Examen 4

NYB Calcul intégral

17 mai 2007

Professeur : Dimitri Zuchowski

Solutions

Q1. **(10%)**

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}=0$

b) $\frac{-1}{n}\leq\frac{\sin n}{n}\leq\frac{1}{n}\implies 0\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}\leq 0\implies\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$

Q2. **(10%)**

a) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3}{(-2)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{16}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ est une géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ donc converge vers $\frac{\frac{3}{16}}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{8}$

b) $\sum_{n=1000}^{\infty}\frac{-1}{4n}=-\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{999}\frac{1}{k}\right)$ diverge car la série harmonique diverge.

Q3. **(48%)**

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{2n+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4^x}{2x+3}\overset{RH}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{4^x\ln 4}{2}=\infty$ donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2n+3}$ diverge par le critère du terme général.

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}n!}{(n+1)!e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{(n+1)}=0<1$ donc la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$ converge par le critère de d'Alembert.

c) $d=6-5=1$ donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^5+1}{(n^2+1)^3}$ diverge par le critère du polynôme.

d) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{1+n^2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{1+n^2}\overset{RH}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n}=0<1$ donc la série $\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{3n}{1+n^2}\right)^n$ converge par le critère de Cauchy.

e) $\frac{(3+n^2)}{n^3}\geq\frac{(3+(n+1)^2)}{(n+1)^3}$ et $\lim_{n\to\infty}\frac{(3+n^2)}{n^3}\overset{RH}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3n}=0$ donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3+n^2)}{n^3}$ converge par le critère de Leibnitz

f) $\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\int u\,du=\frac{u^2}{2}=\lim_{M\to\infty}\frac{\arctan^2 M}{2}-\frac{\arctan^2 1}{2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{32}$ donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$ converge par le critère de l'intégrale.

g) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+5}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}}=1$ donc la série $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+5}}$ a la même convergence que la série $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est une série-p avec $p=\frac{1}{2}<1$ qui est divergent.

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^{\frac{7}{8}}} = 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{8}}}$ est une série-p avec $p = \dfrac{7}{8} < 1$ donc diverge.

Q4. **(12%)**

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x}{n}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 0 < 1$ donc la série de puissance $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^k$ converge pour toute valeurs de x. L'intervalle de convergence est $\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(3x+4)^{n+1} n!}{(n+1)!(3x+4)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(3x+4)}{(n+1)}\right| = |3x+4| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)}\right| = 0 < 1$ donc la série de puissance $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x+4)^k}{k!}$ converge pour toute valeurs de x. L'intervalle de convergence est $\mathbb{R}$.

Q5. **(15%)** Trouver le développement en série de Taylor des fonctions suivantes autour de la valeur de a donnée.

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

$$\int \frac{1}{1+x}\, dx = \ln(1+x) = \int 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Similairement

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x)^k = \frac{1}{1-x}$$

$$\int \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln(1-x) = \int 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots dx$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

donc $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{5} + \ldots$

b) $\cos x = \cos\pi - \sin\pi(x-\pi) - \dfrac{\cos\pi(x-\pi)^2}{2!} + \dfrac{\sin\pi(x-\pi)^3}{3!} + \dfrac{\cos\pi(x-\pi)^4}{4!} - \dfrac{\sin\pi(x-\pi)^5}{5!} + \ldots$
$= -1 + \dfrac{(x-\pi)^2}{2!} - \dfrac{(x-\pi)^4}{4!} + \ldots$

c) On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}^2}{2!} + \frac{\sqrt{x}^3}{3!} + \frac{\sqrt{x}^4}{4!} + \ldots$$

$$\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \sqrt{x}^2 + \frac{\sqrt{x}^3}{2!} + \frac{\sqrt{x}^4}{3!} + \frac{\sqrt{x}^5}{4!} + \ldots$$

Q6. **(5%)** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

$$\cos(4x^3) = 1 - \frac{(4x^3)^2}{2!} + \frac{(4x^3)^4}{4!} - \frac{(4x^3)^6}{6!} + \dots = 1 - \frac{4^2x^6}{2!} + \frac{4^4x^{12}}{4!} - \frac{4^6x^{18}}{6!} + \dots$$

D'où

$$\int \cos(4x^3)\ dx = \int 1 - \frac{4^2x^6}{2!} + \frac{4^4x^{12}}{4!} - \frac{4^6x^{18}}{6!} + \dots\ dx = x - \frac{4^2x^7}{2!7} + \frac{4^4x^{13}}{4!13} - \frac{4^6x^{19}}{6!19} + \dots + C$$