3 Applications de l'intégrale définie et intégrales impropres

3.1 Volumes de solides de révolution (disques)

Q.1

Calculer, à l'aide de la méthode des disques, le volume du solide de révolution engendré par un rotation autour de l'axe spécifié des régions délimitées par les courbes données.

a) $y = 2 - \frac{1}{2}x$, $y = 0$, $x = 1$ et $x = 2$ autour de l'axe des x.

b) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$ et $x = 5$ autour de l'axe des x.

c) $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$ autour de l'axe des x.

d) $x = 2\sqrt{y}$, $x = 0$ et $y = 9$ autour de l'axe des y.

e) $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 2$ et $x = 0$ autour de l'axe des y.

f) $y = x^2$ et $x = y^2$ autour de la droite $y = 1$.

g) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ et $x = 3$ autour de l'axe des x.

h) $y = x^2$, $y = 9$ et $x \geq 0$ autour de l'axe des y.

i) $y = 1 - x^2$ et $y = -3$ autour de $y = -3$.

j) $x = y^2 - 10$ et $x = -1$ autour de $x = -1$.

k) $y = xe^x$, $y = 0$ et $x = 1$ autour de l'axe des x

Q.2

Calculer le volume du cône obtenue en faisant tourner le segment de droite passant par l'origine et le point (a, b) autour de l'axe des y.

Q.3

Calculer le volume d'un cône tronqué de petit rayon r, de grand rayon R et de hauteur h

Q.4

Calculer le volume d'une sphère de rayon r

Q.5

Déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région délimitée par les équations suivantes autour de l'axe de rotation donné. Représenter graphiquement les solides.

a) $y_1 = x^2$ et $y_2 = -x^2 + 6x$ autour de l'axe des x

b) $y_1 = x^2$ et $y_2 = -x^2 + 6x$ autour de l'axe des y

c) $y_1 = x$, $y_2 = 4x^2 + 3$, $x = 1$ et $x = 4$ autour de $x = 5$

d) $y_1 = x$ et $y_2 = x^2$ autour de $y = -1$

Q.6

Soit l'ellipse définie par l'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Déterminer le volume du solide obtenu en faisant tourner la partie de l'ellipse située en haut de l'axe des x autour de l'axe des x ;

3.2 Volumes de solides de révolution (tube)

Q.7

À l'aide de la méthode des tubes, calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des y des régions spécifiées.

a) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 1$.

b) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

c) $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

d) $y = 4x - x^2$, $y = x$

e) $y = x^2$, $y = 6x - 2x^2$

Q.8

À l'aide de la méthode des tubes, calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x des régions spécifiées.

a) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 2$.

b) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$, $x = 0$.

c) $x = 4y^2 - y^3$, $x = 0$.

d) $x = 1 + (y-2)^2$, $x = 2$

e) $x + y = 3$, $x = 4 - (y-1)^2$

Q.9

Déterminer, en utilisant la méthode du tube, le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région délimitée par les équations suivantes autour de l'axe de rotation donné. Représenter graphiquement les solides.

a) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ et $x = 3$ autour de l'axe des x

b) $y = x^2$, $y = 9$ et $x \geq 0$ autour de l'axe des y

c) $y = (x-1)^2$, $y = 0$, $x = 0$ et $x = 2$ autour de l'axe des y

Q.10

Soit l'ellipse définie par l'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Déterminer le volume du solide obtenu en faisant tourner la partie de l'ellipse située à la droite de l'axe des y autour de l'axe des y.

3.3 Longueur d'arc et aire de surface

Q.11

Soit la fonction constante $y = 1$.

a) Calculer la longueur du segment compris entre $x = 1$ et $x = 5$ normalement.

b) Calculer la longueur du segment compris entre $x = 1$ et $x = 5$ en utilisant l'intégrale qui permet de trouver la longueur d'une courbe

Q.12
Soit la droite $y = 2x + 1$.

a) Calculer la longueur du segment compris entre $x = 1$ et $x = 5$ en utilisant le théorème de Pythagore.

b) Calculer la longueur du segment compris entre $x = 1$ et $x = 5$ en utilisant l'intégrale qui permet de trouver la longueur d'une courbe

Q.13
Trouver la longueur des courbes suivante.

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour x compris entre -1 et 1.

b) $y = \sqrt{x^3}$ pour x compris entre 1 et 3.

c) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}$ pour x compris entre 1 et 2.

d) $y = \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{1}{4x^2}$ pour x compris entre 1 et 2.

e) $y = \ln(\cos x)$ pour x compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{3}$.

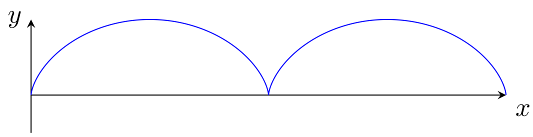
f) $y = \ln(\sec x)$ pour x compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$.

g) $y = \ln x$ pour x compris entre $\sqrt{3}$ et $\sqrt{8}$.

h) $y = e^x$ pour x compris entre 0 et 1.

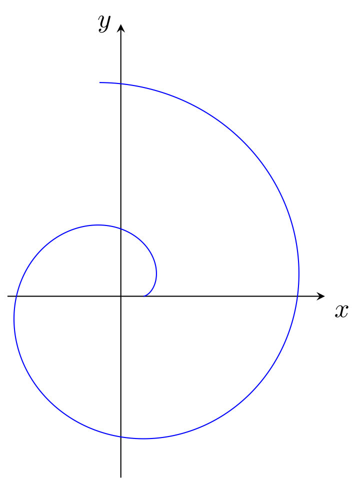
Q.14
Trouver la longueur de la cycloïde décrites à l'aide d'équations paramétriques suivante.

$$x = 3(t - \sin t),\ y = 3(1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 4\pi.$$



Q.15
Trouver la longueur de la développante du cercle décrites à l'aide d'équations paramétriques suivante.

$$x = 2(\cos t + t\sin t),\ y = 2(\sin t - t\cos t),\ 0 \leq t \leq 3\pi.$$



Q.16
Calculer l'aire du cône obtenue en faisant tourner la droite $y = 2x$ pour $0 \leq x \leq 2$ autour de

a) l'axe des x

b) l'axe des y

Q.17
Calculer l'aire du tore obtenue en faisant tourner le cercle $y^2 + (x-4)^2 = 2^2$ autour de l'axe des y.

Q.18
Calculer l'aire latérale des surfaces obtenues en faisant tourner autour de l'axe des x les régions suivantes.

a) $y = x^3$, $0 \leq x \leq 2$

b) $y = \sqrt{1 + 4x}$, $1 \leq x \leq 5$

c) $y = \sqrt{1 + e^x}$, $0 \leq x \leq 1$

d) $y = \sin \pi x$, $0 \leq x \leq 1$

3.4 Intégrales impropres

Q.19
Parmi les intégrales suivantes, trouver les intégrales impropres et exprimer celles-ci à l'aide de limites.

a) $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x-3}\,dx$

b) $\displaystyle\int_4^5 \frac{1}{y-3}\,dy$

c) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{v-3}\,dv$

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \tan\theta\,d\theta$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^1 \arctan u\,du$

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$

Q.20
Calculer, si c'est possible, les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x-8}}\,dx$

Q.21
Calculer, si c'est possible, les intégrales suivantes et déterminer si elles sont convergentes (C) ou divergentes (D).

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{7}{y^2}\,dy$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{2x-4}{x^2-4x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{2}^{6} \frac{1}{\sqrt[5]{2u-7}}\,du$

e) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{4}{x^3}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin\theta\,d\theta$

g) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du$

Q.22
Calculer, si c'est possible, les intégrales suivantes et déterminer si elles sont convergentes (C) ou divergentes (D).

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du$

e) $\displaystyle\int_{0}^{16} \frac{1}{(x-8)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{5-v}}\,dv$

g) $\displaystyle\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

h) $\displaystyle\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\arctan u}}{1+u^2}\,du$

j) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

k) $\displaystyle\int_{0}^{2} \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-2}\right)\,dx$

l) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} 8xe^{-2x}\,dx$

Q.23
On défini pour $n \in \mathbb{N}$, la factorielle $n!$ comme le produit de tous les entiers positif plus petit ou égale à n. C'est-à-dire

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k.$$

La fonction gamma est une fonction importante en mathématiques et est définie comme suit :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

a) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$.

b) En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

À première vue, ça peut sembler excessivement compliquer pour décrire la factorielle. L'avantage de la fonction gamma est qu'elle généralise la factorielle aux nombres réels.

3.5 Équation différentielle

Q.24
Vérifier que y est une solution de l'équation différentielle donnée.

a) $y = xe^{-x}$ si $xy' = y(1-x)$

b) $y = 3e^{2x}\cos 4x - 2e^{2x}\sin 4x$ si $y'' - 4y' + 20y = 0$

Q.25
Déterminer la solution particulière explicite des équations différentielles suivantes.

a) $\dfrac{dx}{dt} = -9{,}8t + 12$ et $x = 10$ lorsque $t = 0$

b) $y' = 2xy^2$ et la courbe passe par $P(-3;4)$

c) $\dfrac{dv}{dt} = \sqrt{vt}$, où $v > 0$, $t > 0$ et la courbe passe par $P(4;9)$

d) $\dfrac{dQ}{dt} = -5Q$, où $Q > 0$ et $Q = 22$ lorsque $t = 0$

Q.26
Un automobiliste roulant à 54 km/h freine. Si sa décélération est de 2 m/s^2,

a) déterminer la fonction v donnant la vitesse de l'automobile en fonction du temps ;

b) déterminer la fonction x donnant la distance parcourue par l'automobile en fonction du temps ;

c) calculer la distance d parcourue entre le moment où l'automobiliste freine et l'instant précis où l'automobile s'immobilise.

Q.27
Le conducteur d'un train roulant à une vitesse de 90 km/h freine. La décélération du train en fonction du temps est donnée par

$$a = \frac{-\,1296}{(0{,}1t+12)^3}\ \mathrm{m/s^2}$$

a) Déterminer le temps qu'il prendra pour s'immobiliser.

b) Quelle distance aura-t-il franchie ?

Q.28
Soit un capital de 5000 $ investi à un taux d'intérêt de 3% composé annuellement.

a) Déterminer la fonction A donnant le capital en fonction du nombre t d'années écoulées.

b) Déterminer le capital A après 5 ans.

c) Déterminer le temps nécessaire pour que le capital initial double.

Q.29

En 2000, la population d'une ville était approximativement de 60 000 habitants. Un démographe estime que la population P de cette ville augmentera proportionnellement à la population présente à un taux continu de 1,2 % par année, pour les 25 prochaines années. Cette situation se traduit par

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}012\ P$$

Attention au taux continu car il est composé continuellement et non une fois par année. Ainsi, on remarque qu'après un an, la population n'a pas augmenté de 1,2 %, mais un peu plus.

a) Exprimer la solution particulière de cette équation différentielle sous deux formes.

b) Déterminer la population de cette ville en l'an 2015 selon cette projection.

c) Déterminer en quelle année la population sera de 80 000 habitants selon cette projection.

Q.30

Le carbone-14, utilisé pour déterminer l'âge des fossiles, est un élément radioactif dont la demi-vie est approximativement de 5600 ans. Sachant que le taux de désintégration de la masse Q est proportionnel à celle-ci,

a) déterminer l'équation différentielle correspondant à cette situation ;

b) exprimer la solution particulière de cette équation différentielle sous deux formes ;

c) déterminer la quantité restante de carbone-14 au bout de 10 000 ans.

d) Au bout de combien d'années 90% de la quantité initiale sera-t-elle désintégrée ?

Réponses aux exercices

R.1

a) $\dfrac{19\pi}{12}$
b) 8π
c) $\dfrac{94\pi}{3}$
d) 162π
e) $\dfrac{\pi(e^4-e^2)}{2}$
f) $\dfrac{11\pi}{30}$
g) $\dfrac{243\pi}{5}$
h) $\dfrac{81\pi}{2}$
i) $\dfrac{512\pi}{15}$
j) $\dfrac{1296\pi}{5}$
k) $\dfrac{(e^2-1)\pi}{4}$

R.2 $\dfrac{\pi a^2 b}{3}$

R.3 $\pi h\left(\dfrac{R^2}{3}-\dfrac{2rR}{3}+R-r+\dfrac{4r^2}{3}\right)$

R.4 $\dfrac{4\pi r^3}{3}$

R.5

a) 81π
b) 27π
c) 342π
d) $\dfrac{7\pi}{15}$

R.6 16π

R.7

a) $\dfrac{6\pi}{7}$
b) $\dfrac{62\pi}{5}$
c) $\pi-\dfrac{\pi}{e}$
d) $\dfrac{27\pi}{2}$
e) 8π

R.8

a) 8π
b) $\dfrac{447\pi}{7}$
c) $\dfrac{512\pi}{5}$
d) $\dfrac{16\pi}{3}$
e) $\dfrac{27\pi}{2}$

R.9

a) $\dfrac{243\pi}{5}$
b) $\dfrac{81\pi}{2}$
c) $\dfrac{4\pi}{3}$

R.10 24π

R.11

a) $5-1=4$
b) $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{1+0^2}\,dx = 5-1=4$

R.12

a) $\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}$
b) $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{1+2^2}\,dx = \sqrt{5}(5-1)=\sqrt{80}$

R.13

a) $e-\dfrac{1}{e}$
b) $\dfrac{\sqrt{31^3}-\sqrt{13^3}}{27}$
c) $\dfrac{59}{24}$
d) $\dfrac{33}{16}$
e) $\ln(2+\sqrt{3})$
f) $\ln(\sqrt{2}+1)$
g) $1+\dfrac{\ln\frac{3}{2}}{2}$
h) $\sqrt{1+e^2}+\ln\left(\dfrac{\sqrt{2+e^2}}{1+\sqrt{1+e^2}}\right)-\sqrt{2}-\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\right)$

R.14 48

R.15 $9\pi^2$

R.16

a) $8\pi\sqrt{5}$
b) $4\pi\sqrt{5}$

R.17 $32\pi^2$

R.18

a) $\dfrac{\pi(145^{\frac{3}{2}}-1)}{27}$
b) $\dfrac{98\pi}{3}$
c) $\pi(e+1)$
d) $2\sqrt{\pi^2+1}+\dfrac{2\ln\left(\pi+\sqrt{\pi^2+1}\right)}{\pi}$

R.19

a) $\displaystyle\lim_{s\to 3^+}\int_s^5 \frac{1}{x-3}\,dx$
b) pas une intégrale impropre
c) $\displaystyle\lim_{t\to 3^-}\int_0^t \frac{1}{v-3}\,dv+\lim_{s\to 3^+}\int_s^5 \frac{1}{v-3}\,dv$
d) $\displaystyle\lim_{s\to(-\frac{\pi}{2})^+}\int_s^0 \tan\theta\,d\theta$
e) $\displaystyle\lim_{N\to-\infty}\int_N^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
f) $\displaystyle\lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^t \frac{e^x}{e^x-1}\,dx+\lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$
g) pas une intégrale impropre
h) $\displaystyle\lim_{N\to-\infty}\int_N^{-1}\frac{1}{x}\,dx+\lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^t\frac{1}{x}\,dx+\lim_{s\to 0^+}\int_s^1\frac{1}{x}\,dx+\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{1}{x}\,dx$

R.20

a) ∞ b) 4 c) -6

R.21

a) ∞ ; D b) 0 ; C c) $\infty - \infty$; D

d) $\dfrac{-5\sqrt[5]{81}}{8} + \dfrac{5\sqrt[5]{625}}{8}$; C

e) 2 ; C

f) $\nexists$; D

g) $\dfrac{\pi}{4}$; C

R.22

a) ∞ ; D

b) 0 ; C

c) $\infty - \infty$; D

d) π ; C

e) 12 ; C

f) ∞ ; D

g) ∞ ; D

h) $\dfrac{1}{\ln 3}$; C

i) $e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}$; C

j) $2e - 2$; C

k) $\infty - \infty$; D

l) 2 ; C

R.23 Laissé à l'étudiant.

R.24 Laissé à l'étudiant

R.25

a) $x = -4{,}9t^2 + 12t + 10$

b) $y = \dfrac{-4}{4x^2 - 37}$

c) $v = \dfrac{\left(\sqrt{t^3} + 1\right)^2}{9}$

d) $Q = 22e^{-5t}$

R.26

a) $\dfrac{dv}{dt} = -2$

$\int dv = \int (-2)\, dt$

$v = -2t + C$

Puisque $v = 54$ km/h $= 15$ m/s lorsque $t = 0$,

alors $v = -2t + 15$

b) $x = -t^2 + 15t$

c) $t = 7{,}5$ s et $d = 56{,}25$ m

R.27

a) $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{-1296}{(0{,}1t + 12)^3}$

$\displaystyle\int dv = \int \frac{-1296}{(0{,}1t + 12)^3}\, dt$

$v = \dfrac{6480}{(0{,}1t + 12)^2} + C$

Puisque $v = 25$ m/s lorsque $t = 0$, alors

$v = \dfrac{6480}{(0{,}1t + 12)^2} - 20$

En posant $v = 0$, on obtient $t = 60$ s

b) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{6480}{(0{,}1t + 12)^2} - 20$

$\displaystyle\int dx = \int \left(\frac{6480}{(0{,}1t + 12)^2} - 20\right) dt$

$x = \dfrac{-64800}{0{,}1t + 12} - 20t + C$

dist $= x(60) - x(0) = 600$ m

R.28

a) $\dfrac{dA}{dt} = kA$

$\displaystyle\int \frac{1}{A}\, dA = \int k\, dt$

$\ln A = kt + C$

Puisque $A = 5000$ lorsque $t = 0$,

$\ln A = kt + \ln 5000$

Puisque $A = 5000 \cdot 1{,}03$ lorsque $t = 1$,

$\ln A = \ln 1{,}03\, t + \ln 5000$

$A = \left(e^{\ln 1{,}03}\right)^t \cdot e^{\ln 5000}$

$A = 5000(1{,}03)^t$

b) 5796,37 \$

c) 23,45 ans

R.29

a) $\displaystyle\int \frac{1}{P}\, dP = \int 0{,}012\, dt$

$\ln P = 0{,}012t + C$

Puisque $P = 60000$ lorsque $t = 0$,

$\ln P = 0{,}012t + \ln 60000$ ou $P = 60000e^{0{,}012t}$

b) 71 833 habitants

c) 2024

R.30

a) $\dfrac{dQ}{dt} = KQ$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{Q}\, dQ = \int K\, dt$

$\ln Q = Kt + C$

En posant $Q = Q_0$ lorsque $t = 0$,

$\ln Q = Kt + \ln Q_0$

Puisque $Q = \dfrac{Q_0}{2}$ lorsque $t = 5600$,

$\ln Q = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5600} t + \ln Q_0$ ou $Q = Q_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5600}}$

c) 0,29 Q_0

d) 18 603 ans