4 Suites et séries

4.1 Polynôme de Taylor

Q.1

Calculer le polynôme de Taylor de degré 5 autour de la valeur spécifiée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 5x^2 + 3x - 7$ autour de $x = 2$.

b) $f(x) = e^x$ autour de $x = 0$.

c) $f(x) = \cos x$ autour de $x = \pi$.

d) $f(x) = \ln x$ autour de $x = 1$.

e) $f(x) = \sqrt{x}$ autour de $x = 1$.

f) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ autour de $x = 8$.

Q.2

On ne peut pas trouver une primitive de la fonction $\sin(x^2)$ à l'aide des techniques vues en classe.

a) Calculer le polynôme de Taylor de degré 5 de $\sin(x)$ autour de $x = 0$.

b) Faites un changement de variable pour obtenir le polynôme de Taylor de degré 10 de $\sin(x^2)$

c) Utiliser ce résultat pour trouver une approximation de

$$\int_0^1 \sin(x^2)\, dx$$

Q.3

On ne peut pas trouver une primitive de la fonction $e^{-\frac{x^2}{2}}$ à l'aide des techniques vues en classe. L'intégrale

$$\int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

donne la probabilité d'être entre a et b, $P(a < X < b)$, si la probabilité suit une loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 1$; $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

a) Calculer le polynôme de Taylor de degré 4 de $e^{-\frac{x}{2}}$ autour de $x = 0$.

b) Faites un changement de variable pour obtenir le polynôme de Taylor de degré 8 de $e^{-\frac{x^2}{2}}$

c) Utiliser ce résultat pour trouver une approximation de

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

4.2 Suites

Q.4

Énumérer les cinq premiers termes des suites suivantes.

a) $\{2n-1\}_{n\geq 5}$

b) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

c) $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$

d) $\left\{\frac{1}{(n+1)!}\right\}$

e) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 4a_n - 2$

f) $a_1 = 6,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$

Q.5

Déterminer le terme général a_n de la suite $\{a_n\}$ dont les cinq premiers termes sont les suivants.

a) $\{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$

b) $\left\{1,\ -\frac{1}{3}, \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ...\right\}$

c) $\{1, 2, 6, 24, 120, ...\}$

Q.6

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ des suites suivantes et déterminer si elles divergent (D) ou convergent (C).

a) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$

b) $\left\{5 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}$

c) $\left\{\frac{3n^2-2n+1}{4-5n^2}\right\}$

d) $\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}\right\}$

e) $\left\{\frac{5n^3}{n^2+1}\right\}$

f) $\{\sin n\}$

g) $\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$

h) $\{ne^{-n}\}$

i) $\left\{e^{\frac{1}{n}}\right\}$

j) $\{n\ln n\}$

k) $\left\{\frac{n-1}{n!}\right\}$

l) $\left\{\frac{n!-1}{n!}\right\}$

m) $\{\cos n\pi\}$

n) $\left\{\cos\frac{\pi}{n}\right\}$

o) $\{1, 2, 3, 1, 2, 3, ...\}$

p) $\left\{\sqrt{n^2+7n} - n\right\}$

Q.7

Déterminer si les suites suivantes sont bornées, bornées supérieurement ou bornées inférieurement ; dans chaque cas, trouver la borne inférieure b et (ou) la borne supérieure B.

a) $\left\{1 + \frac{3}{n}\right\}$

b) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n\geq 3}$

c) $\{(-1)^n n^2\}$

d) $\{3-n\}_{n\geq 5}$

e) $\left\{e^{\frac{1}{n}}\right\}$

f) $\{\cos n\pi\}$

Q.8

Déterminer si les suites suivantes sont croissantes ; décroissantes ; ni croissantes ni décroissantes ; monotones.

a) $\left\{\dfrac{-1}{n+1}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$

d) $\left\{(2n-9)^2\right\}_{n\geq 4}$

e) $\{\sin n\pi\}$

f) $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$

Q.9

Répondre par vrai (V) ou par faux (F) et donner un contre-exemple lorsque c'est faux.

a) Toute suite bornée converge.

b) Toute suite convergente est bornée.

c) Toute suite croissante est bornée.

d) Toute suite croissante est bornée inférieurement.

e) Toute suite décroissante bornée converge.

f) Toute suite non bornée est divergente.

4.3 Séries infinies

Q.10

Pour chacune des séries suivantes, trouver une expression pour S_n et évaluer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$; déterminer si la suite $\{S_n\}$ converge ou diverge et donner, si c'est possible, la somme de la série.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{10}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k^2$

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j$

e) $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \dots$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

Q.11

Démontrer que les séries suivantes divergent en les exprimant en fonction de la série harmonique.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}$

b) $\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{200}+\dfrac{1}{300}+\dfrac{1}{400}+\dots$

Q.12

Déterminer si les séries suivantes sont des séries géométriques ; si oui donner la valeur de a et la valeur de r.

a) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\dots$

b) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{80}+\dfrac{1}{240}+\dots$

c) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{9\sqrt{3}}+\dfrac{1}{27}-\dots$

d) $\displaystyle\sum_{i=4}^{\infty}\frac{i}{10^i}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9}{10^n}$

f) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k+3}}{(-5)^k}$

Q.13

Pour chacune des séries géométriques suivantes, déterminer la valeur de a et la valeur de r, déterminer si elle converge ou diverge et donner, si c'est possible, la somme de la série.

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{3^j}{5^{j-1}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n$

c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^j$

d) $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^j$

e) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3}{(-2)^n}$

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-5)^k}{2^{k+3}}$

Q.14

Calculer la somme des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^k+\left(\frac{2}{3}\right)^k\right]$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^k}{5^k}\right)$

4.4 Séries à termes positifs

Q.15

Déterminer, à l'aide du critère du terme général, si les séries suivantes divergent ou si nous ne pouvons rien conclure sur la convergence ou la divergence de la série.

a) $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$

Q.16

Déterminer, à l'aide du critère de l'intégrale, si les séries suivantes convergent ou divergent.

a) $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty}\frac{7}{k-3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)^{\frac{3}{2}}}$

Q.17

Déterminer si les séries de Riemann suivantes convergent ou divergent.

a) $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + ...$

b) $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + ...$

Q.18

Déterminer, à l'aide du critère des polynômes, si les séries suivantes convergent ou divergent.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^5+1}{(n^2+1)^3}$

Q.19

Déterminer, à l'aide du critère de d'Alembert, si les séries suivantes convergent ou divergent. Dans le cas où le critère de d'Alembert ne nous permettrait pas de tirer une conclusion, utiliser un autre critère.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2n+3}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

Q.20

Déterminer, à l'aide du critère de Cauchy, si les séries suivantes convergent ou divergent. Dans le cas où le critère de Cauchy ne nous permettrait pas de tirer une conclusion, utiliser un autre critère.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$ b) $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{e^k}{k^3}$

Q.21

Déterminer, à l'aide du critère de comparaison, si les séries suivantes convergent ou divergent.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k+4}{5k^2-1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$

Q.22

Déterminer, en indiquant le critère utilisé, si les séries suivantes convergent (C) ou divergent (D).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+7}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+7}\right)^n$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{7^k}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7\sqrt{n}-1}$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$

h) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+5}$

i) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

j) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

k) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^k + 5^k}$

Q.23

Compléter le tableau suivant.

	Calculs à effectuer	Conclusion
Critère du terme général		
Série géométrique		
Critère de l'intégrale		
Série de Riemann		
Critère de comparaison		
Critère des polynômes		
Critère de d'Alembert		
Critère de Cauchy		

4.5 Séries alternées, convergence absolue et convergence conditionnelle

Q.24

Parmi les séries suivantes, déterminer celles qui sont

i) absolument convergentes ;

ii) convergentes ;

iii) conditionnellement convergentes.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(3n^2+4)}{n^2}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(3+k^2)}{k^3}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{3n+1}$

e) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + ...$

4.6 Séries de puissances

Q.25

Déterminer, en utilisant le critère généralisé de d'Alembert, l'intervalle I de convergence et le rayon r de convergence des séries de puissances suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k^2}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!(x+5)^k$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x+4)^k}{k!}$

Q.26

Déterminer, en utilisant le critère généralisé de Cauchy, l'intervalle I de convergence et le rayon r de convergence des séries de puissances suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-4)^k}{3^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3^k(x-5)^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k^k}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^k}{k^3}$

Q.27

Déterminer l'intervalle I de convergence et le rayon r de convergence des séries de puissances suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+5)^k}{2^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{3^k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

e) $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} (3x)^k$

f) $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{(3x)^{k-5}}{k}$

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k^3+2}$

h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^k}{k^2+1}$

4.7 Séries de Taylor et de Maclaurin

Q.28

Développer les fonctions suivantes en série de Maclaurin à partir de la définition et déterminer l'intervalle de convergence.

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \sin \pi x$

c) $f(x) = \cos 2x$

d) $f(x) = e^{3x}$

Q.29

Développer les fonctions suivantes en série de Taylor autour de la valeur donnée à partir de la définition et déterminer l'intervalle de convergence et le rayon de convergence.

a) $f(x) = \sin x$, autour de $x = \pi$

b) $f(x) = \sin x$, autour de $x = \frac{\pi}{2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, autour de $x = -1$

d) $f(x) = \cos x$, autour de $x = \pi$

e) $f(x) = \cos x$, autour de $x = \frac{\pi}{3}$

Q.30

Développer les fonctions suivantes en série de Maclaurin en utilisant un développement connu et déterminer l'intervalle de convergence.

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = \cos x^2$

c) $f(x) = x \sin x$

d) $f(x) = \sin 2x$

e) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

Réponses aux exercices

R.1

a) $P_{f,5,2} = 19 + 23(x-2) + \dfrac{10(x-2)^2}{2!}$

b) $P_{f,5,0} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!}$

c) $P_{f,5,\pi} = -1 + \dfrac{(x-\pi)^2}{2!} - \dfrac{(x-\pi)^4}{4!}$

d) $P_{f,5,0} = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \dfrac{(x-1)^4}{4} + \dfrac{(x-1)^5}{5}$

e) $P_{f,5,1} = 1 + \dfrac{(x-1)}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{4(2!)} + \dfrac{3(x-1)^3}{8(3!)} - \dfrac{15(x-1)^4}{16(4!)} + \dfrac{105(x-1)^5}{32(5!)}$

f) $P_{f,5,8} = 2 + \dfrac{(x-8)}{3(2^2)} - \dfrac{(x-8)^2}{3^2 2^4(2!)} + \dfrac{5(x-8)^3}{3^3 2^7(3!)} - \dfrac{40(x-8)^4}{3^4 2^{10}(4!)} + \dfrac{440(x-8)^5}{3^5 2^{13}(5!)}$

R.2

a) $P_{f,5,0} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

b) $P_{f,10,0} = x^2 - \dfrac{x^6}{3!} + \dfrac{x^{10}}{5!}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)\, dx = \frac{2867}{9240} \approx 0{,}31028$

R.3

a) $P_{f,4,0} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{48} + \dfrac{x^4}{384}$

b) $P_{f,8,0} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^6}{48} + \dfrac{x^8}{384}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx \approx 0{,}34135356$

R.4

a) $\{9, 11, 13, 15, 17, ...\}$

b) $\left\{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, ...\right\}$

c) $\left\{1, \dfrac{4}{5}, \dfrac{6}{10}, \dfrac{8}{17}, \dfrac{10}{26}, ...\right\}$

d) $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{24}, \dfrac{1}{120}, \dfrac{1}{720}, ...\right\}$

e) $\{1, 2, 6, 22\ ,86\ ...\}$

f) $\left\{6, 6, 3, 1, \dfrac{1}{4}\ \dfrac{1}{20}, ...\right\}$

R.5

a) n^2 b) $\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n-1}$ c) $n!$

R.6

a) 0 ; C
b) 5 ; C
c) $-\dfrac{3}{5}$; C
d) $\nexists$; D
e) ∞ ; D
f) $\nexists$; D
g) 0 ; C
h) 0 ; C
i) 1 ; C
j) ∞ ; D
k) 0 ; C
l) 1 ; C
m) $\nexists$; D
n) 1 ; C
o) $\nexists$; D
p) $\dfrac{7}{2}$; C

R.7

a) Bornée ; $b = 1$ et $B = 4$

b) Bornée inférieurement ; $b = \dfrac{10}{3}$

c) Non bornée inférieurement et non bornée supérieurement

d) Bornée supérieurement ; $B = -2$

e) Bornée ; $b = 1$ et $B = e$

f) Bornée ; $b = -1$ et $B = 1$

R.8

a) Croissante ; monotone

b) Ni croissante ni décroissante

c) Décroissante ; monotone

d) Croissante ; monotone

e) Ni croissante ni décroissante

f) Décroissante ; monotone

R.9

a) F ; $\{(-1)^n\}$
b) V
c) F ; $\{n\}$
d) V
e) V
f) V

R.10

	S_n	$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$	C ou D	Somme
a)	$\dfrac{n}{10}$	∞	D	∞
b)	$\dfrac{n}{n+1}$	1	C	1
c)	$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	∞	D	∞
d)	-1 si n impair 0 si n pair	$\nexists$	D	Non définie
e)	$\dfrac{3}{10}\dfrac{\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{\left(1-\frac{1}{10}\right)}$	$\dfrac{1}{3}$	C	$\dfrac{1}{3}$
f)	$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}$	$\dfrac{1}{2}$	C	$\dfrac{1}{2}$

R.11

a) $5\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 5(\infty) = \infty$

b) $\dfrac{1}{100}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{100}(\infty)=\infty$

R.12

a) Oui ; $a=1$, $r=\dfrac{1}{2}$

b) Non

c) Oui ; $a=\dfrac{1}{3}$, $r=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) Non

e) Oui ; $a=9$, $r=\dfrac{1}{10}$

f) Oui ; $a=\dfrac{32}{25}$, $r=-\dfrac{2}{5}$

R.13

	a	r	C ou D	Somme
a)	3	$\frac{3}{5}$	C	$\frac{15}{2}$
b)	1	-2	D	Non définie
c)	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	D	∞
d)	$-\frac{8}{27}$	$-\frac{2}{3}$	C	$-\frac{8}{45}$
e)	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{2}$	C	$\frac{1}{8}$
f)	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{2}$	D	Non définie

R.14

a) $\dfrac{5}{2}$ b) ∞ c) $\dfrac{11}{12}$

R.15

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)=1$; la série diverge.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2}=0$; nous ne pouvons rien conclure.

R.16

a) $\displaystyle\int_4^{\infty}\frac{7}{x-3}\,dx=\infty$, donc la série diverge.

b) $\displaystyle\int_3^{\infty}\frac{1}{(5x+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\frac{1}{10}$, donc la série converge.

R.17

a) D b) C

R.18

a) C b) D

R.19

a) C b) D c) D

R.20

a) C b) D

R.21

a) C b) D c) C

R.22

a) Polynômes ; C

b) D'Alembert ; C

c) Cauchy ; C

d) D'Alembert ou Géo ; C

e) Intégrale ; C

f) Comparaison ; D

g) Terme général ; D

h) Comparaison ; C

i) Intégrale ; C

j) Terme général ; D

k) Comparaison ; C

R.23 Laissé à l'étudiant.

R.24

a)
  i) abs. conv.
  ii) conv.
  iii) non condit. conv.

b)
  i) non abs. conv.
  ii) div.
  iii) non condit. conv.

c) i) non abs. conv.

ii) conv.

iii) condit. conv.

d) i) non abs. conv.

ii) conv.

iii) condit. conv.

e) i) non abs. conv.

ii) conv.

iii) condit. conv.

R.25

a) $I = \,]-2,2[\,$ et $r=2$

b) $I = [-1,1]$ et $r=1$

c) $x=-5$ et $r=0$

d) $I=\mathbb{R}$ et $r=\infty$

R.26

a) $I = \,]1,7[\,$ et $r=3$

b) $I = \,]\,\frac{14}{3}, \frac{16}{3}\,[\,$ et $r=\frac{1}{3}$

c) $I=\mathbb{R}$ et $r=\infty$

d) $I=[1,2]$ et $r=\frac{1}{2}$

R.27

a) $I = \,]-7, -3[\,$ et $r=2$

b) $I = \,]-2,4[\,$ et $r=3$

c) $I=\mathbb{R}$ et $r=\infty$

d) $I = [\,-1,1\,[\,$ et $r=1$

e) $I = \,]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\,[\,$ et $r=\frac{1}{3}$

f) $I = [\,-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\,[\,$ et $r=\frac{1}{3}$

g) $I=[0,2]$ et $r=1$

h) $I=[-1\,,1\,[\,$ et $r=1$

R.28

a) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...$ et $I=\mathbb{R}$

b) $\pi x-\frac{\pi^3}{3!}x^3+\frac{\pi^5}{5!}x^5-\frac{\pi^7}{7!}x^7+...+\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...$ et $I=\mathbb{R}$

c) $1-\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^4}{4!}x^4-\frac{2^6}{6!}x^6+...+\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+...$ et $I=\mathbb{R}$

d) $1+3x+\frac{3^2}{2!}x^2+\frac{3^3}{3!}x^3+...+\frac{3^n x^n}{n!}+...$ et $I=\mathbb{R}$

R.29

a) $-(x-\pi)+\frac{(x-\pi)^3}{3!}-\frac{(x-\pi)^5}{5!}+\frac{(x-\pi)^7}{7!}-...+(-1)^{n+1}\frac{(x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}+...$ et $I=\mathbb{R}$ et $r=\infty$

b) $1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!}+...+\frac{(-1)^n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}+...$ et $I=\mathbb{R}$ et $r=\infty$

c) $-1-(x+1)-(x+1)^2-(x+1)^3-...-(x+1)^n-...$ et $I=\,]-2,0\,[\,$ et $r=1$

d) $-1+\frac{(x-\pi)^2}{2!}-\frac{(x-\pi)^4}{4!}+\frac{(x-\pi)^6}{6!}-...+(-1)^{n+1}\frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}+...$ et $I=\mathbb{R}$ et $r=\infty$

e) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2!}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{3!}+\frac{1}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4}{4!}+...$ et $I=\mathbb{R}$ et $r=\infty$

R.30

a) $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+...$ et $I=\mathbb{R}$

b) $1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+...+\frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}+...$ et $I=\mathbb{R}$

c) $x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}-\frac{x^8}{7!}+...+\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}+...$ et $I=\mathbb{R}$

d) $2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\frac{(2x)^7}{7!}+...+\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}+...$ et $I=\mathbb{R}$

e) $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+...+\frac{x^n}{(n+1)!}+...$ et $I=\mathbb{R}\backslash\{0\}$