

## 2 Techniques d'intégration

### 2.1 Intégration par parties

#### Q.1

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int x e^x dx & \text{d) } \int \arcsin x dx \\ \text{b) } \int x \sin x dx & \text{e) } \int x \sqrt{1+x} dx \\ \text{c) } \int x^2 \ln x dx & \text{f) } \int t \sec t \tan t dt \end{array}$$

#### Q.2

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \ln x dx & \text{e) } \int x^3 e^{x^2} dx \\ \text{b) } \int x \sec^2 3x dx & \text{f) } \int y^2 \arctan y dy \\ \text{c) } \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx & \text{g) } \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \\ \text{d) } \int x^2 \arccos x^3 dx & \text{h) } \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx \end{array}$$

#### Q.3

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int x^2 \sin x dx & \text{c) } \int x^2 \ln^2 x dx \\ \text{b) } \int x^2 e^{4x} dx & \text{d) } \int \frac{x^2 - 5x}{e^{3x}} dx \end{array}$$

#### Q.4

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int e^x \sin x dx & \text{e) } \int e^{\sqrt{x}} dx \\ \text{b) } \int e^{-x} \cos 2x dx & \text{f) } \int \sin 3t \cos 4t dt \\ \text{c) } \int \cos^2 \theta d\theta & \text{g) } \int \sin^3 x dx \\ \text{d) } \int \cos(\ln x) dx & \text{h) } \int \csc^3 x dx \end{array}$$

#### Q.5

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \log x dx & \text{d) } \int x^3 \sin 2x dx \\ \text{b) } \int x \ln^2 x dx & \text{e) } \int \sin \theta \sin 4\theta d\theta \\ \text{c) } \int x^2 \ln x dx & \text{f) } \int \frac{y}{\sqrt{1+y}} dy \end{array}$$

#### Q.6

À l'aide de l'intégration par parties, démontrer les formules suivantes qui permettent de réduire le degré d'une expression.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \\ \text{b) } \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx \end{array}$$

### 2.2 Intégration de fonctions trigonométriques

#### Q.7

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \sin^2 x \cos^3 x dx & \text{f) } \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx \\ \text{b) } \int \sin^3 5x \cos^2 5x dx & \text{g) } \int \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{4}\right) du \\ \text{c) } \int \sin^2 t \cos^2 t dt & \text{h) } \int \sin^4 x \cos^2 x dx \\ \text{d) } \int \sin 5\theta \cos 2\theta d\theta & \text{i) } \int \sin^5 2\theta \cos^3 2\theta d\theta \\ \text{e) } \int \cos^4 3x dx & \end{array}$$

#### Q.8

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \tan^3 2\theta d\theta & \text{d) } \int \tan^3 v \sec v dv \\ \text{b) } \int \tan^4 x dx & \text{e) } \int \sec^3 x \tan^2 x dx \\ \text{c) } \int \sec^4 x \tan^2 x dx & \text{f) } \int \sec^3 5x \tan^3 5x dx \end{array}$$

**Q.9**

À l'aide de l'intégration par parties, démontrer les formules suivantes qui permettent de réduire le degré d'une expression.

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \sin^n x \, dx &= -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx \\ \text{b)} \int \cos^n x \, dx &= \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \\ \text{c)} \int \tan^n x \, dx &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx \\ \text{d)} \int \sec^n x \, dx &= \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx \end{aligned}$$

**Q.10**

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \tan 3t \sec^5 3t \, dt \\ \text{b)} \int \sec^4 2x \tan^5 2x \, dx \\ \text{c)} \int \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x}{3}\right) \, dx \\ \text{d)} \int \frac{\cos^4 \theta}{\sin^6 \theta} \, d\theta \\ \text{e)} \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} \, dx \\ \text{f)} \int \sin^7 x \, dx \\ \text{g)} \int \sec^7 x \, dx \\ \text{h)} \int (1 + \sin^2 x)(1 + \cos^2 x) \, dx \end{aligned}$$

**2.3 Intégration par substitution trigonométrique 1****Q.11**

Étant donnée les expressions suivantes, construire un triangle approprié et écrire  $x$  et  $\sqrt{f(x)}$  en terme de rapport trigonométrique.

$$\begin{aligned} \text{a)} \sqrt{4-x^2} & \qquad \qquad \text{c)} \sqrt{x^2-16} \\ \text{b)} \sqrt{x^2+9} & \qquad \qquad \text{d)} \sqrt{3x^2+2} \end{aligned}$$

**Q.12**

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} \text{a)} \int x^3 \sqrt{1-x^2} \, dx & \qquad \qquad \text{d)} \int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} \, dx \\ \text{b)} \int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} \, dx & \qquad \qquad \text{e)} \int \frac{7}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx \\ \text{c)} \int \frac{1}{1-x^2} \, dx & \qquad \qquad \text{f)} \int \frac{\sqrt{9-\frac{x^2}{4}}}{x} \, dx \end{aligned}$$

**Q.13**

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} & \qquad \qquad \text{d)} \int \sqrt{4x^2+9} \, dx \\ \text{b)} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \, dx & \qquad \qquad \text{e)} \int \frac{1}{x(9+x^2)^2} \, dx \\ \text{c)} \int \frac{1}{(x^2+36)^{\frac{3}{2}}} \, dx & \qquad \qquad \text{f)} \int \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x^4} \, dx \end{aligned}$$

**Q.14**

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \, dx & \qquad \qquad \text{d)} \int \frac{1}{x^2\sqrt{5x^2-3}} \, dx \\ \text{b)} \int \frac{x^2}{\sqrt{9x^2-1}} \, dx & \qquad \qquad \text{e)} \int \sqrt{x^2-\frac{1}{4}} \, dx \\ \text{c)} \int \frac{\sqrt{9x^2-1}}{x^2} \, dx & \qquad \qquad \text{f)} \int \frac{dx}{x^4\sqrt{4x^2-1}} \end{aligned}$$

**Q.15**

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} \, dx & \qquad \qquad \text{d)} \int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx \\ \text{b)} \int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx & \qquad \qquad \text{e)} \int x^3 \sqrt{a^2-x^2} \, dx \\ \text{c)} \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} \, dx & \end{aligned}$$

**2.4 Intégration par substitution trigonométrique 2****Q.16**

Faites les complétion de carré suivante

$$\begin{aligned} \text{a)} x^2 - 4x + 9 & \qquad \qquad \text{c)} 9x^2 - 30x + 27 \\ \text{b)} x^2 + 6x + 2 & \qquad \qquad \text{d)} 12x - 4x^2 + 3 \end{aligned}$$

**Q.17**

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{1}{(3-x^2-2x)^{\frac{3}{2}}} \, dx & \qquad \qquad \text{c)} \int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x}} \, dx \\ \text{b)} \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+12x+25}} \, dx & \qquad \qquad \text{d)} \int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2} \, dx \end{aligned}$$

**Q.18**

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{1}{x^2\sqrt{4-9x^2}} dx & \text{d) } \int \sqrt{18+4x^2-12x} dx \\ \text{b) } \int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^3} dx & \text{e) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} \\ \text{c) } \int \frac{x^2}{\sqrt{36-x^2}} dx & \text{f) } \int \cos x \sqrt{4+\sin^2 x} dx \end{array}$$

**2.5 Intégration par fractions partielles****Q.19**

Décomposer en fraction partielle les expressions suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{-3x-9}{(x+1)(x-2)} & \text{d) } \frac{-x^3-4x^2+x-9}{(x^2+1)(x^2+2)} \\ \text{b) } \frac{x-18}{x^2-x-6} & \text{e) } \frac{3x^2+4x+6}{(x+1)^3} \\ \text{c) } \frac{4x^2+x+13}{(x+5)(x^2+2)} & \text{f) } \frac{x^3+2x^2+4x+1}{(x^2+1)^2} \end{array}$$

**Q.20**

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \int \frac{1}{x^2-4} dx \\ \text{b) } \int \frac{8x+9}{(x-2)(x+3)} dx \\ \text{c) } \int \frac{x}{(x-1)^2} dx \\ \text{d) } \int \frac{3(x+2)(x-1)}{x^2-x-2} dx \\ \text{e) } \int \frac{x^2+4x-1}{x^3-x} dx \\ \text{f) } \int \frac{8x^3+36x^2+42x+27}{x(2x+3)^3} dx \\ \text{g) } \int \frac{8x^3-5x^2-11x+14}{(x^2-1)(x^2-4)} dx \\ \text{h) } \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} dx \\ \text{i) } \int \frac{x^5+4}{x^3+x^2} dx \end{array}$$

**Q.21**

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \int \frac{7x^2-5x+3}{x^3+x} dx \\ \text{b) } \int \frac{-2x^3+5x^2-4x+20}{x^2(x^2-x+5)} dx \\ \text{c) } \int \frac{8x^5+20x^3+7x}{2x^2+5} dx \\ \text{d) } \int \frac{x^6+x^2+8}{x(x^2+2)^3} dx \\ \text{e) } \int \frac{x^4+10x^2+30x+25}{x^2(x^2+3x+5)^2} dx \\ \text{f) } \int \frac{6x^2+7x+19}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx \\ \text{g) } \int \frac{3x^4-x^3+2x^2-x+2}{x(x^2+1)^2} dx \end{array}$$

**2.6 Exercices supplémentaires****Q.22**

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \cos x(1+\sin^2 x) dx & \text{j) } \int x \sin x \cos x dx \\ \text{b) } \int \frac{e^{\arctan x}}{x^2+1} dx & \text{k) } \int \frac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ \text{c) } \int x^5 e^{-x^3} dx & \text{l) } \int \frac{x+1}{9x^2+6x+5} dx \\ \text{d) } \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx & \text{m) } \int x e^{\sqrt{x}} dx \\ \text{e) } \int \sqrt{3-2x-x^2} dx & \text{n) } \int_0^{\ln 10} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+8} dx \\ \text{f) } \int (x+\sin x)^2 dx & \text{o) } \int (\arcsin x)^2 dx \\ \text{g) } \int \ln(x+\sqrt{x^2-1}) dx & \text{p) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx \\ \text{h) } \int \frac{3x^2-2}{x^2-2x-8} dx & \text{q) } \int \csc^5 x dx \\ \text{i) } \int \frac{dx}{x(x^4+1)} & \text{r) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x} dx \end{array}$$

## Réponses aux exercices

### R.1

- a)  $xe^x - e^x + C$   
 b)  $-x \cos x + \sin x + C$   
 c)  $\frac{x^3}{3} \left( \ln x - \frac{1}{3} \right) + C$   
 d)  $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$   
 e)  $\frac{2x(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(1+x)^{\frac{5}{2}}}{15} + C$   
 f)  $t \sec t - \ln |\sec t + \tan t| + C$

### R.2

- a)  $x \ln x - x + C$   
 b)  $\frac{x \tan 3x}{3} + \frac{1}{9} \ln |\cos 3x| + C$   
 c)  $\frac{e^x}{x+1} + C$   
 d)  $\frac{x^3}{3} \arccos x^3 - \frac{\sqrt{1-x^6}}{3} + C$   
 e)  $\frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + C$   
 f)  $\frac{y^3}{3} \arctan y - \frac{y^2}{6} + \frac{1}{6} \ln(y^2 + 1) + C$   
 g)  $2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$   
 h)  $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C$

### R.3

- a)  $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$   
 b)  $\frac{x^2 e^{4x}}{4} - \frac{x e^{4x}}{8} + \frac{e^{4x}}{32} + C$   
 c)  $\frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2x^3 \ln x}{9} + \frac{2x^3}{27} + C$   
 d)  $\frac{-(x^2 - 5x)e^{-3x}}{3} - \frac{(2x - 5)e^{-3x}}{9} - \frac{2e^{-3x}}{27} + C$

### R.4

- a)  $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$   
 b)  $\frac{e^{-x}(2 \sin 2x - \cos 2x)}{5} + C$   
 c)  $\frac{\sin \theta \cos \theta + \theta}{2} + C$   
 d)  $\frac{x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)}{2} + C$   
 e)  $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$   
 f)  $\frac{16}{7} \left( \frac{\sin 3t \sin 4t}{4} + \frac{3 \cos 3t \cos 4t}{16} \right) + C$   
 g)  $-\frac{1}{3}(\cos x \sin^2 x + 2 \cos x) + C$

h)  $\frac{-\csc x \cot x + \ln |\csc x - \cot x|}{2} + C$

### R.5

- a)  $x \log x - \frac{x}{\ln 10} + C$   
 b)  $\frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C$   
 c)  $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$   
 d)  $\frac{-x^3 \cos 2x}{2} + \frac{3x^2 \sin 2x}{4} + \frac{3x \cos 2x}{4} - \frac{3 \sin 2x}{8} + C$   
 e)  $\frac{\cos \theta \sin 4\theta - 4 \sin \theta \cos 4\theta}{15} + C$   
 f)  $2y\sqrt{1+y} - \frac{4}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} + C$

**R.6** Laissez à l'étudiant.

### R.7

- a)  $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$   
 b)  $\frac{-\cos^3 5x}{15} + \frac{\cos^5 5x}{25} + C$   
 c)  $\frac{t}{8} - \frac{\sin 4t}{32} + C$   
 d)  $\frac{-\cos 3\theta}{6} - \frac{\cos 7\theta}{14} + C$   
 e)  $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 6x}{12} + \frac{\sin 12x}{96} + C$   
 f)  $\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} - \frac{2}{7}\sqrt{\sin^7 x} + C$   
 g)  $2 \sin\left(\frac{u}{4}\right) + \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3u}{4}\right) + C$   
 h)  $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C$   
 i)  $\frac{\sin^6 2\theta}{12} - \frac{\sin^8 2\theta}{16} + C$

### R.8

- a)  $\frac{\tan^2 2\theta}{4} + \frac{\ln |\cos 2\theta|}{2} + C$   
 b)  $\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$   
 c)  $\frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^3 x}{3} + C$   
 d)  $\frac{\sec^3 v}{3} - \sec v + C$   
 e)  $\frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{\sec x \tan x}{8} - \frac{\ln |\sec x + \tan x|}{8} + C$   
 f)  $\frac{\sec^5 5x}{25} - \frac{\sec^3 5x}{15} + C$

**R.9** Laissez à l'étudiant.

**R.10**

- a)  $\frac{\sec^5 3t}{15} + C$   
b)  $\frac{\tan^8 2x}{16} + \frac{\tan^6 2x}{12} + C$   
c)  $3 \cos\left(-\frac{x}{6}\right) - \frac{3}{7} \cos\left(\frac{7x}{6}\right) + C$   
d)  $\frac{-\cot^5 \theta}{5} + C$   
e)  $2\sqrt{\sin x} - \frac{2\sqrt{\sin^5 x}}{5} + C$   
f)  $-\cos x + \cos^3 x - \frac{3\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$   
g)  $\frac{1}{6} \sec^5 x \tan x + \frac{5}{24} \sec^3 x \tan x + \frac{5}{16} \sec x \tan x + \frac{5}{16} \ln |\sec x + \tan x| + C$   
h)  $\frac{17x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$

**R.11**

- a)  $x = 2 \sin \theta$  et  $\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos \theta$   
b)  $x = 3 \tan \theta$  et  $\sqrt{x^2 + 9} = 3 \sec \theta$   
c)  $x = 4 \sec \theta$  et  $\sqrt{x^2 - 16} = 4 \tan \theta$   
d)  $x = \sqrt{\frac{2}{3}} \tan \theta$  et  $\sqrt{3x^2 + 2} = \sqrt{2} \sec \theta$

**R.12**

- a)  $-\frac{1}{15} \sqrt{(1 - x^2)^3(3x^2 + 2)} + C$   
b)  $\arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + C$   
c)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$   
d)  $\frac{(\sqrt{9 - x^2})^3}{3} - 9\sqrt{9 - x^2} + C$   
e)  $\frac{7x}{16\sqrt{16 - x^2}} + C$   
f)  $3 \ln \left| \frac{6 - \sqrt{36 - x^2}}{x} \right| + \frac{\sqrt{36 - x^2}}{2} + C$

**R.13**

- a)  $\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 16} + x}{4} \right| + C$   
b)  $\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \right| + C$   
c)  $\frac{x}{36\sqrt{36 + x^2}} + C$   
d)  $\frac{x\sqrt{4x^2 + 9}}{2} + \frac{9}{4} \ln \left| \sqrt{4x^2 + 9} + 2x \right| + C$

- e)  $\frac{1}{81} \left[ \ln \left| \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} \right| - \frac{x^2}{2(9 + x^2)} \right] + C$   
f)  $\frac{-(9x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} + C$

**R.14**

- a)  $\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcsec} x + C$   
b)  $\frac{x\sqrt{9x^2 - 1}}{18} + \frac{1}{54} \ln \left| 3x + \sqrt{9x^2 - 1} \right| + C$   
c)  $3 \ln \left| 3x + \sqrt{9x^2 - 1} \right| - \frac{\sqrt{9x^2 - 1}}{x} + C$   
d)  $\frac{\sqrt{5x^2 - 3}}{3x} + C$   
e)  $\frac{2x\sqrt{4x^2 - 1} - \ln \left| 2x + \sqrt{4x^2 - 1} \right|}{8} + C$   
f)  $8 \left( \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{2x} - \frac{(4x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{3(2x)^3} \right) + C$

**R.15**

- a)  $-\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$   
b)  $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$   
c)  $\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{\sqrt{a^2 + x^2} + a} \right) + C$   
d)  $\frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C$   
e)  $\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{a^2(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

**R.16**

- a)  $(x - 2)^2 + 5$   
b)  $(x + 3)^2 - 7$   
c)  $(3x - 5)^2 + 2$   
d)  $-(2x - 3)^2 + 12$

**R.17**

- a)  $\frac{x + 1}{4\sqrt{3 - x^2 - 2x}} + C$   
b)  $\frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{4x^2 + 12x + 25} + 2x + 3 \right| + C$   
c)  $\sqrt{x^2 - 6x} + 3 \ln \left| x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x} \right| + C$   
d)  $\frac{3}{2} \arctan(x - 1) + \frac{x - 3}{2(x^2 - 2x + 2)} + C$

**R.18**

- a)  $\frac{-\sqrt{4 - 9x^2}}{4x} + C$   
b)  $\frac{-\sqrt{9 + x^2}}{2x^2} + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{9 + x^2} - 3}{x} \right| + C$

- c)  $18 \arcsin\left(\frac{x}{6}\right) - \frac{x\sqrt{36-x^2}}{2} + C$   
d)  $\frac{(2x-3)\sqrt{4x^2-12x+18}}{4} + \frac{9}{4} \ln \left| \frac{(2x-3) + \sqrt{4x^2-12x+18}}{3} \right| + C$   
e)  $-\frac{4}{3} \sqrt{1-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+2) + C$   
f)  $\frac{\sin x \sqrt{\sin^2 x + 4}}{2} + 2 \ln(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 4}) + C$

**R.19**

- a)  $\frac{2}{x+1} - \frac{5}{x-2}$   
b)  $\frac{-3}{x-3} + \frac{4}{x+2}$   
c)  $\frac{4}{x+5} + \frac{1}{x^2+2}$   
d)  $\frac{2x-5}{x^2+1} + \frac{1-3x}{x^2+2}$   
e)  $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{5}{(x+1)^3}$   
f)  $\frac{x+2}{x^2+1} + \frac{3x-1}{(x^2+1)^2}$

**R.20**

- a)  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$   
b)  $5 \ln|x-2| + 3 \ln|x+3| + C$   
c)  $\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$   
d)  $3x + 4 \ln|x-2| + 2 \ln|x+1| + C$   
e)  $\ln|x| - 2 \ln|x+1| + 2 \ln|x-1| + C$   
f)  $\ln|x| + \frac{3}{(2x+3)^2} + C$   
g)  $3 \ln|x-2| + 4 \ln|x+2| - \ln|x-1| + 2 \ln|x+1| + C$   
h)  $\arctan x + \frac{1}{2} \ln|x^2+2| + C$   
i)  $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 4 \ln|x| - \frac{4}{x} + 3 \ln|x+1| + C$

**R.21**

- a)  $3 \ln|x| + 2 \ln(x^2+1) - 5 \arctan x + C$   
b)  $-\frac{4}{x} - \ln|x^2-x+5| + C$   
c)  $x^4 + \frac{7}{4} \ln(2x^2+5) + C$   
d)  $\ln|x| + \frac{3}{x^2+2} - \frac{1}{4(x^2+2)^2} + C$   
e)  $-\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2+3x+5} + C$   
f)  $4 \ln|x-1| + \ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$   
g)  $2 \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan x + \frac{3}{2(x^2+1)} + C$

**R.22**

- a)  $\frac{\sin^3 x}{3} + \sin x + C$   
b)  $e^{\arctan x} + C$   
c)  $-\frac{e^{-x^3}}{3}(x^3+1) + C$   
d)  $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$   
e)  $2 \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2} + C$   
f)  $\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} + 2 \sin x - \frac{\sin x \cos x}{2} - 2x \cos x + C$   
g)  $x \ln(x^2-1) - \sqrt{x^2-1} + C$   
h)  $3x + \frac{23 \ln|x-4|}{3} - \frac{5 \ln|x+2|}{3} + C$   
i)  $\ln|x^2| - \arctan(x^2) + C$   
j)  $-\frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C$   
k)  $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \arcsin \frac{x}{2} + C$   
l)  $\frac{\ln|9x^2+6x+5|}{18} + \frac{\arctan\left(\frac{3x+1}{2}\right)}{9} + C$   
m)  $2e^{\sqrt{x}}(x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-6) + C$   
n)  $6 - \frac{3\pi}{2}$   
o)  $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C$   
p)  $\frac{2}{15}$   
q)  $-\frac{1}{4} \cot x \csc^3 x - \frac{3}{8} \csc x \cot x - \frac{3}{8} \ln|\csc x - \cot x| + C$   
r)  $\sqrt[4]{3} - 1$