \qquad x \in]-1, 1]$$

la série converge par le critère de Leibnitz harmonique

Exemple

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

qui est valide pour tout $x \in \,]-1, 1[$

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

qui est valide pour tout $x \in]-1, 1]$

Par exemple si $x = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln|1+1| = \ln 2$$

Faites les exercices suivants

Soit
$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$
et
$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

a) Évaluer $f(0)$ et $g(0)$

b) Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$

écrire les réponses en fonction des fonctions de départ

c) Calculer $f''(x)$ et $g''(x)$

écrire les réponses en fonction des fonctions de départ

d) Connaissez vous ces fonctions?

Comme l'exemple précédant l'illustre, certaine séries de puissance concorde sur l'intervalle de convergence avec des fonctions connue.

Étant donnée une fonction, serait-il possible de trouver une série de puissance qui concorde avec la fonction sur l'intervalle de convergence ?

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$$

Si une telle égalité est vérifiée

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$$

alors on doit nécessairement avoir que

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k\right)$$

ou de manière plus générale

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k\right)$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + \dots$$

$$f(a) = b_0 + b_1(a \cancel{-} a) + b_2(a \cancel{-} a)^2 + b_3(a \cancel{-} a)^3 + \dots$$

$$f(a) = b_0$$

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + 4b_4(x-a)^3 \dots$$

$$f'(a) = b_1$$

$$f''(x) = 2b_2 + 2 \cdot 3b_3(x-a) + 3 \cdot 4b_4(x-a)^2 + 4 \cdot 5b_5(x-a)^3 +$$

$$f''(a) = 2!b_2$$

$$f^{(3)}(x) = 2 \cdot 3b_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4b_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5b_5(x-a)^2 + \dots$$

$$f^{(3)}(a) = 3!b_3$$

$$f(a) = b_0 \qquad f'(a) = b_1 \qquad f''(a) = 2!b_2 \qquad f^{(3)}(a) = 3!b_3$$

$$f^{(n)}(a) = n!b_n \qquad b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Définition

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

On nomme cette série la série de Taylor de $f(x)$ autour de a

Dans le cas particulier ou $a = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

on la nomme la série de Maclaurin

Exemple

$$f(x) = e^x \qquad a = 0$$

$$f(0) = e^0 \quad = 1 \qquad f'(x) = e^x \qquad f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1$$

$$b_n = \frac{f^n(0)}{n!} \quad = \frac{1}{n!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{(n+1)} \right| \quad = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)} \right|$$

$$= 0 \quad < 1$$

Donc la série converge pour toutes valeurs de x

Faites les exercices suivants

Section 4 #28

En fait, par construction, on a que si on trouve une série de puissance correspondant à une fonction, c'est nécessairement sa série de Taylor.

$$f(x) = \arctan x$$

Sa série de Taylor n'est pas particulièrement simple à trouver.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots\,dx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \frac{1}{1-(-x^2)} \qquad = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots\, dx$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots + C$$

$$\arctan 0 = C = 0$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

Exemple

$$\int \sin(x^2)\ dx$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\sin(x^2) = (x^2) - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \frac{(x^2)^7}{7!} + \ldots$$

$$= x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots$$

$$\int \sin(x^2)\ dx = \int x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots\ dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^{11}}{5!11} - \frac{x^{15}}{7!15} + \cdots + C$$

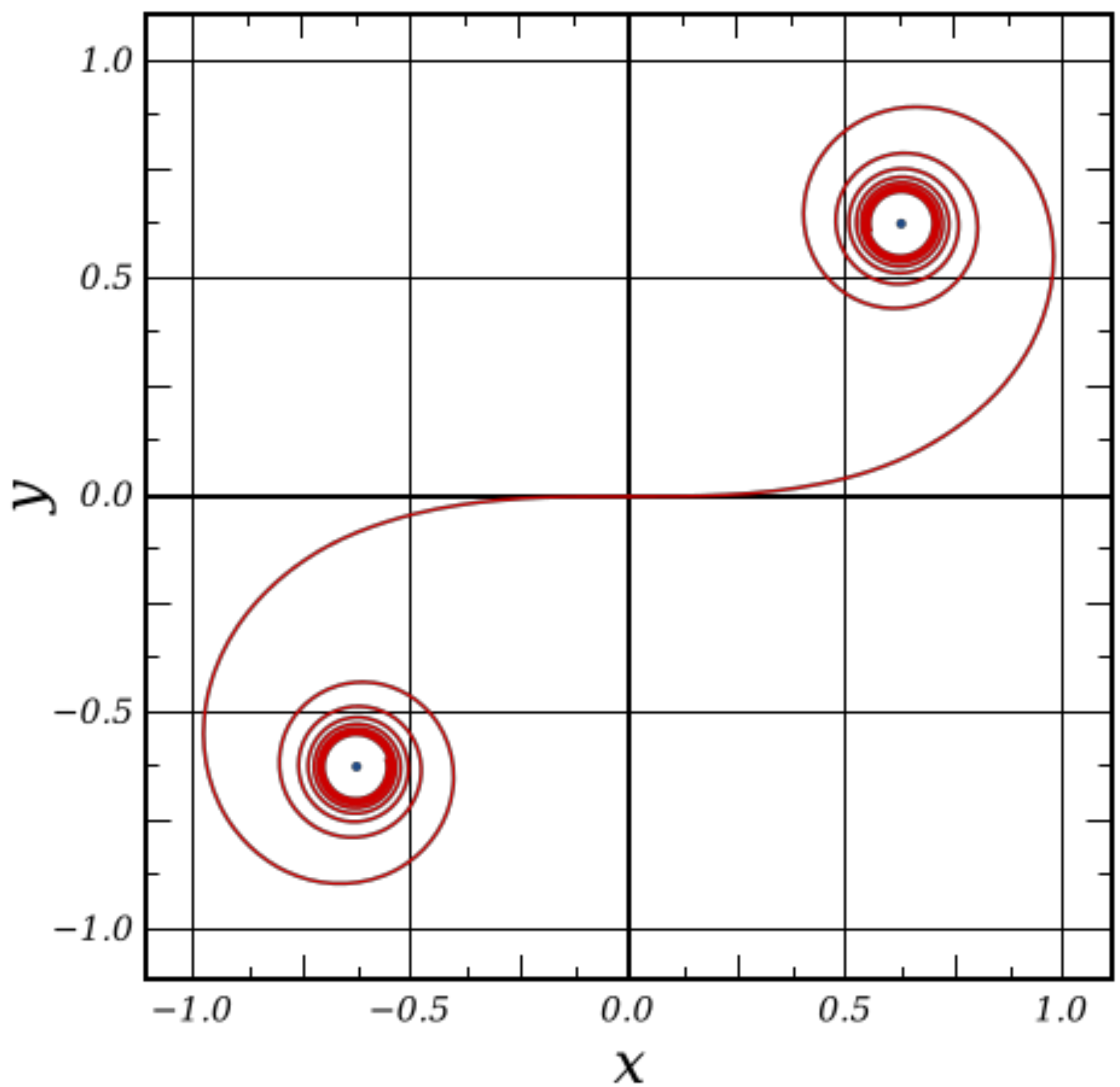
Les intégrales de Fresnel

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\ dt = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^{11}}{5!11} - \frac{x^{15}}{7!15} + \ldots$$

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\ dt = x - \frac{x^5}{2!5} + \frac{x^9}{4!9} - \frac{x^{13}}{6!13} + \ldots$$

La fonction d'erreur

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\ dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \ldots \right)$$



$$f(t) = (C(t), S(t))$$

On est peut-être pas capable d’intégrer n’importe quel fonction

mais au moins, si elle est continue et que ses dérivées d’ordre supérieur aussi

on peut en trouver une approximation aussi bonne que nécessaire!

Faites les exercices suivants

Section 4 #30

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Dérivée de série de puissance
- ✓ Intégrale de série de puissance
- ✓ Série de Taylor et Maclaurin

Devoir: Section 4.6