1.3 COORDONNÉES DES POINTS

cours 3

Au dernier cours, nous avons vus

- ✓ Les ensembles de vecteurs linéairement indépendants.
- ✓ Une base d'un espace vectoriel.
- ✓ La dimension d'un espace vectoriel.
- ✓ Les composantes d'un vecteur par rapport à une base ordonnée.

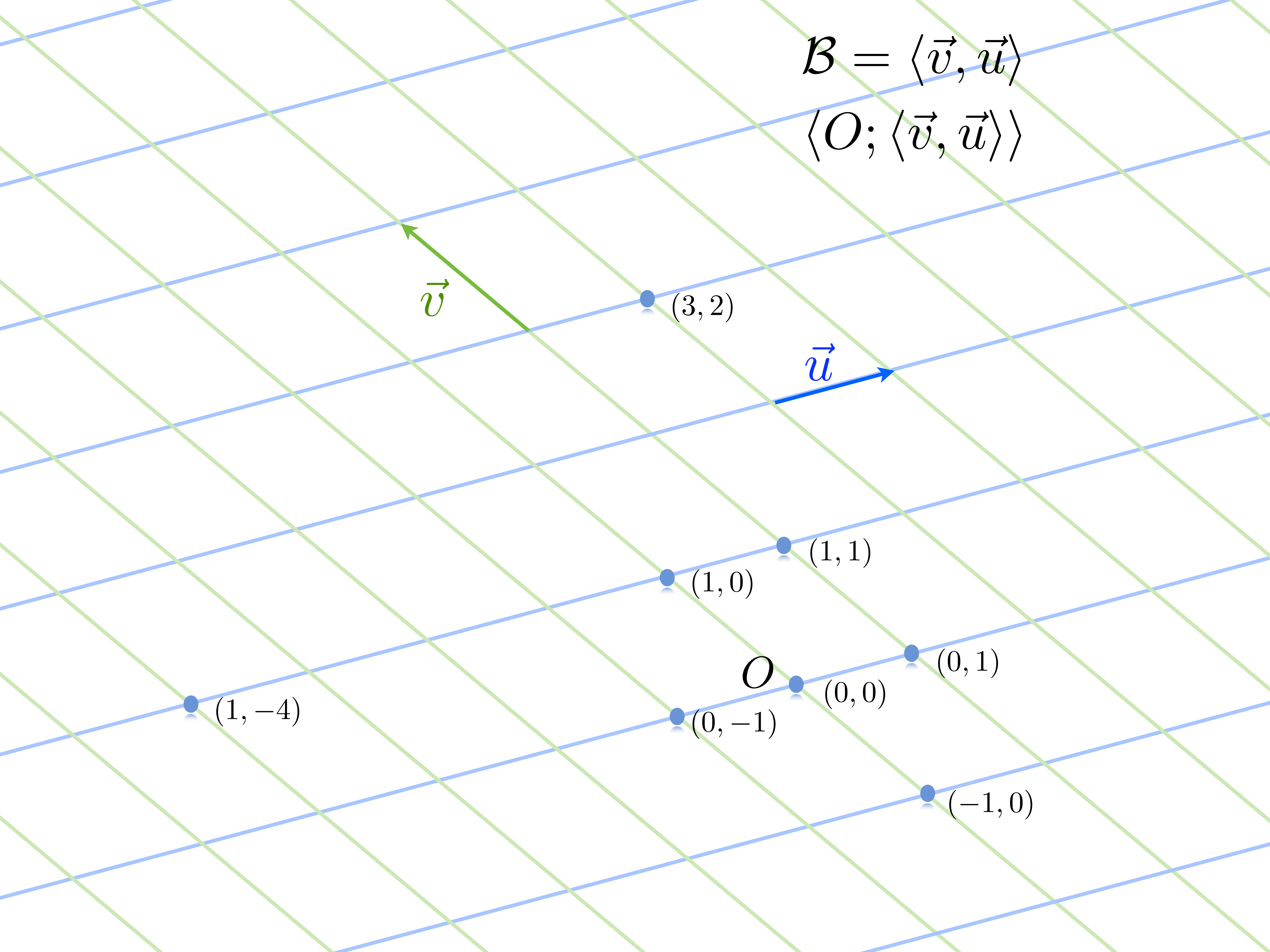
Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Comment localiser des points à l'aide d'un repère.
- ✓ Comment trouver le barycentre de plusieurs points.
- ✓ L'orientation d'une base.

Définition:

Un repère d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un couple $\langle O ; \mathcal{B} \rangle$ où O est un point de $\mathcal{E}$ appelé le point d'origine et $\mathcal{B}$ est une base ordonnée pour les vecteurs de $\mathcal{E}$.

Soit A, un point de $\mathcal{E}$, les coordonnées de A relatives au repère $\langle O ; \mathcal{B} \rangle$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ selon la base $\mathcal{B}$.



$\mathcal{B} = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
$\langle O; \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \rangle$
$\vec{v}$
$(3, 2)$
$\vec{u}$
$(1, 1)$
$(1, 0)$
O
$(0, 1)$
$(0, 0)$
$(1, -4)$
$(0, -1)$
$(-1, 0)$

Ici, on voit qu'il semble y avoir ambiguïté entre vecteur et point.

On aimerait mettre

Mais

$$\overrightarrow{OA} = (a, b) \qquad \neq \qquad (a, b) = A$$

Habituellement, le contexte fait en sorte qu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Soit $\mathcal{V}$, un espace vectoriel de dimension n pour lequel on a fixé une base ordonnée $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{V} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{R}^n$$

$$\vec{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \rightleftarrows (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

C'est pour cette raison qu'on identifie

La droite $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}$

Le plan $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^2$

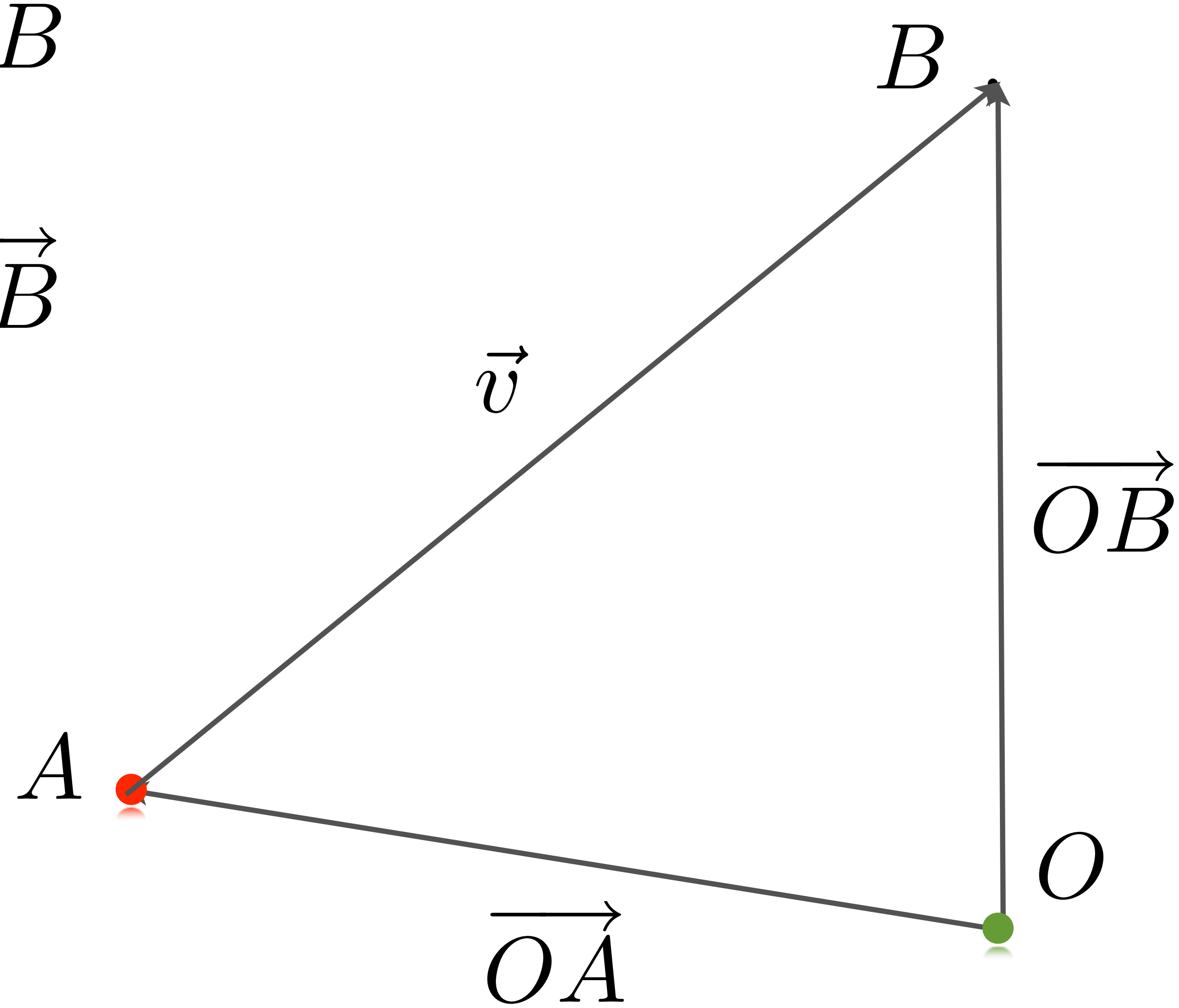
L'espace $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^3$

Opérations sur les coordonnées et les composantes

Si on connaît les composantes du point A et celles du vecteur $\vec{v}$, alors on peut trouver les composantes du point B comme suit:

$$A + \vec{v} = B$$

$$\overrightarrow{OA} + \vec{v} = \overrightarrow{OB}$$



On peut jouer avec cette dernière égalité pour trouver:

1) $$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OB} \boxed{- \vec{v}} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} \boxed{- \vec{v}}$$

2) $$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OB} \boxed{- \overrightarrow{OA}} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} \boxed{- \overrightarrow{OA}}$$

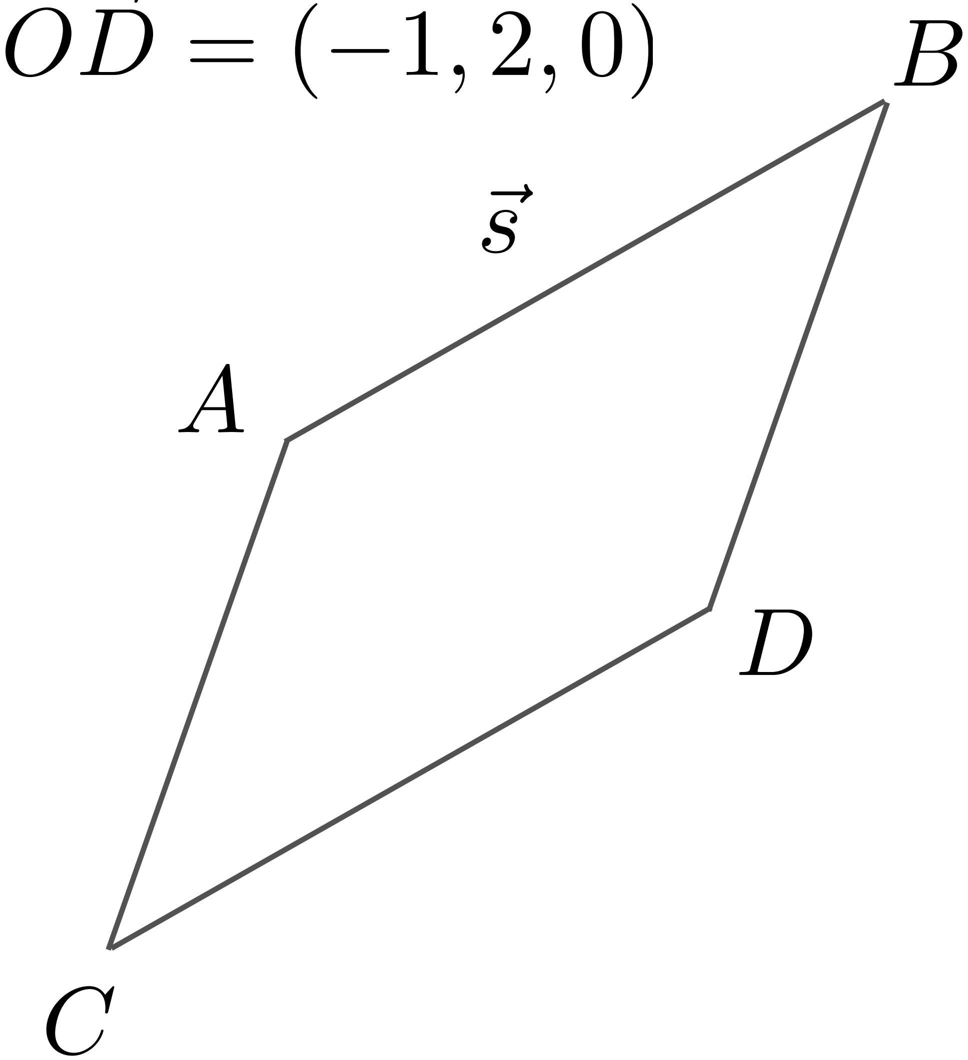
3) $$\vec{v} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

Donc, les composantes d'un vecteur sont les coordonnées du point final moins celles du point initial.

Exemple:

Fixons une base $\mathcal{B} = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ et supposons connues les composantes du vecteur $\vec{s}$ et les coordonnées des points A et D par rapport à un repère donné.

$$\vec{s} = (2, 1, -3) \quad \overrightarrow{OA} = (3, -1, 2) \quad \overrightarrow{OD} = (-1, 2, 0)$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \vec{s} \\ &= (3, -1, 2) + (2, 1, -3) \\ &= (5, 0, -1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OD} - \vec{s} \\ &= (-1, 2, 0) - (2, 1, -3) \\ &= (-3, 1, 3)\end{aligned}$$

Faites les exercices suivants

p.34 # 1 à 4

Exemple:

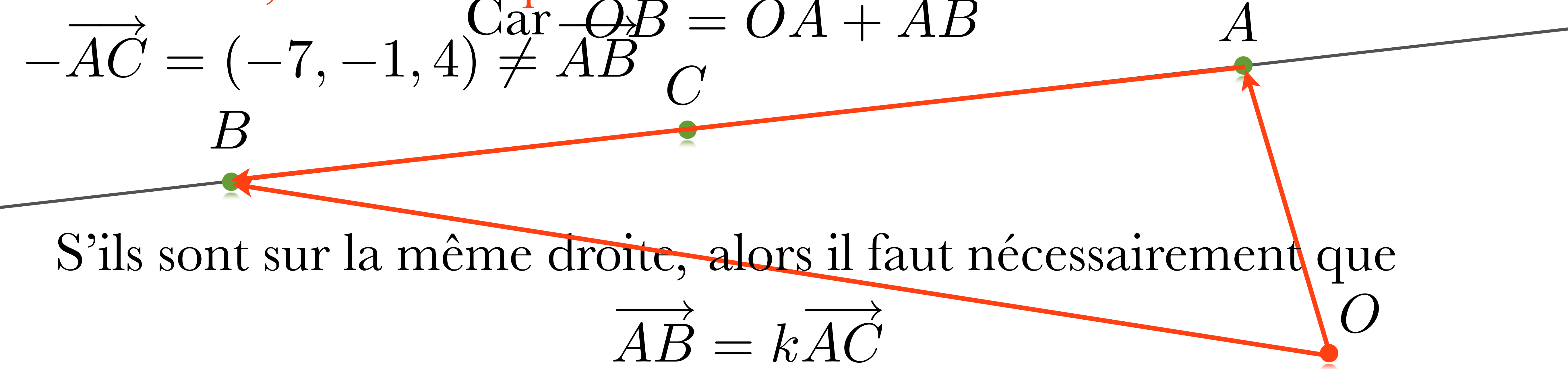
Supposons qu'on ait trois points dans l'espace et que l'on veuille savoir s'ils sont sur la même droite.

$$A = (2, 3, 1) \qquad B = (-5, 2, 4) \qquad C = (9, 4, -3)$$

Donc non, ils ne sont pas colinéaires car

$$-\overrightarrow{AC} = (-7, -1, 4) \neq \overrightarrow{AB}$$

Car $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$



S'ils sont sur la même droite, alors il faut nécessairement que

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-5, 2, 4) - (2, 3, 1) = (-7, -1, 3)$$

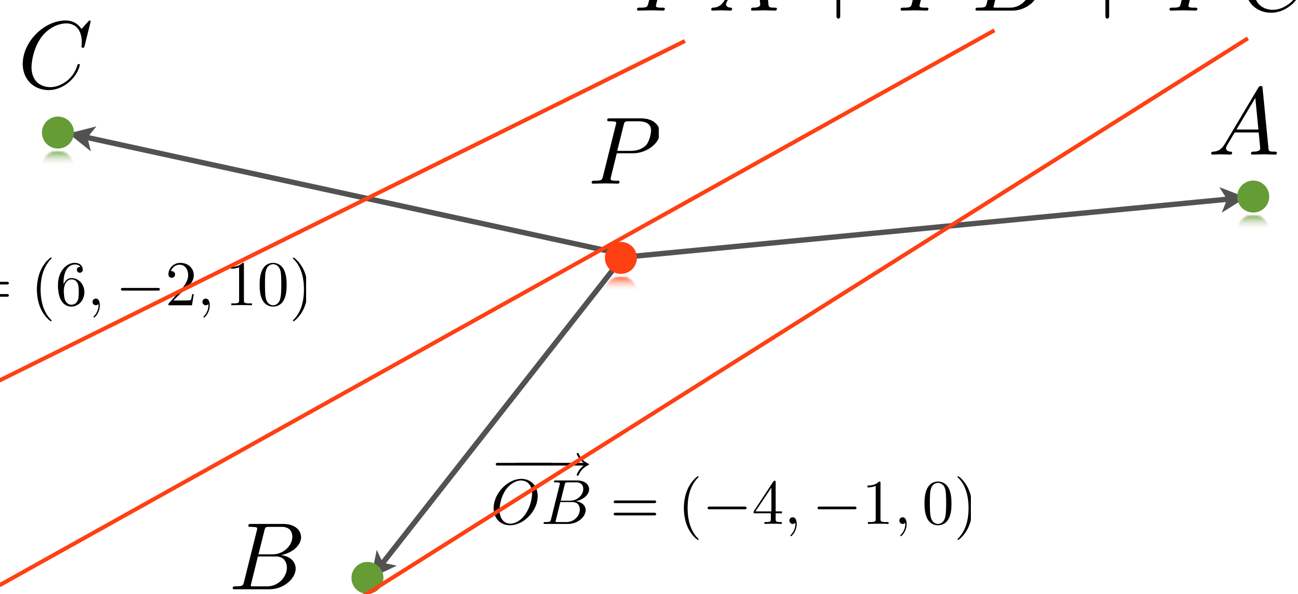
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (9, 4, -3) - (2, 3, 1) = (7, 1, -4)$$

Exemple:

Supposons qu'on ait trois points dans l'espace et qu'on cherche le point d'équilibre statique.

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

C'est-à-dire



$\overrightarrow{OA} = (1, -3, 2)$

$\overrightarrow{OC} = (6, -2, 10)$

$\overrightarrow{OB} = (-4, -1, 0)$

$$(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OP} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\big((1, -3, 2) + (-4, -1, 0) + (6, -2, 10)\big)$$

$$= \frac{1}{3}(3, -6, 12)$$

$$= (1, -2, 4)$$

Définition: Le barycentre d'un ensemble de points $\{P_1, P_2 \ldots, P_n\}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ muni d'un repère est le point P pour lequel

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \cdots + \overrightarrow{PP_n} = \vec{0}$$

et les coordonnées du point P sont données par

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}\right)$$

Faites les exercices suivants

p.36 # 7a), 8a), 9a), 10 et 11

Définition: Une base orthonormée est une base dont tous les vecteurs sont

1) de longueur 1

2) deux à deux orthogonaux.

Un repère orthonormé est un repère dont la base est orthonormée.

Remarque: Pour pouvoir parler de base orthonormée, il faut que l'angle entre deux vecteurs ait un sens.

Dès qu'on est en présence d'une base ordonnée et orthonormée, il est très commun d'utiliser les lettres:

$$\vec{i} \text{ et } \vec{j} \quad \text{pour} \quad \mathbb{R}^2$$

$$\vec{i}\ ,\ \vec{j} \text{ et } \vec{k} \quad \text{pour} \quad \mathbb{R}^3$$

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \quad \text{pour} \quad \mathbb{R}^n$$

Auquel cas l'ordre alphabétique concorde avec l'ordre de la base. Il n'est donc pas nécessaire de spécifier l'ordre.

$$\mathcal{B} = \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{B} = \langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$$

On a donc

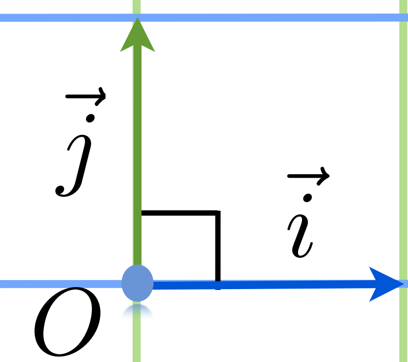
$$\vec{i} = (1,0) \qquad \vec{j} = (0,1) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

$$\vec{i} = (1,0,0) \qquad \vec{j} = (0,1,0) \qquad \vec{k} = (0,0,1) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1,0,\ldots,0) \\ \vec{e}_2 &= (0,1,\ldots,0) \\ &\vdots \\ \vec{e}_n &= (0,0,\ldots,1) \end{aligned} \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n$$

$\langle O; \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle \rangle$ $\oplus$ $\ominus$

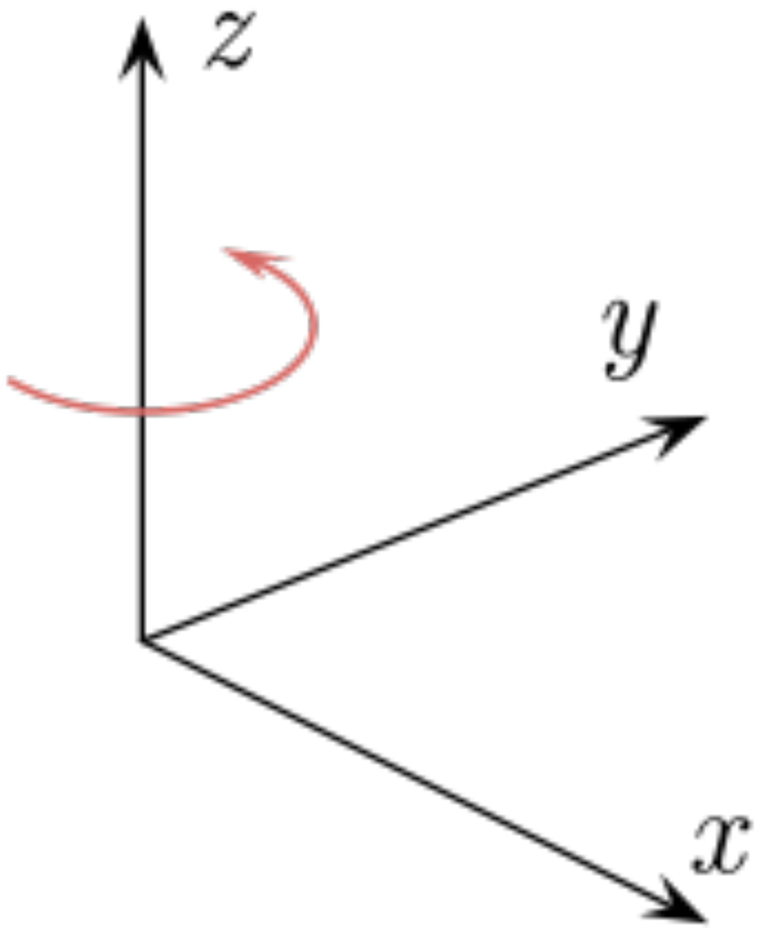
$\mathbb{R}^2$



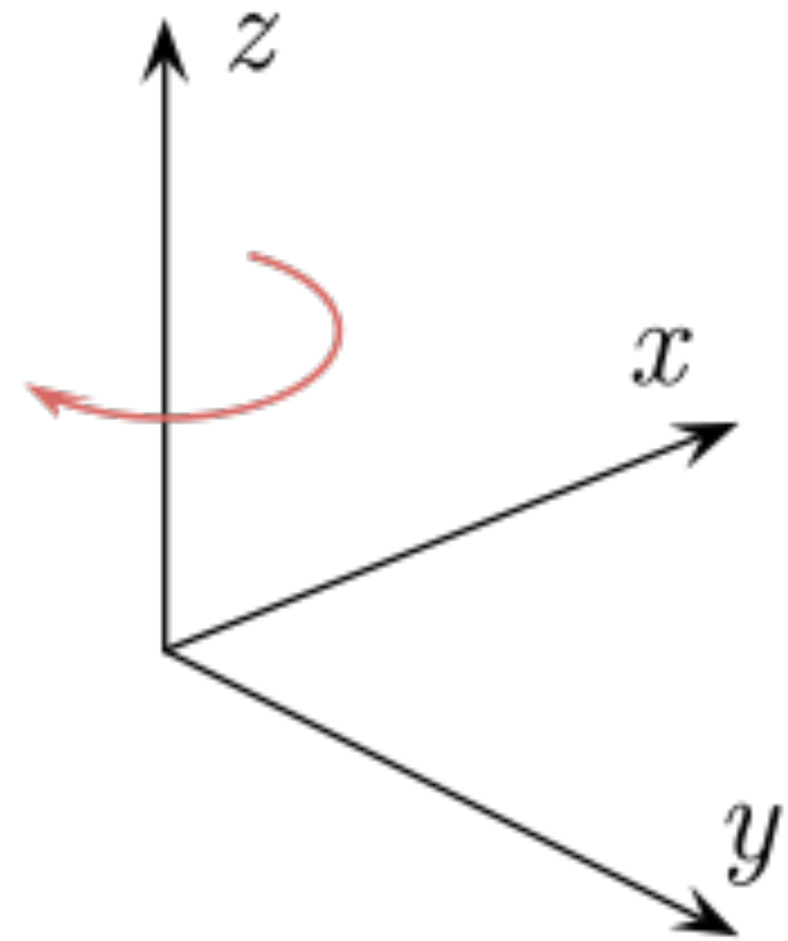
Orienté positivement

Orienté négativement

Dans $\mathbb{R}^3$

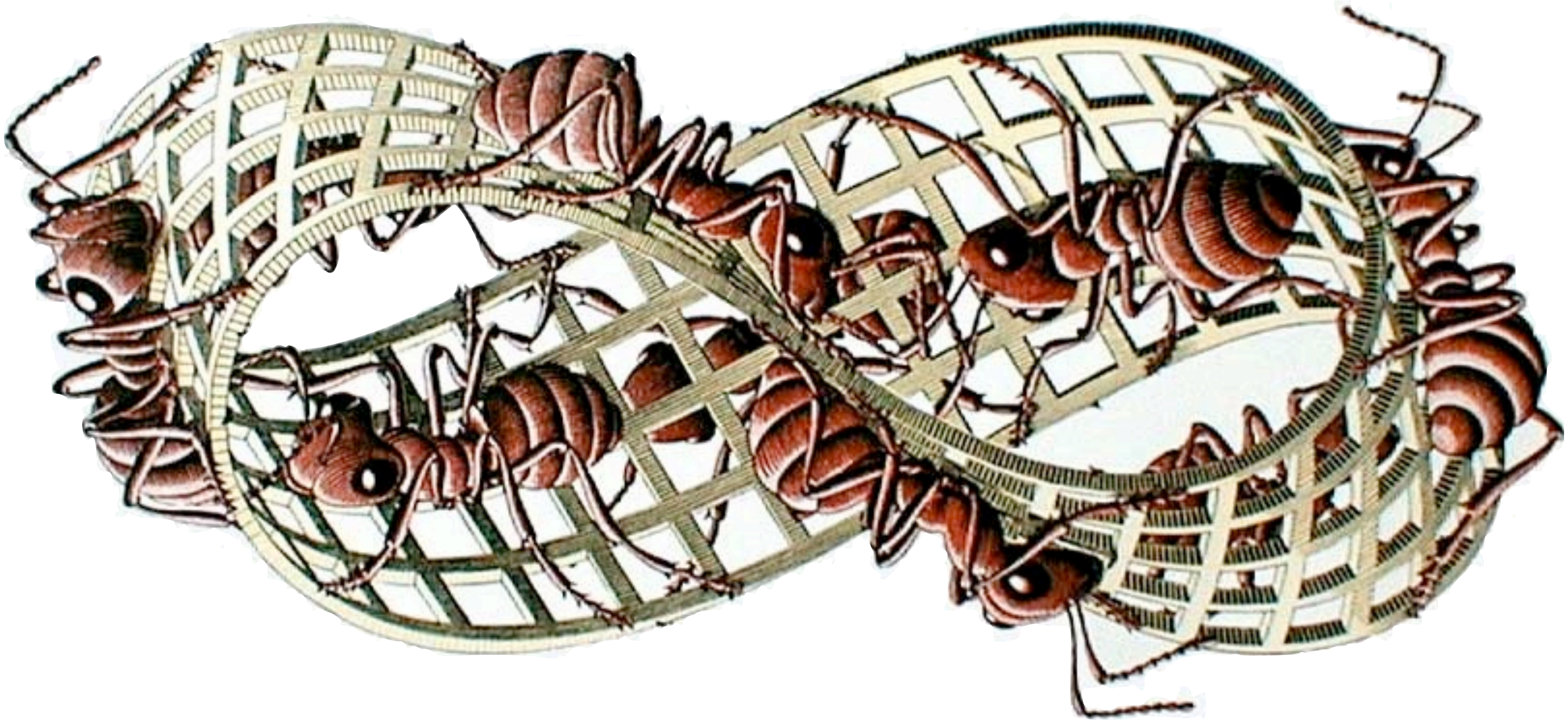


Orientation positive



Orientation négative

Ruban de Möbius



Pas d'orientation possible!

Les bases orthonormées vont être nos bases de prédilection.

À partir de maintenant, sauf indication contraire, dès qu'on parle d'une base, on sous-entend une base ordonnée, orthonormée et orientée positivement.

Faites les exercices suivants

p.36 # 16 à 19

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ La définition d'un repère.
- ✓ La définition du barycentre et la façon de le calculer.
- ✓ La définition de repère orthonormé.
- ✓ L'orientation d'un repère.

Devoir: p. 35 # 1 à 20

- Télécharger et installer Géogébra
- Entrer 5 points sur deux colonnes dans le tableur
- Trouver leur barycentre
- Afficher les point