1.1 LES VECTEURS GÉOMÉTRIQUES

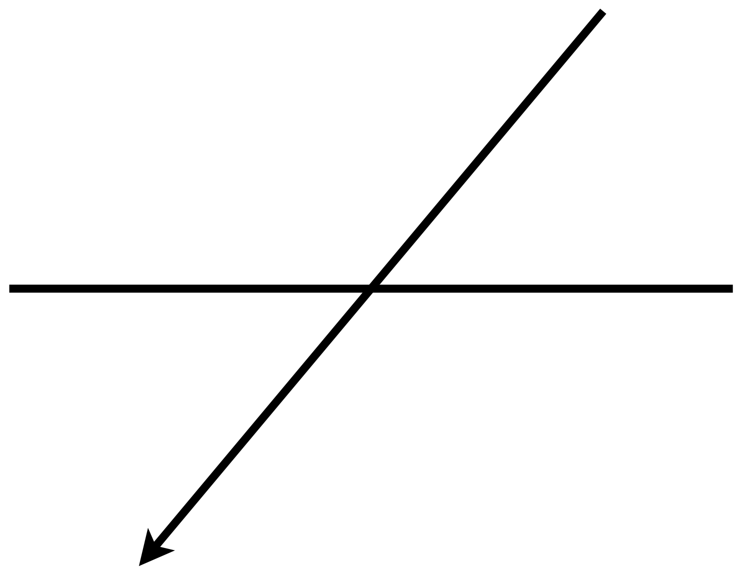
Cours 1

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ La définition d'un vecteur géométrique.
- ✓ Les propriétés des vecteurs géométriques.
- ✓ La définition d'un espace vectoriel.
- ✓ L'action des vecteurs sur un espace de points.

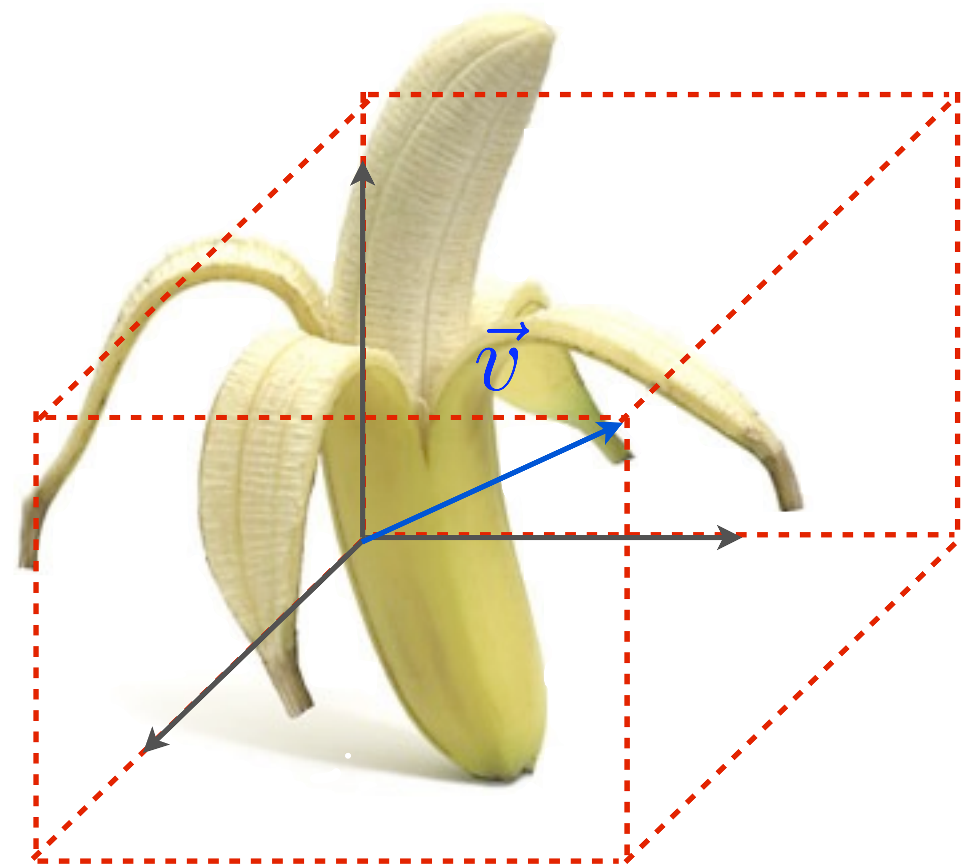
Définition: Un vecteur géométrique est

- Une longueur
- Une direction
- Un sens



Un vecteur géométrique n'est pas

- Fixé dans le plan
- Un nombre
- Seulement dans le plan
- Une banane



On utilise des lettres avec une flèche au-dessus pour noter les vecteurs.

$\vec{u}$ $\vec{v}$ $\vec{a}$

$\vec{r}$ $\vec{b}$ $\vec{Z}$

$\vec{t}$

$\vec{s}$

On peut définir une opération interne sur les vecteurs, qu'on nomme la somme de deux vecteurs.

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

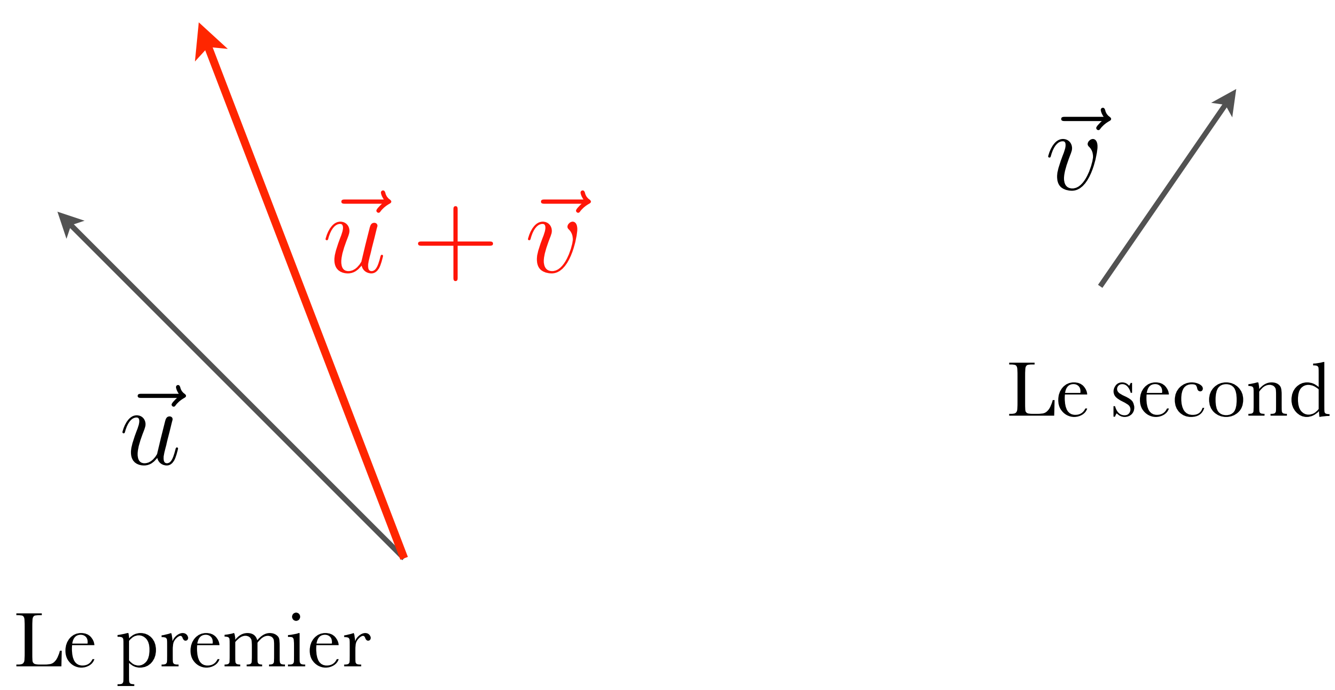
$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v}$$

Attention !

Ce n'est pas le même + qu'on connaît.

Somme de deux vecteurs

1. On prend deux vecteurs.
2. On fait coïncider la fin du premier avec le début du second.
3. La somme est le vecteur qui a le même point de départ que le premier et le même point d'arrivée que le second.



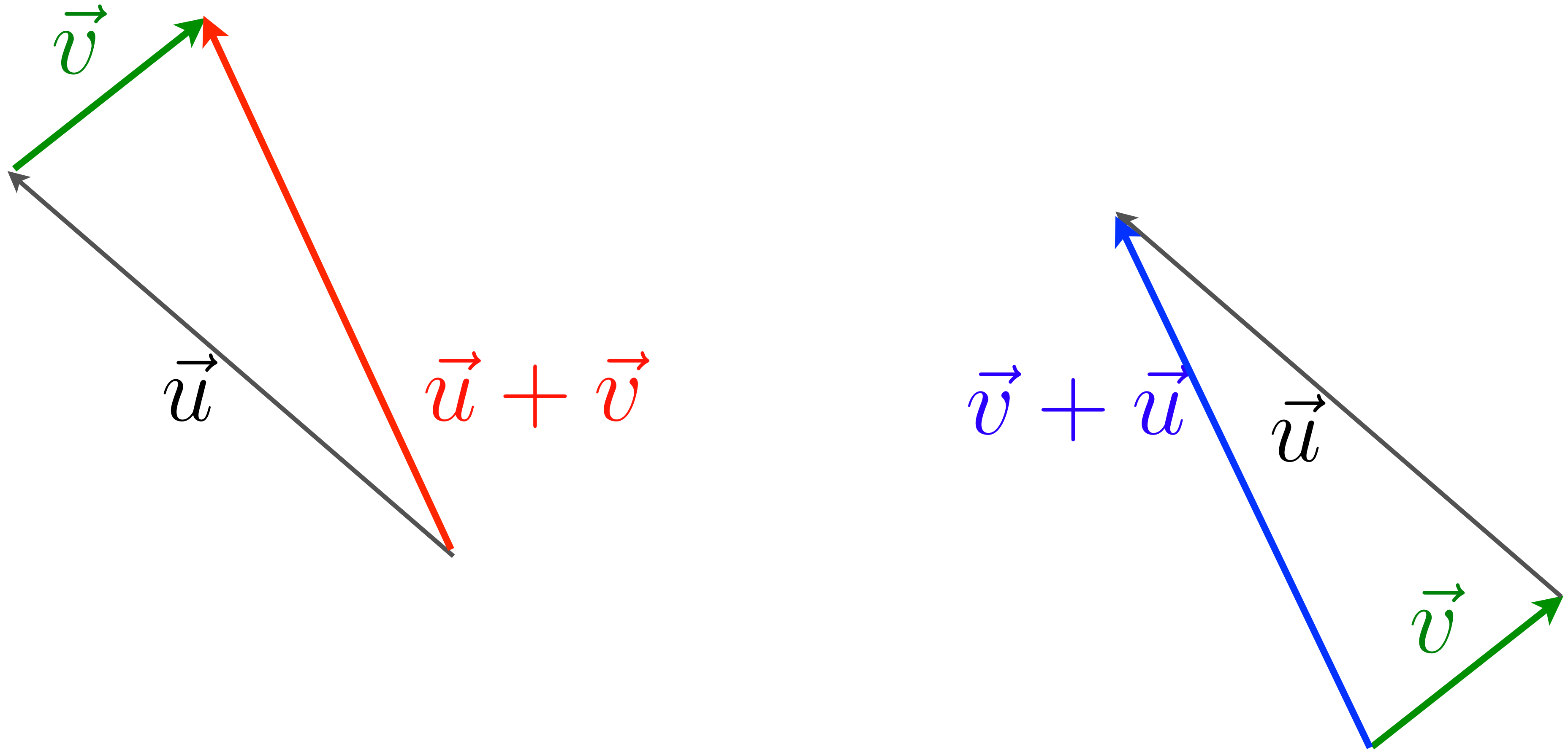
Géométriquement, la somme de vecteurs est assez simple à comprendre.

Par contre, manipuler les vecteurs en n’utilisant que la géométrie s’avère assez complexe.

C’est pourquoi nous allons explorer le comportement algébrique de cette somme.

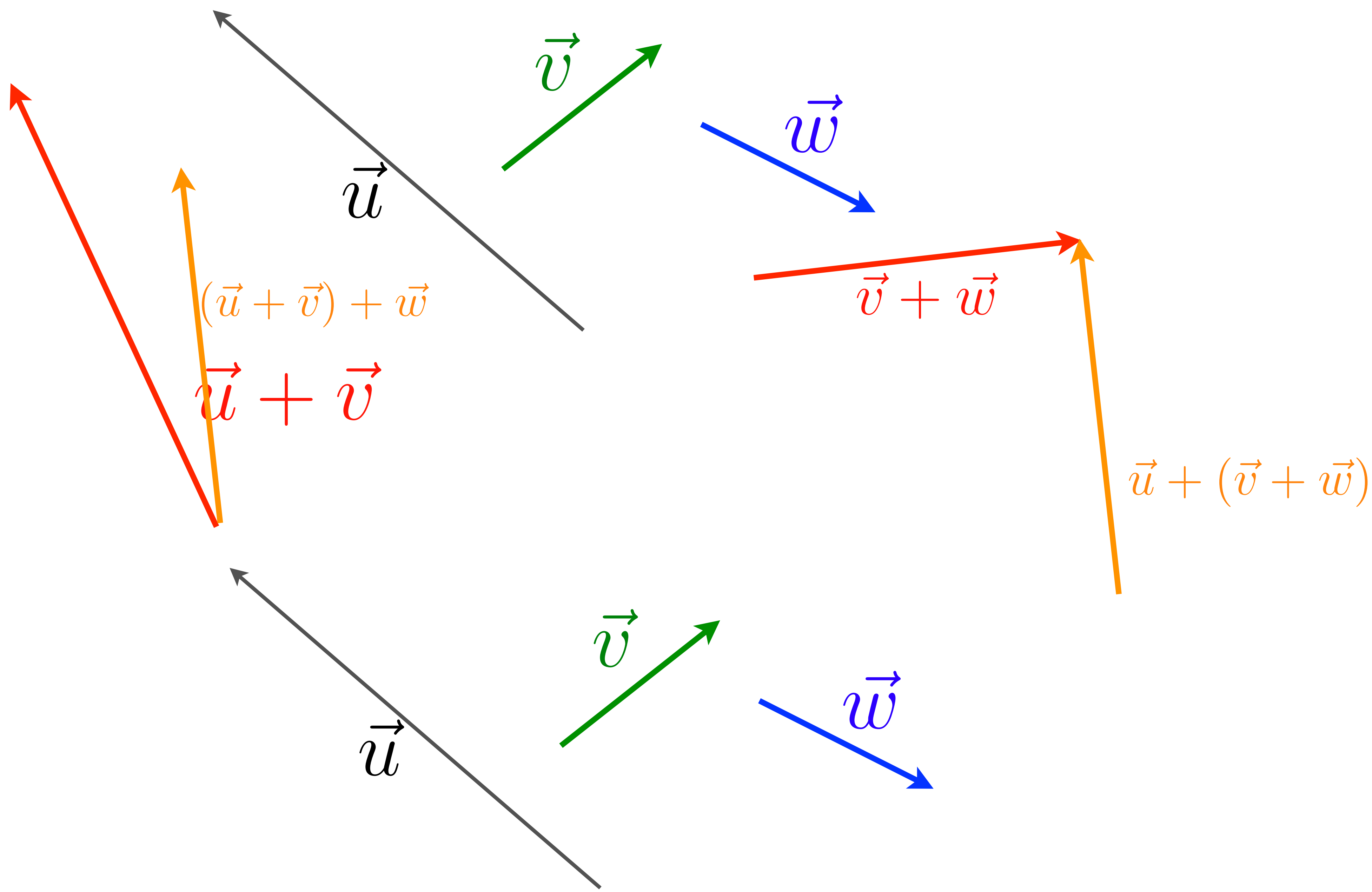
Propriétés de la somme

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



Propriétés de la somme

2. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$



Propriétés de la somme

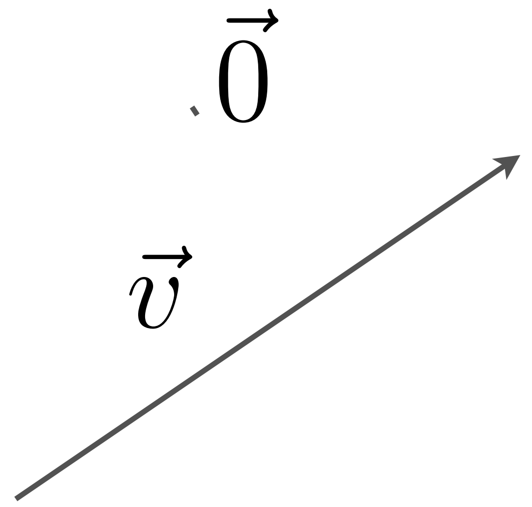
On peut définir un vecteur de longueur nulle qu'on nomme le vecteur nul et qu'on note:

$$\vec{0}$$

Remarque: Le vecteur nul n'a pas de direction.

Propriétés de la somme

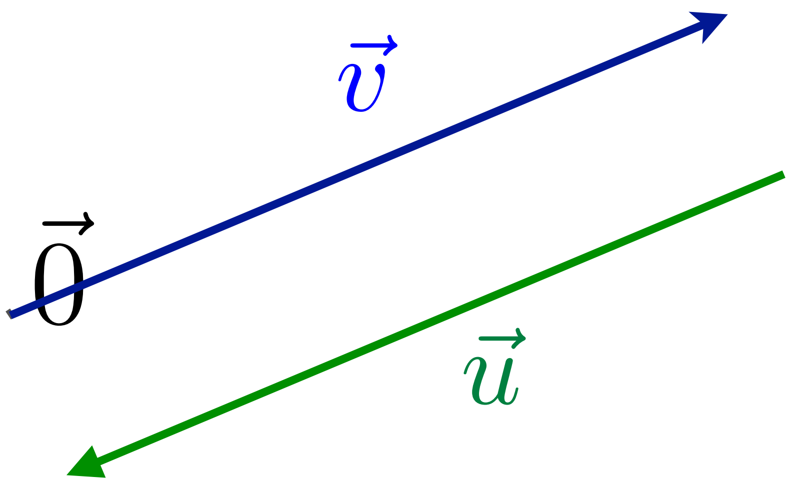
3. $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$



Propriétés de la somme

4. Pour chaque vecteur $\vec{v}$, il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que:

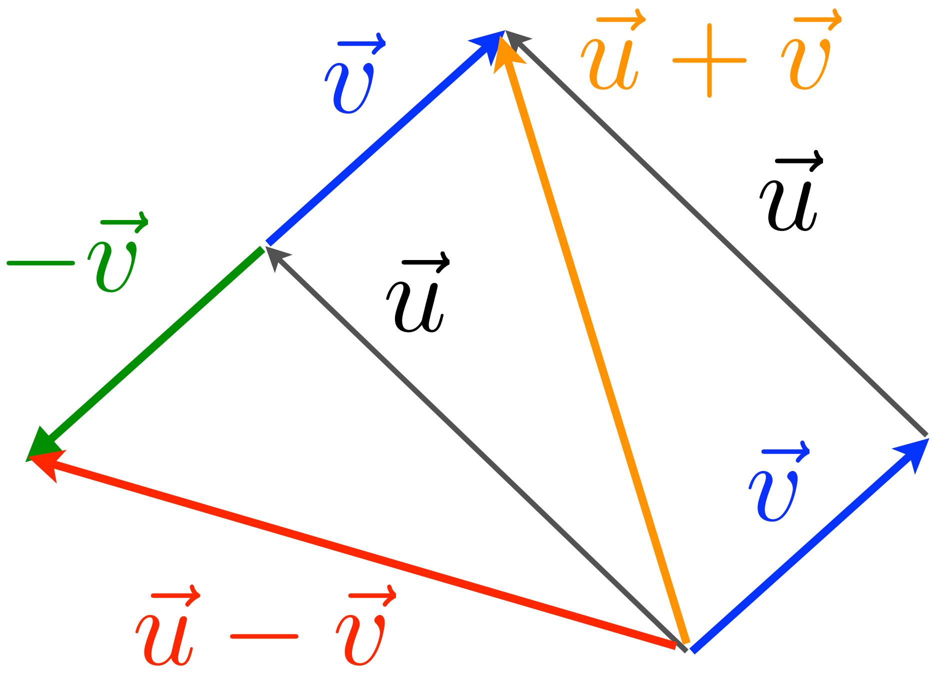
$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$$



On appelle $\vec{u}$ l'inverse de $\vec{v}$ et on le note $-\vec{v}$.

Soustraction de vecteurs

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



Propriétés de la somme

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ — Commutativité

2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$ — Associativité

3. $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ — Existence d'un neutre

4. Pour chaque vecteur $\vec{v}$, il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que: — Existence d'un inverse

$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$$

La longueur d’un vecteur est notée

$$||\vec{v}||$$

On peut définir une opération externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{V}$ qu'on nomme la multiplication par un scalaire.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ (a, \vec{v}) &\longmapsto a \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

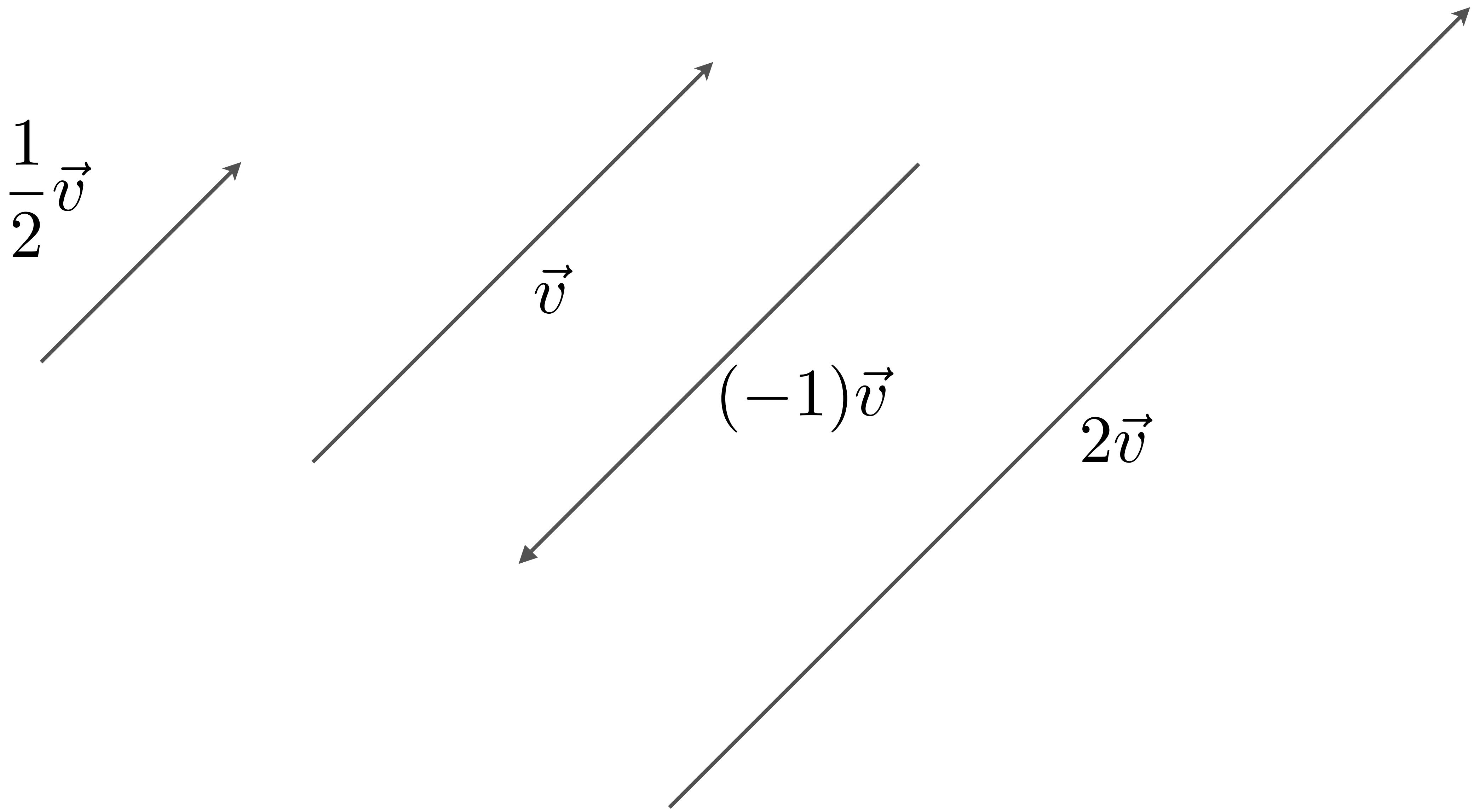
La multiplication par un scalaire a pour effet de multiplier la longueur d'un vecteur par le scalaire en question.

$$\|a \cdot \vec{v}\| = |a| \|\vec{v}\|$$

Cette opération ne change pas la direction du vecteur.

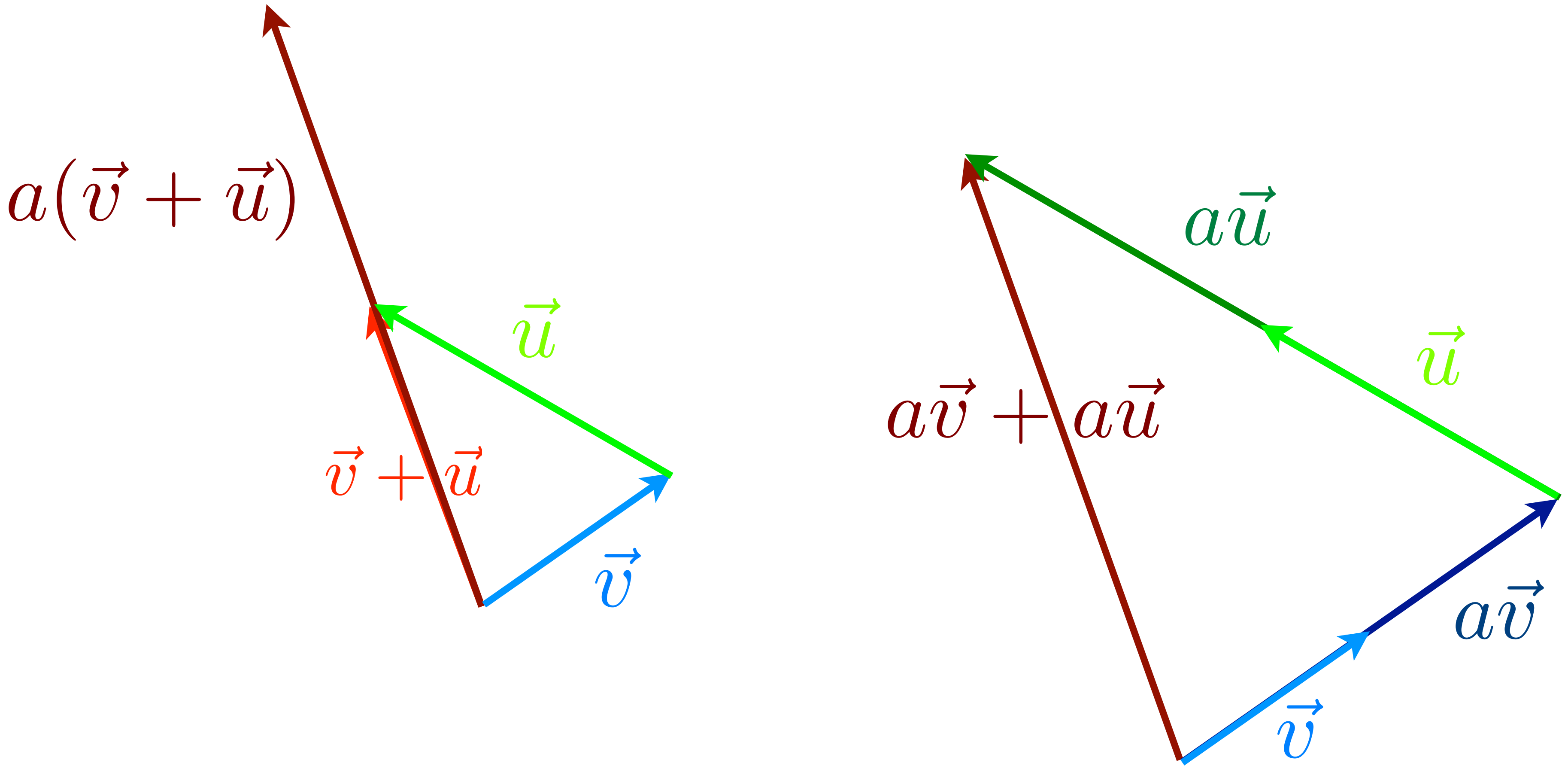
Si le scalaire est un nombre négatif, le sens est changé.

Exemple:



Propriétés de la multiplication par un scalaire

1. $a(\vec{v}+\vec{u}) = a\vec{v} + a\vec{u}$

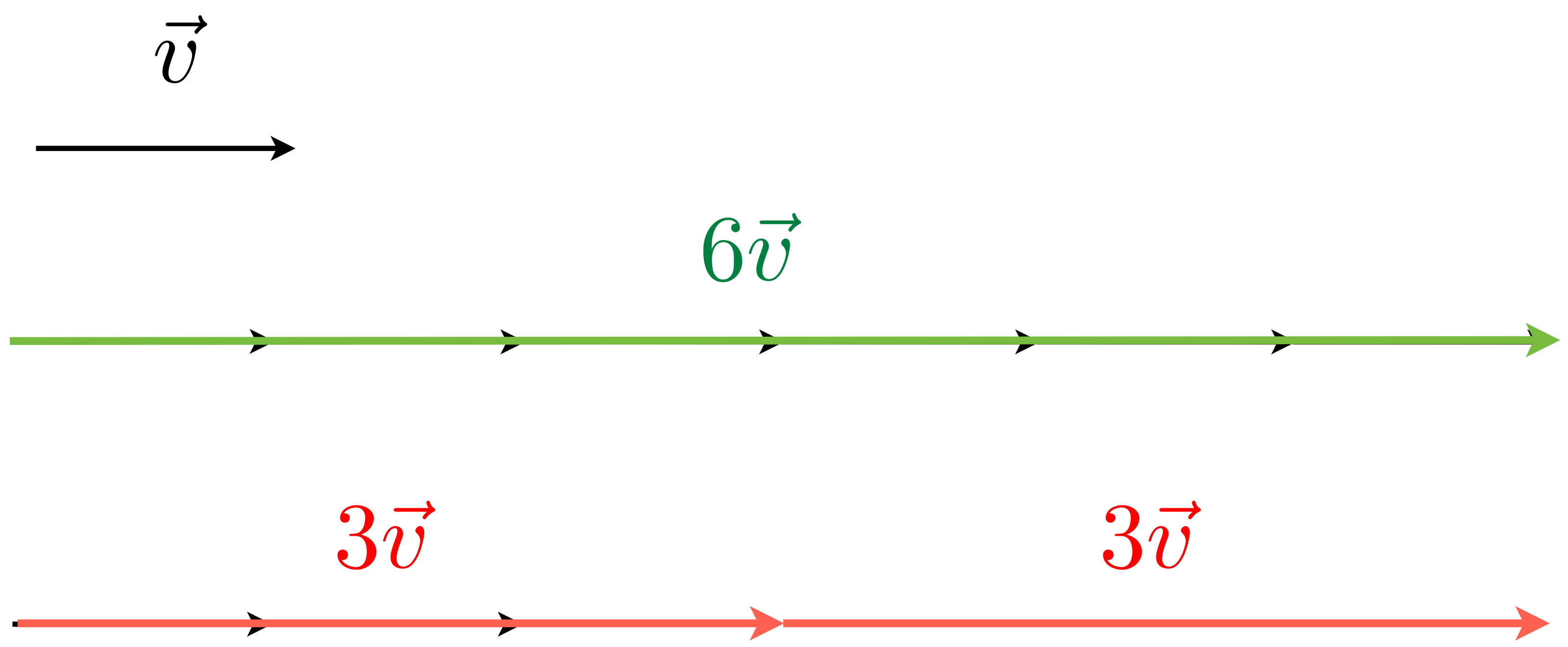


Triangles semblables

Propriétés de la multiplication par un scalaire

2. $(ab)\cdot\vec{v} = a\cdot(b\cdot\vec{v})$

Exemple: Si $a = 2$ et $b = 3$, on a $ab = 6$.



Pour démontrer ça, il suffit de démontrer que

$$\|(ab) \cdot \vec{v}\| = \|a \cdot (b \cdot \vec{v})\|$$

car ces deux vecteurs ont la même direction.

Par contre, on ne doit pas oublier que
a et *b* peuvent être négatifs.

On veut : $\|(ab)\cdot\vec{v}\| = \|a\cdot(b\cdot\vec{v})\|$

Par la définition de la multiplication par un scalaire

$$
\begin{aligned}
\|(ab)\cdot\vec{v}\| &= |(ab)|\ \|\vec{v}\| \\
&= |a||b|\ \|\vec{v}\| \\
&= |a|(|b|\ \|\vec{v}\|) \\
&= |a|\|b\cdot\vec{v}\| \\
&= \|a\cdot(b\cdot\vec{v})\|
\end{aligned}
$$

Par la définition de la multiplication par un scalaire

Si a et $b > 0$, alors le sens de

$$(ab) \cdot \vec{v} \quad \text{et de} \quad a \cdot (b \cdot \vec{v})$$

est le même que celui de $\vec{v}$; ils ont donc le même sens.

Si a et $b < 0$, alors le sens de

$$(ab) \cdot \vec{v} \quad \text{et de} \quad a \cdot (b \cdot \vec{v})$$

est le même que celui de $\vec{v}$; ils ont donc le même sens.

Si a et b sont de signe différent, alors le sens de

$$(ab) \cdot \vec{v} \quad \text{et de} \quad a \cdot (b \cdot \vec{v})$$

est l'inverse de celui de $\vec{v}$; ils ont donc le même sens.

Propriétés de la multiplication par un scalaire

3. $(a+b)\cdot\vec{v} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{v}$

Pour démontrer ça, il suffit de démontrer que

$$\|(a+b)\cdot\vec{v}\| = \|a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{v}\|$$

car ces deux vecteurs ont la même direction.

Par contre, on ne doit pas oublier que
a et b peuvent être négatifs.

La preuve est dans le document sur ma page web.

Propriétés de la multiplication par un scalaire

1. $a(\vec{v}+\vec{u}) = a\vec{v} + a\vec{u}$ Distributivité
2. $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$ Associativité
3. $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ Distributivité

En mathématique moderne, il est commun d'étudier les structures.

En gros, une structure est un genre de moule.

Une structure algébrique est la donnée d'un ou de plusieurs ensembles munis d'une ou de plusieurs opérations respectant un certain nombre de propriétés.

Espace vectoriel

Définition: Un espace vectoriel sur les réels est la donnée

1. d'un ensemble $\mathcal{V}$ dont les éléments sont nommés des vecteurs;
2. d'une opération interne sur $\mathcal{V}$ appelée la somme qui respecte les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \vec{v}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{v} \\ (\vec{v}+\vec{u})+\vec{w}=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{w}) \\ \vec{v}+\vec{0}=\vec{v} \\ \vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0} \end{cases}$$

3. d'une opération externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{V}$ appelée multiplication par un scalaire qui respecte les propriétés suivantes;

$$\begin{cases} a(b\vec{v})=(ab)\vec{v} \\ (a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v} \\ a(\vec{v}+\vec{u})=a\vec{v}+a\vec{u} \\ 1\vec{v}=\vec{v} \end{cases}$$

Remarque:

Il y a une distinction entre vecteur et vecteur géométrique.

Au sens large, un vecteur est un élément d'un ensemble sur lequel il y a une somme et une multiplication par un scalaire qui respectent les propriétés d'espace vectoriel.

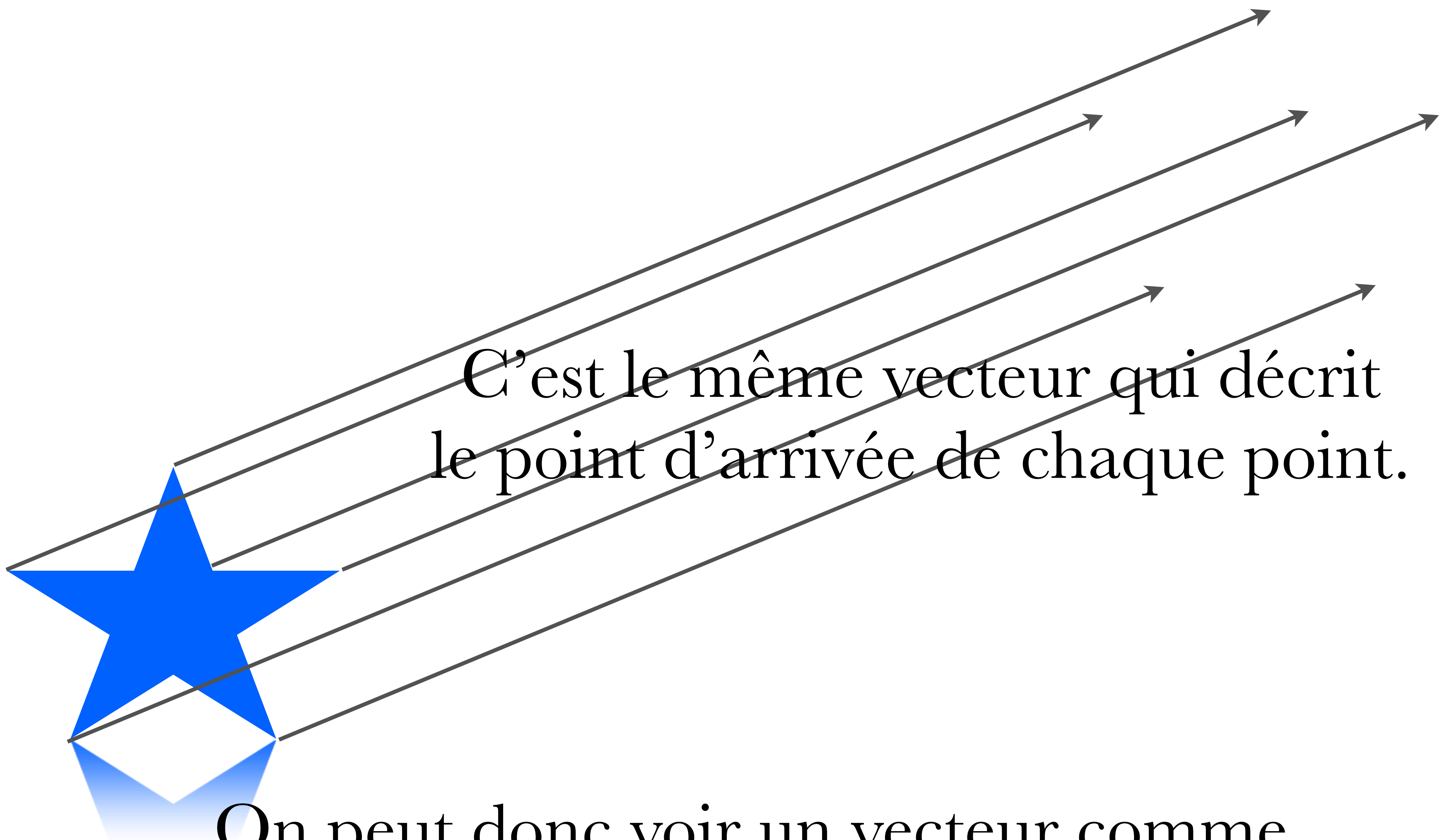
Un vecteur géométrique est ce que nous avons défini au début du cours (une flèche).

En fait, nous avons vérifié que les vecteurs géométriques forment un espace vectoriel.

Dans ce cours, les vecteurs géométriques vont servir principalement à faire de la géométrie.

Regardons comment les vecteurs peuvent interagir avec des points.

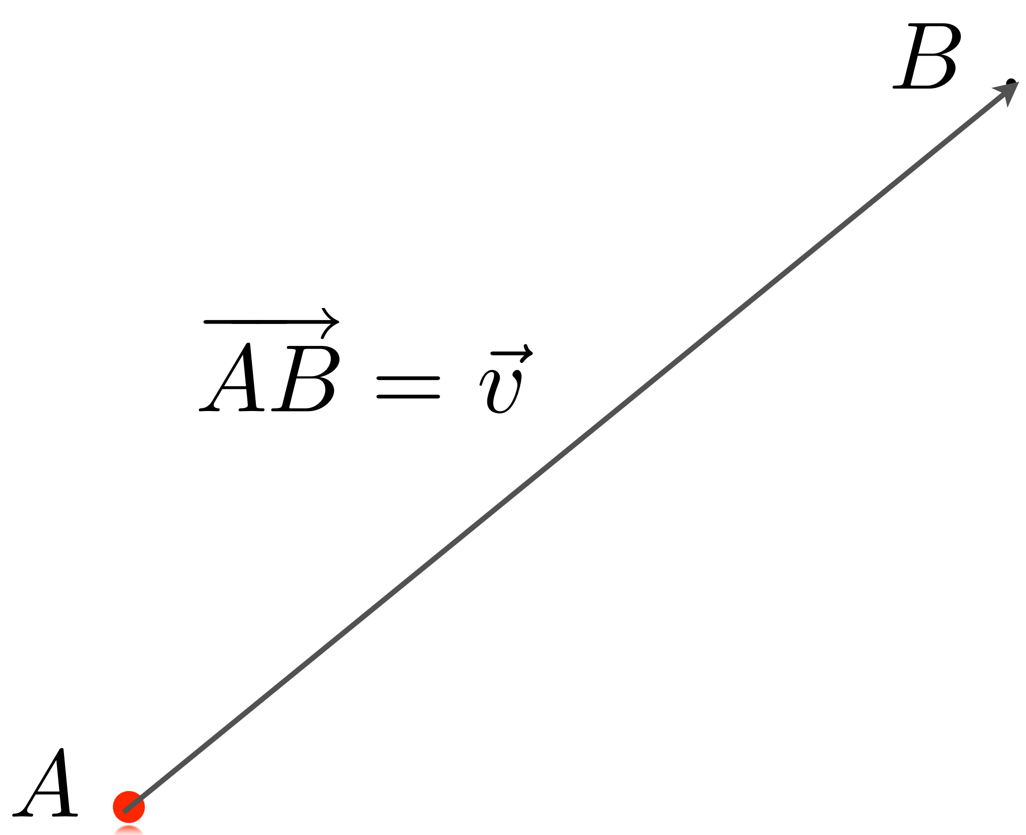
Translation



C’est le même vecteur qui décrit
le point d’arrivée de chaque point.

On peut donc voir un vecteur comme
une translation.

$$A + \vec{v} = B \iff \vec{v} = \overrightarrow{AB}$$



Prenons un point A,

et appliquons la translation définie par $\vec{v}$,

le point A arrive sur le point B.

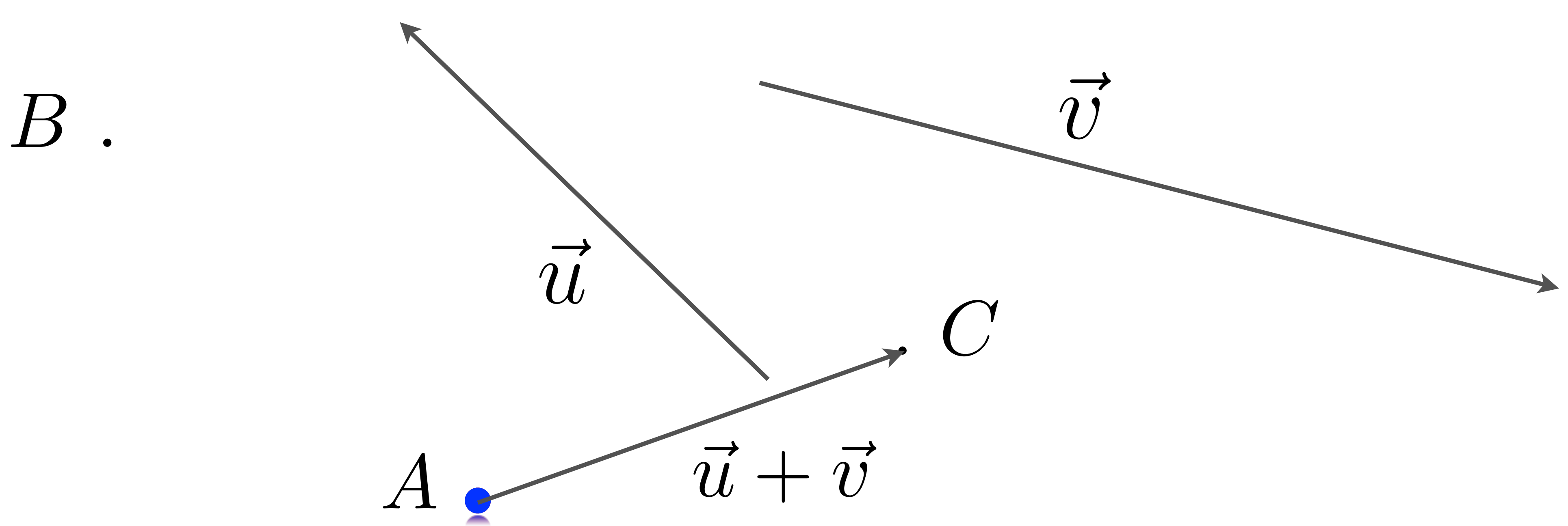
$$A + \vec{u} = B$$

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = B + \vec{v} = C \qquad\qquad A + (\vec{u} + \vec{v}) = C$$

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$ (règle de Chasles)

$$\overrightarrow{A{\color{red}B}} + \overrightarrow{{\color{red}B}C}$$



Espace affine

Définition: Un espace affine sur les réels est la donnée

1. d'un espace vectoriel sur les réels $\mathcal{V}$;
2. d'un ensemble $\mathcal{E}$ dont les éléments sont nommés des points;
3. d'une opération externe de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{E}$ appelée translation qui respecte les propriétés suivantes:

Pour tout point A et tout vecteur $\vec{v}$, il existe un unique point B tel que

$$A + \vec{v} = B$$

Pour tout triplet de points (A, B, C), on a

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Un espace affine est essentiellement un espace de points.

Un espace affine n'est pas un espace euclidien.

En fait, un espace euclidien est un espace affine où il y a une notion d'angle et une notion de distance.

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Ce qu'est un vecteur géométrique.
- ✓ La somme de vecteurs et ses propriétés.
- ✓ La multiplication par un scalaire et ses propriétés.
- ✓ La définition d'un espace vectoriel.
- ✓ L'action des vecteurs sur les points.

Devoir: p. 12, # 1 à 17