2.1 LONGUEURS ET DISTANCES

Cours 4

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ La définition d'un repère.
- ✓ La définition du barycentre et la façon de le calculer.
- ✓ La définition de repère orthonormé.
- ✓ L'orientation d'un repère.

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ La façon de trouver la longueur d'un vecteur.
- ✓ La façon de trouver la distance entre deux points.

Définition

Soit $\mathcal{E}$, un espace affine muni d'un repère orthonormé, la norme d'un vecteur

$$\vec{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

est

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Remarque: $$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$

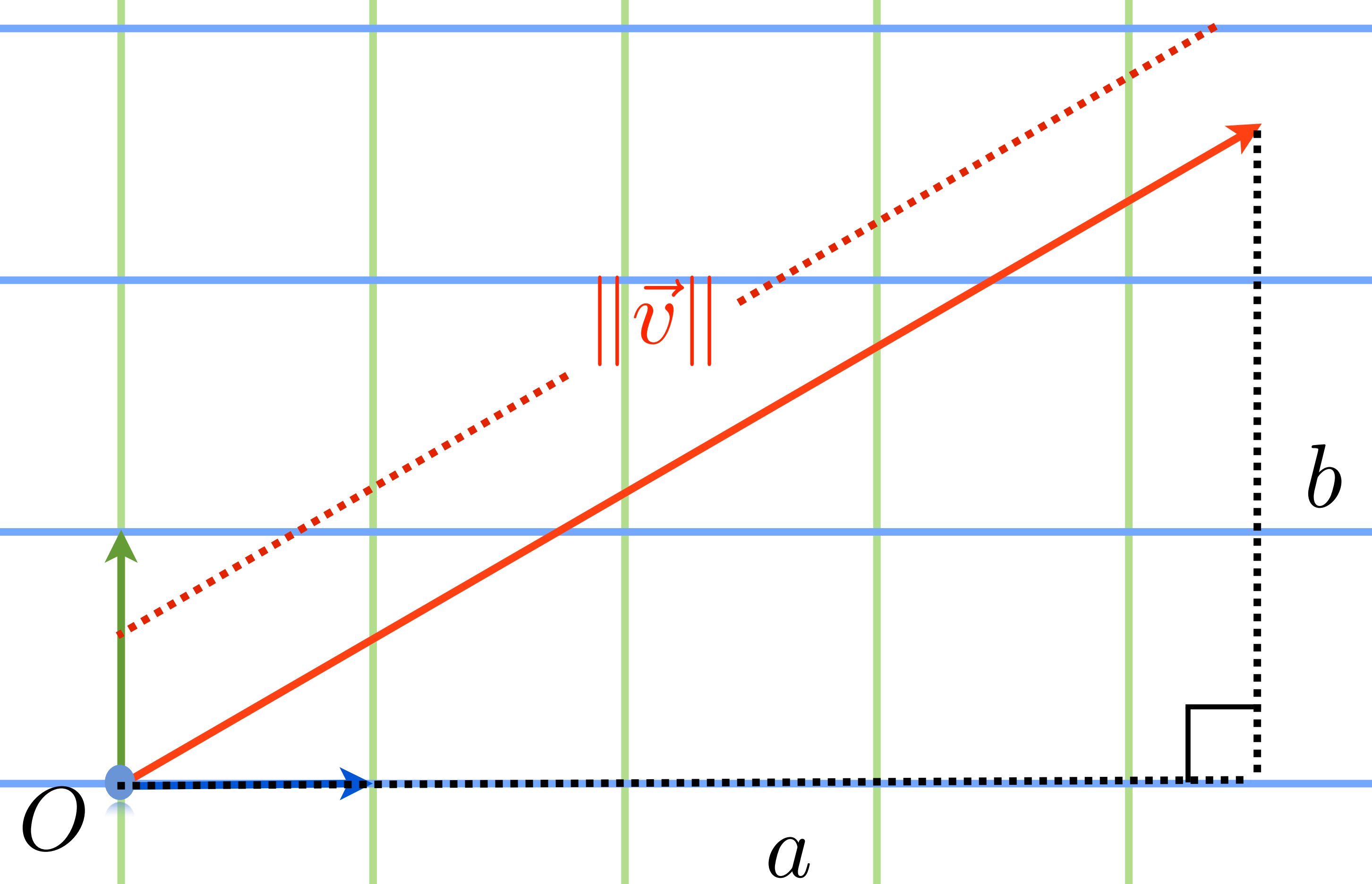
2. $\|\vec{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = 0$

3. $\|k \cdot \vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$

$$\begin{aligned} \|k \cdot \vec{v}\| &= \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + \cdots + (ka_n)^2} \\ &= \sqrt{k^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)} \\ &= |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \quad = |k|\|\vec{v}\| \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^2$

Pythagore: $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

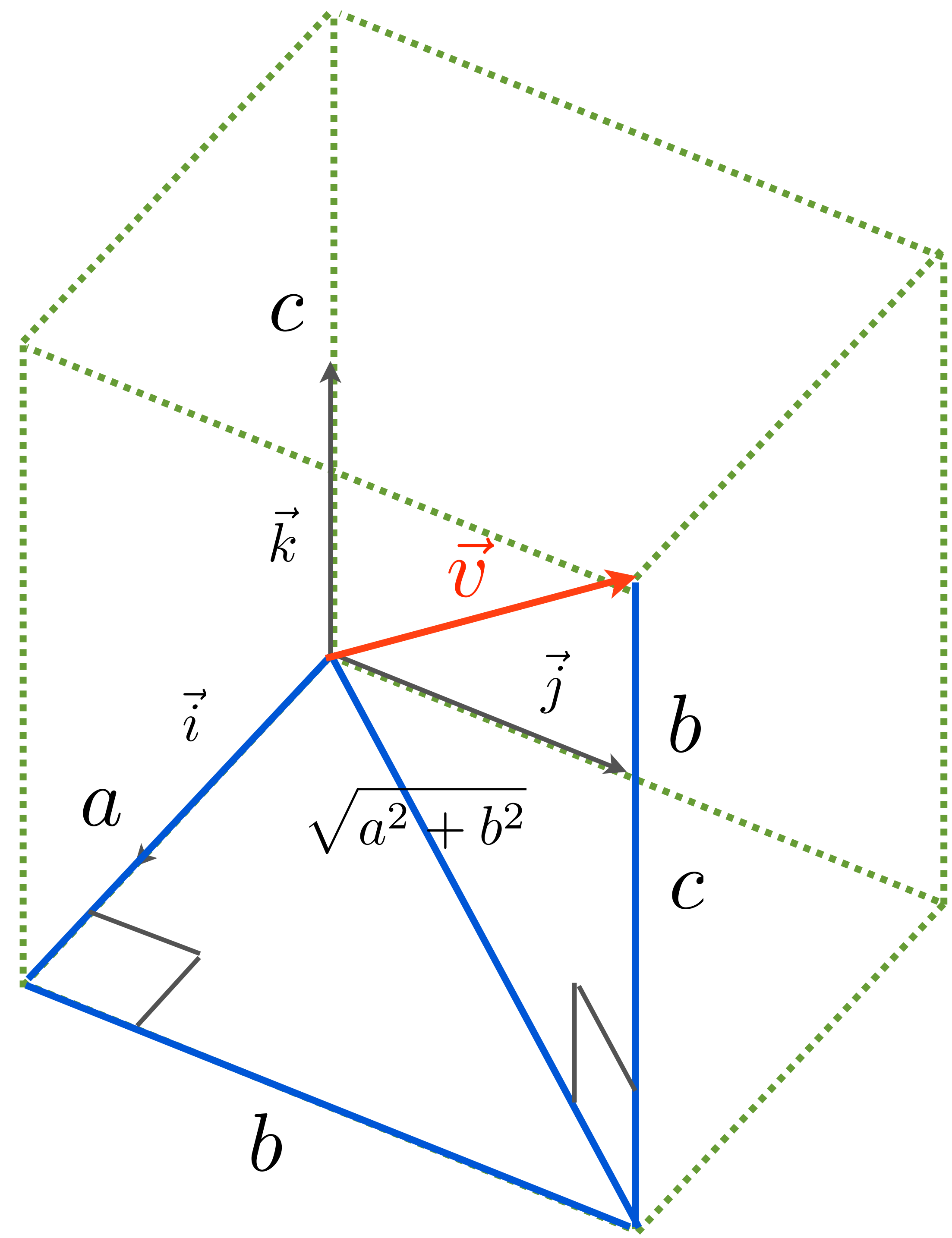


Dans $\mathbb{R}^3$

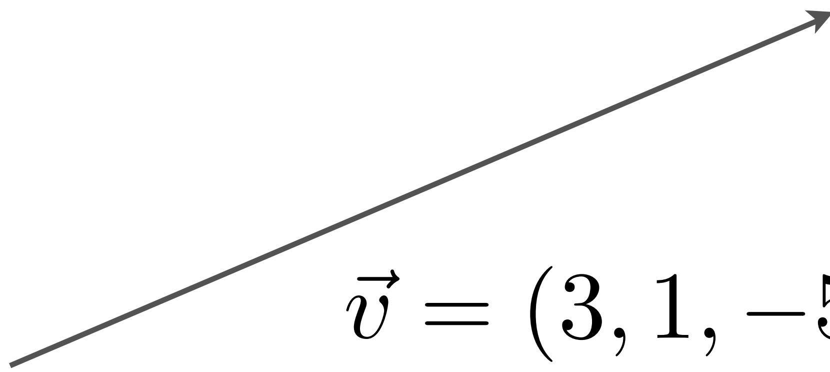
$$\|\vec{v}\|$$

$$= \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Exemple



$$\vec{v} = (3, 1, -5)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}$$

Définition

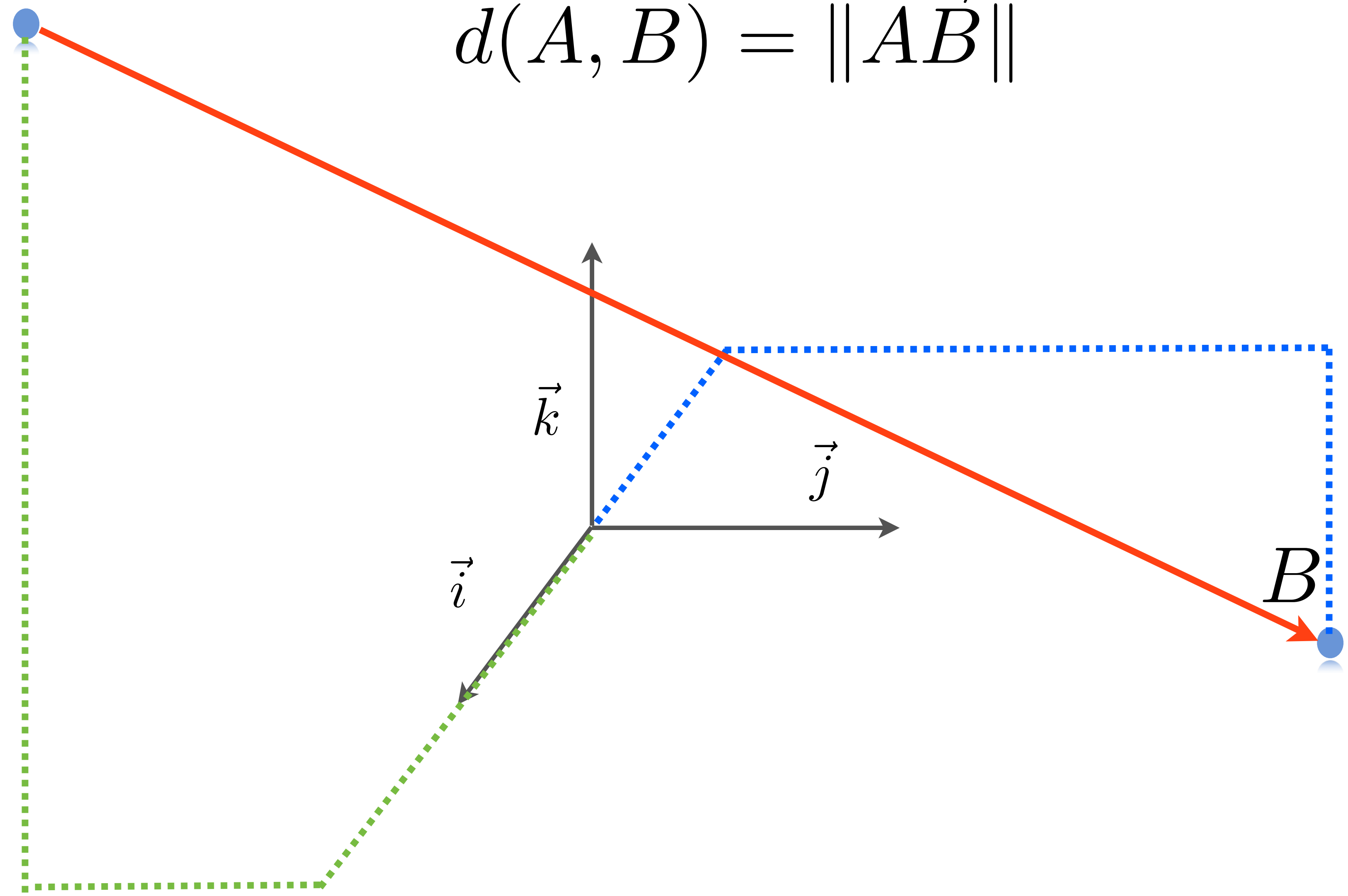
Soit $\mathcal{E}$, un espace affine muni d'un repère orthonormé, la distance entre deux points A et B, notée $d(A, B)$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Exemple

$A = (2, -1, 3)$

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$



$B = (-1, 2, -1)$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1) - (2, -1, 3) = (-3, 3, -4)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{34}$$

Définition Un vecteur $\vec{v}$ est dit unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Remarque:

Si on a un vecteur non nul $\vec{u}$, on peut toujours construire un vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que $\vec{u}$ de la façon suivante:

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \qquad \text{car} \quad \|\vec{w}\| = \left| \frac{1}{\|\vec{u}\|} \right| \|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1$$

Faites les exercices suivants

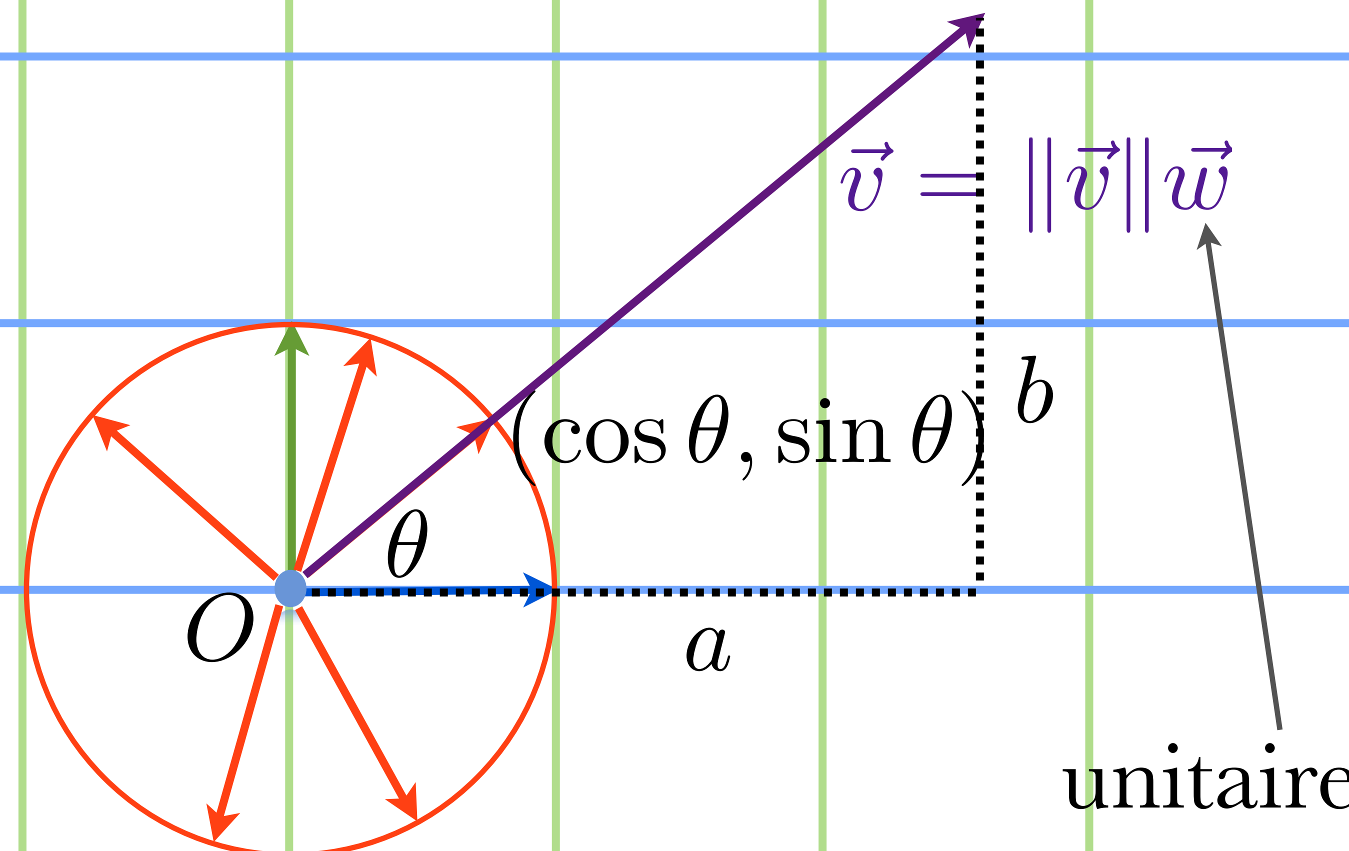
p.50 # 1 à 5

Dans $\mathbb{R}^2$

car $\quad \vec{w} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$

$$\frac{a}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta$$

$$a = \|\vec{v}\| \cos\theta$$

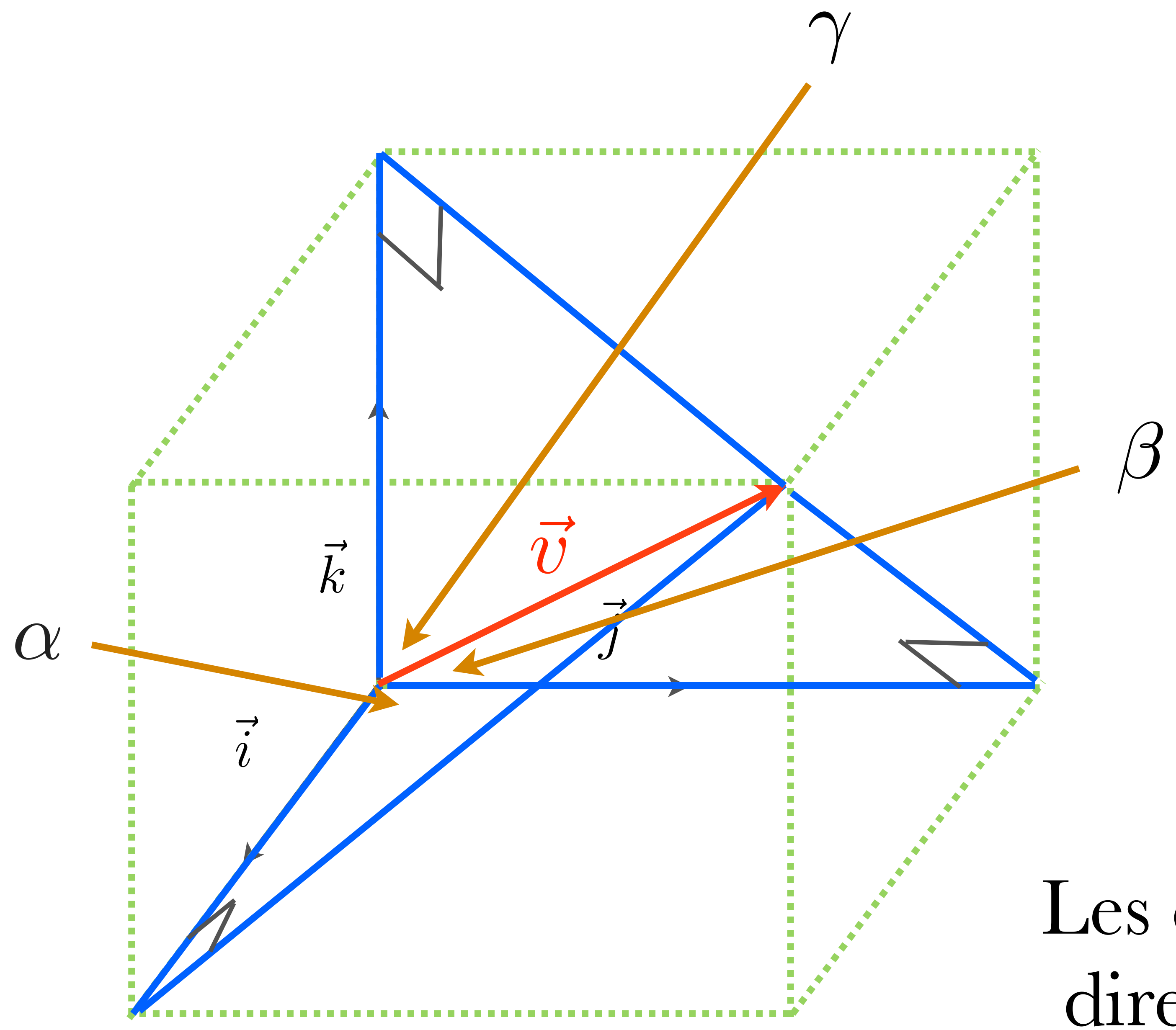


mais $\vec{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\text{donc } \vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta) = (\|\vec{v}\|\cos\theta, \|\vec{v}\|\sin\theta)$$

$$= (a, b)$$

Dans $\mathbb{R}^3$



Les cosinus directeurs

$$\vec{v} = (\|\vec{v}\| \cos\alpha, \|\vec{v}\| \cos\beta, \|\vec{v}\| \cos\gamma)$$

Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire.

Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{v} = (a, b) \quad = (\cos\theta, \sin\theta)$

Dans $\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{v} = (a, b, c) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des x dans $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = (7, -2) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Est unitaire

$$\text{Donc, } \theta = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{53}}\right)$$

Exemple

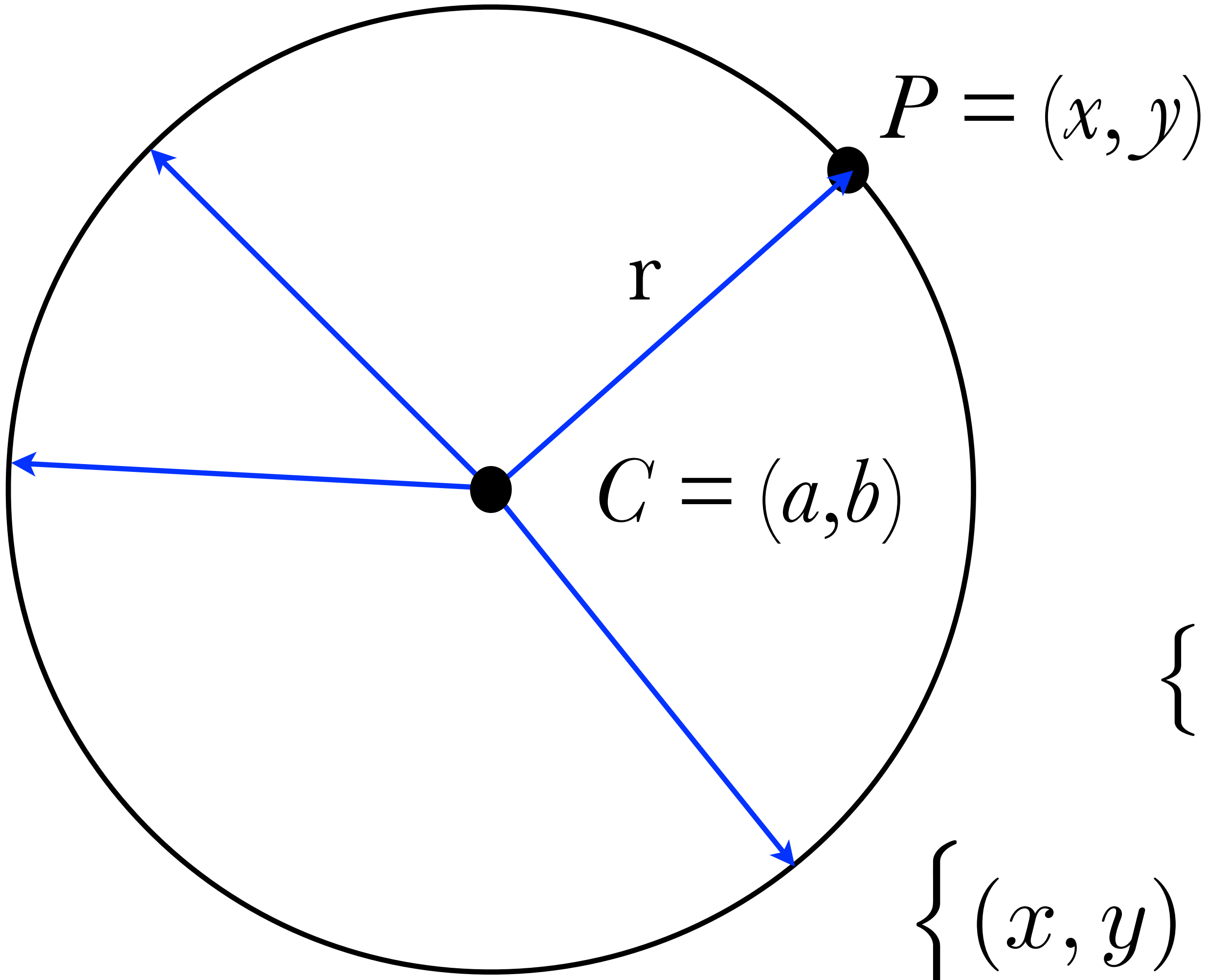
Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v} = (1, -3, 5) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\text{Donc, } \gamma = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right)$$

Lieux Géométriques



$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{CP}\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - a, y - b)\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\right\}$$

Faites les exercices suivants

p.50 # 6 à 8

2.2 PRODUIT SCALAIRE ET CALCUL D'ANGLES

D'ANGLES

Cours 4 (suite)

Définition

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel pour lequel on fixe une base ordonnée $\mathcal{B}$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ est l'«opération» définie comme suit:

$$\vec{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \vec{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \longmapsto a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Remarque:

Étant donné que le produit scalaire est défini à partir des composantes de deux vecteurs, le résultat dépend de la base utilisée.

Nous allons voir que le produit scalaire nous permet d'obtenir des informations intéressantes si la base est orthonormée.

Malheureusement, si la base n'est pas orthonormée, le produit scalaire est presque sans intérêt.

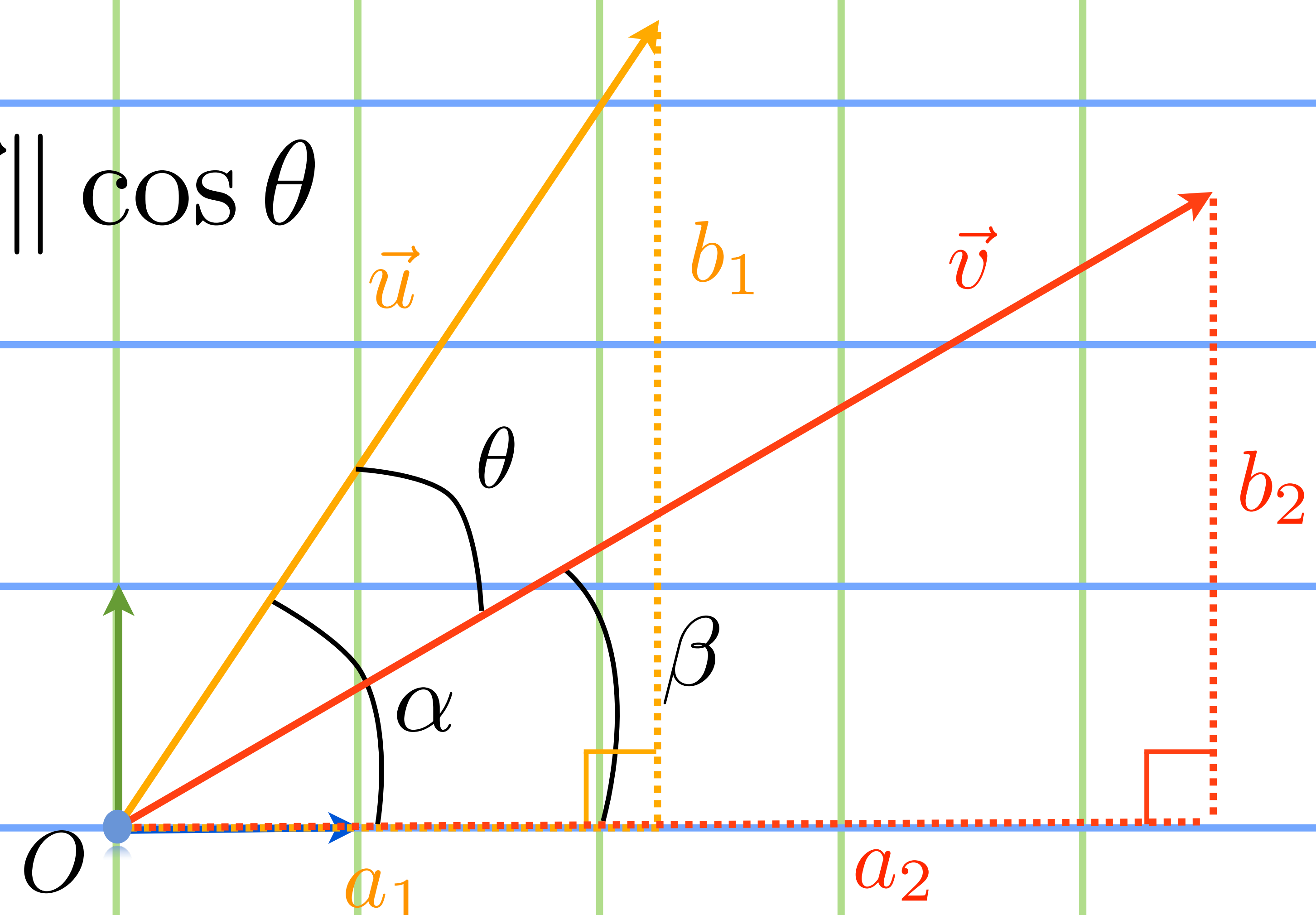
Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$

$$= (\|\vec{u}\| \cos \alpha)(\|\vec{v}\| \cos \beta) + (\|\vec{u}\| \sin \alpha)(\|\vec{v}\| \sin \beta)$$

$$= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \quad = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\alpha - \beta)$$

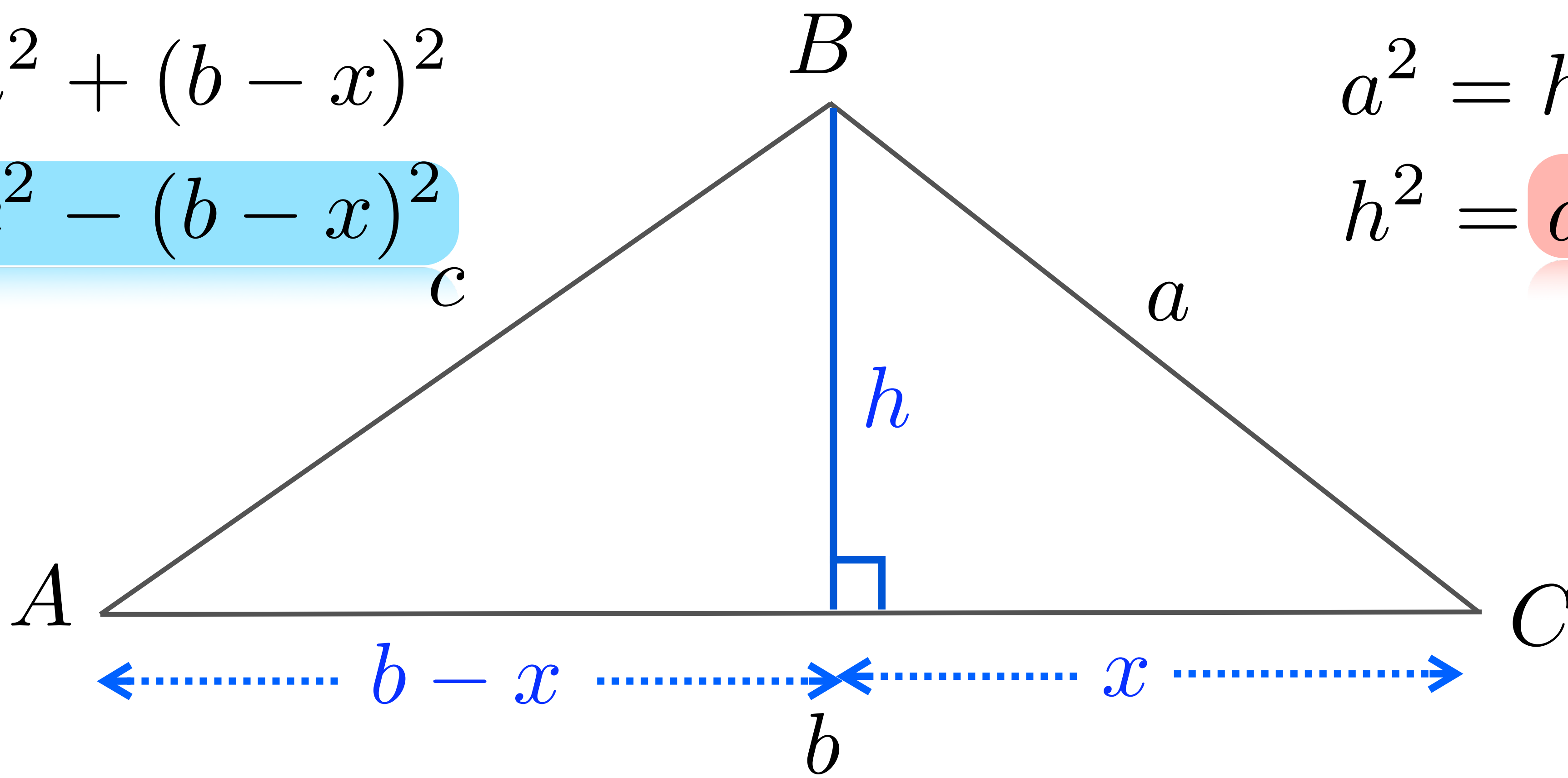
$$= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\beta - \alpha)$$

$$= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \theta$$



Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b-x)^2$$
$$h^2 = c^2 - (b-x)^2$$

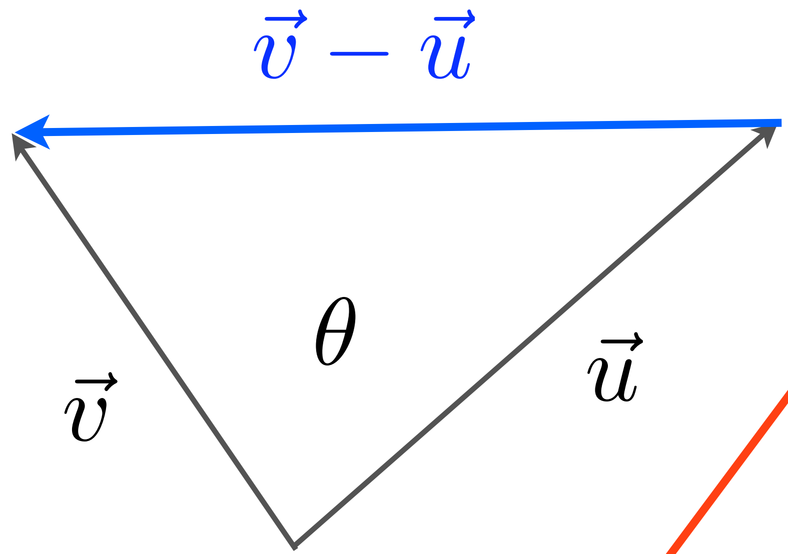


$$a^2 = h^2 + x^2$$
$$h^2 = a^2 - x^2$$

$$a^2 - \cancel{x^2} = c^2 - (b^2 - 2bx + \cancel{x^2})$$
$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$$

$$\frac{x}{a} = \cos C$$
$$x = a\cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$(\cancel{d^2} - 2da + \cancel{a^2}) + (\cancel{e^2} - 2eb + \cancel{b^2}) + (\cancel{f^2} - 2fc + \cancel{c^2})$$

$$= (\cancel{d^2} + \cancel{e^2} + \cancel{f^2}) + (\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + \cancel{c^2}) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$-2(ad + be + cf) = -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$ad + be + cf = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

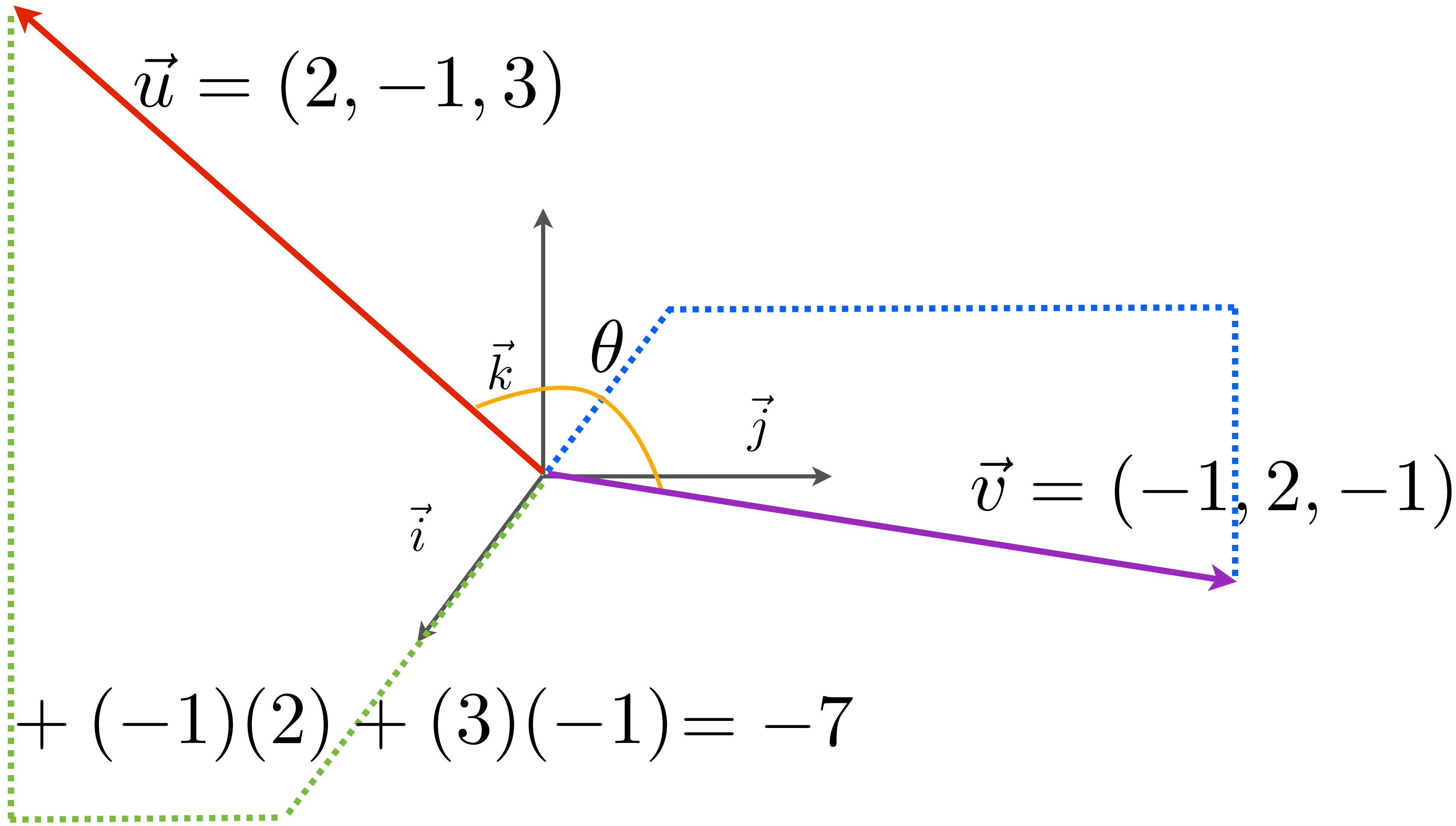
Angle entre deux vecteurs

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\|}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\|}\right)$$

Exemple



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-1) + (-1)(2) + (3)(-1) = -7$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right) \approx 2{,}4399 \text{ rad}$$

$$\approx 139{,}79^\circ$$

Faites les exercices suivants

p.67, # 1, 3 et 4

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ La longueur d'un vecteur.
- ✓ La distance entre deux points.
- ✓ Le produit scalaire entre deux vecteurs.
- ✓ Comment trouver l'angle entre deux vecteurs.

Devoir:

p. 50 # 1 à 11

et

p.67, # 1 à 3