2.1 LONGUEURS ET DISTANCES

Cours 4

Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

✓ La définition d'un repère.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ La définition d'un repère.
- ✓ La définition du barycentre et la façon de le calculer.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ La définition d'un repère.
- ✓ La définition du barycentre et la façon de le calculer.
- ✓ La définition de repère orthonormé.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ La définition d'un repère.
- ✓ La définition du barycentre et la façon de le calculer.
- ✓ La définition de repère orthonormé.
- ✓ L'orientation d'un repère.

Aujourd’hui, nous allons voir

Aujourd’hui, nous allons voir

Aujourd’hui, nous allons voir

✓ La façon de trouver la longueur d’un vecteur.

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ La façon de trouver la longueur d'un vecteur.
- ✓ La façon de trouver la distance entre deux points.

Définition

Définition

Soit $\mathcal{E}$, un espace affine muni d'un repère orthonormé, la norme d'un vecteur

Définition

Soit $\mathcal{E}$, un espace affine muni d'un repère orthonormé, la norme d'un vecteur

$$\vec{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Définition

Soit $\mathcal{E}$, un espace affine muni d'un repère orthonormé, la norme d'un vecteur

$$\vec{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

est

Définition

Soit $\mathcal{E}$, un espace affine muni d'un repère orthonormé, la norme d'un vecteur

$$\vec{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

est

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Remarque:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Remarque: $$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$

Remarque:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$

2. $\|\vec{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = 0$

Remarque: $$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$

2. $\|\vec{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = 0$

3. $\|k \cdot \vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$

Remarque: $$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$

2. $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = 0$

3. $\|k \cdot \vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$

$$\|k \cdot \vec{v}\|$$

Remarque: $$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$

2. $\|\vec{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = 0$

3. $\|k \cdot \vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$

$$\|k \cdot \vec{v}\| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + \cdots + (ka_n)^2}$$

Remarque:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$

2. $\|\vec{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = 0$

3. $\|k \cdot \vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$

$$\begin{aligned}\|k \cdot \vec{v}\| &= \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + \cdots + (ka_n)^2} \\ &= \sqrt{k^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}\end{aligned}$$

Remarque: $$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$

2. $\|\vec{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = 0$

3. $\|k \cdot \vec{v}\| = |k| \|\vec{v}\|$

$$\begin{aligned}
\|k \cdot \vec{v}\| &= \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + \cdots + (ka_n)^2} \\
&= \sqrt{k^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)} \\
&= |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}
\end{aligned}$$

Remarque: $$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$

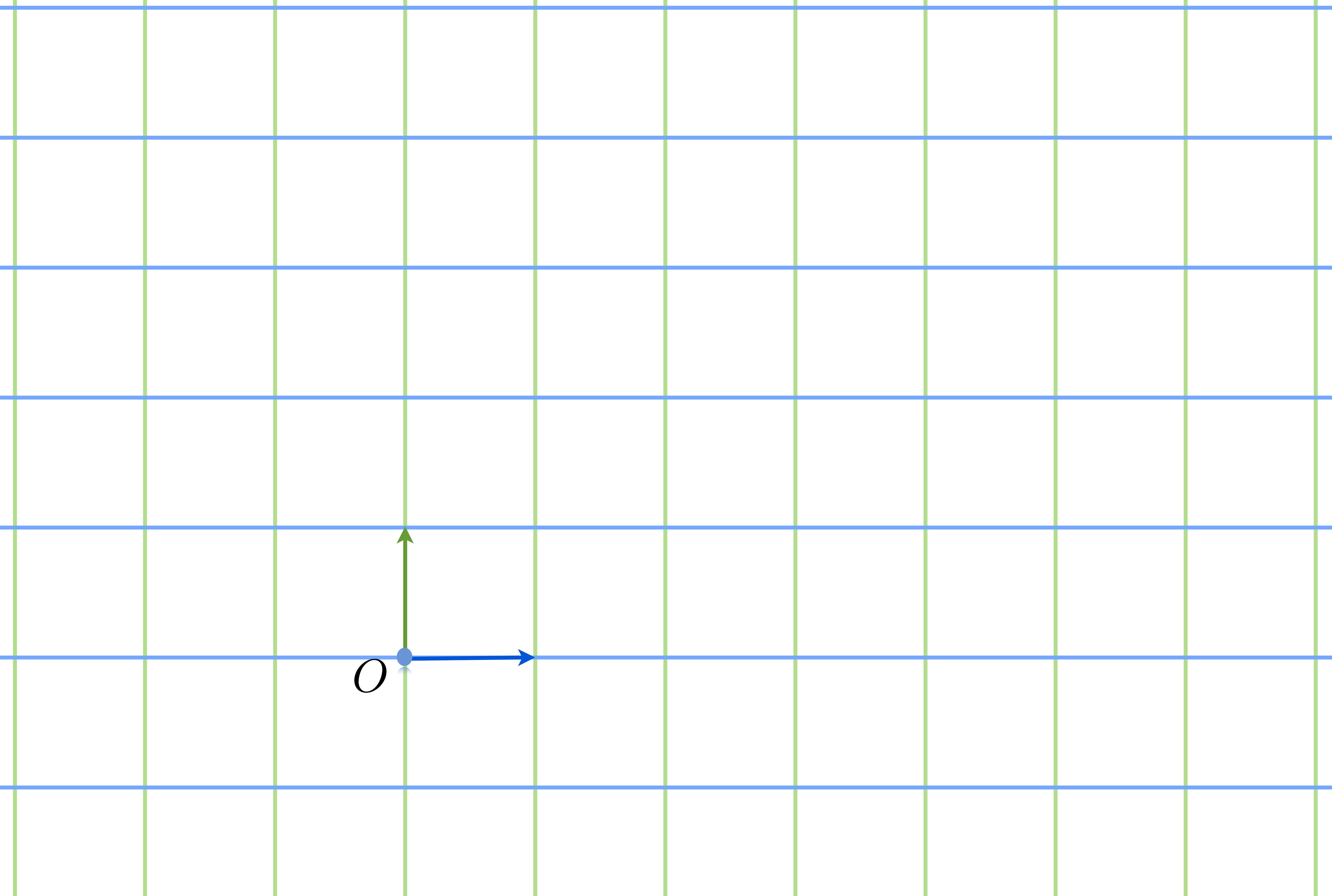
2. $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = 0$

3. $\|k \cdot \vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$

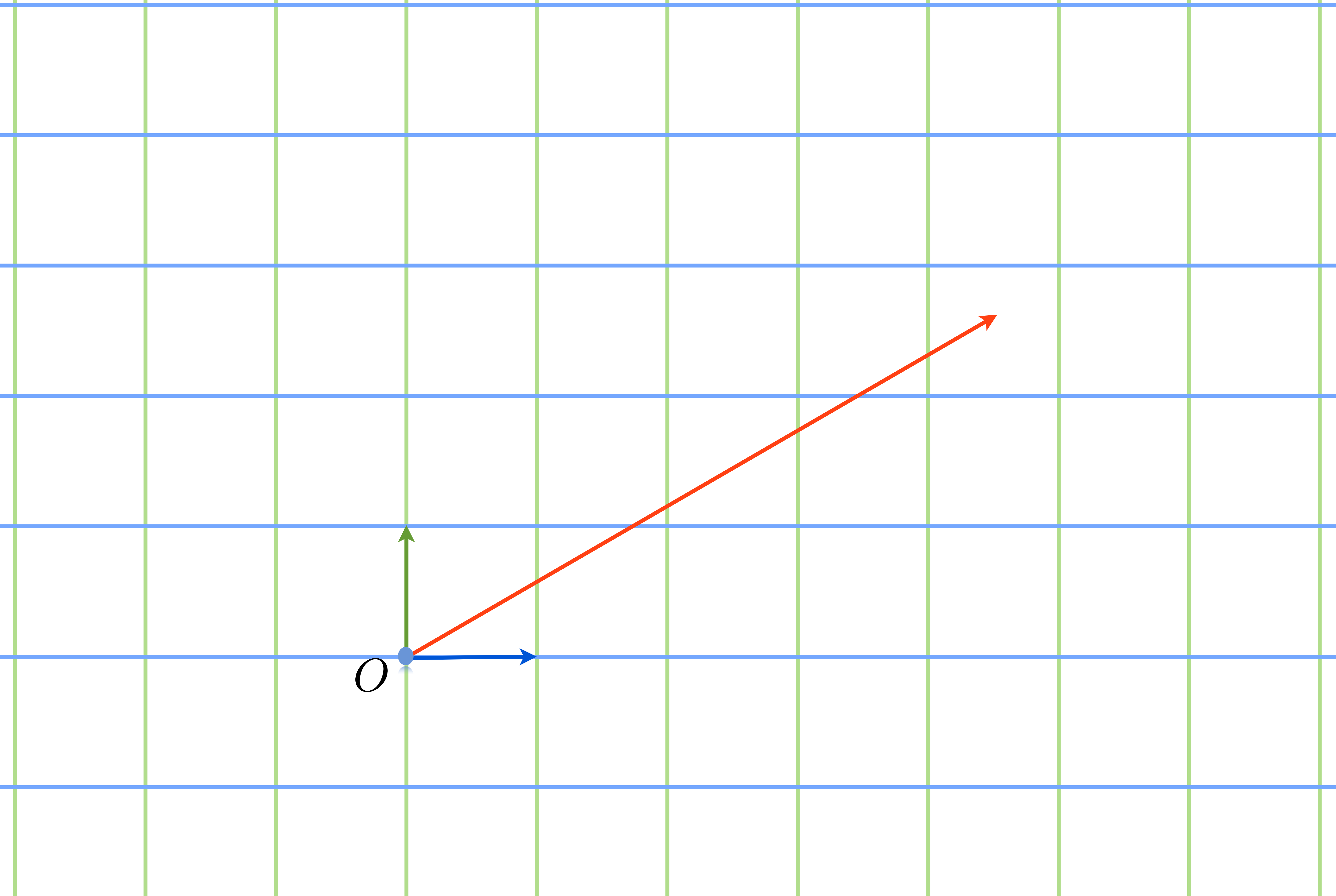
$$\begin{aligned}\|k \cdot \vec{v}\| &= \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + \cdots + (ka_n)^2} \\ &= \sqrt{k^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)} \\ &= |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \quad = |k|\|\vec{v}\|\end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^2$

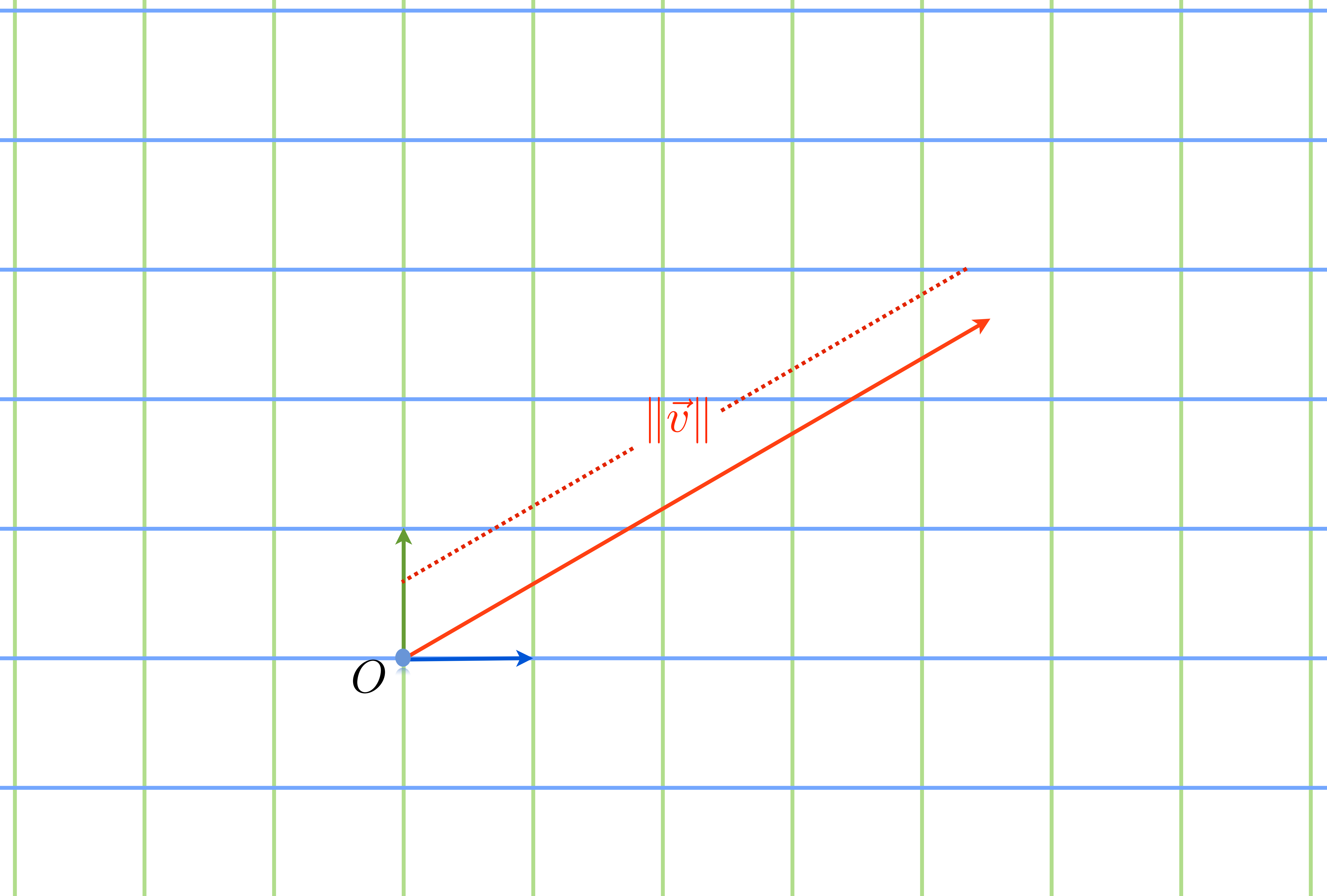
Dans $\mathbb{R}^2$



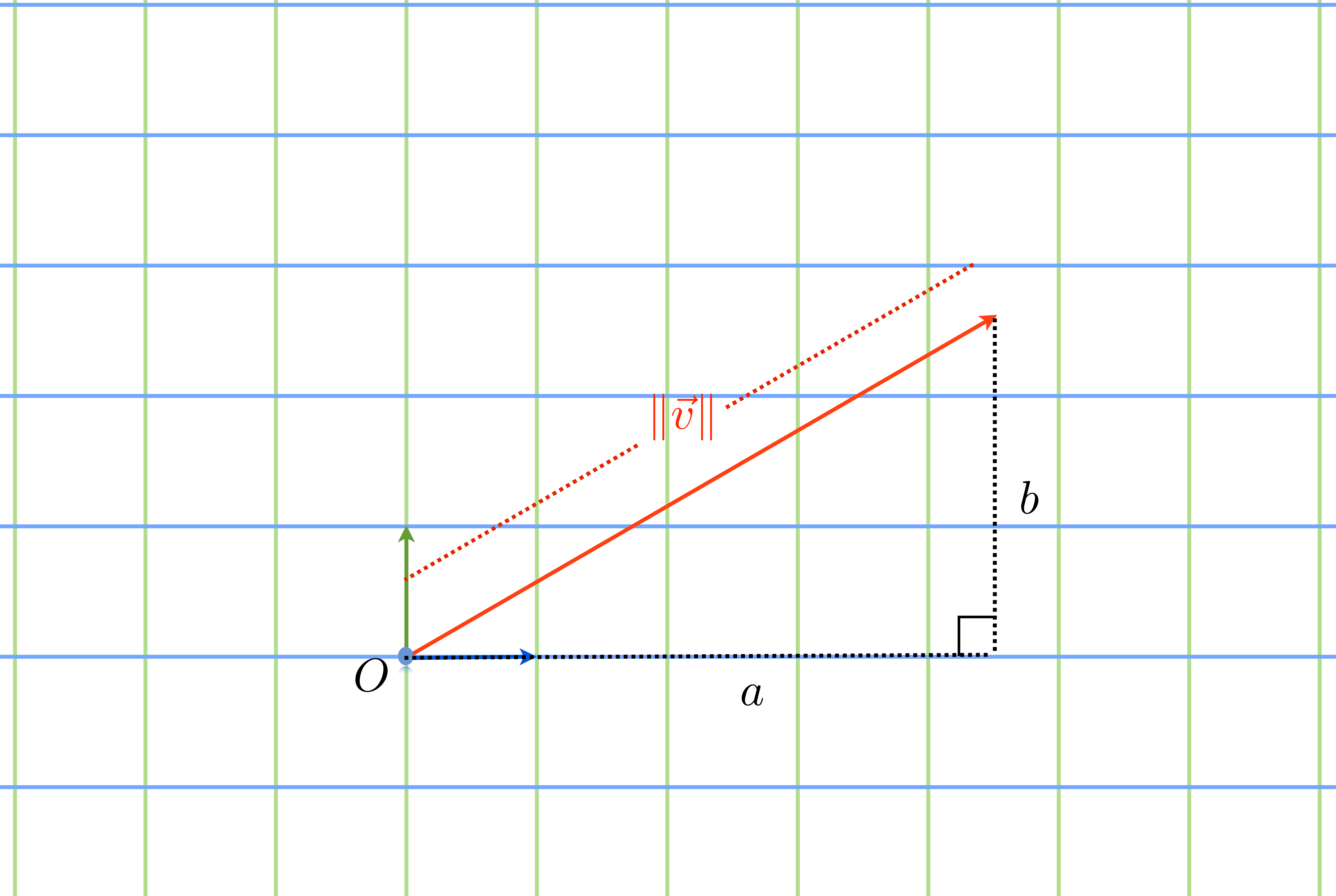
Dans $\mathbb{R}^2$



Dans $\mathbb{R}^2$

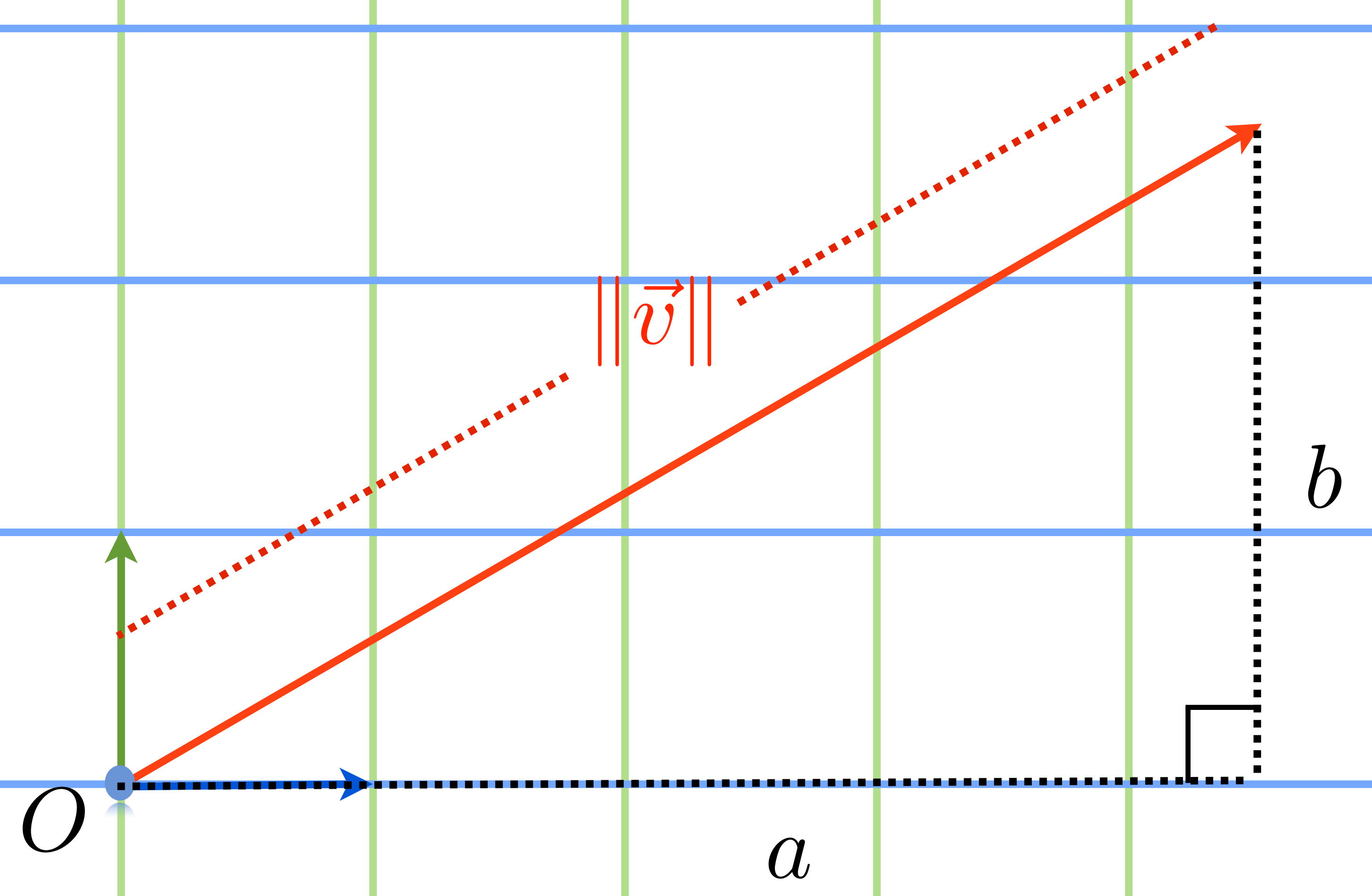


Dans $\mathbb{R}^2$

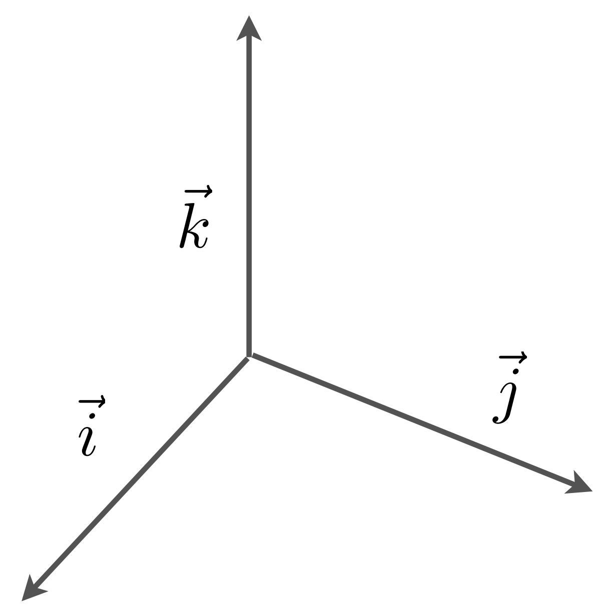


Dans $\mathbb{R}^2$

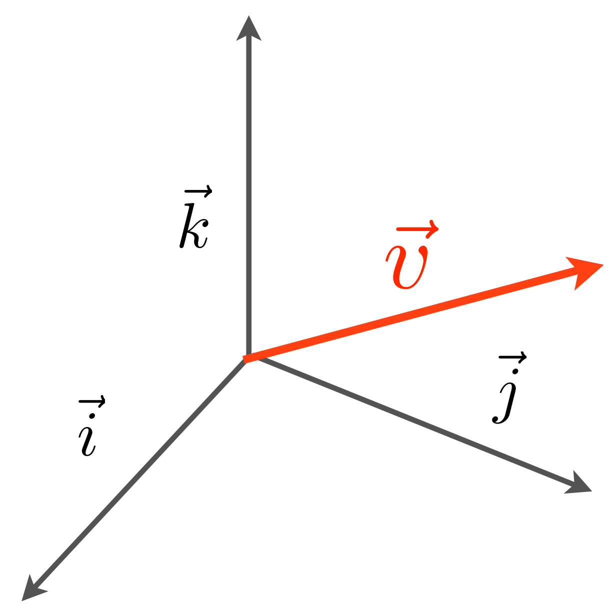
Pythagore: $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$



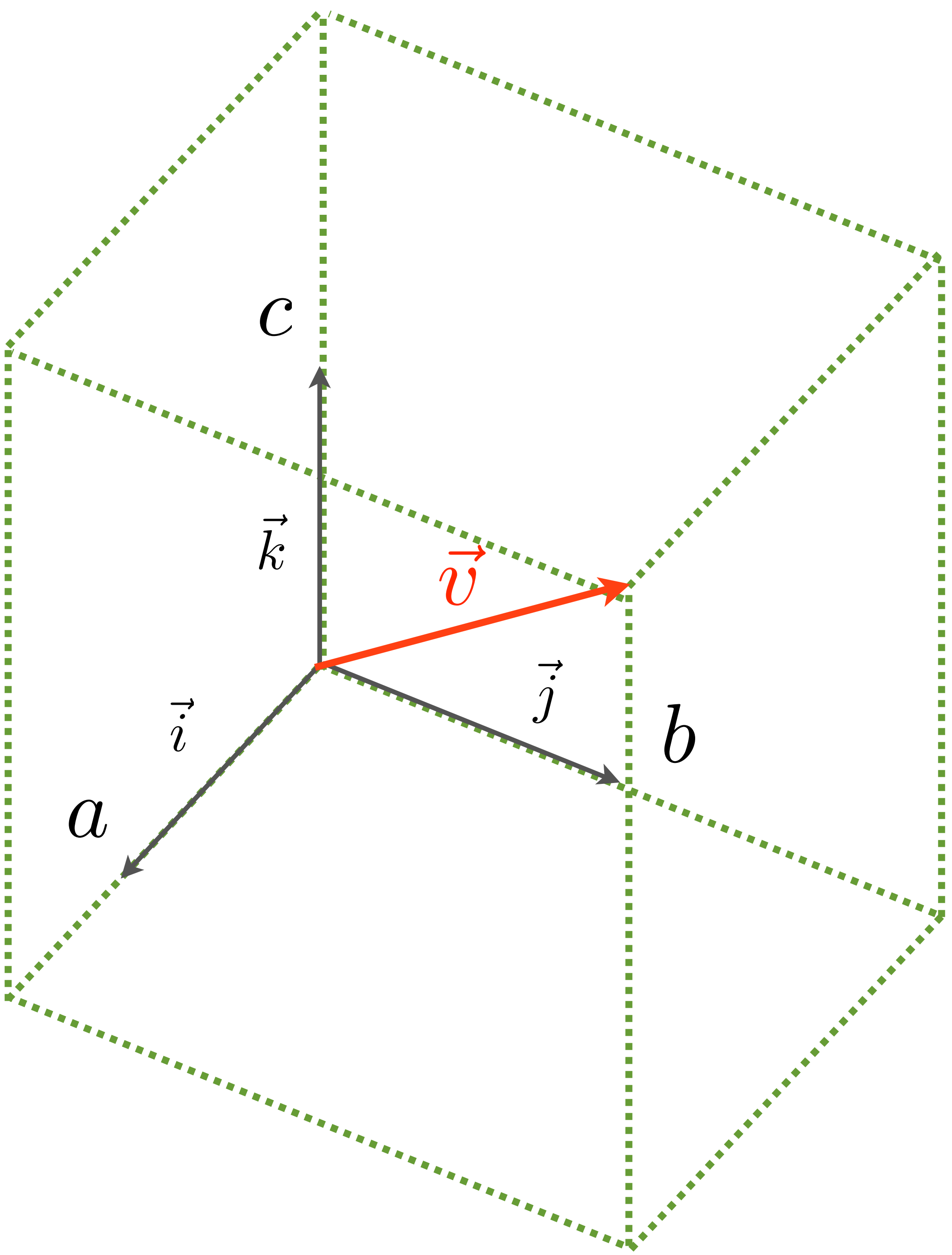
Dans $\mathbb{R}^3$



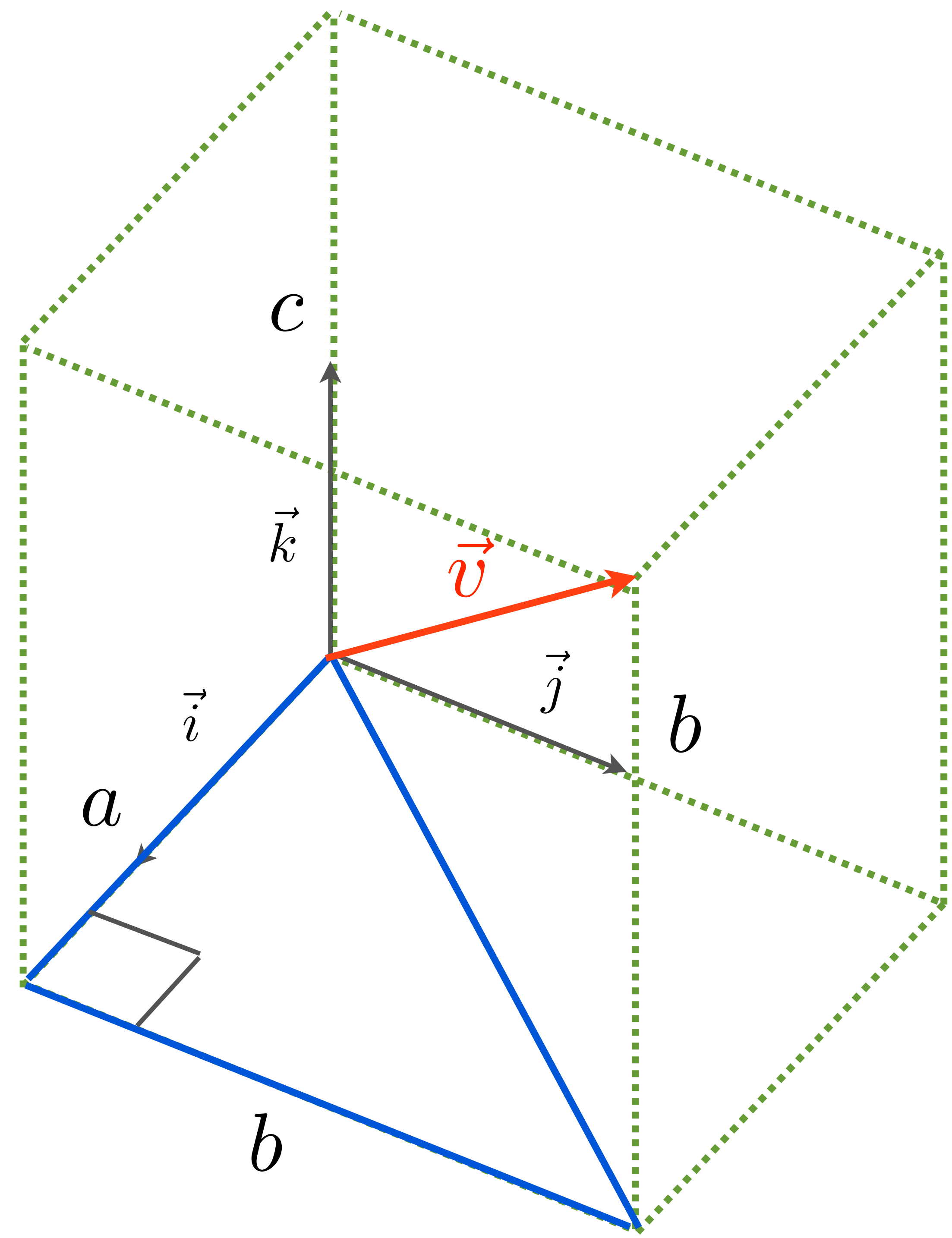
Dans $\mathbb{R}^3$



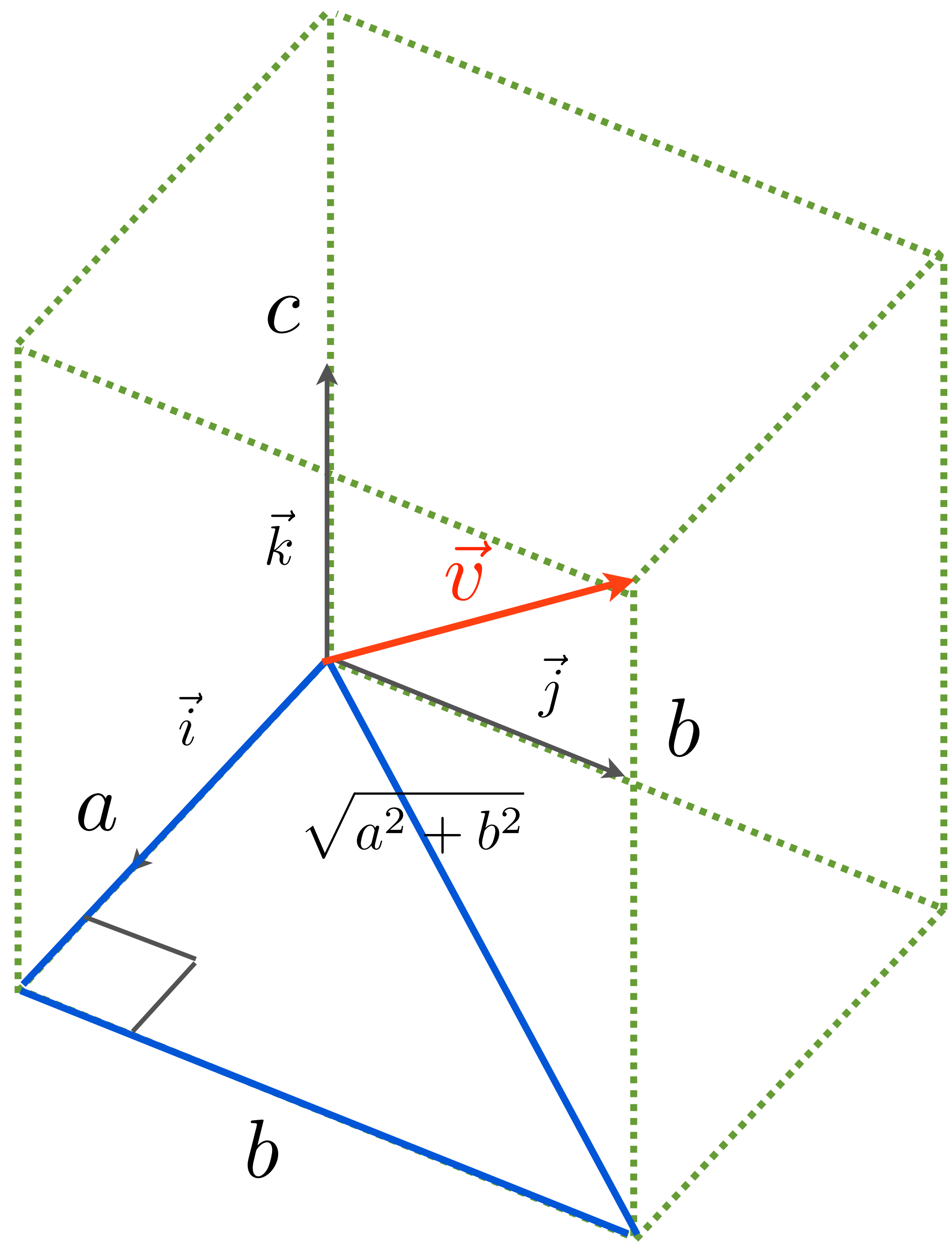
Dans $\mathbb{R}^3$



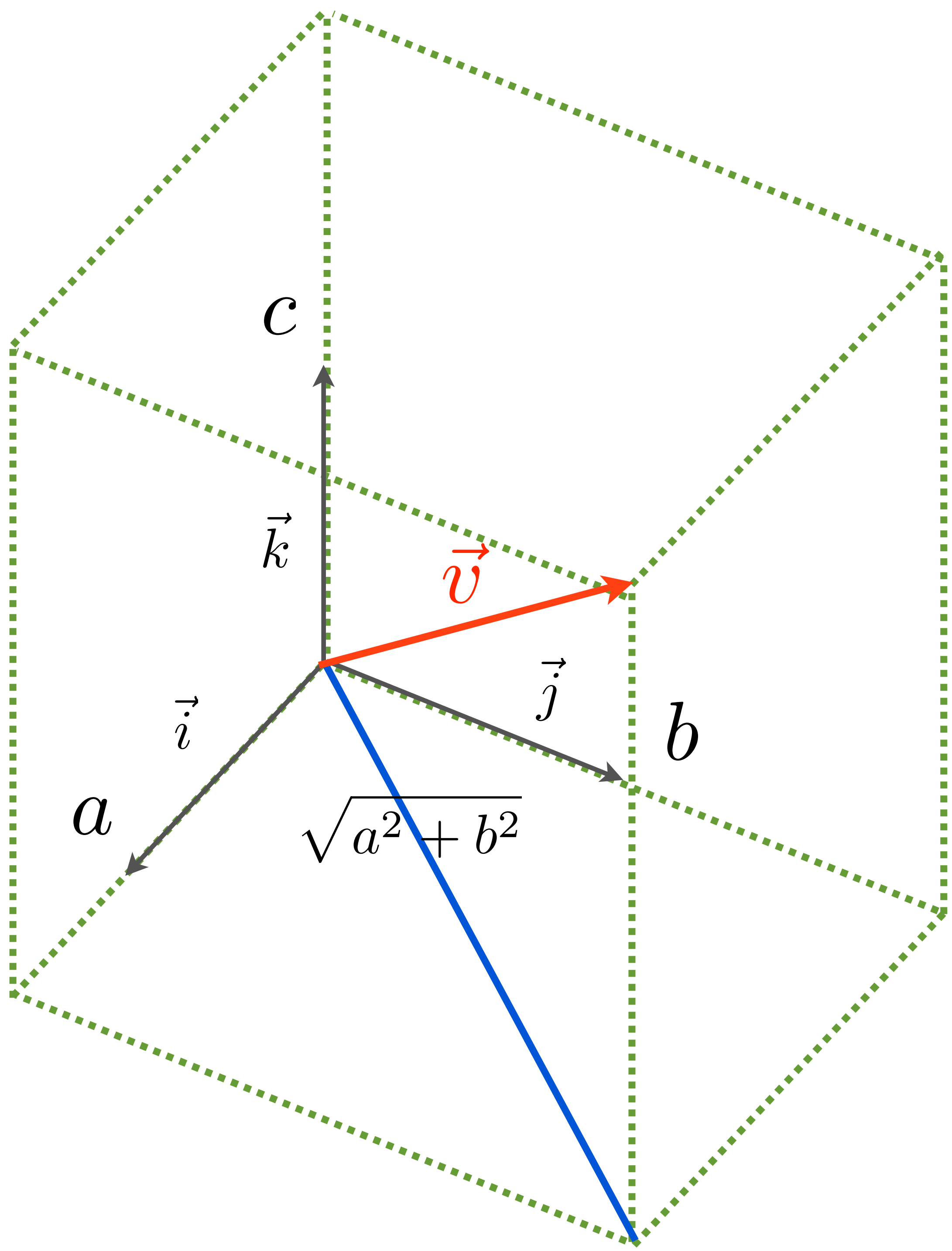
Dans $\mathbb{R}^3$



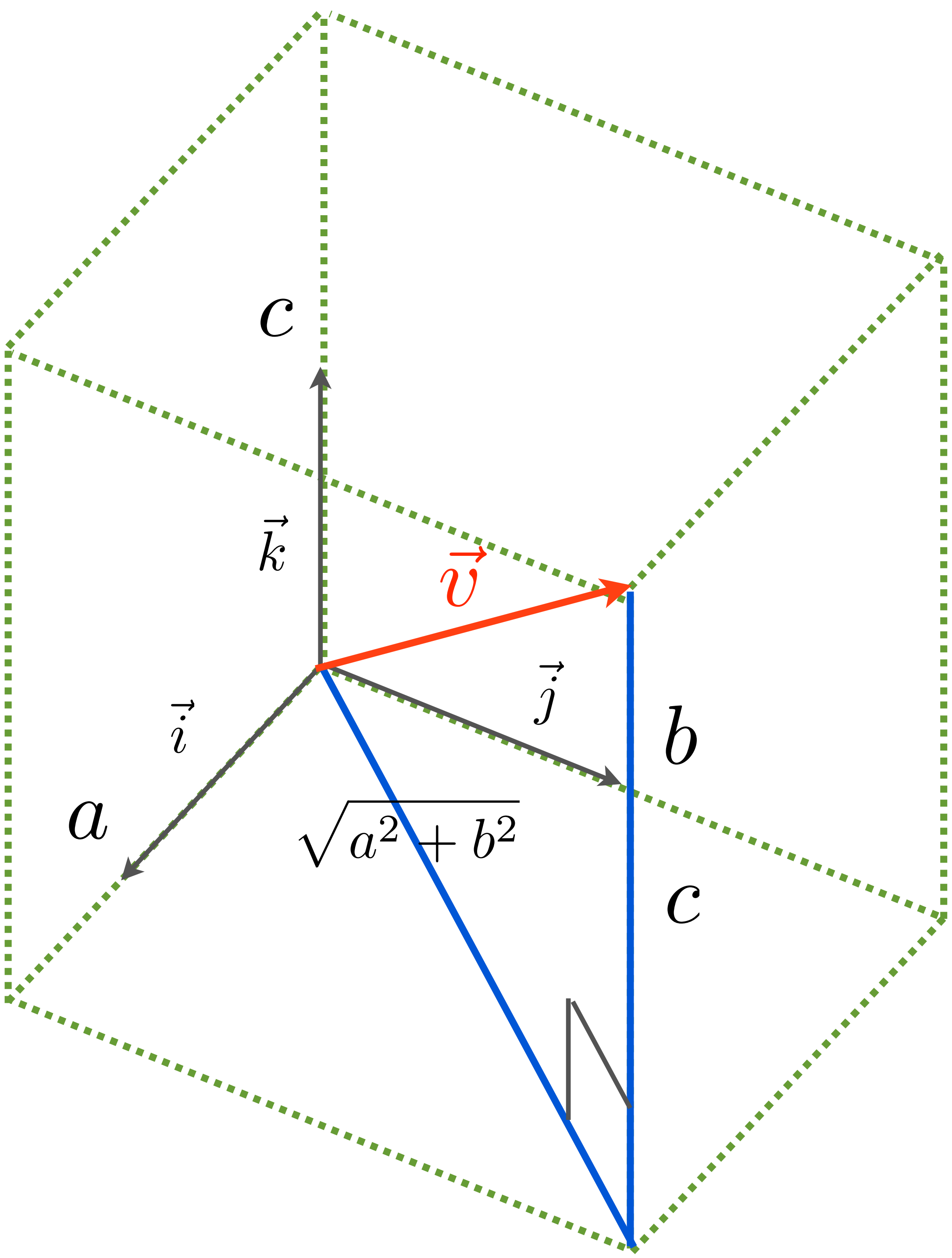
Dans $\mathbb{R}^3$



Dans $\mathbb{R}^3$

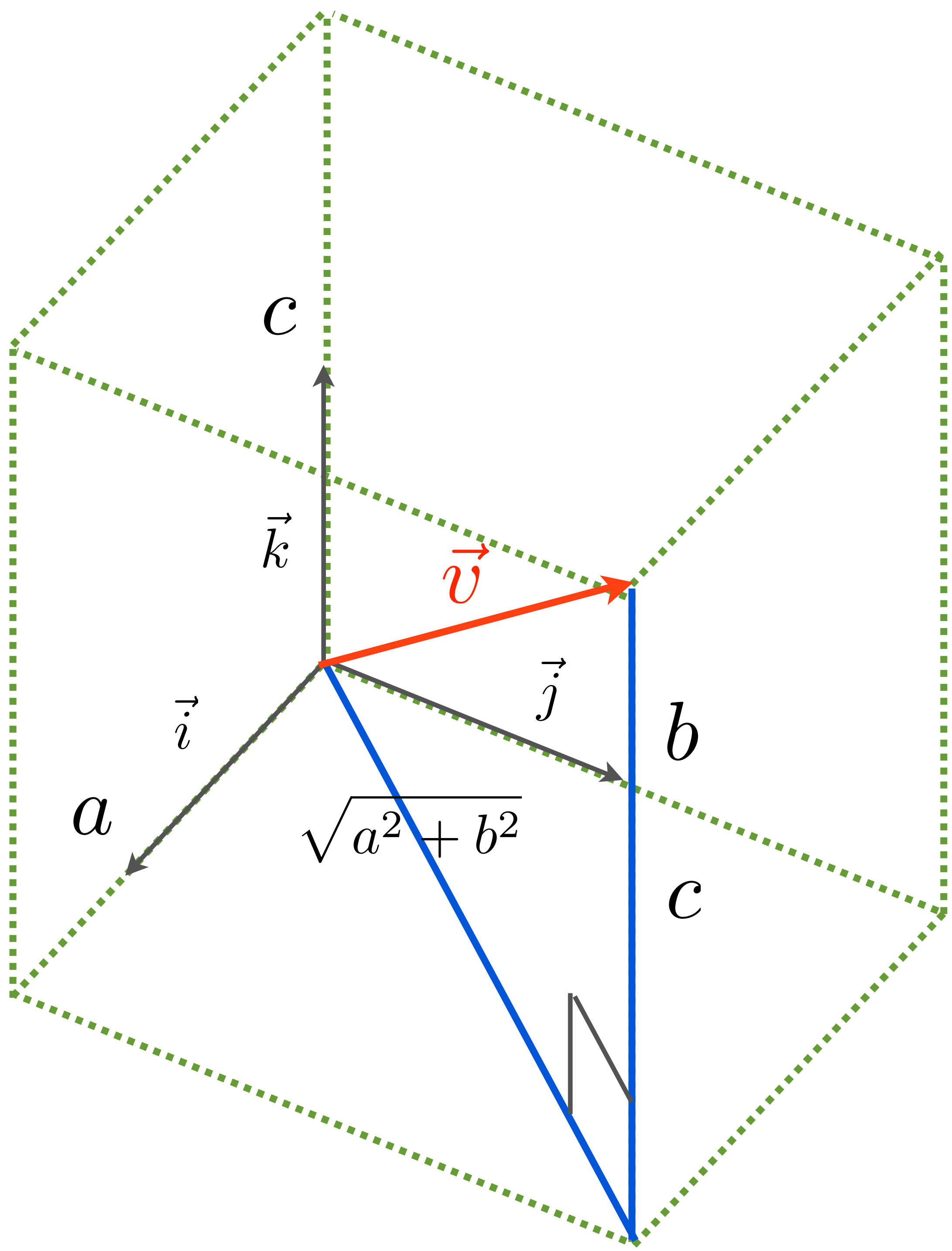


Dans $\mathbb{R}^3$



Dans $\mathbb{R}^3$

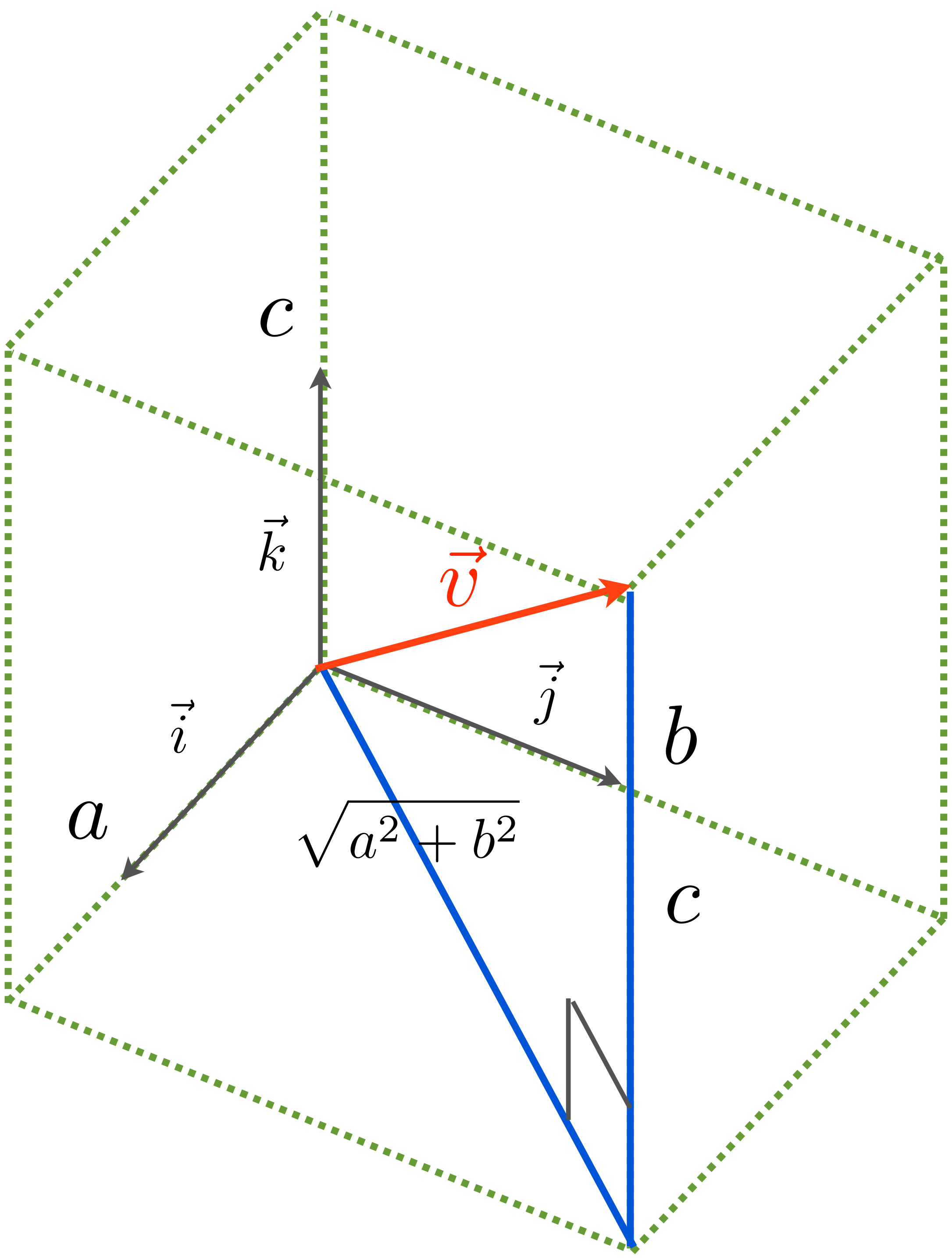
$\|\vec{v}\|$



Dans $\mathbb{R}^3$

$$\|\vec{v}\|$$

$$= \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2+c^2}$$

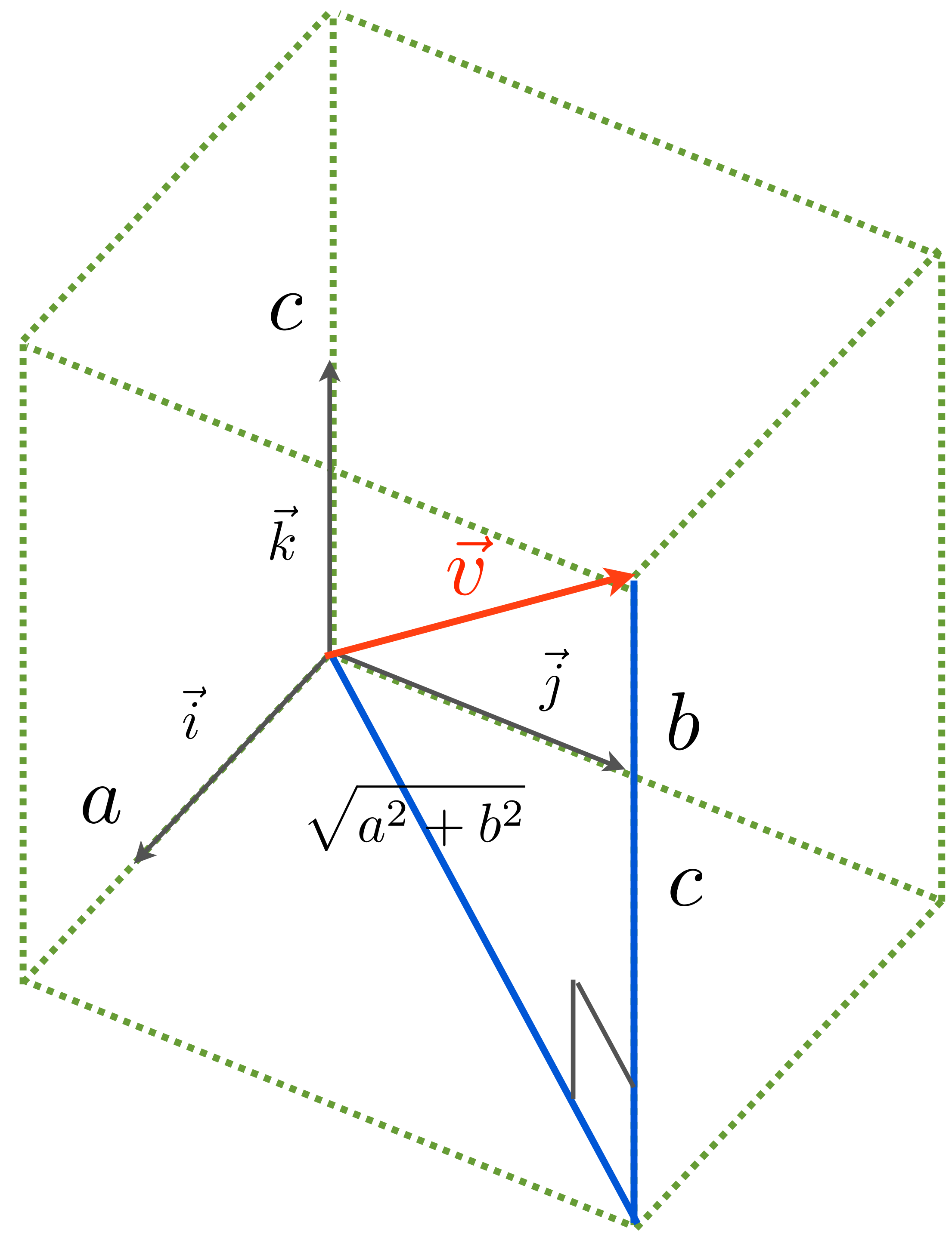


Dans $\mathbb{R}^3$

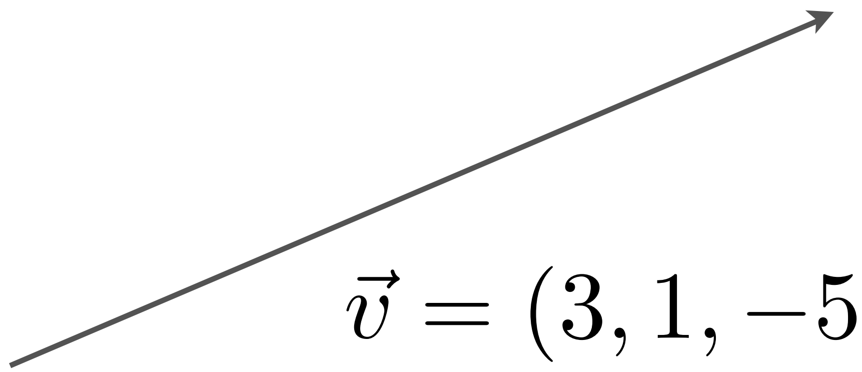
$$\|\vec{v}\|$$

$$= \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$



Exemple



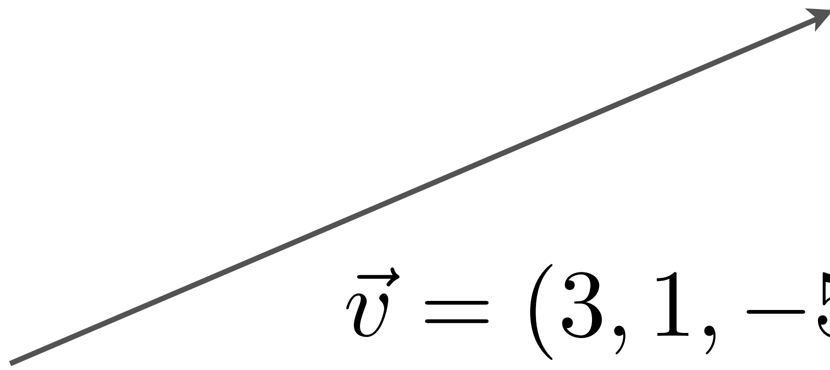
$$\vec{v} = (3, 1, -5)$$

Exemple

$$\vec{v} = (3, 1, -5)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2}$$

Exemple



$$\vec{v} = (3, 1, -5)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2} \; = \sqrt{9 + 1 + 25}$$

Exemple

$$\vec{v} = (3, 1, -5)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}$$

Définition

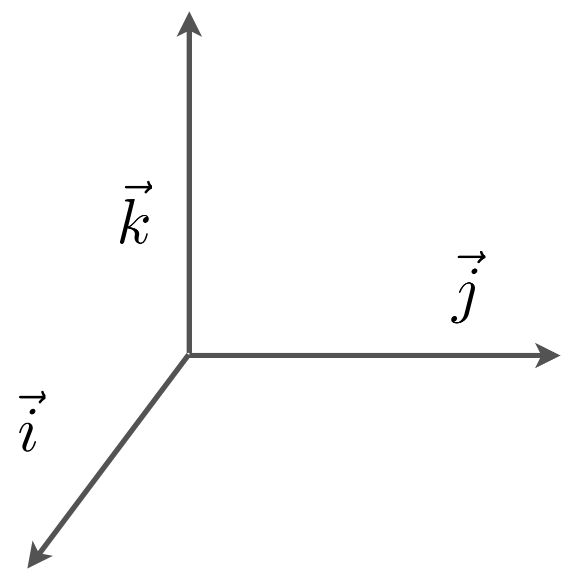
Soit $\mathcal{E}$, un espace affine muni d'un repère orthonormé, la distance entre deux points A et B, notée $d(A, B)$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Définition

Soit $\mathcal{E}$, un espace affine muni d'un repère orthonormé, la distance entre deux points A et B, notée $d(A, B)$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

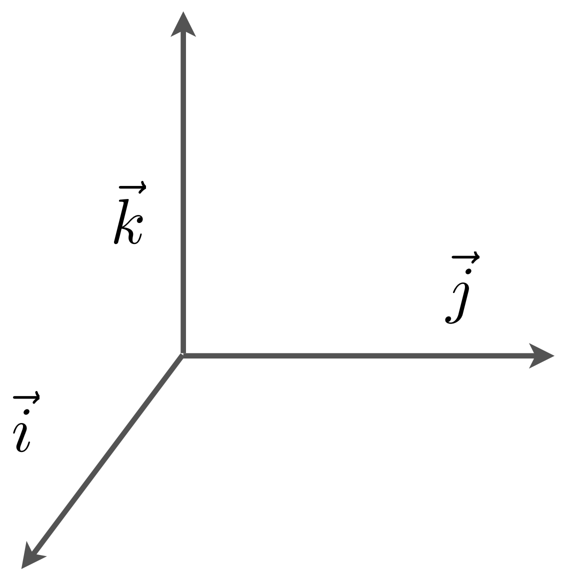
$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Exemple



Exemple

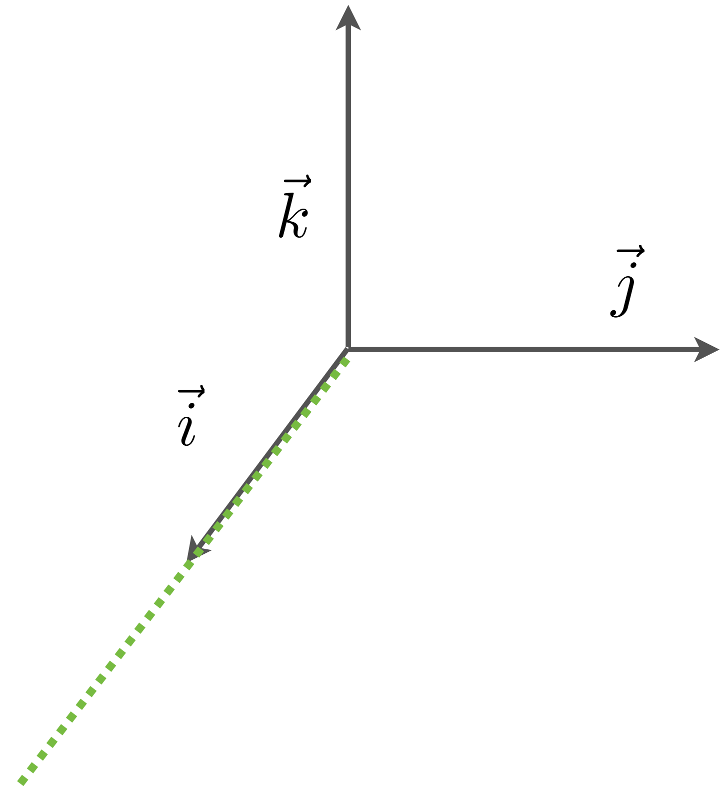
$$A = (2, -1, 3)$$



$$B = (-1, 2, -1)$$

Exemple

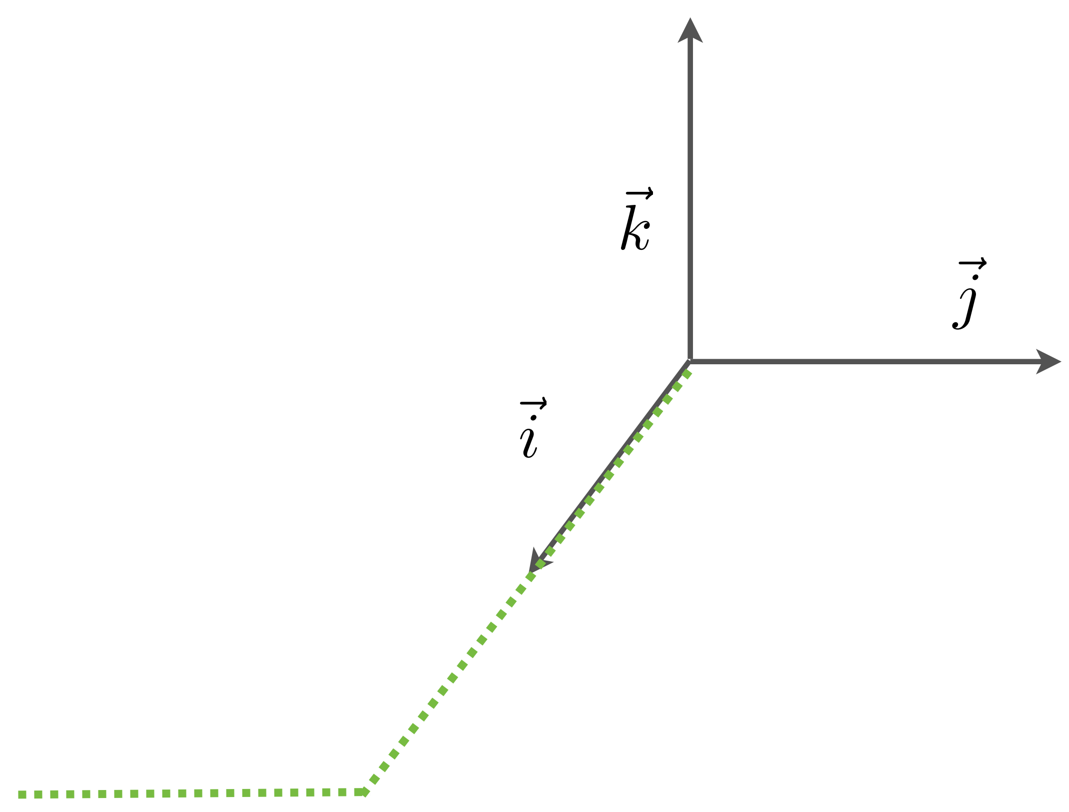
$A = (2, -1, 3)$



$B = (-1, 2, -1)$

Exemple

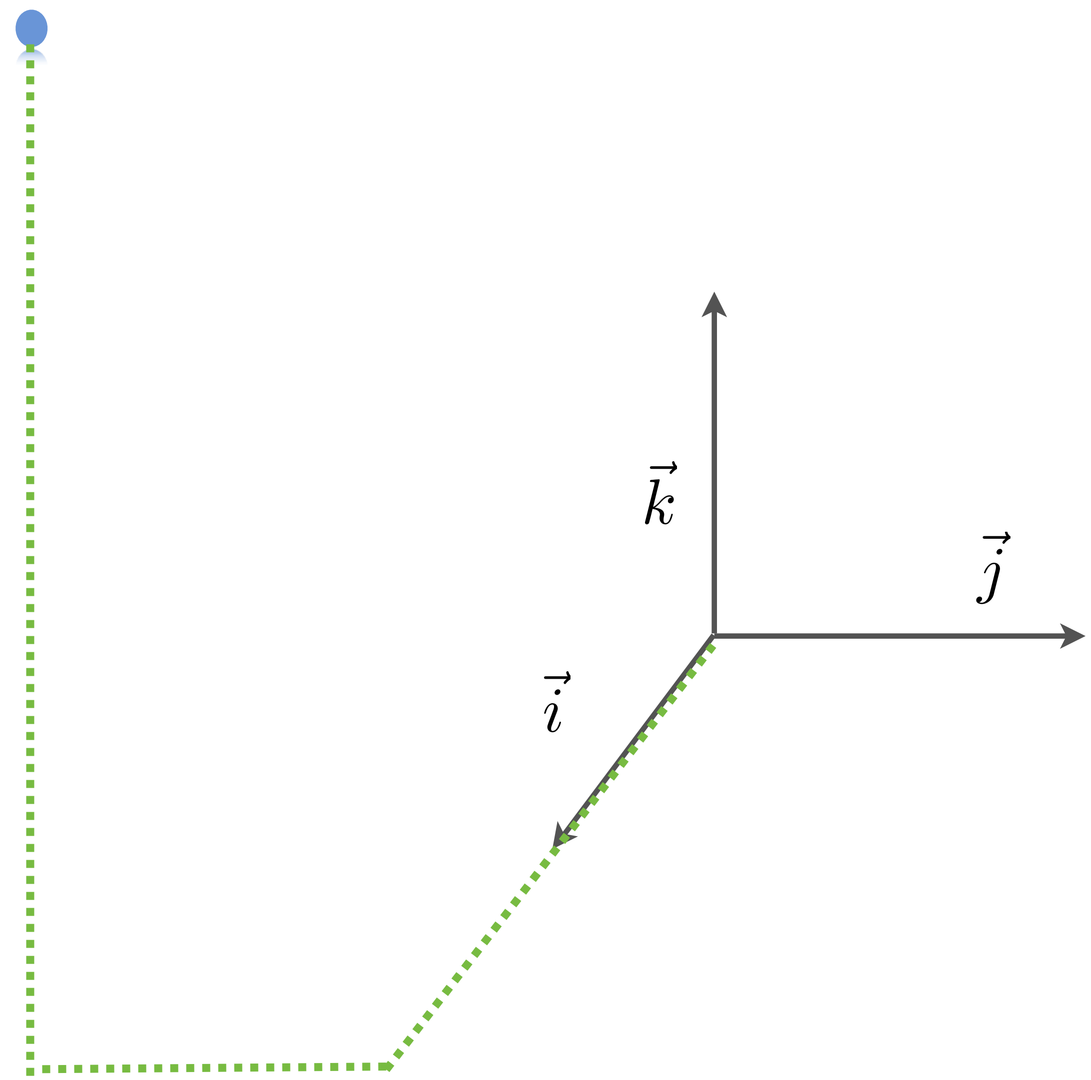
$$A = (2, -1, 3)$$



$$B = (-1, 2, -1)$$

Exemple

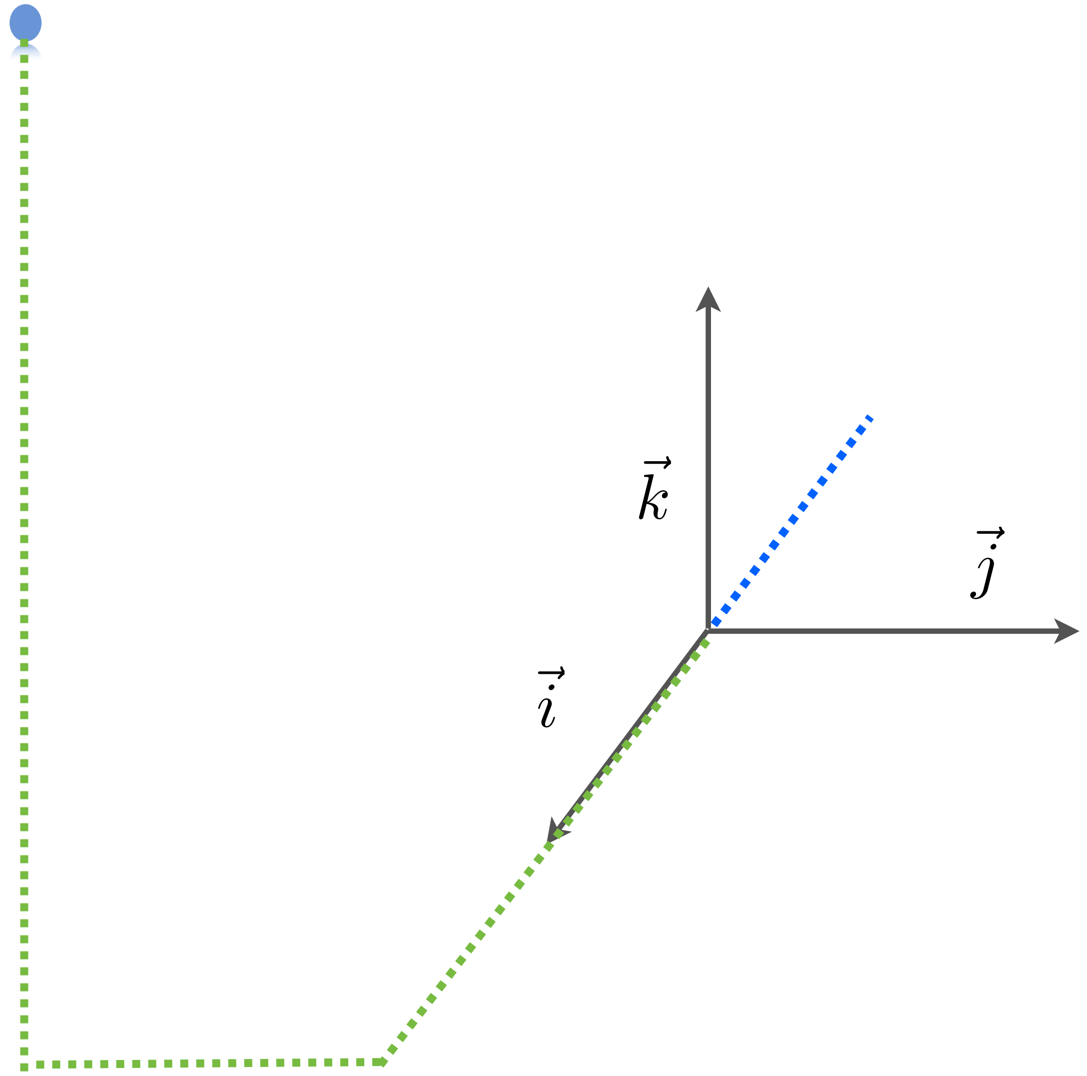
$A = (2, -1, 3)$



$B = (-1, 2, -1)$

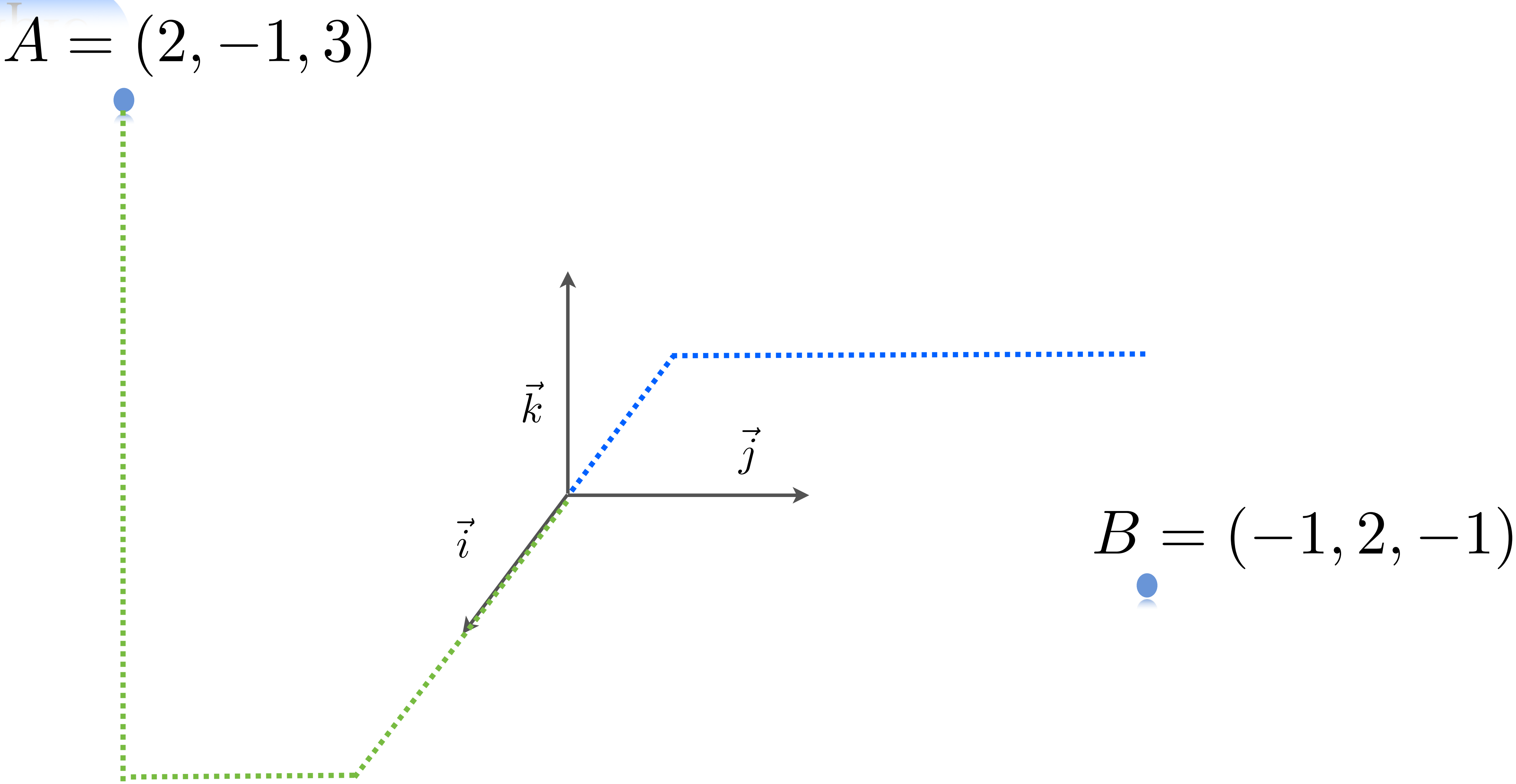
Exemple

$A = (2, -1, 3)$

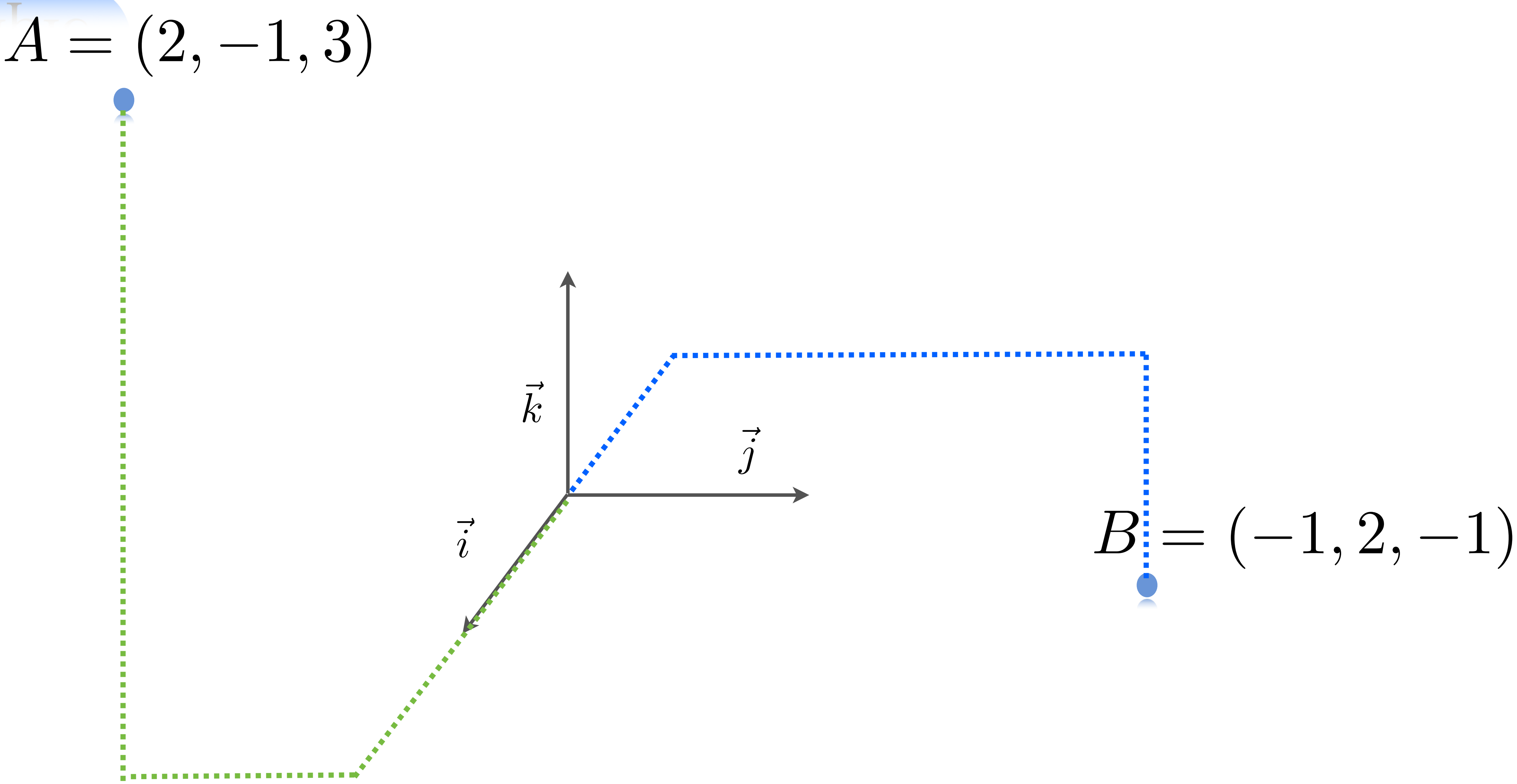


$B = (-1, 2, -1)$

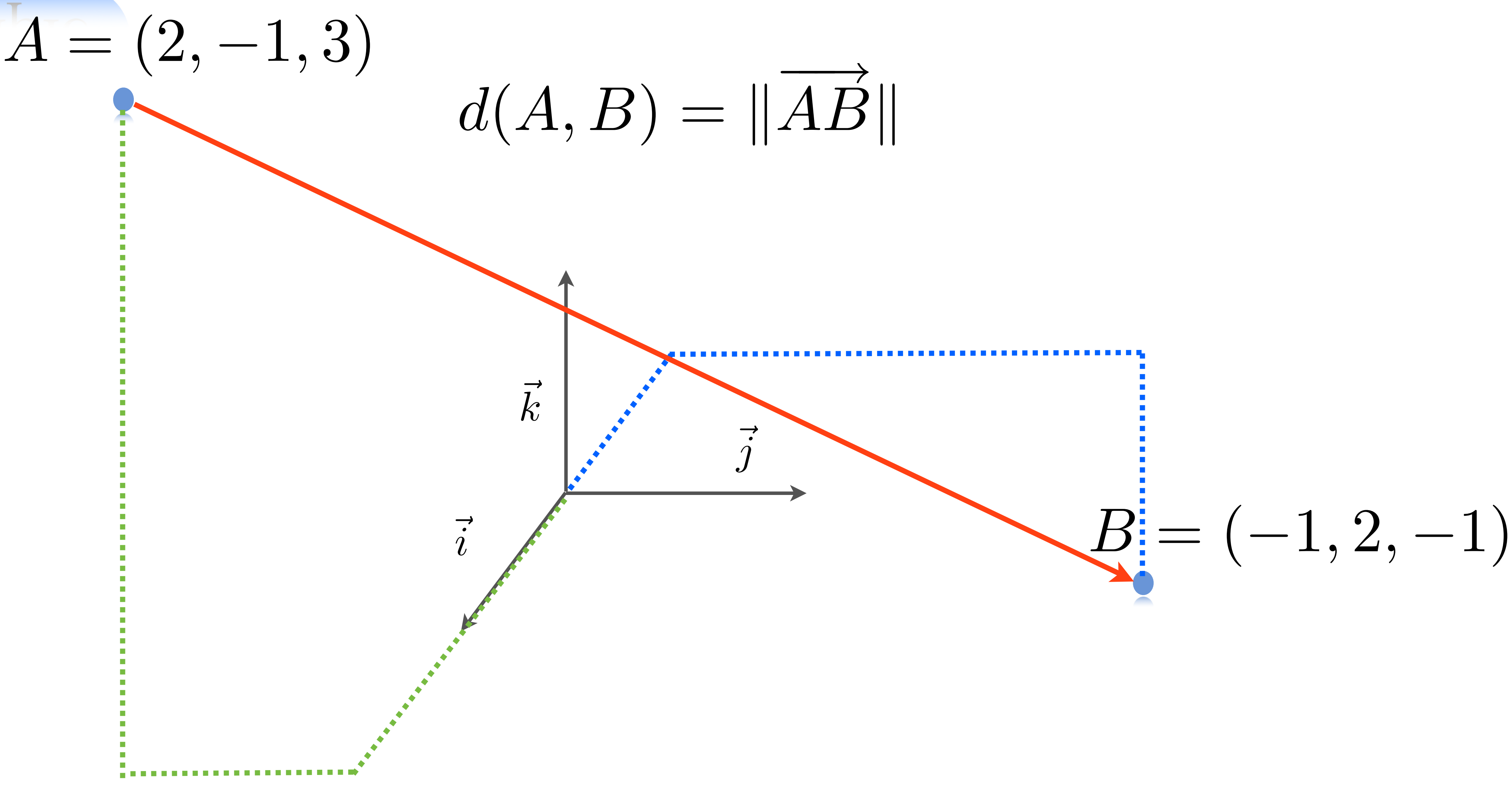
Exemple



Exemple



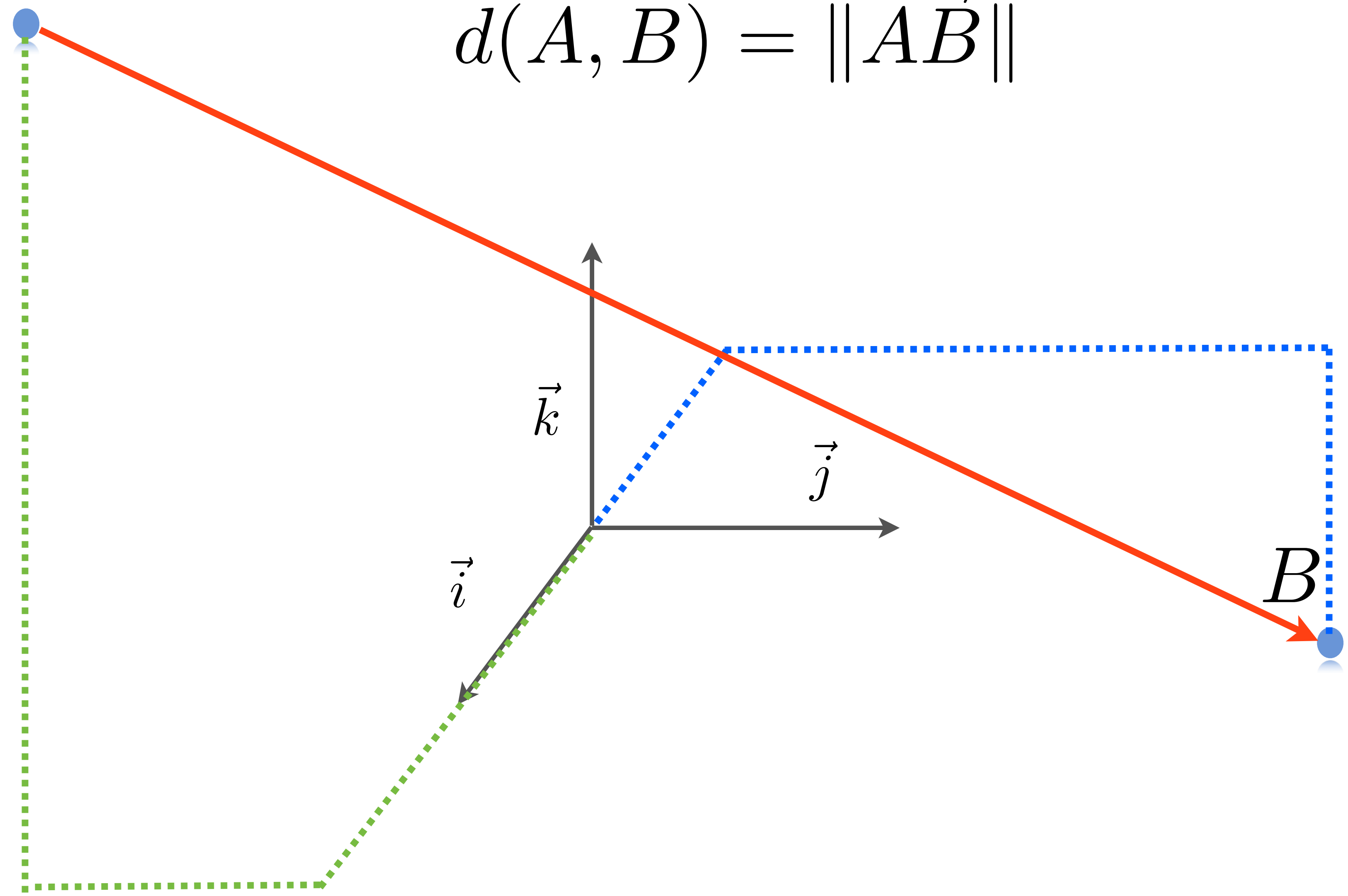
Exemple



Exemple

$A = (2, -1, 3)$

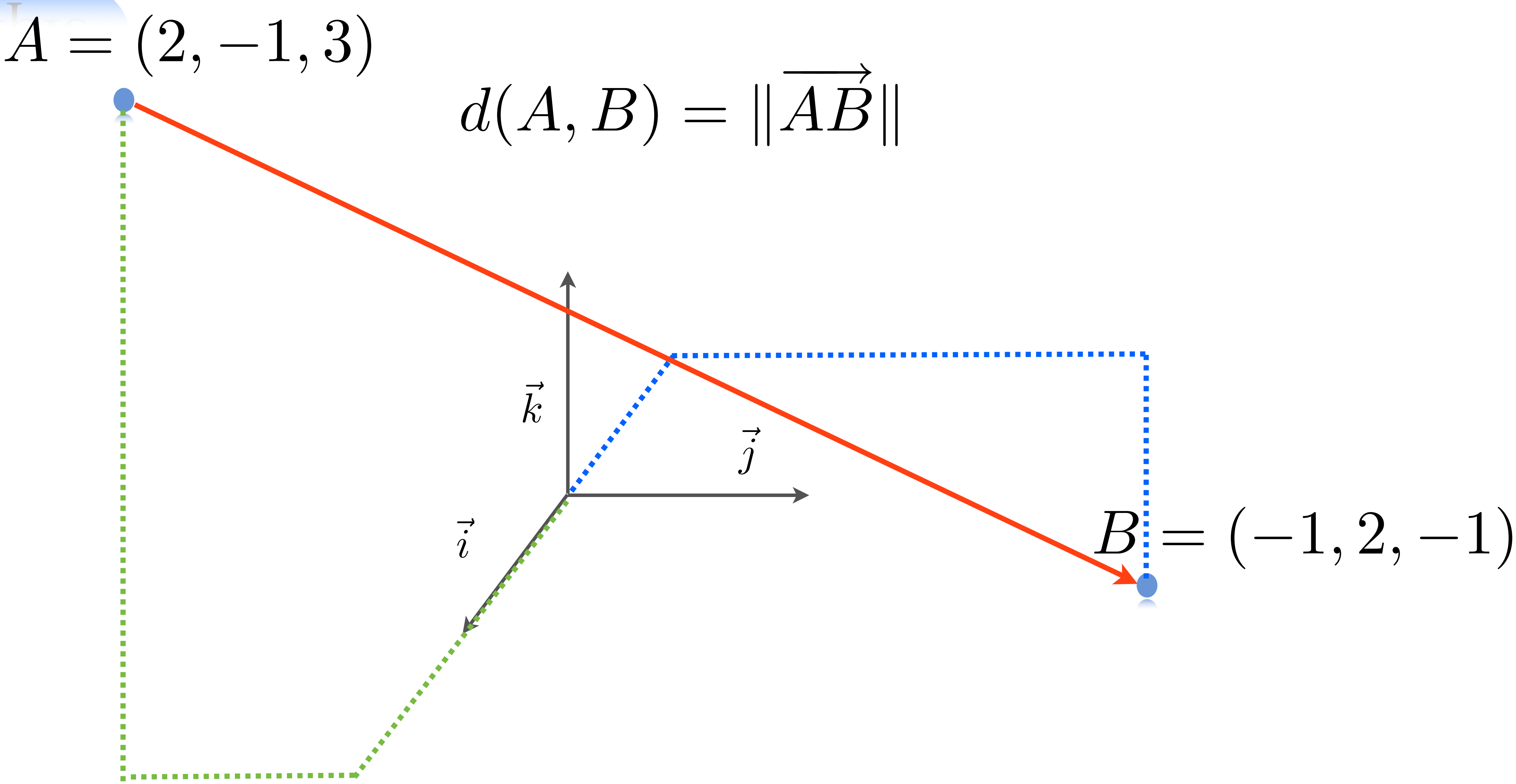
$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$



$B = (-1, 2, -1)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1) - (2, -1, 3)$

Exemple

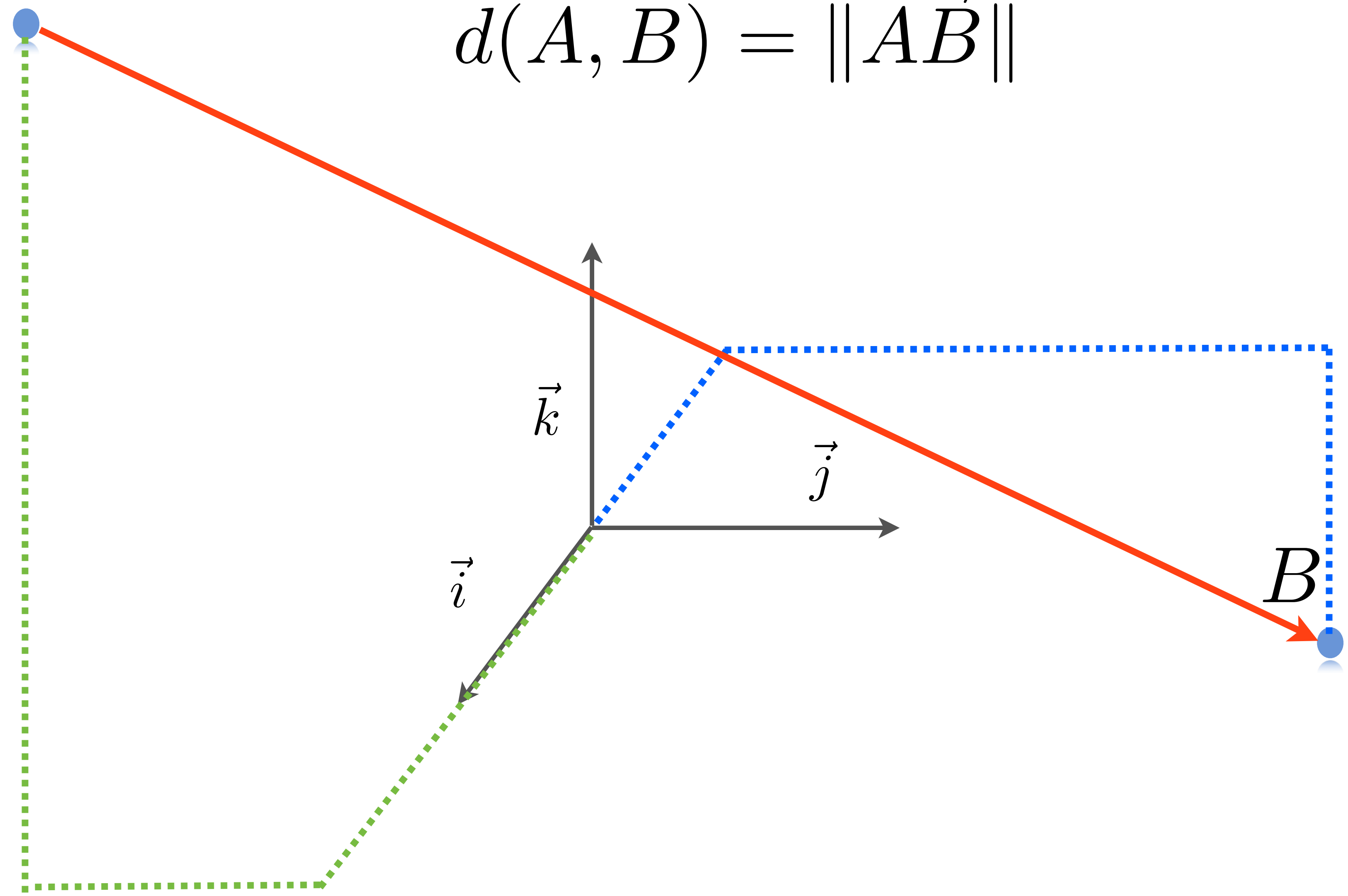


$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1) - (2, -1, 3) = (-3, 3, -4)$$

Exemple

$A = (2, -1, 3)$

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

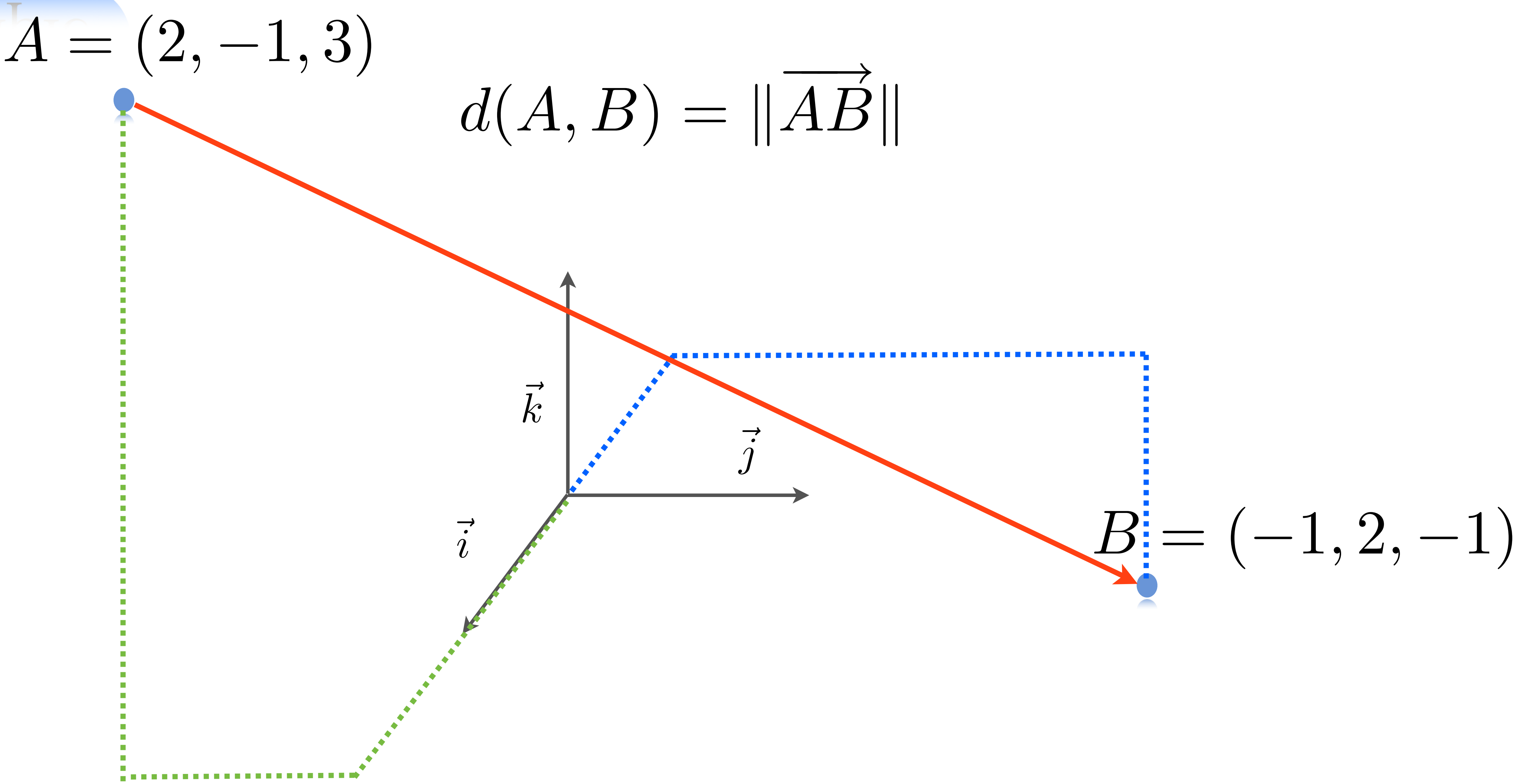


$B = (-1, 2, -1)$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1) - (2, -1, 3) = (-3, 3, -4)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-4)^2}$$

Exemple



$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1) - (2, -1, 3) = (-3, 3, -4)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{34}$$

Définition Un vecteur $\vec{v}$ est dit unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Définition Un vecteur $\vec{v}$ est dit unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Remarque:

Définition Un vecteur $\vec{v}$ est dit unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Remarque:

Si on a un vecteur non nul $\vec{u}$, on peut toujours construire un vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que $\vec{u}$ de la façon suivante:

Définition Un vecteur $\vec{v}$ est dit unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Remarque:

Si on a un vecteur non nul $\vec{u}$, on peut toujours construire un vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que $\vec{u}$ de la façon suivante:

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$$

Définition Un vecteur $\vec{v}$ est dit unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Remarque:

Si on a un vecteur non nul $\vec{u}$, on peut toujours construire un vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que $\vec{u}$ de la façon suivante:

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \qquad \text{car}$$

Définition Un vecteur $\vec{v}$ est dit unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Remarque:

Si on a un vecteur non nul $\vec{u}$, on peut toujours construire un vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que $\vec{u}$ de la façon suivante:

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \qquad \text{car} \quad \|\vec{w}\|$$

Définition Un vecteur $\vec{v}$ est dit unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Remarque:

Si on a un vecteur non nul $\vec{u}$, on peut toujours construire un vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que $\vec{u}$ de la façon suivante:

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \qquad \text{car} \quad \|\vec{w}\| = \left| \frac{1}{\|\vec{u}\|} \right| \|\vec{u}\|$$

Définition Un vecteur $\vec{v}$ est dit unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Remarque:

Si on a un vecteur non nul $\vec{u}$, on peut toujours construire un vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que $\vec{u}$ de la façon suivante:

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \qquad \text{car} \quad \|\vec{w}\| = \left|\frac{1}{\|\vec{u}\|}\right| \|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Définition Un vecteur $\vec{v}$ est dit unitaire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Remarque:

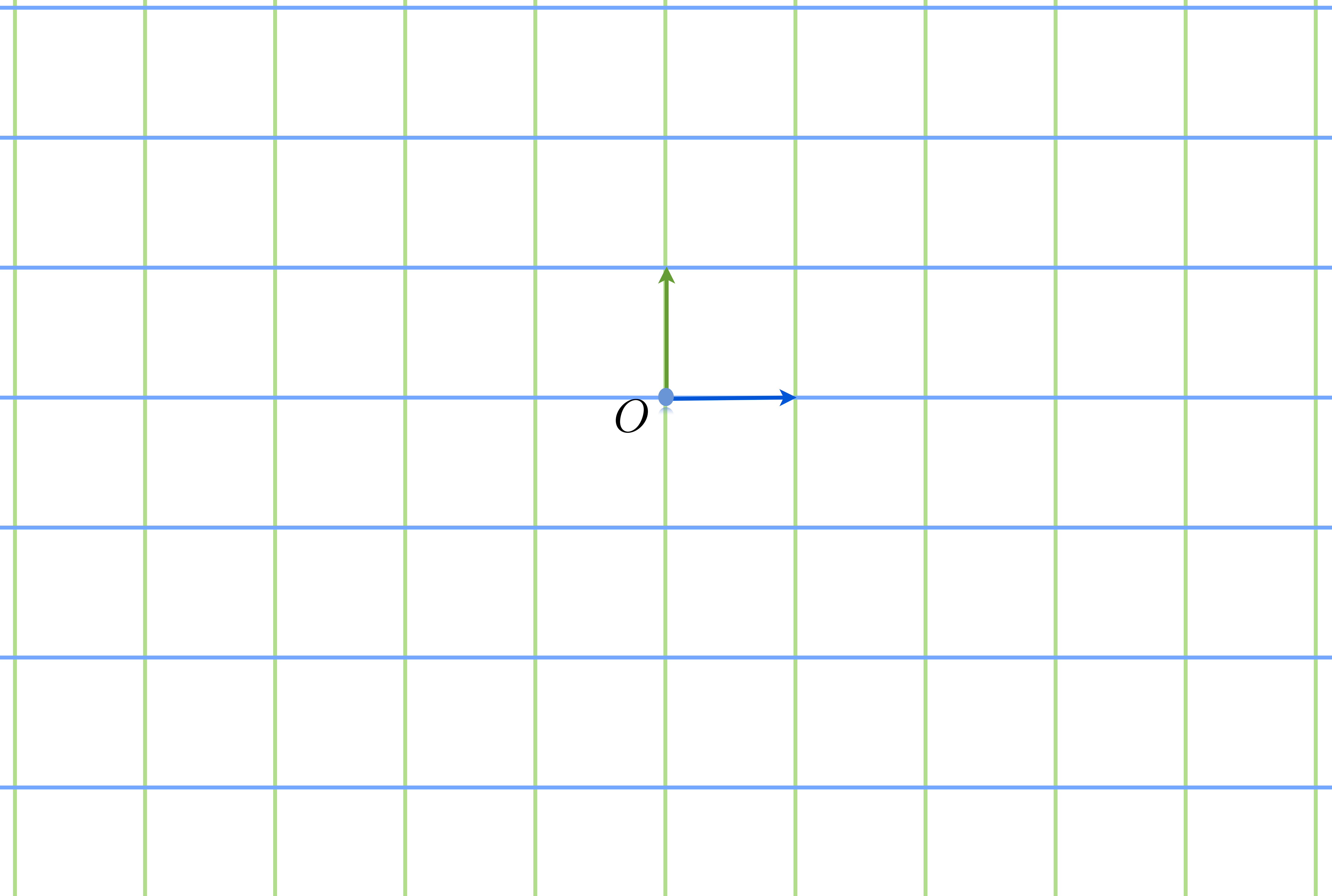
Si on a un vecteur non nul $\vec{u}$, on peut toujours construire un vecteur unitaire ayant la même direction et le même sens que $\vec{u}$ de la façon suivante:

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} \qquad \text{car} \quad \|\vec{w}\| = \left|\frac{1}{\|\vec{u}\|}\right| \|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1$$

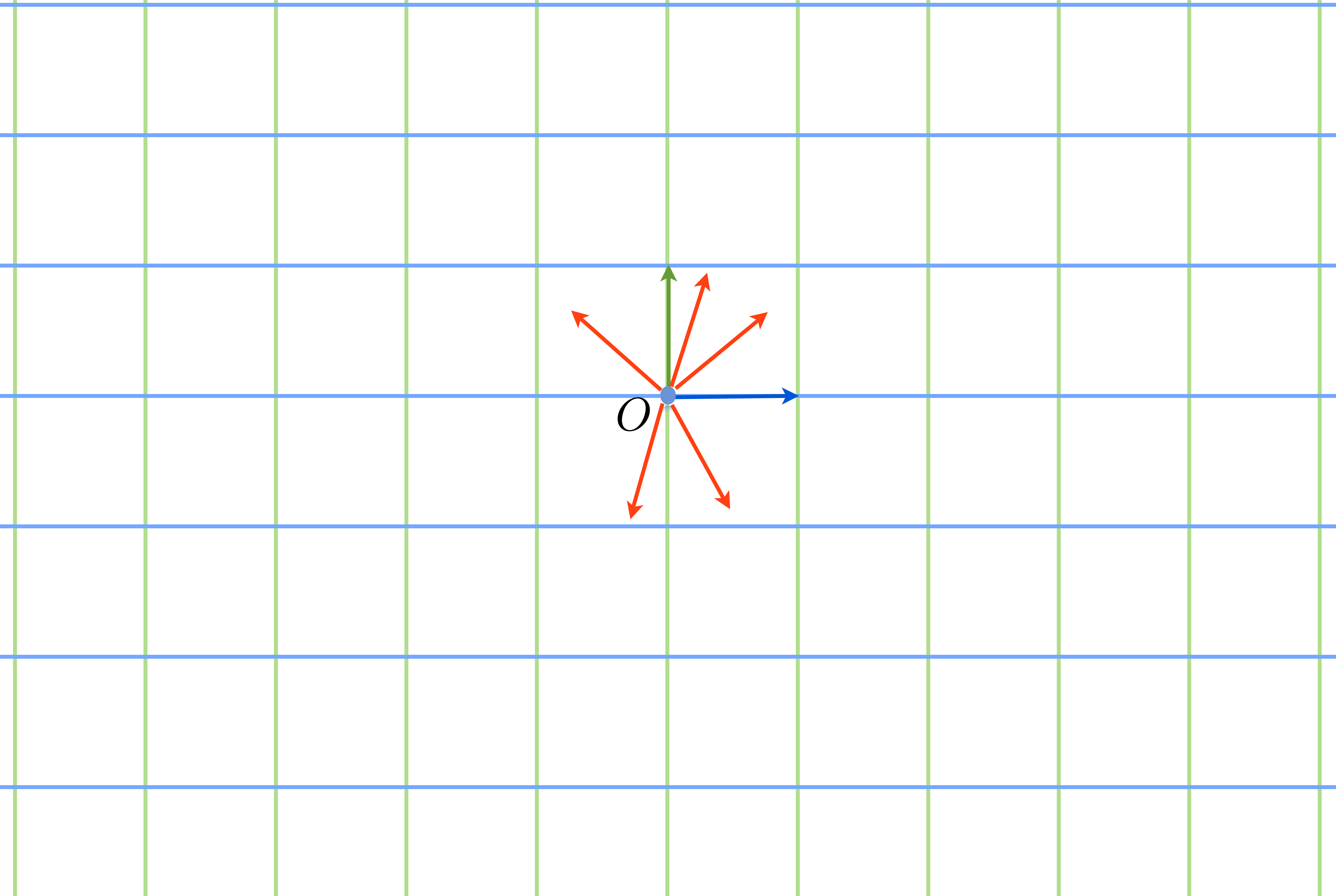
Faites les exercices suivants

p.50 # 1 à 5

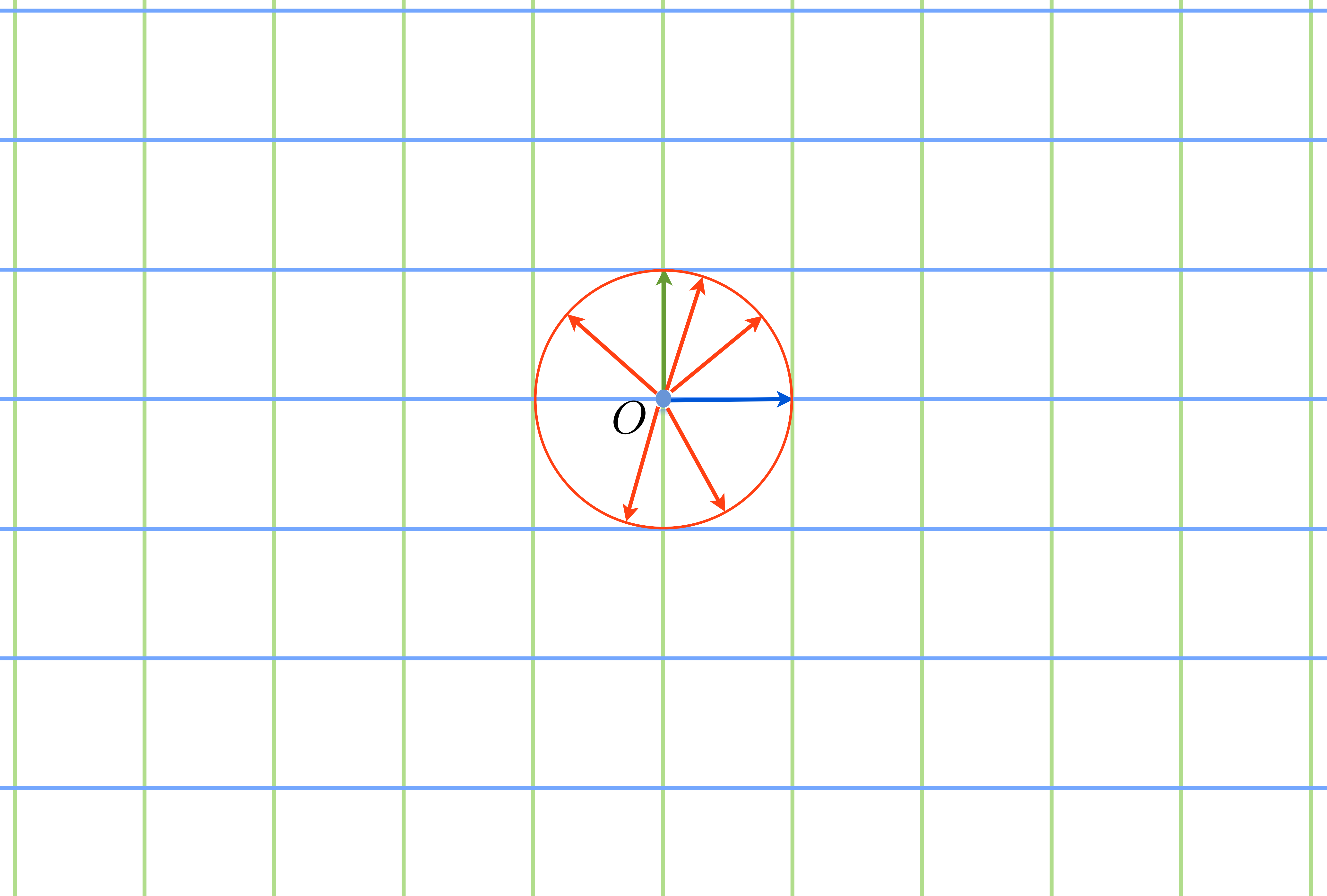
Dans $\mathbb{R}^2$



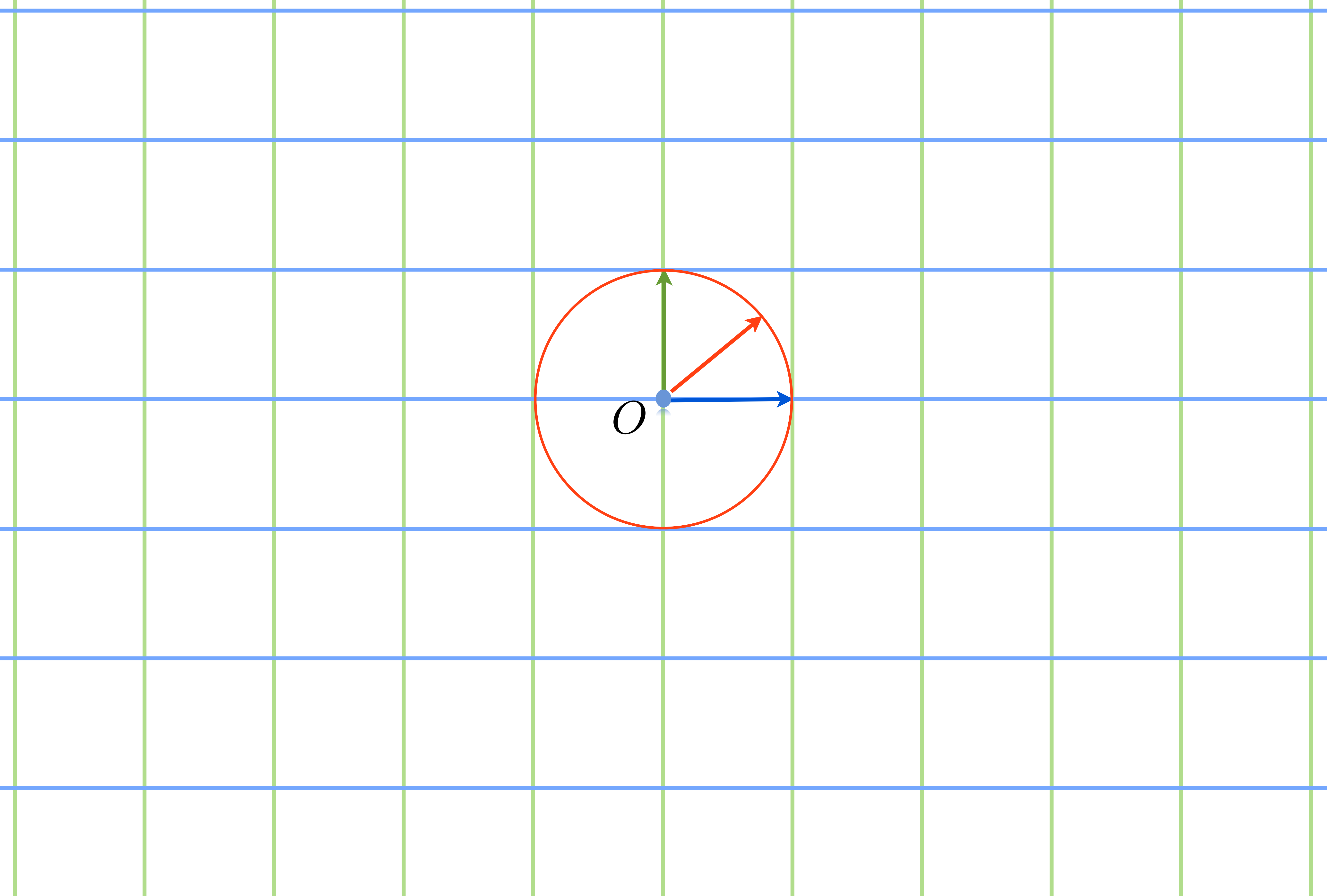
Dans $\mathbb{R}^2$



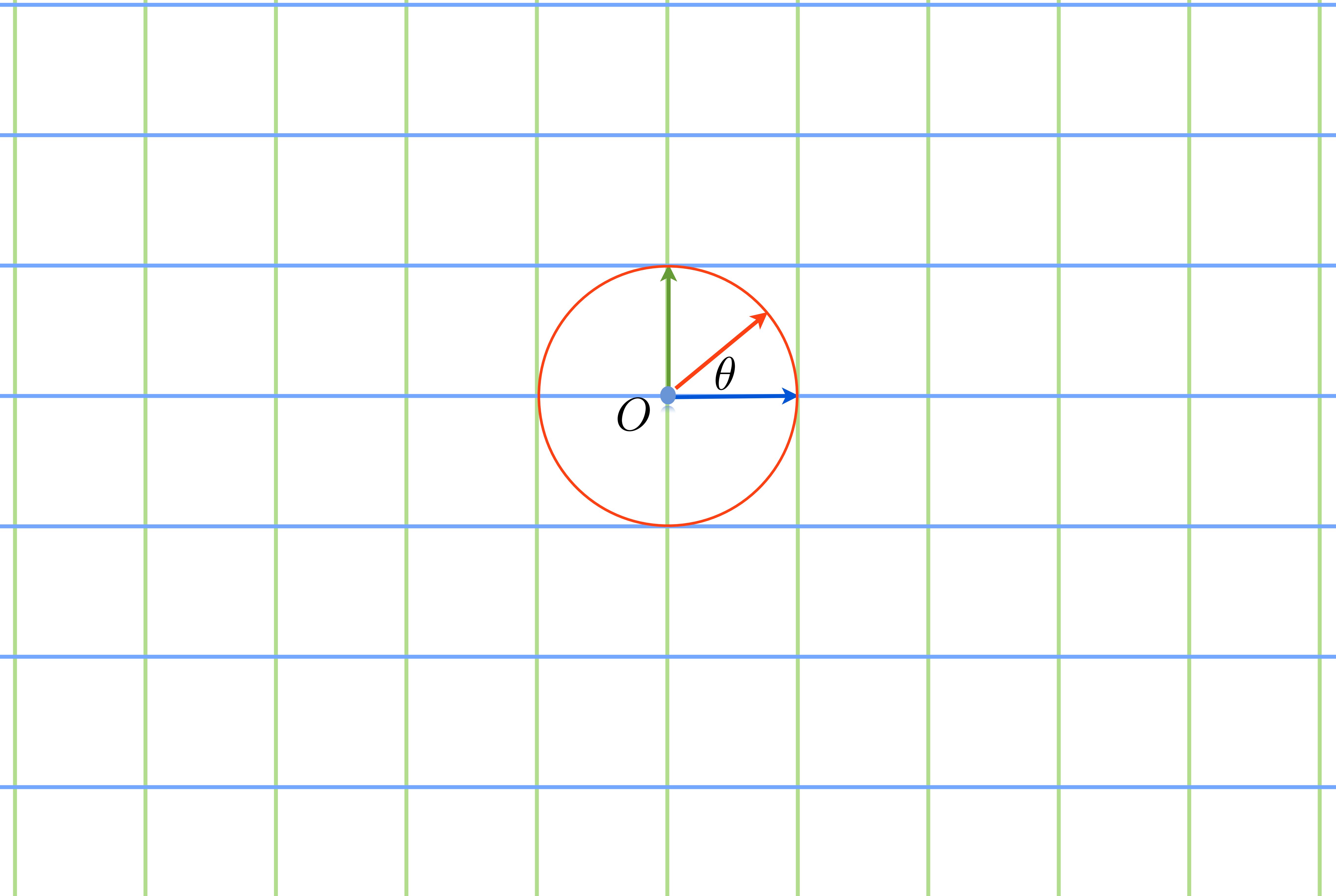
Dans $\mathbb{R}^2$



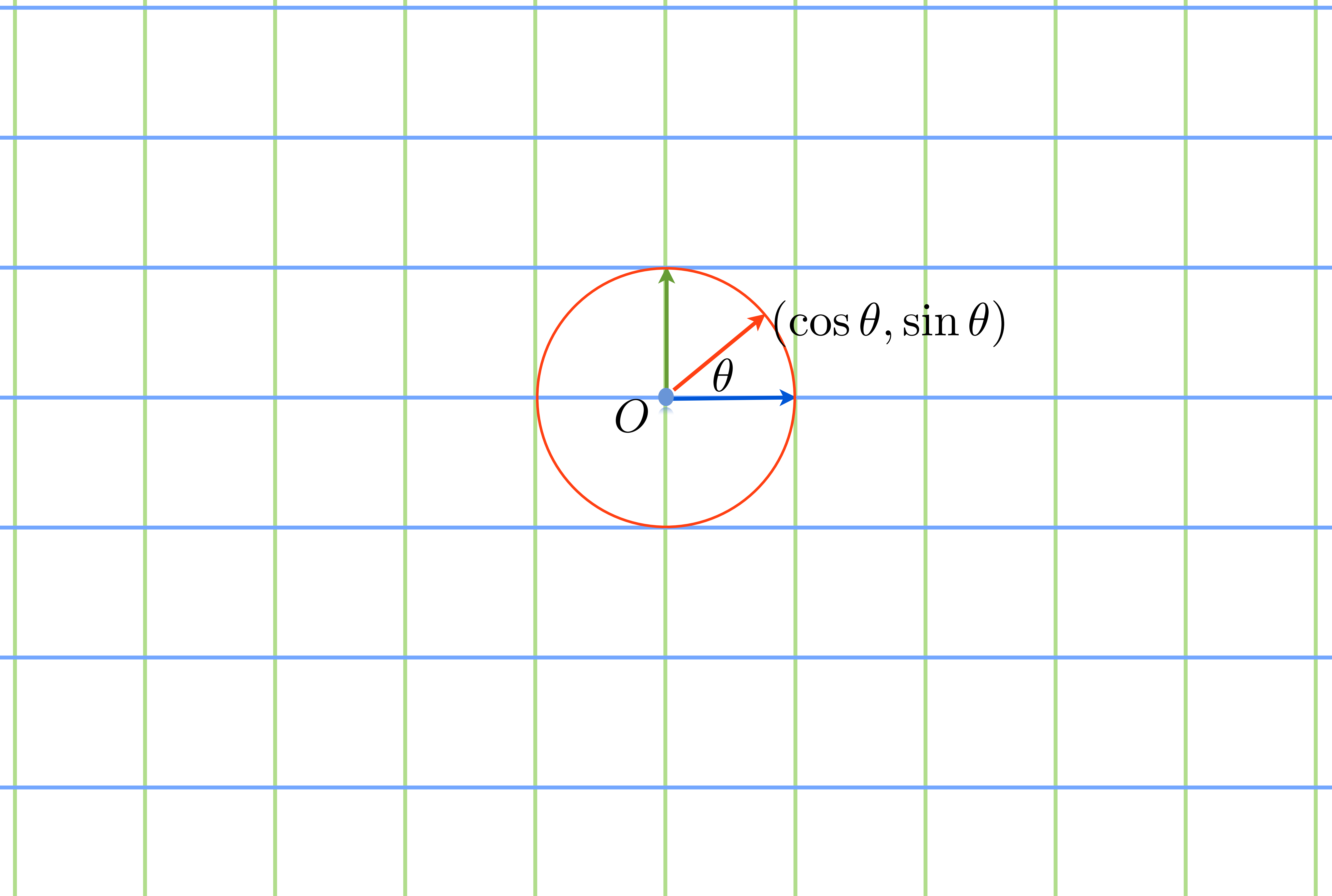
Dans $\mathbb{R}^2$



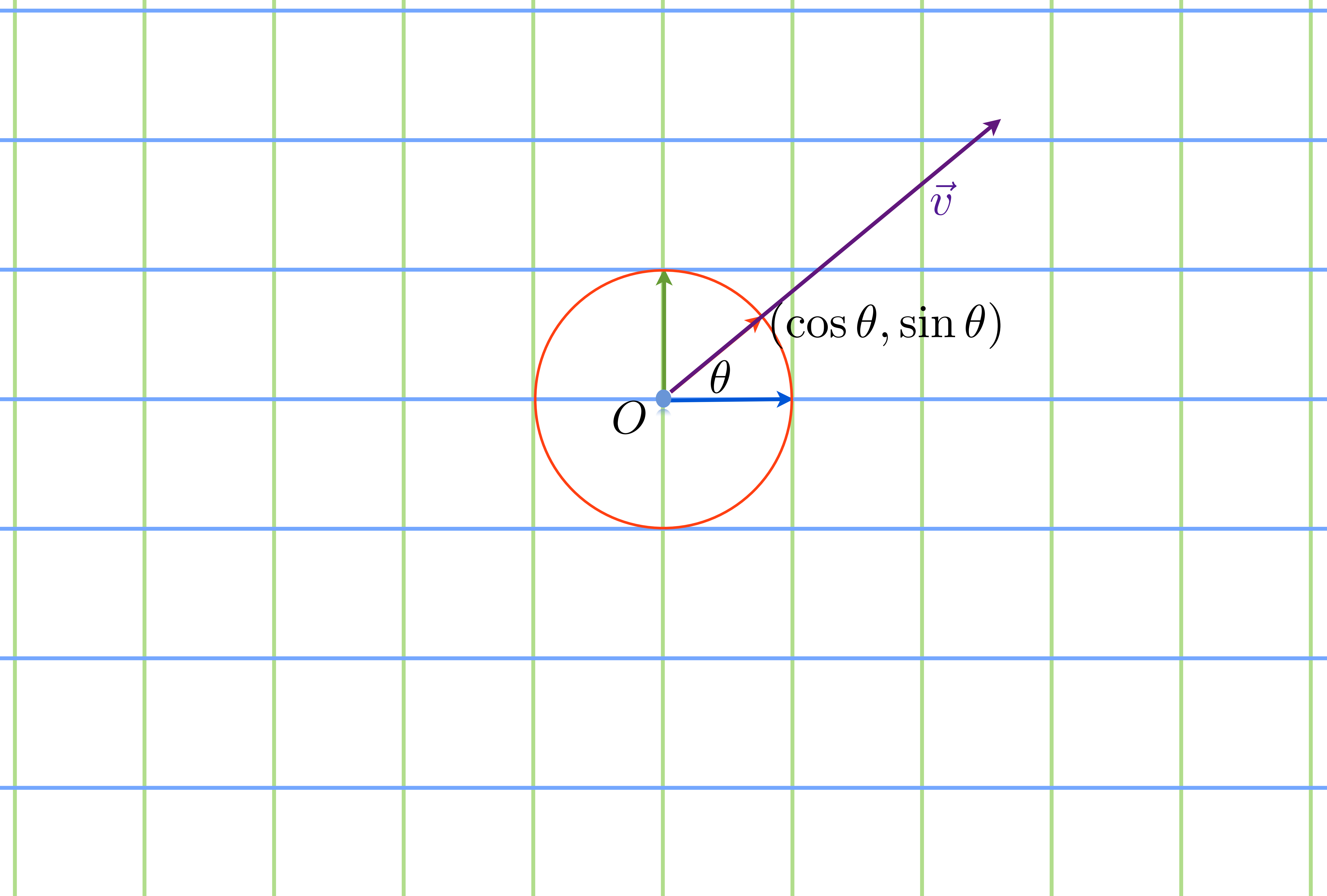
Dans $\mathbb{R}^2$



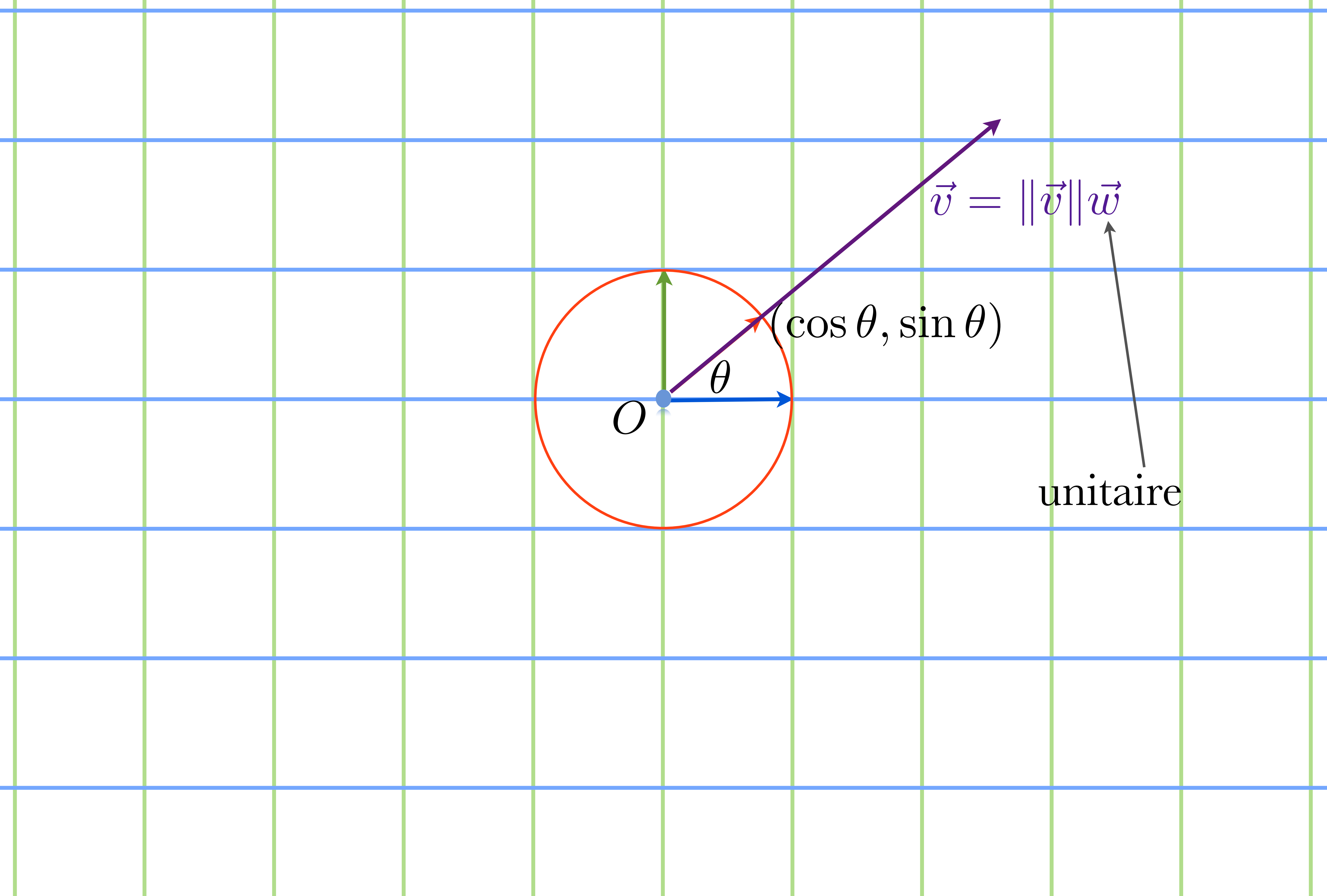
Dans $\mathbb{R}^2$



Dans $\mathbb{R}^2$

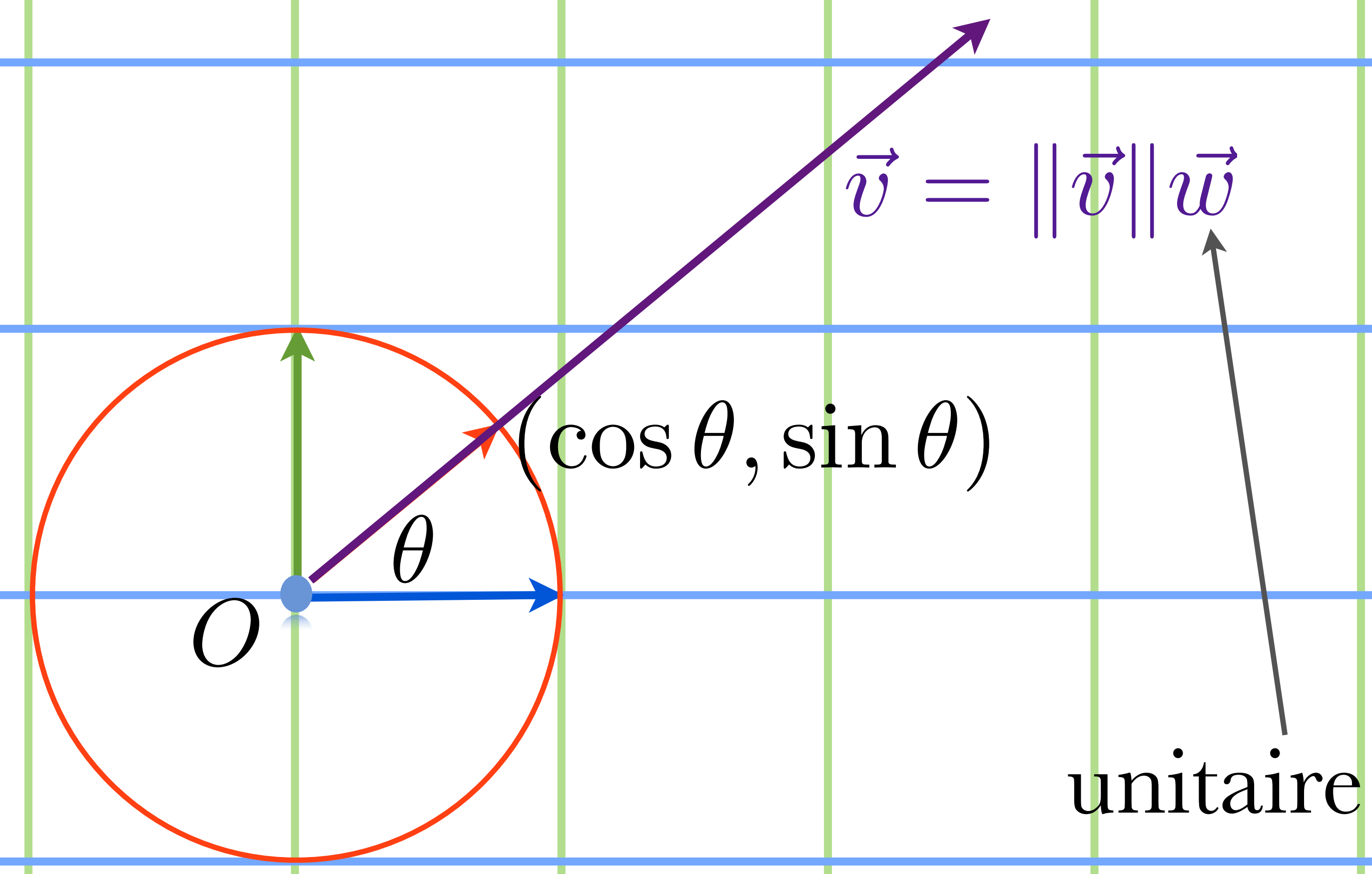


Dans $\mathbb{R}^2$



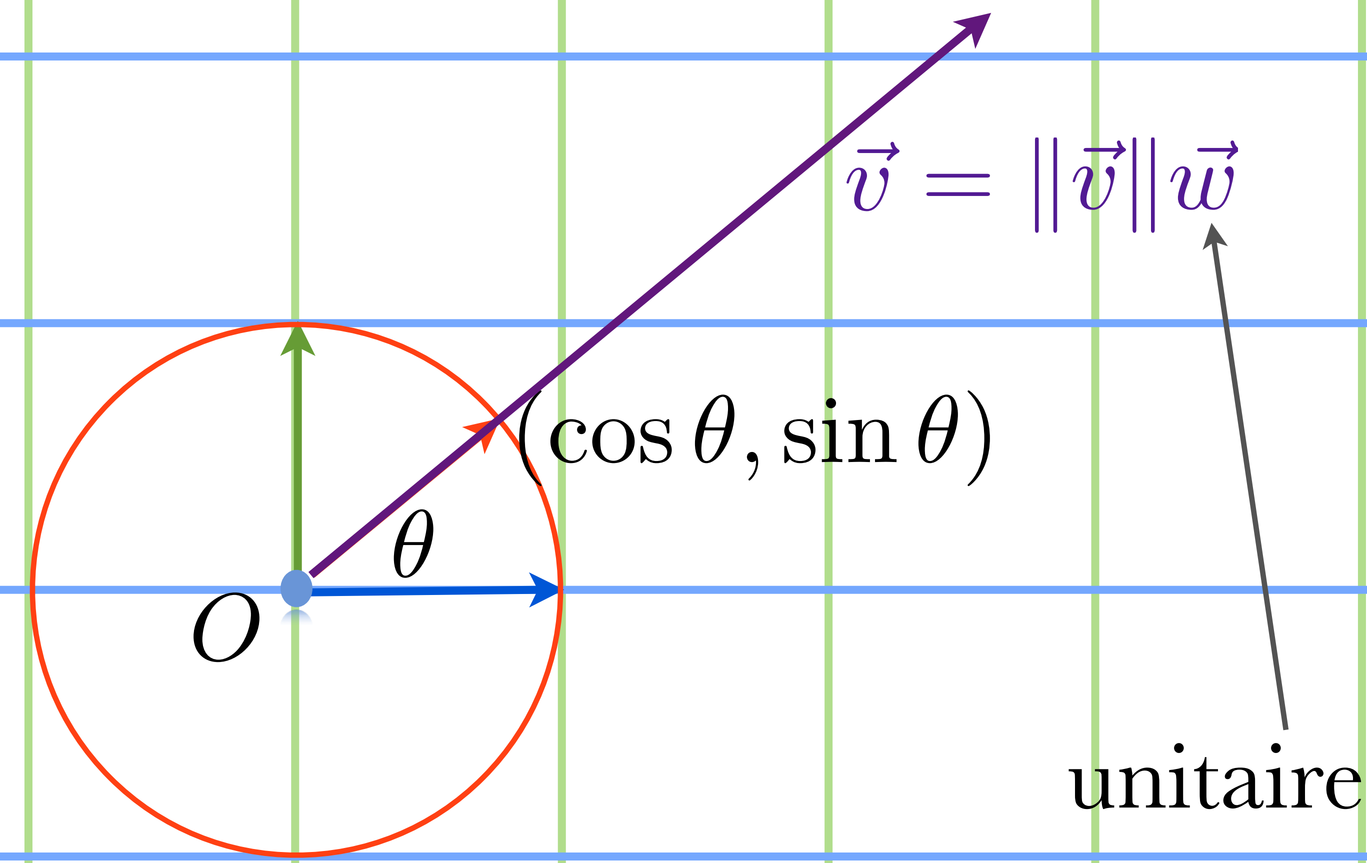
Dans $\mathbb{R}^2$

car $\vec{w} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$



Dans $\mathbb{R}^2$

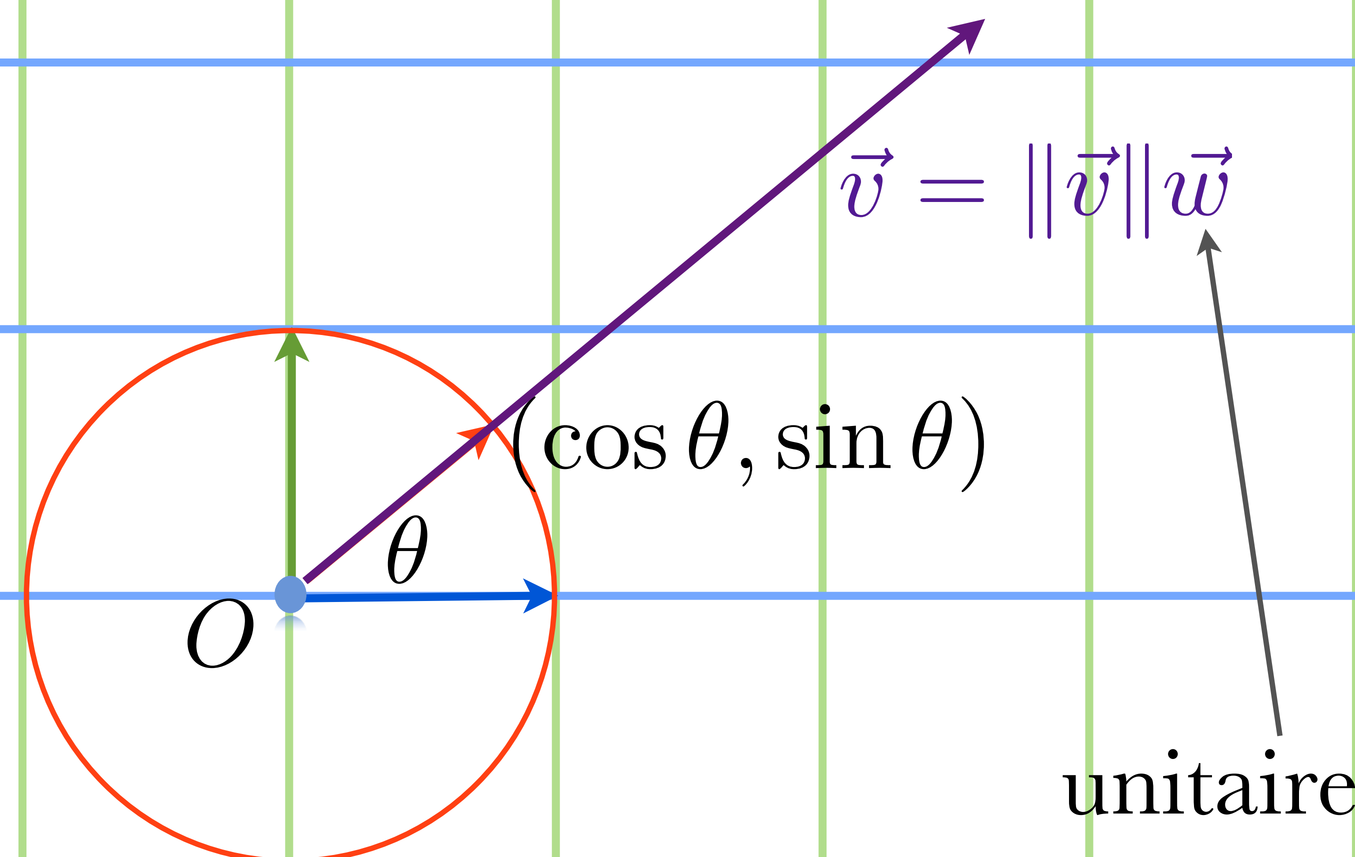
car $\quad \vec{w} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$



mais $\vec{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$

Dans $\mathbb{R}^2$

car $\vec{w} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$

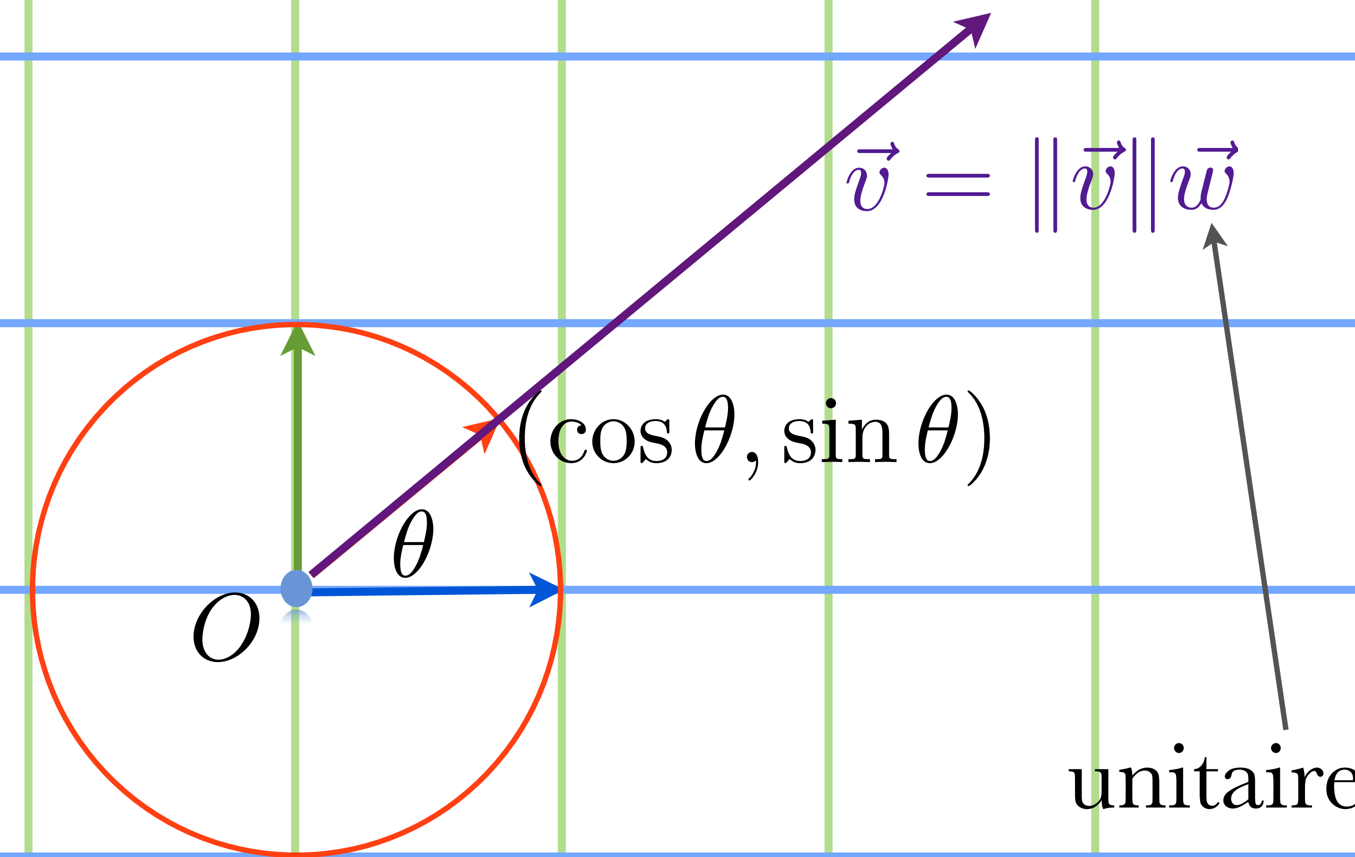


mais $\vec{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$

donc $\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta)$

Dans $\mathbb{R}^2$

car $\vec{w} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$

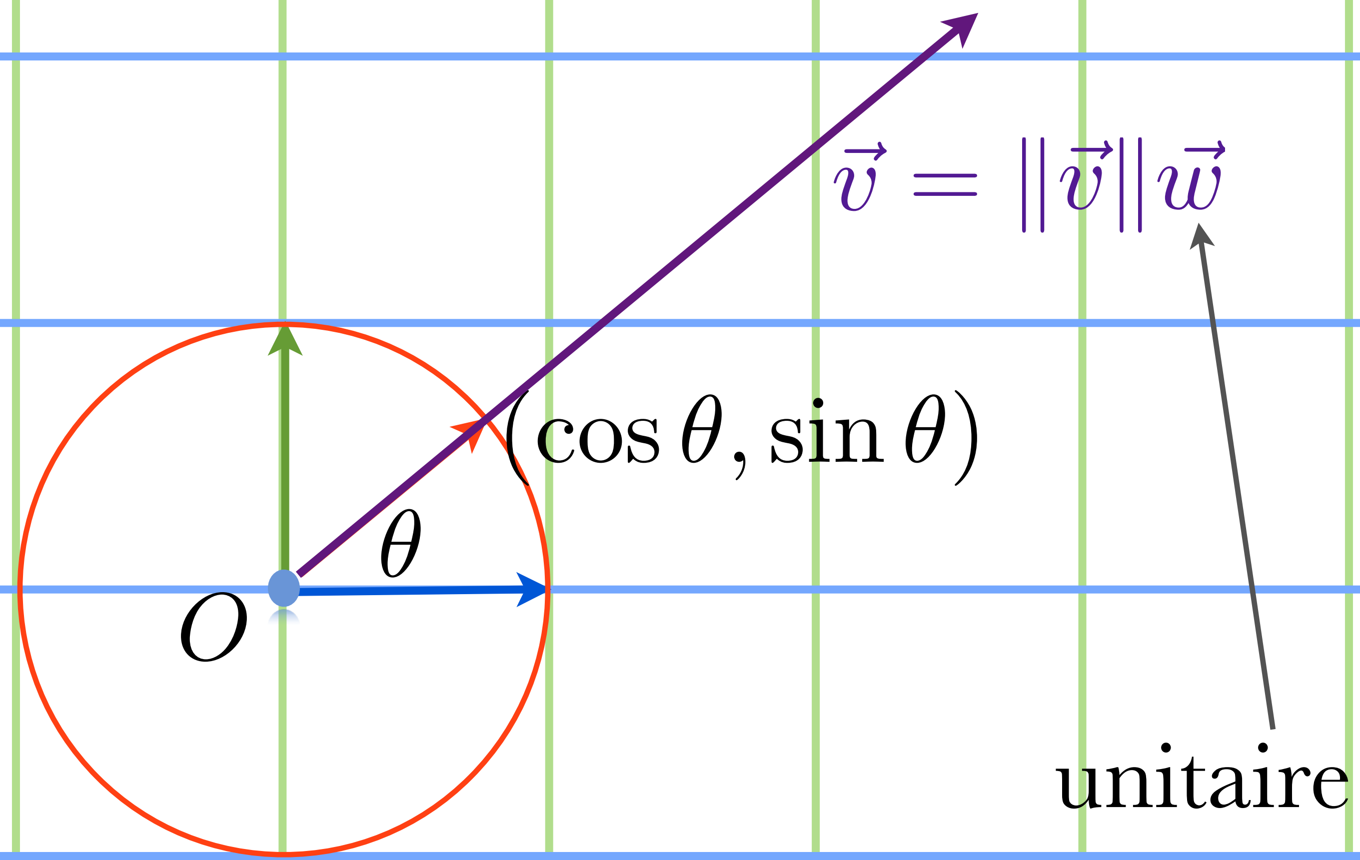


mais $\vec{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$

donc $\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta) = (\|\vec{v}\|\cos\theta, \|\vec{v}\|\sin\theta)$

Dans $\mathbb{R}^2$

car $\quad \vec{w} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$



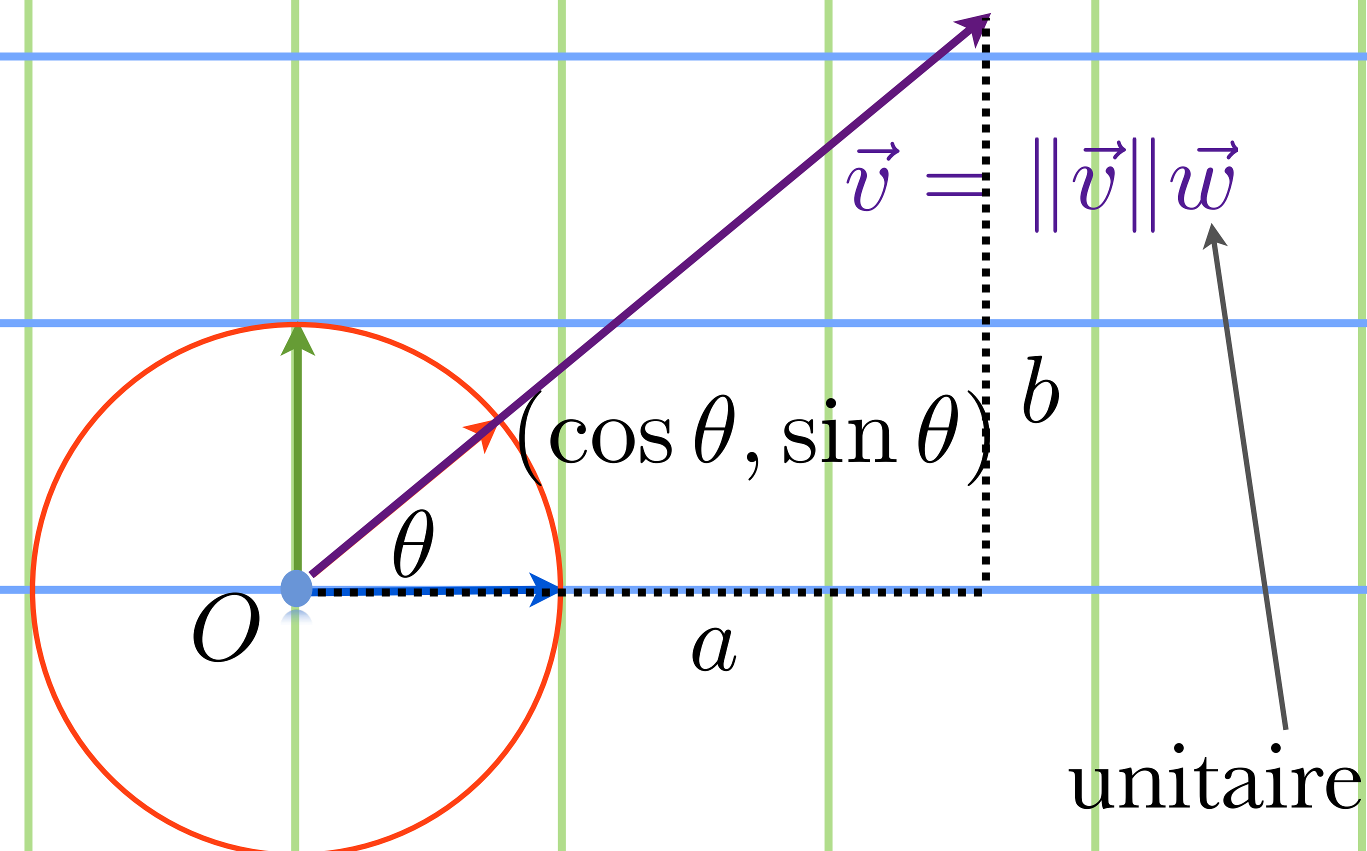
mais $\vec{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\text{donc } \vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta) = (\|\vec{v}\|\cos\theta, \|\vec{v}\|\sin\theta)$$

$$= (a, b)$$

Dans $\mathbb{R}^2$

car $\quad \vec{w} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$



mais $\vec{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$

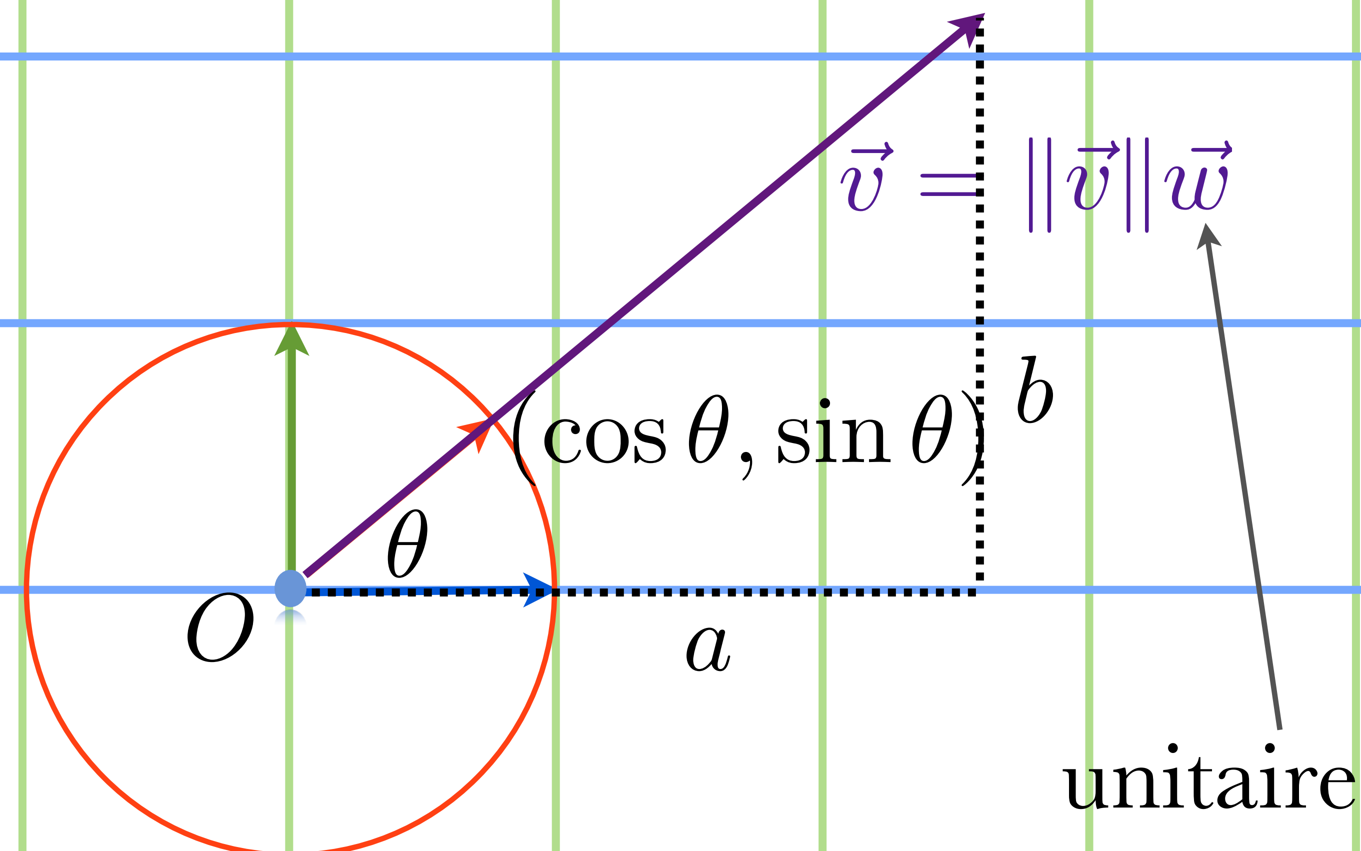
donc $\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta) = (\|\vec{v}\|\cos\theta, \|\vec{v}\|\sin\theta)$

$= (a, b)$

Dans $\mathbb{R}^2$

car $\vec{w} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$

$$\frac{a}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta$$



mais $\vec{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$

donc $\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta) = (\|\vec{v}\|\cos\theta, \|\vec{v}\|\sin\theta)$

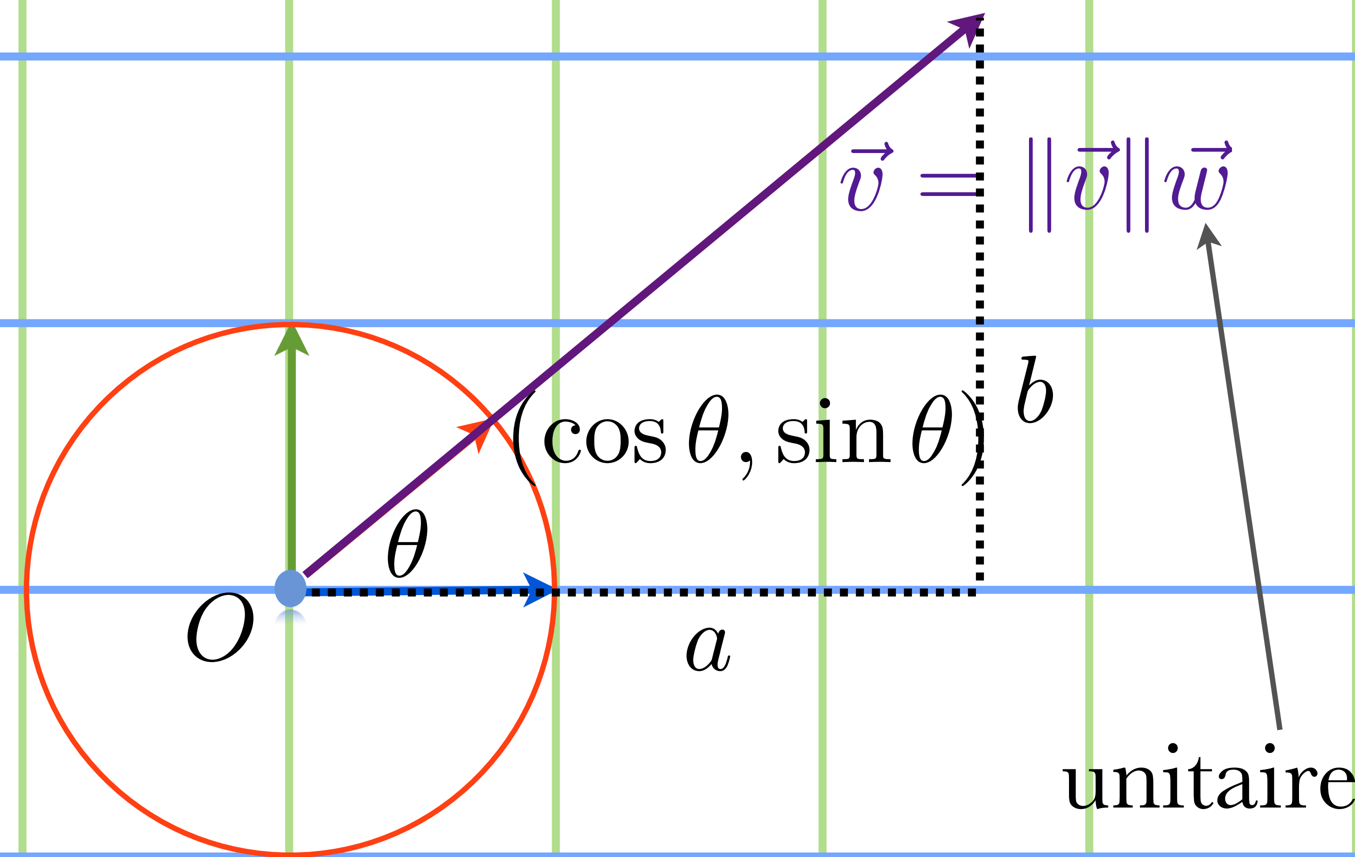
$$= (a, b)$$

Dans $\mathbb{R}^2$

car $\vec{w} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$

$$\frac{a}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta$$

$$a = \|\vec{v}\| \cos\theta$$

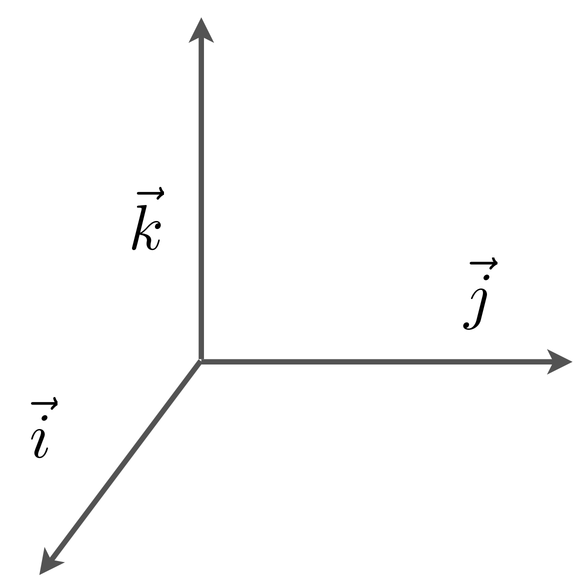


mais $\vec{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$

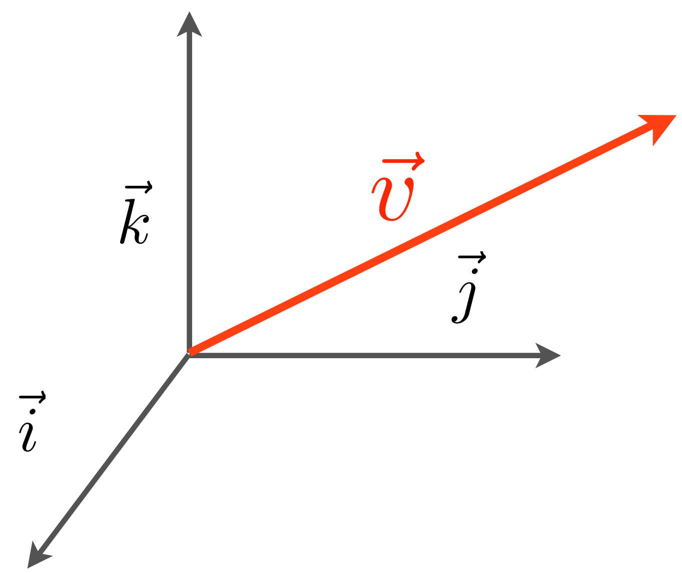
donc $\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta) = (\|\vec{v}\| \cos\theta, \|\vec{v}\| \sin\theta)$

$= (a, b)$

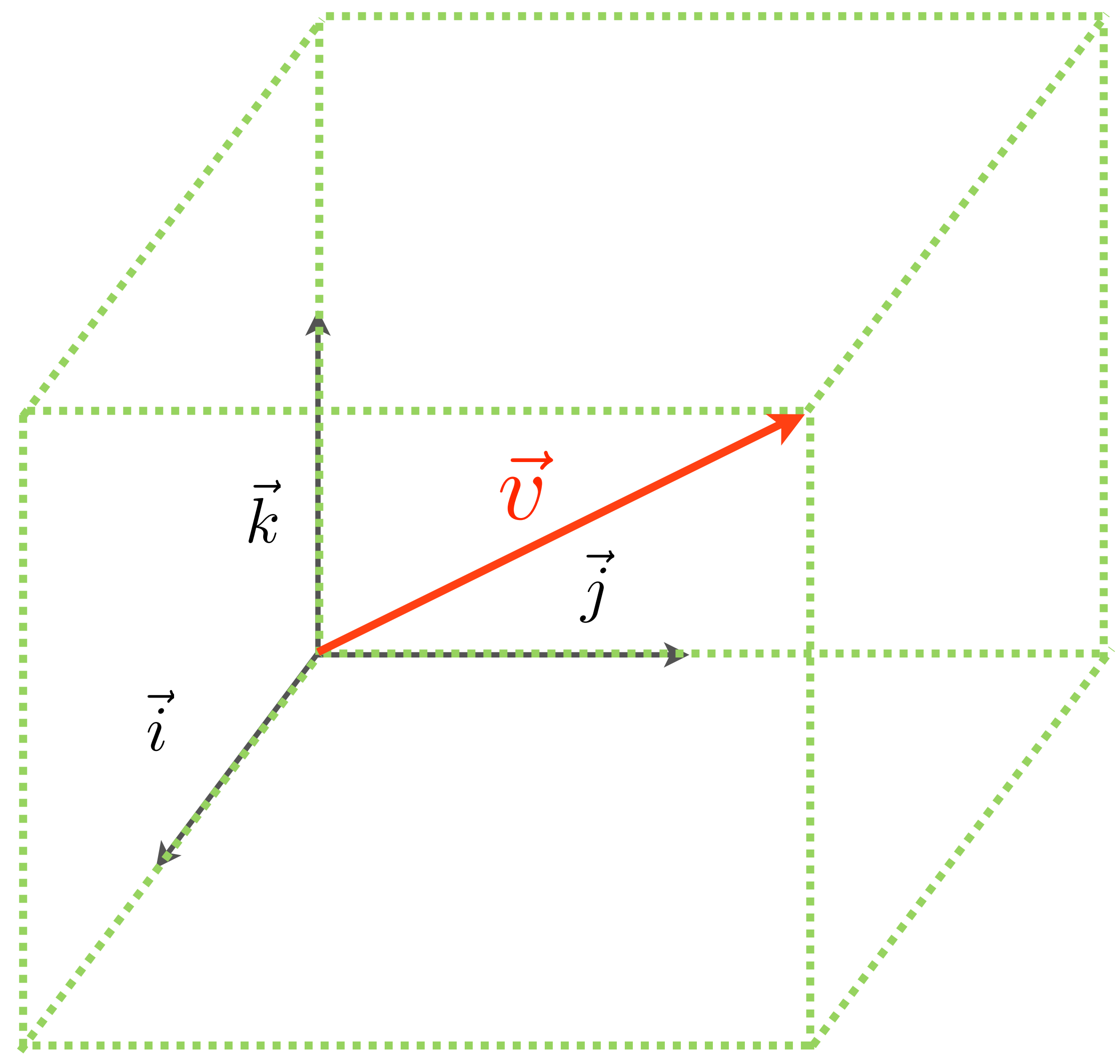
Dans $\mathbb{R}^3$



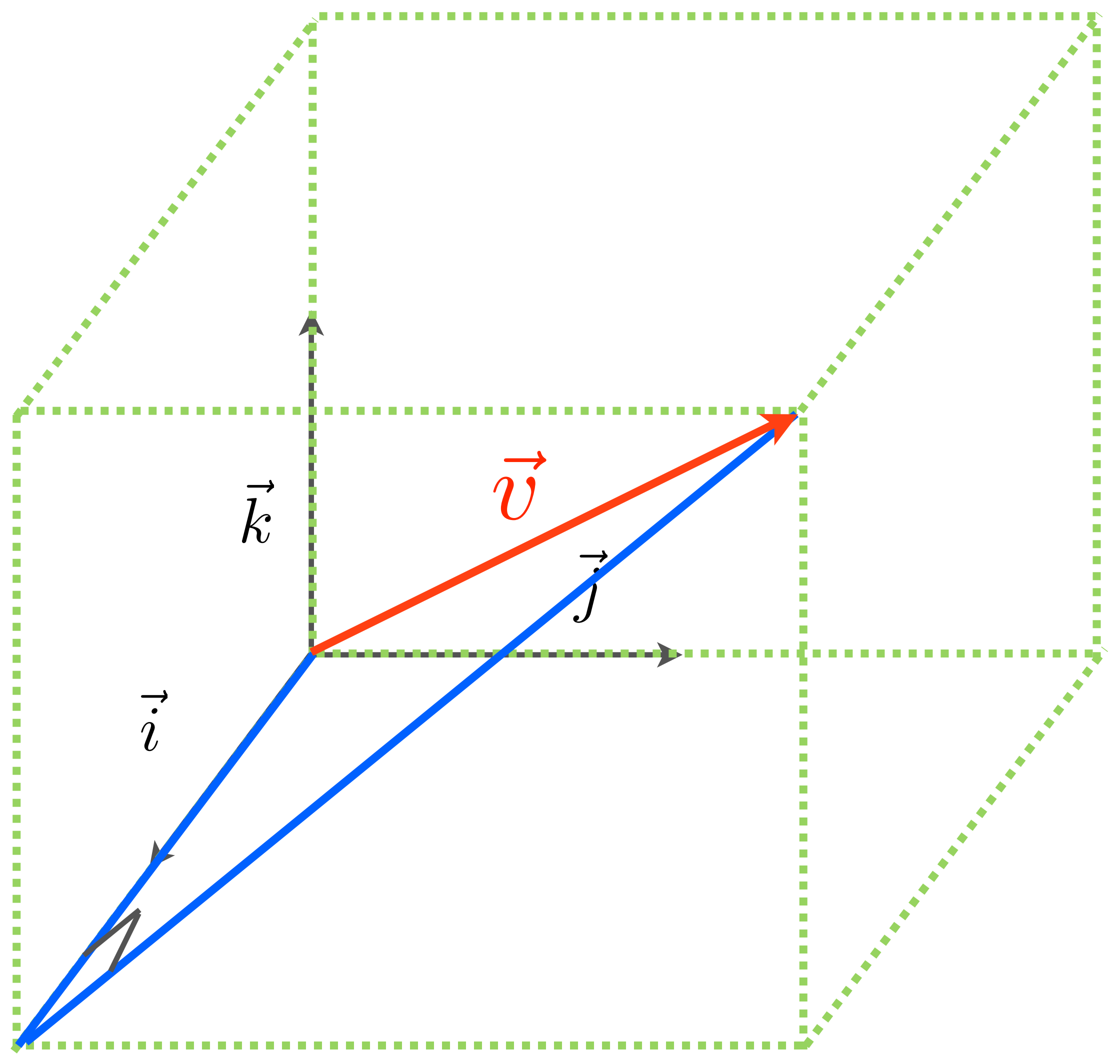
Dans $\mathbb{R}^3$



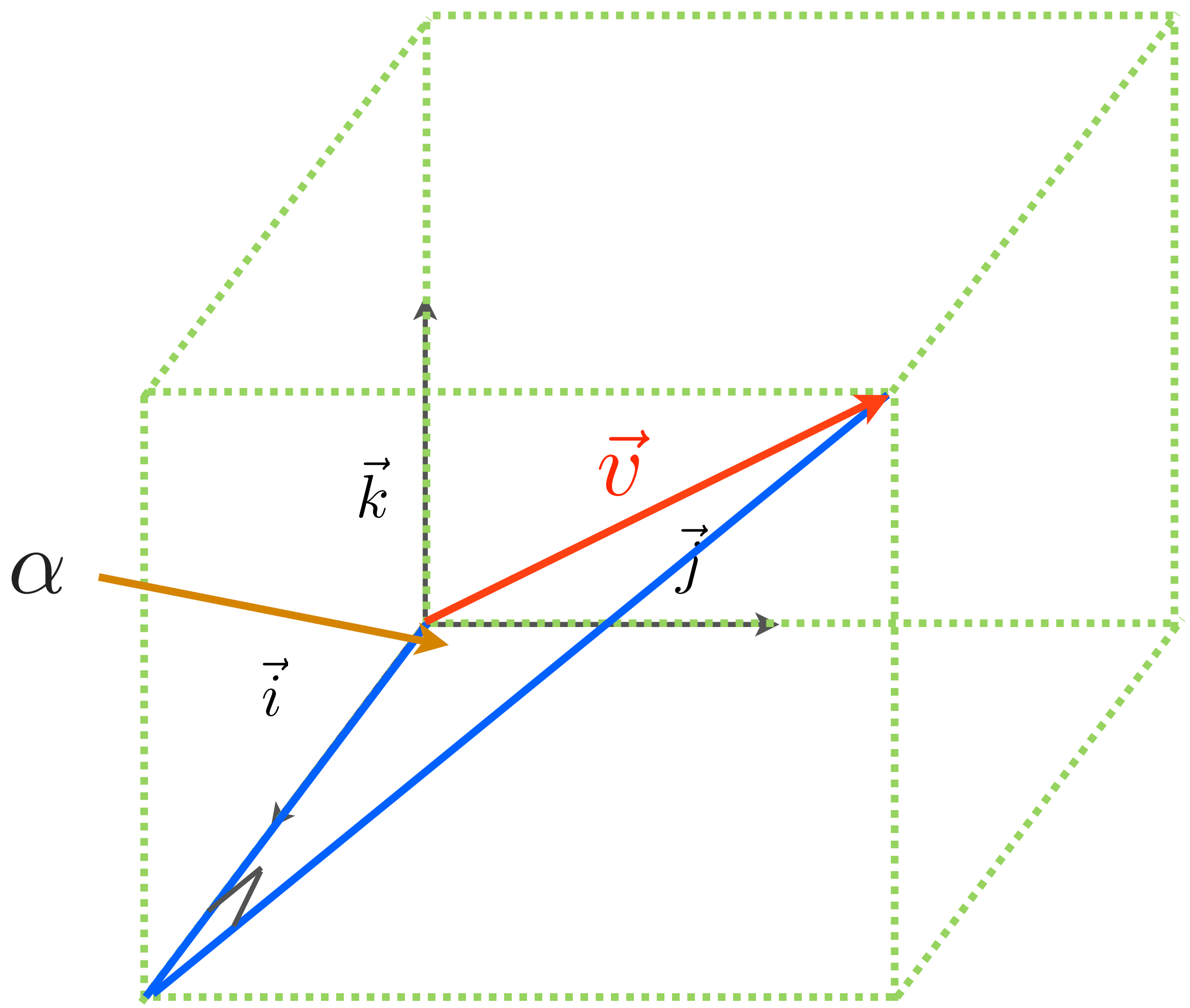
Dans $\mathbb{R}^3$



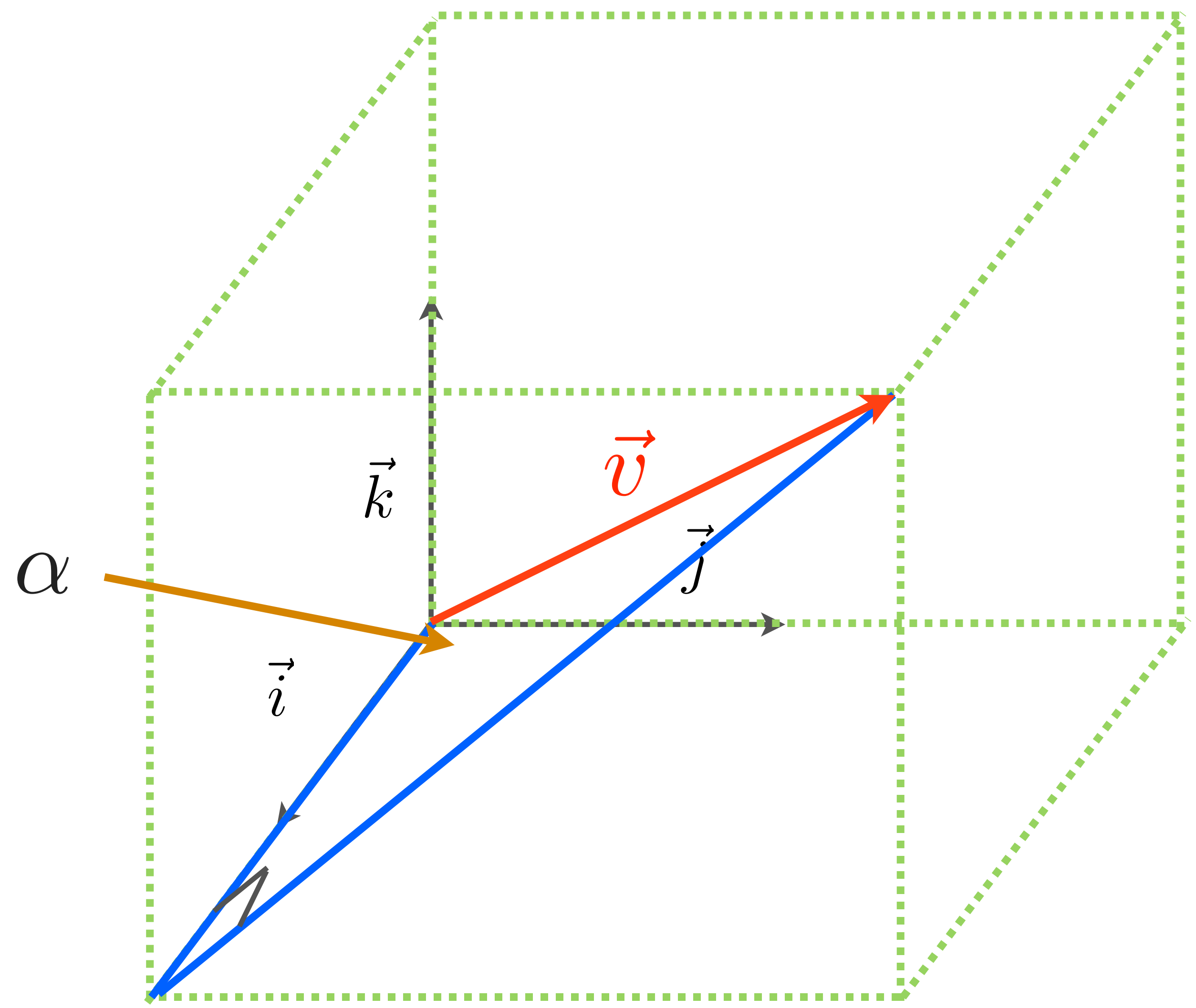
Dans $\mathbb{R}^3$



Dans $\mathbb{R}^3$

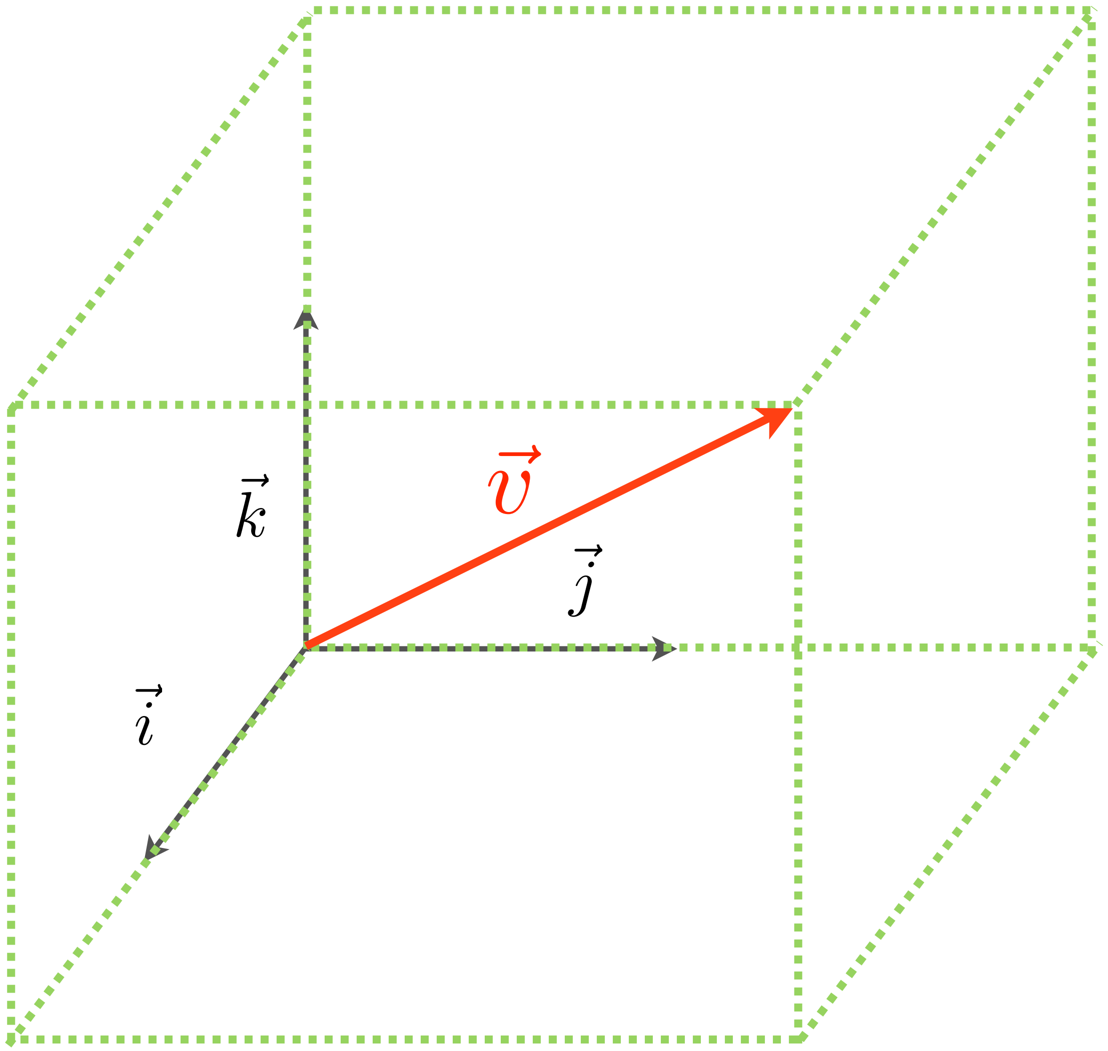


Dans $\mathbb{R}^3$



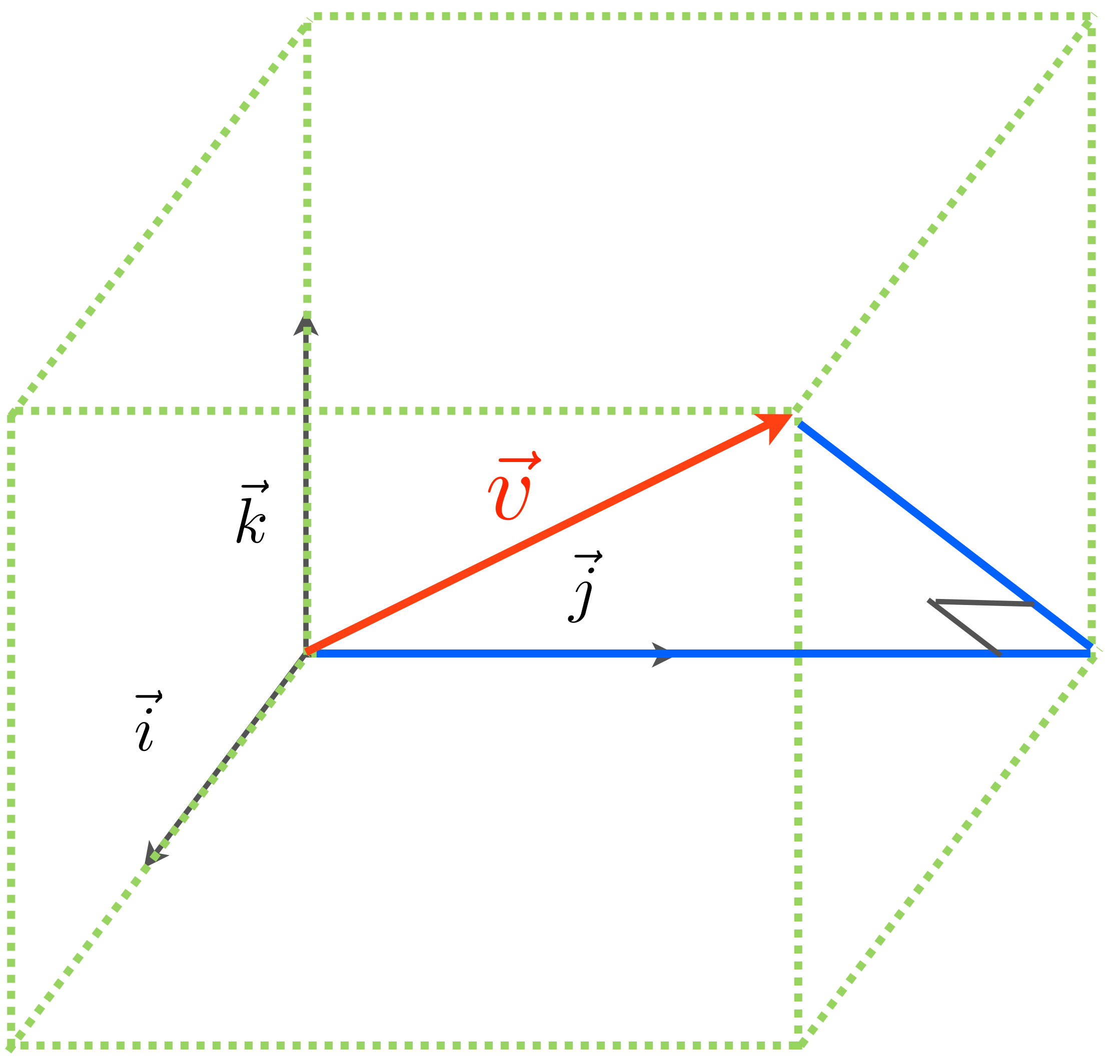
$$\vec{v} = \big(\|\vec{v}\|\cos\alpha,$$

Dans $\mathbb{R}^3$



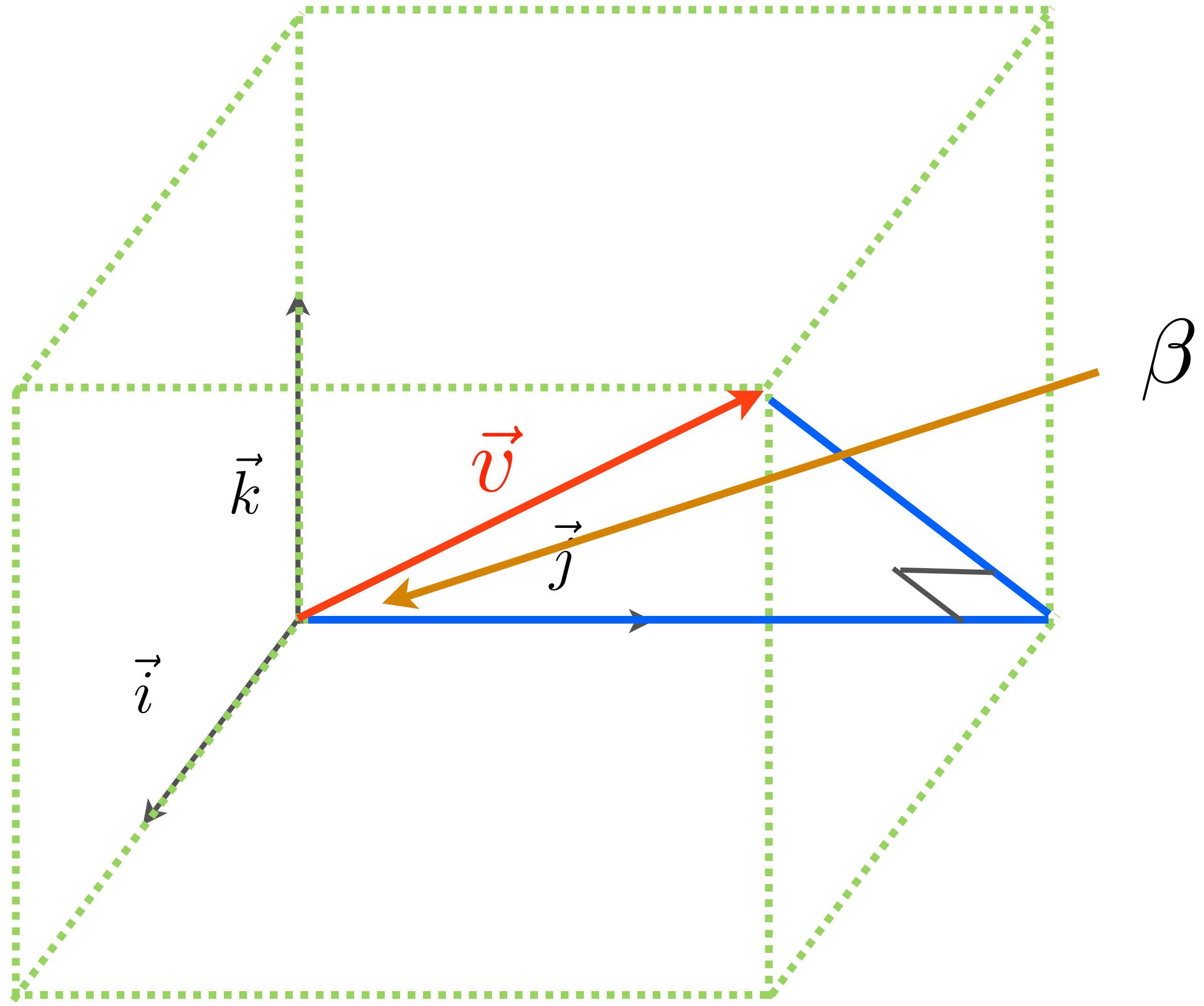
$$\vec{v} = \left(\|\vec{v}\| \cos \alpha,\right.$$

Dans $\mathbb{R}^3$



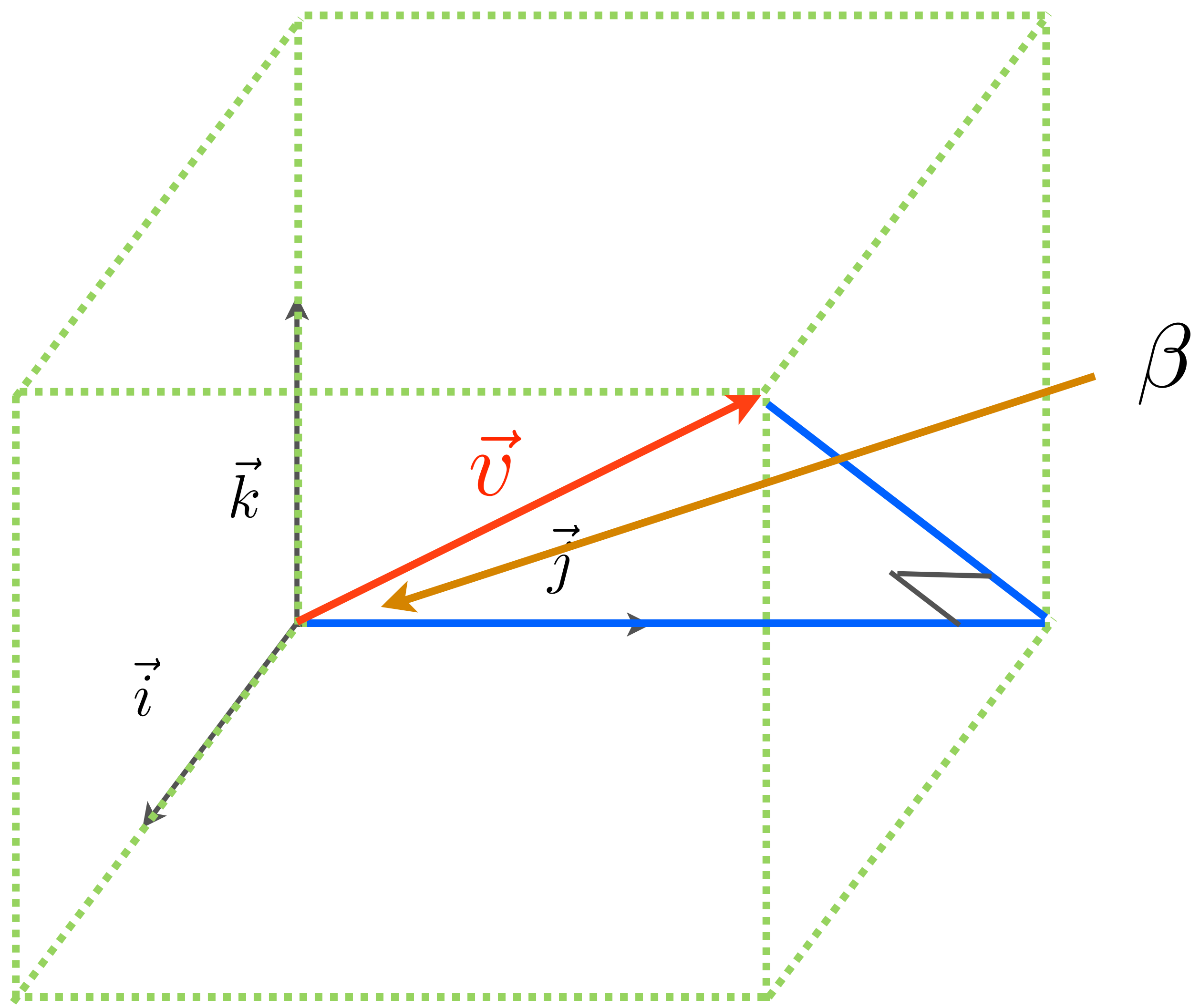
$$\vec{v} = \left(\|\vec{v}\| \cos\alpha, \right.$$

Dans $\mathbb{R}^3$



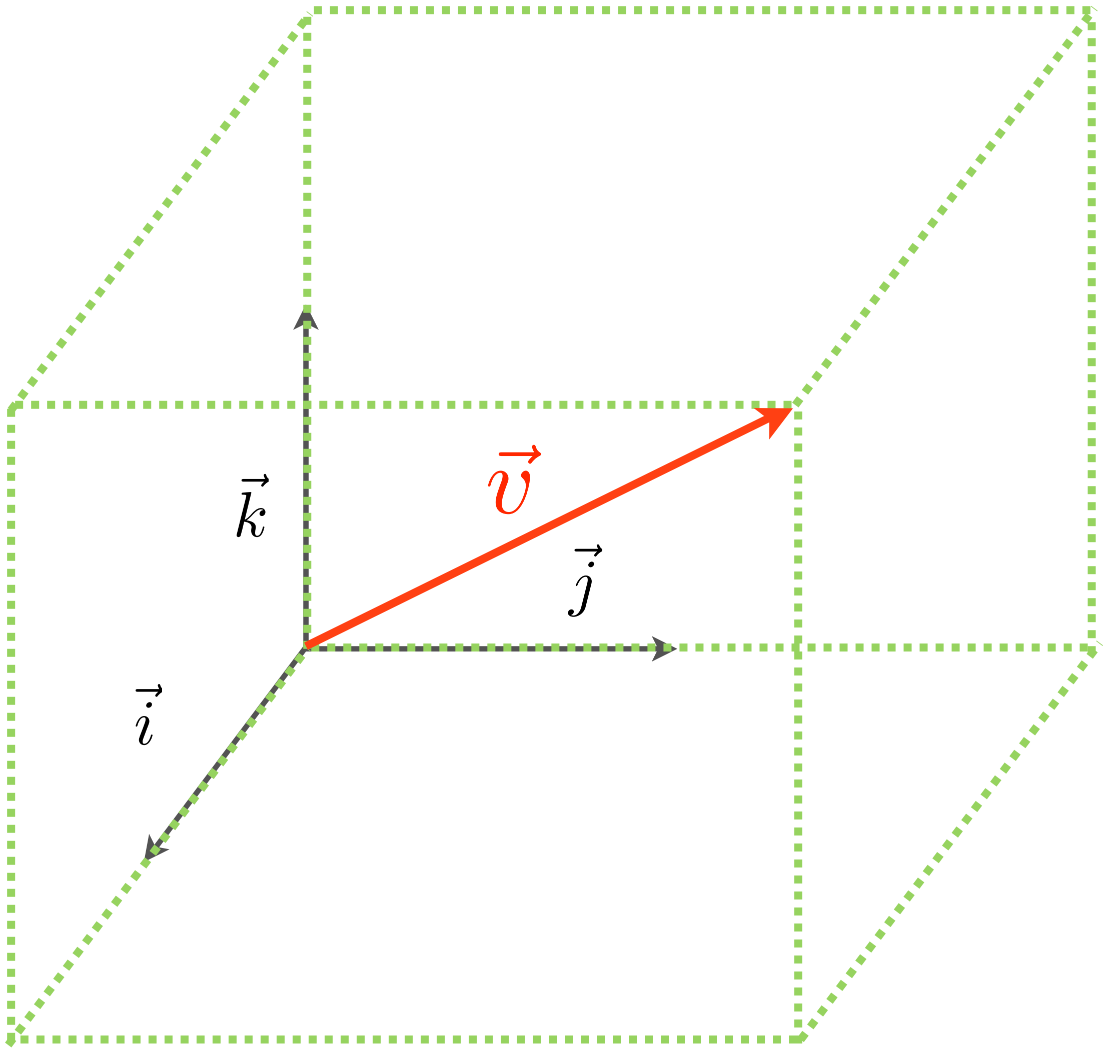
$$\vec{v} = \big(\|\vec{v}\| \cos\alpha,$$

Dans $\mathbb{R}^3$



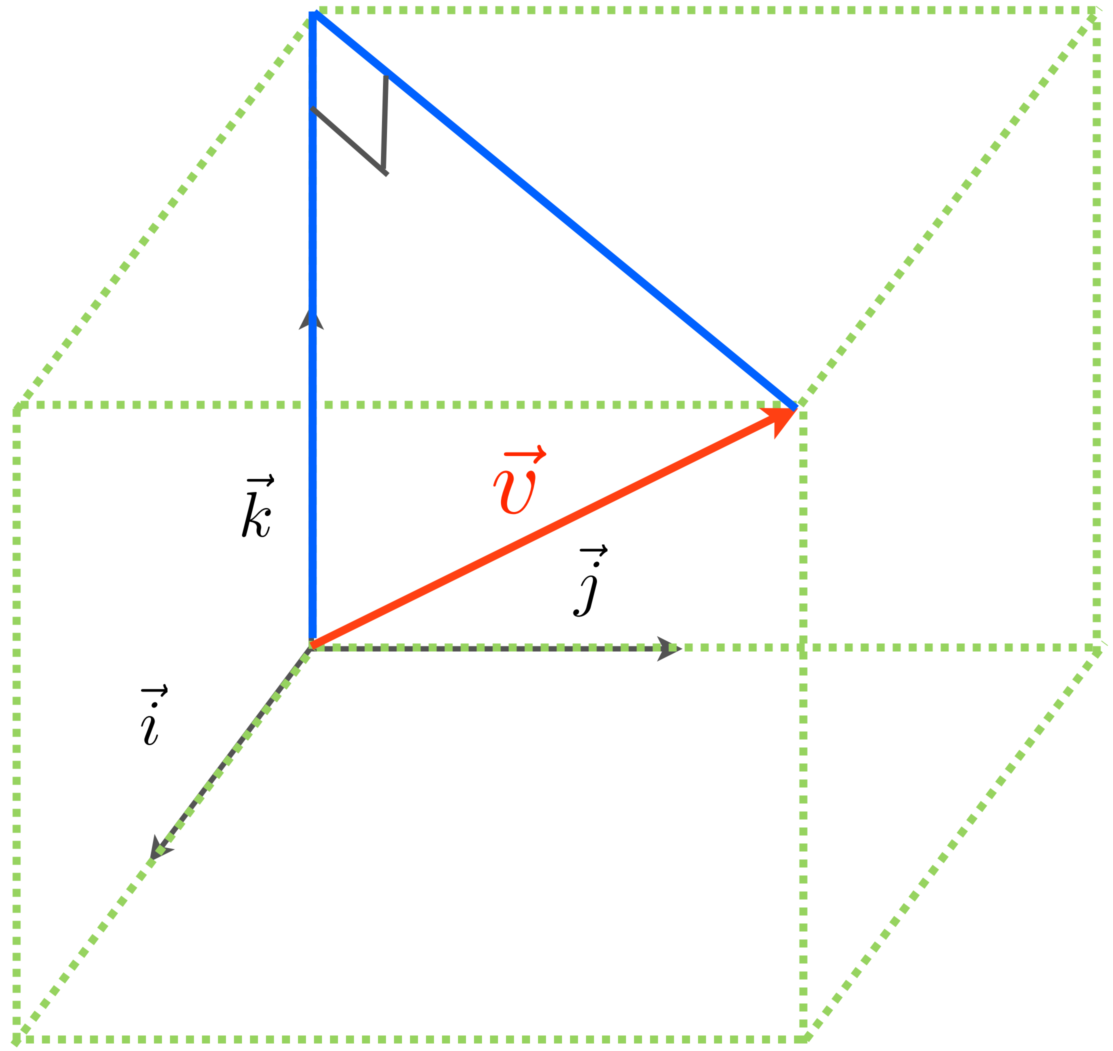
$$\vec{v} = (\|\vec{v}\| \cos \alpha, \|\vec{v}\| \cos \beta,$$

Dans $\mathbb{R}^3$



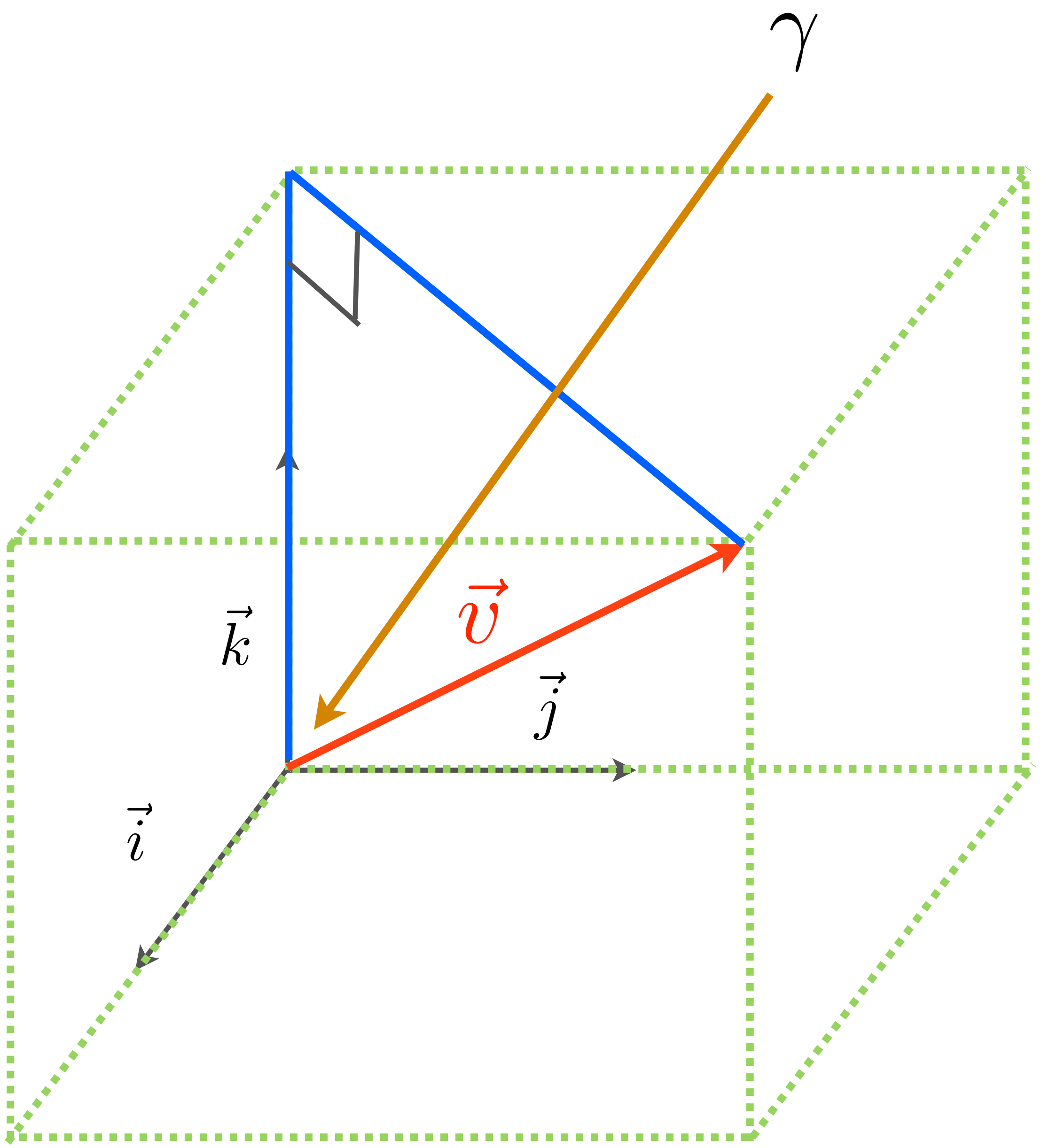
$$\vec{v} = (\|\vec{v}\| \cos \alpha, \|\vec{v}\| \cos \beta,$$

Dans $\mathbb{R}^3$



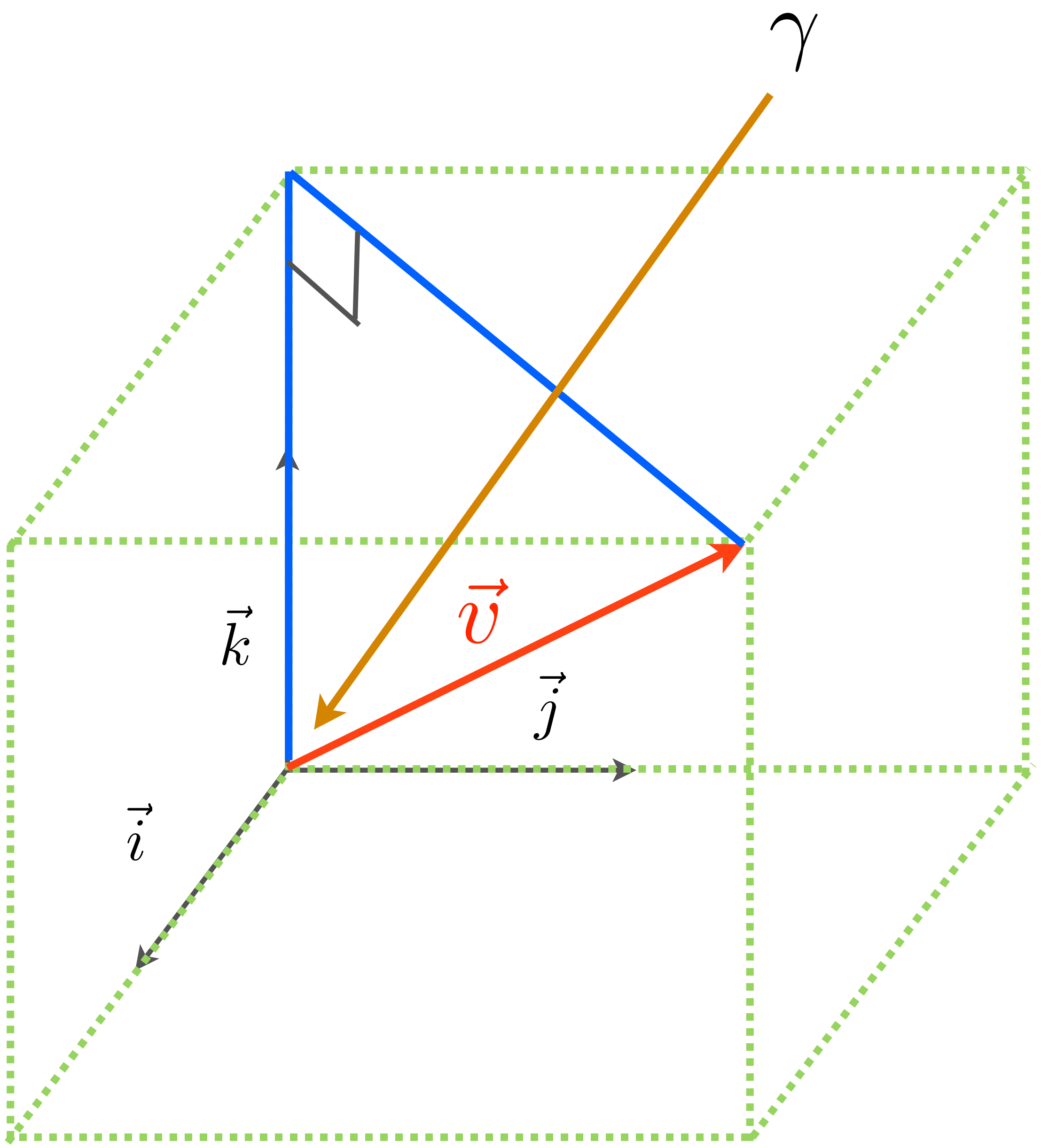
$$\vec{v} = \big(\|\vec{v}\| \cos\alpha, \|\vec{v}\| \cos\beta,$$

Dans $\mathbb{R}^3$



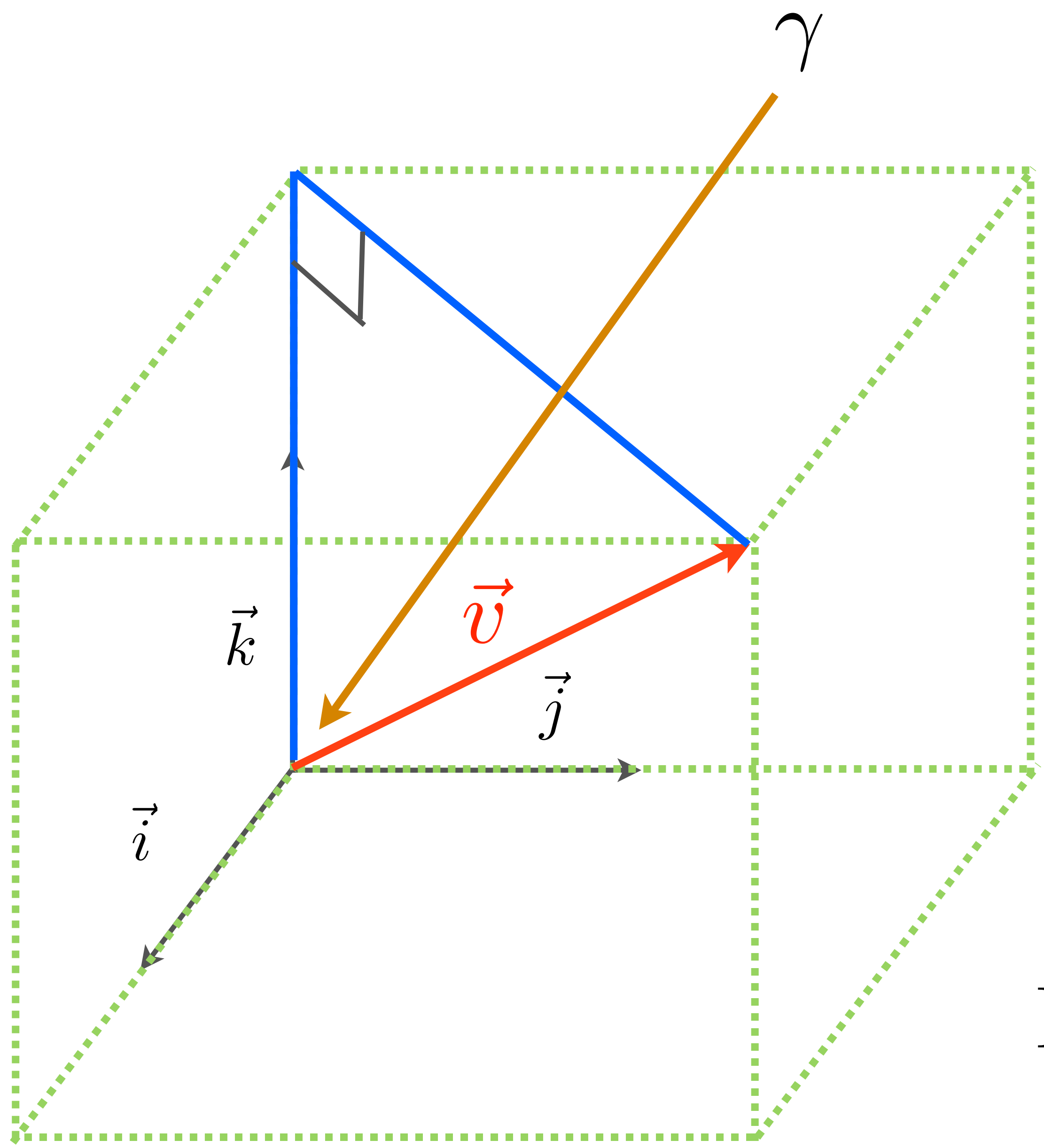
$$\vec{v} = (\|\vec{v}\| \cos\alpha, \|\vec{v}\| \cos\beta,$$

Dans $\mathbb{R}^3$



$$\vec{v} = \left(\|\vec{v}\| \cos \alpha, \|\vec{v}\| \cos \beta, \|\vec{v}\| \cos \gamma\right)$$

Dans $\mathbb{R}^3$



Les cosinus directeurs

$$\vec{v} = (\|\vec{v}\| \cos\alpha, \|\vec{v}\| \cos\beta, \|\vec{v}\| \cos\gamma)$$

Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire.

Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire.

Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{v} = (a, b)$

Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire.

Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{v} = (a, b)$

Dans $\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{v} = (a, b, c)$

Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire.

Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{v} = (a, b) \quad = (\cos\theta, \sin\theta)$

Dans $\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{v} = (a, b, c)$

Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire.

Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{v} = (a, b) \quad = (\cos\theta, \sin\theta)$

Dans $\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{v} = (a, b, c) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Exemple

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des x dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des x dans $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = (7, -2)$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des *x* dans $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = (7, -2) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2}$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des *x* dans $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = (7, -2) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des *x* dans $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = (7, -2) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2} \quad = \sqrt{53}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des *x* dans $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = (7, -2) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right)$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des x dans $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = (7, -2) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right)$$

Est unitaire

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des x dans $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = (7, -2) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Est unitaire

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des x dans $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = (7, -2) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Est unitaire

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des x dans $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = (7, -2) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Est unitaire

Donc,

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des x dans $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = (7, -2) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Est unitaire

$$\text{Donc, } \theta = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{53}}\right)$$

Exemple

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v} = (1, -3, 5)$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v} = (1, -3, 5) \qquad\qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2}$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v} = (1, -3, 5) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v} = (1, -3, 5) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v} = (1, -3, 5) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right)$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v} = (1, -3, 5) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v} = (1, -3, 5) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v} = (1, -3, 5) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Donc,

Exemple

Pour trouver l'angle qu'un vecteur fait avec l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$:

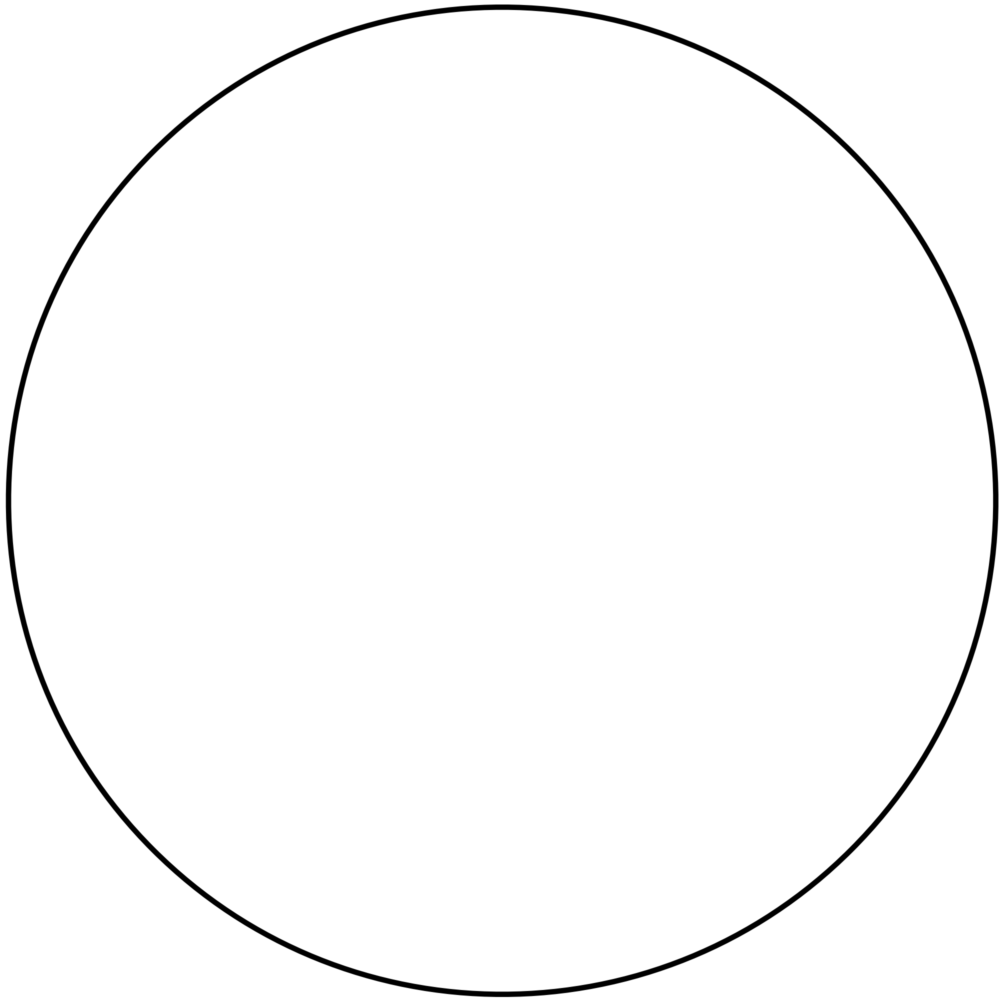
$$\vec{v} = (1, -3, 5) \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

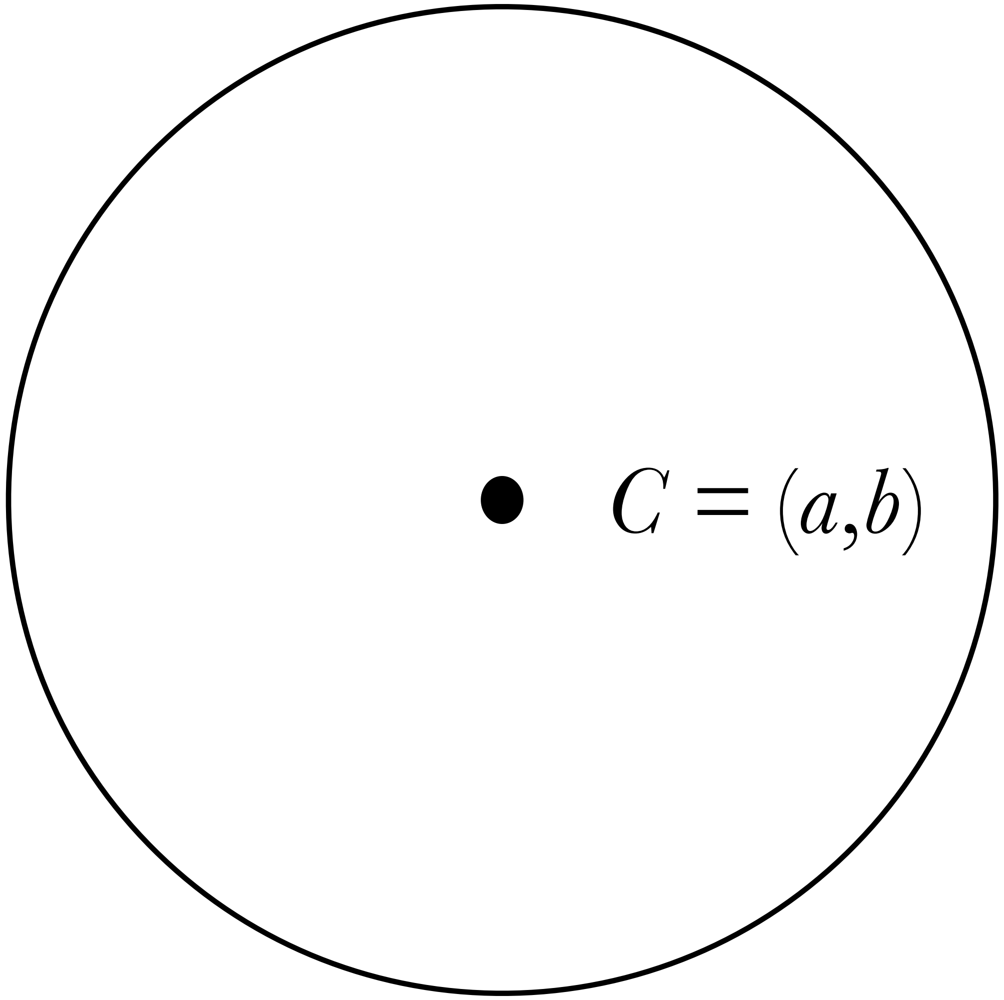
$$\text{Donc, } \gamma = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right)$$

Lieux Géométriques

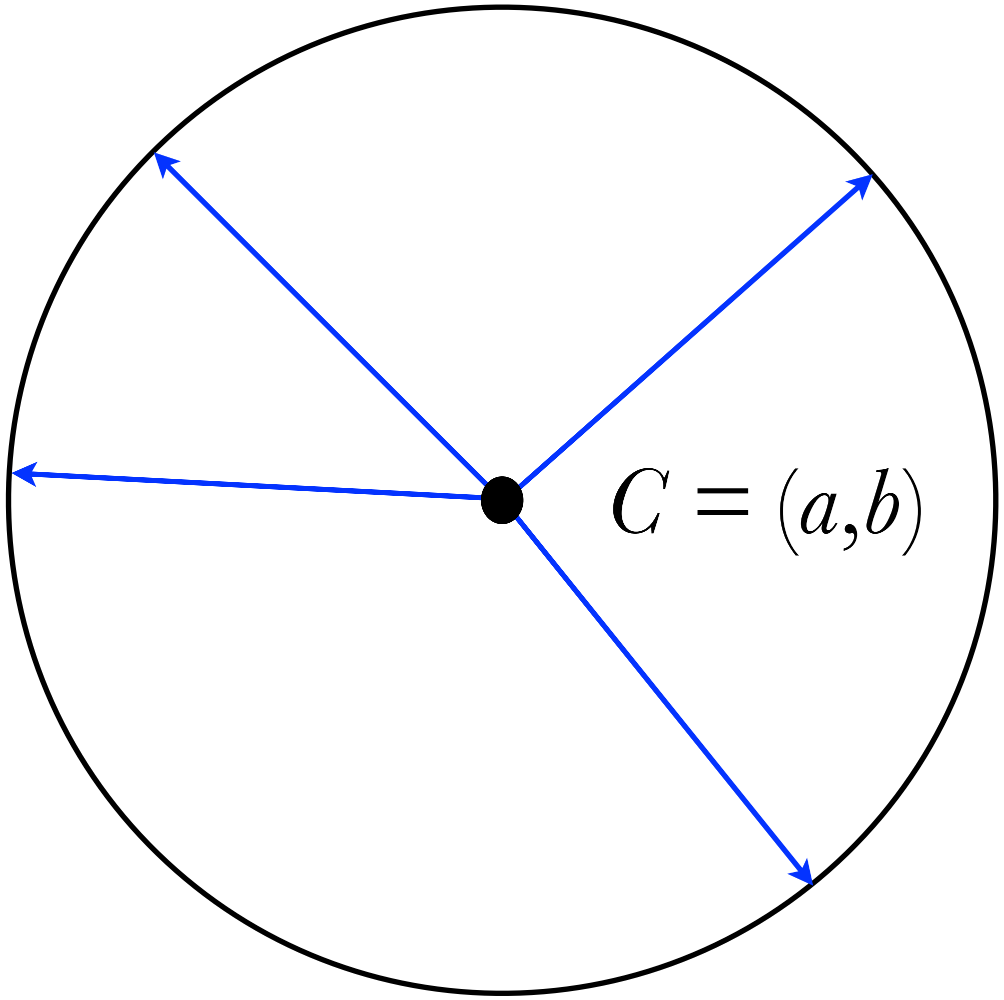
Lieux Géométriques



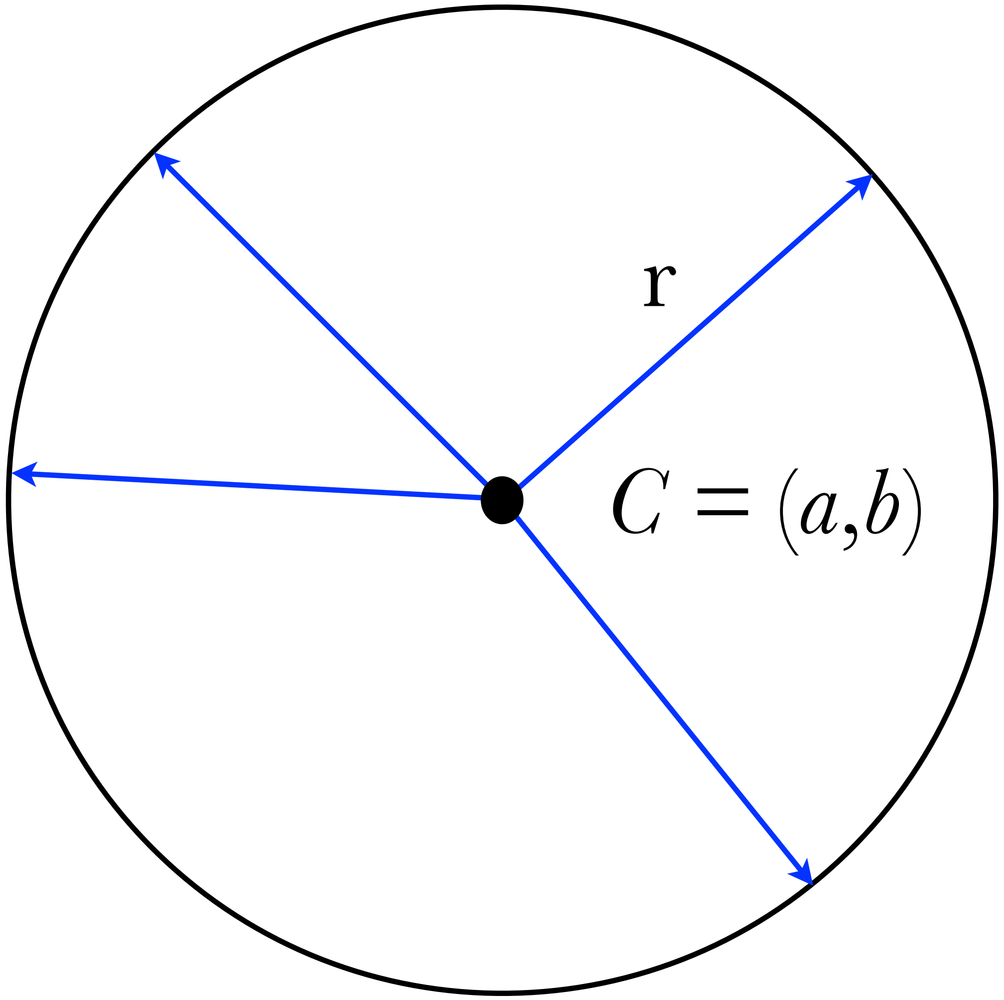
Lieux Géométriques



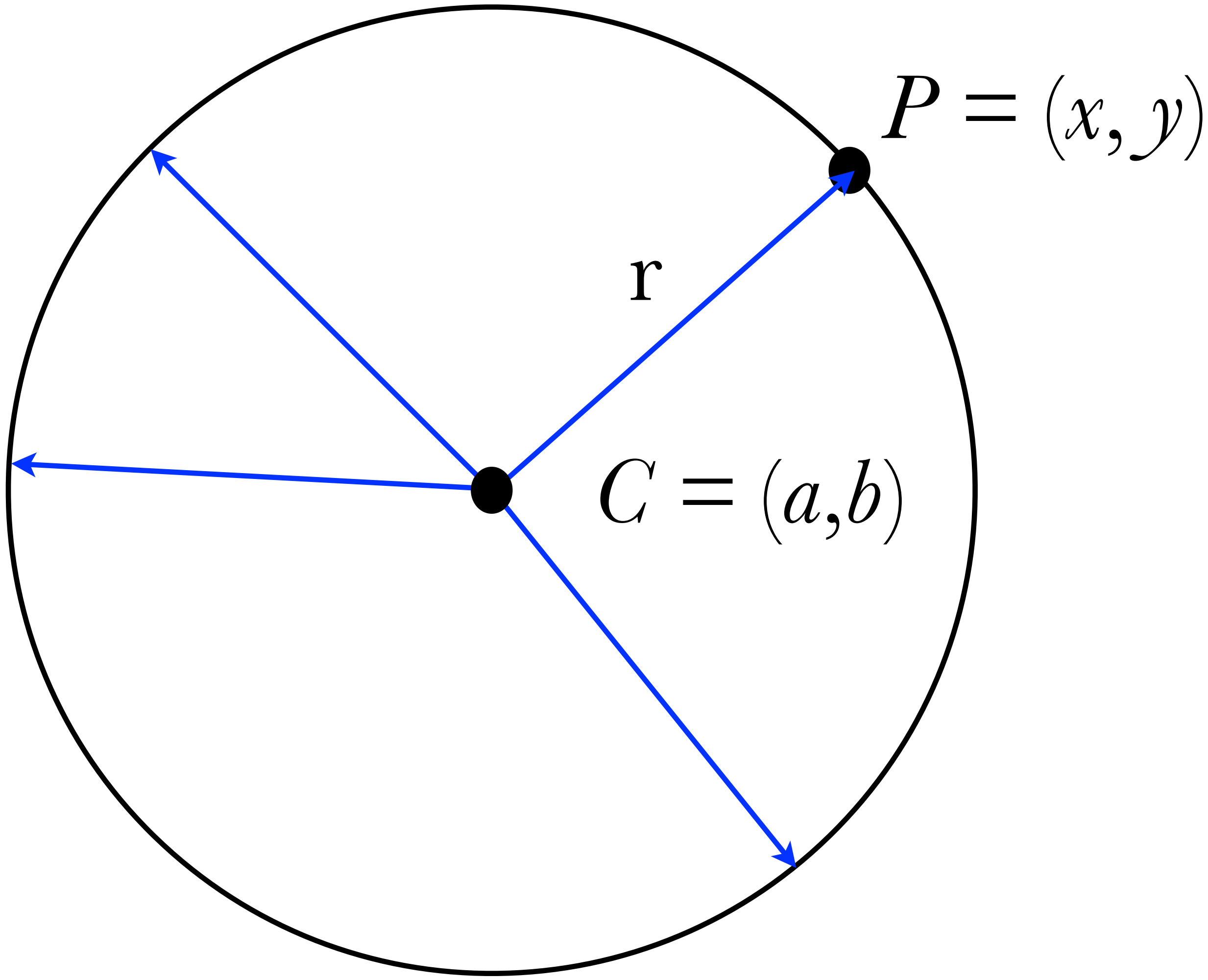
Lieux Géométriques



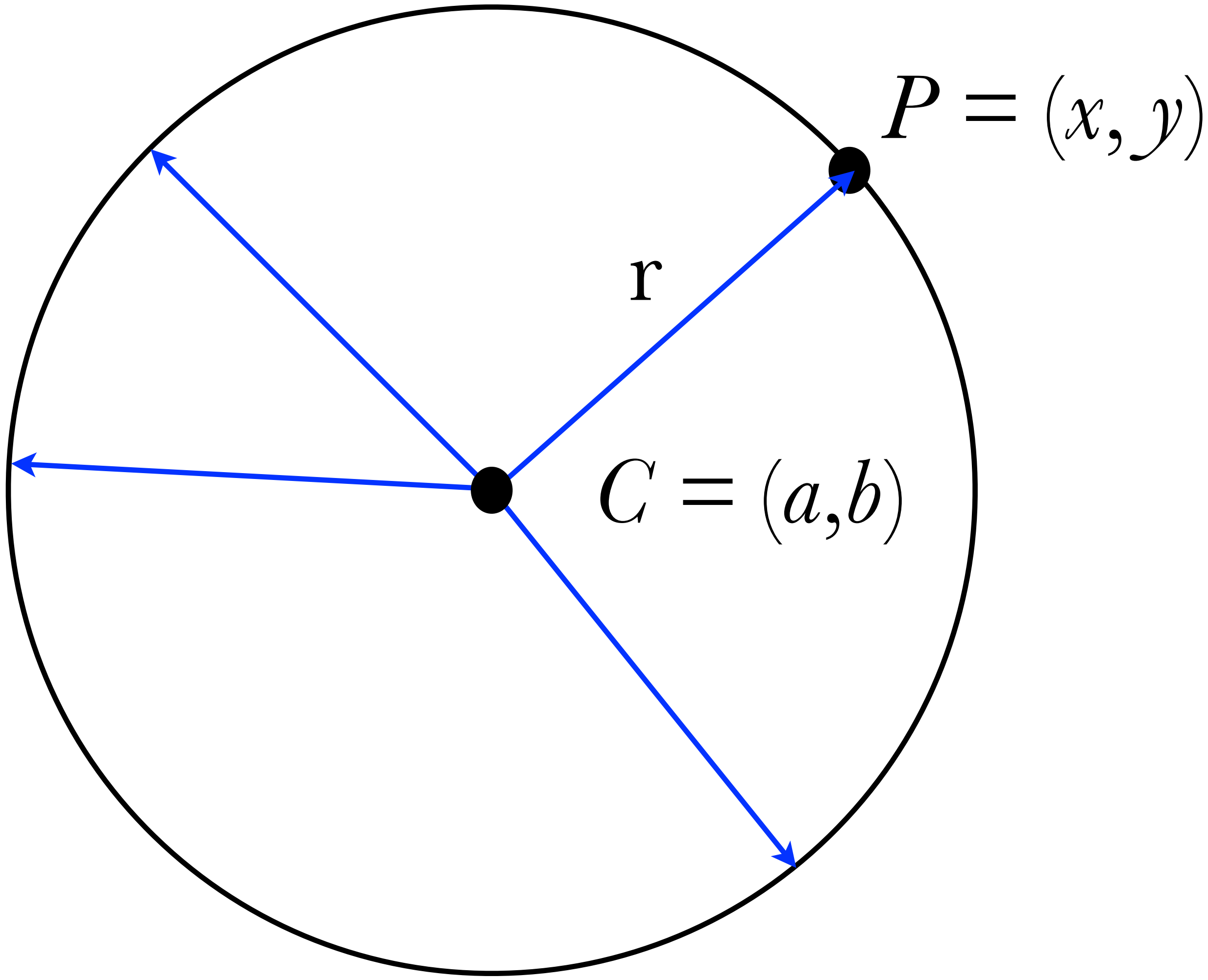
Lieux Géométriques



Lieux Géométriques

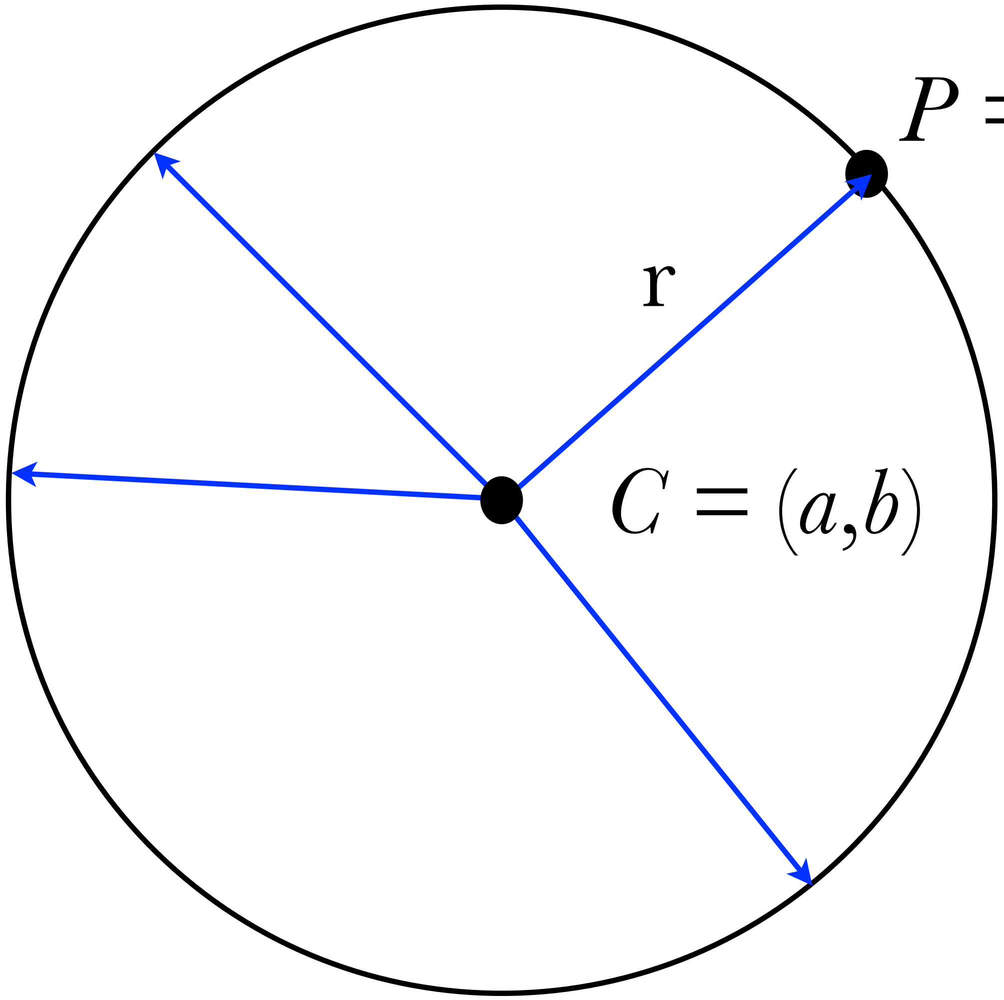


Lieux Géometriques



$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{CP}\| = r\right\}$$

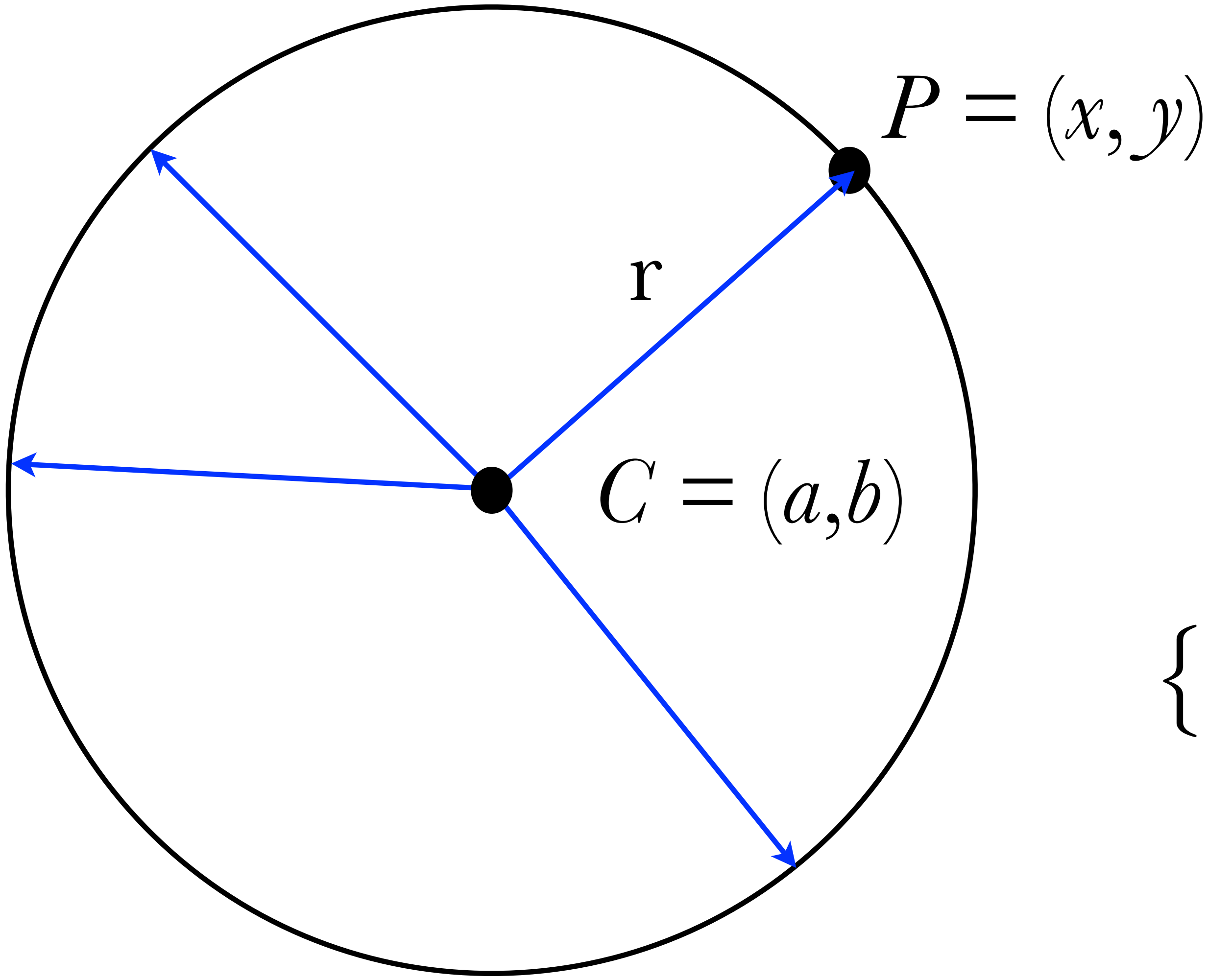
Lieux Géométriques



$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{CP}\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\| = r\right\}$$

Lieux Géometriques

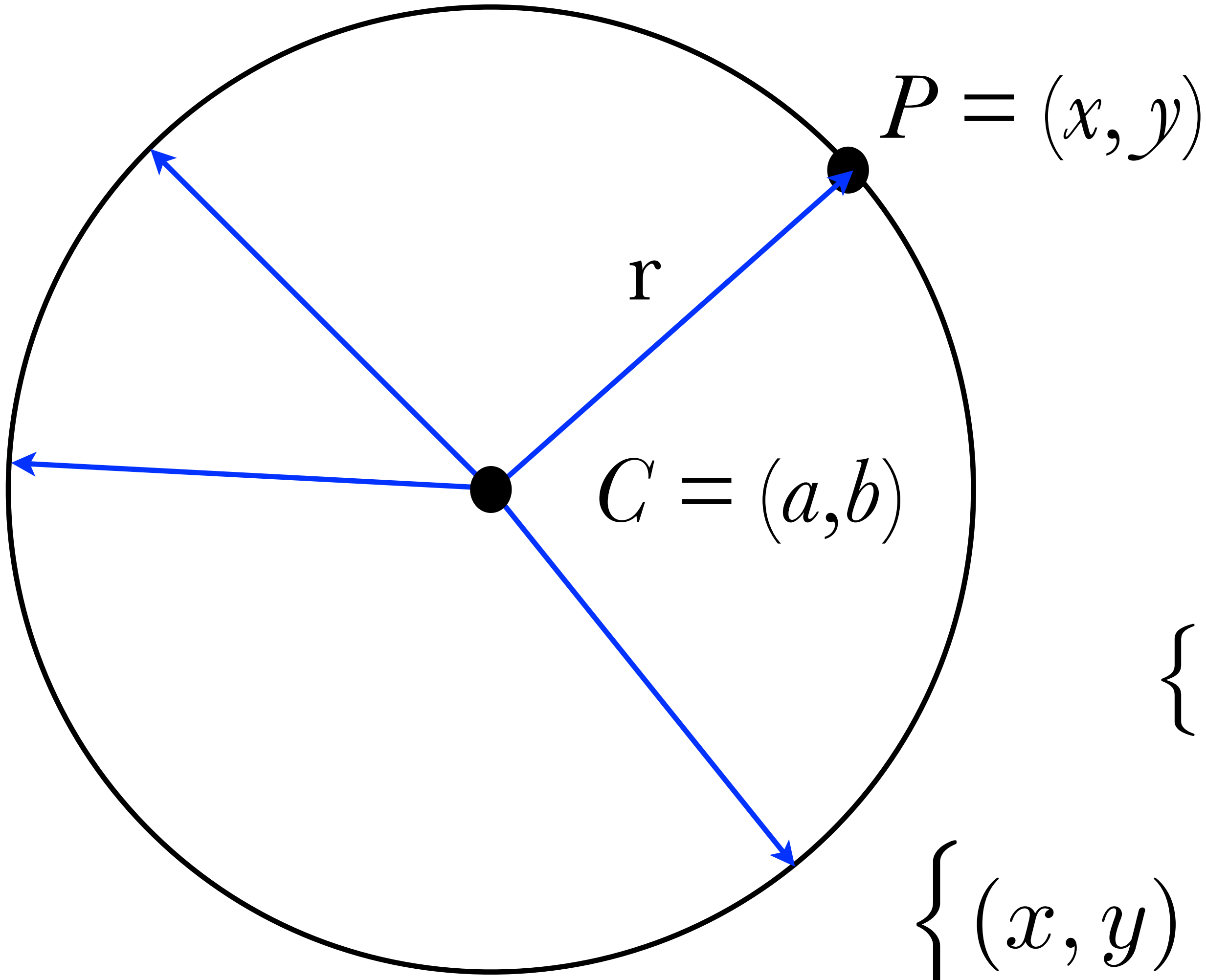


$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{CP}\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - a, y - b)\| = r\right\}$$

Lieux Géométriques



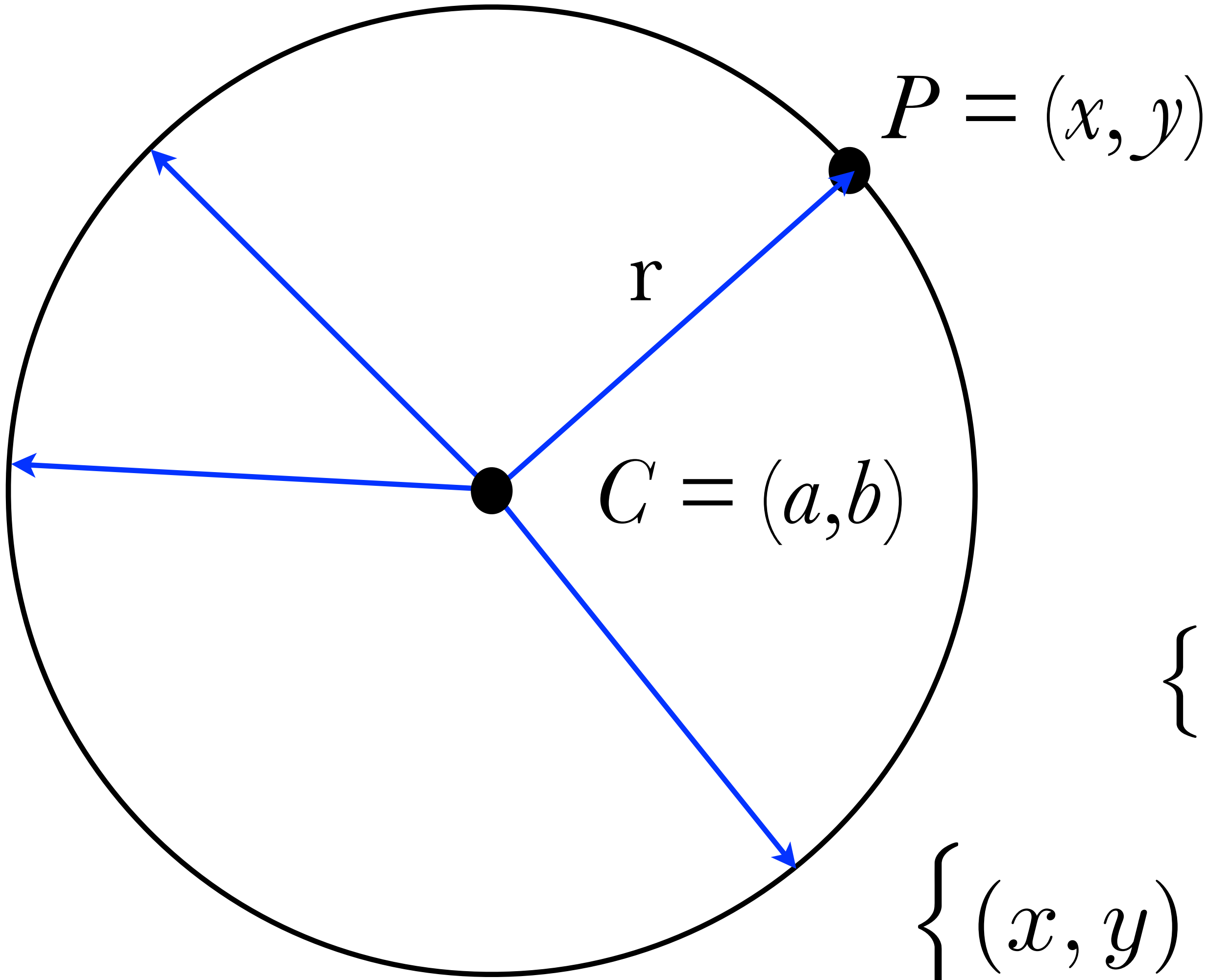
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{CP}\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - a, y - b)\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r\right\}$$

Lieux Géométriques



$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{CP}\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - a, y - b)\| = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\right\}$$

Faites les exercices suivants

p.50 # 6 à 8

2.2 PRODUIT SCALAIRE ET CALCUL D'ANGLES

Cours 4 (suite)

Définition

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel pour lequel on fixe une base ordonnée $\mathcal{B}$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ est l'«opération» définie comme suit:

Définition

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel pour lequel on fixe une base ordonnée $\mathcal{B}$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ est l'«opération» définie comme suit:

$$\vec{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \vec{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Définition

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel pour lequel on fixe une base ordonnée $\mathcal{B}$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ est l'«opération» définie comme suit:

$$\vec{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \vec{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Définition

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel pour lequel on fixe une base ordonnée $\mathcal{B}$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ est l'«opération» définie comme suit:

$$\vec{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \vec{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \longmapsto a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Remarque:

Étant donné que le produit scalaire est défini à partir des composantes de deux vecteurs, le résultat dépend de la base utilisée.

Remarque:

Étant donné que le produit scalaire est défini à partir des composantes de deux vecteurs, le résultat dépend de la base utilisée.

Nous allons voir que le produit scalaire nous permet d'obtenir des informations intéressantes si la base est orthonormée.

Remarque:

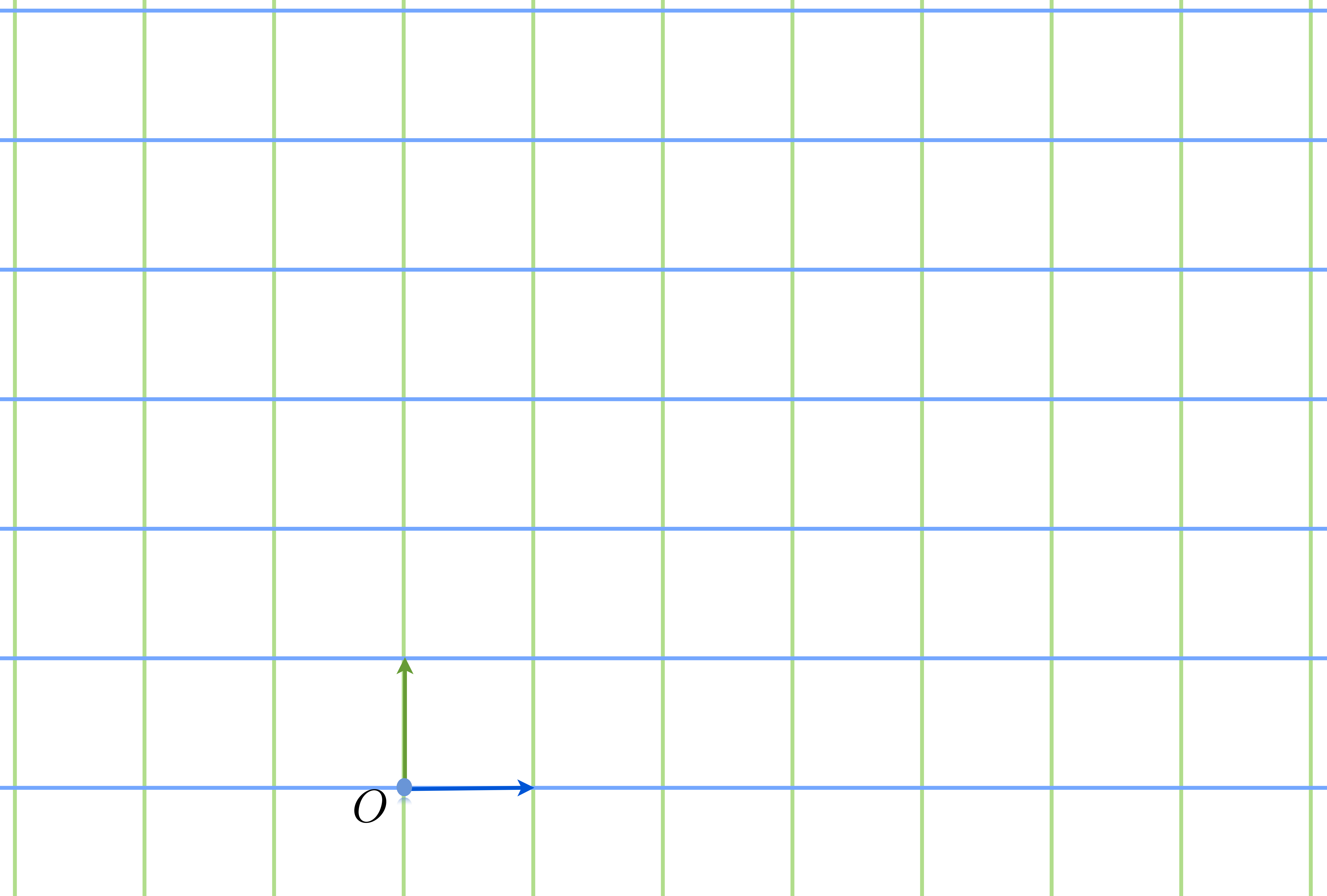
Étant donné que le produit scalaire est défini à partir des composantes de deux vecteurs, le résultat dépend de la base utilisée.

Nous allons voir que le produit scalaire nous permet d'obtenir des informations intéressantes si la base est orthonormée.

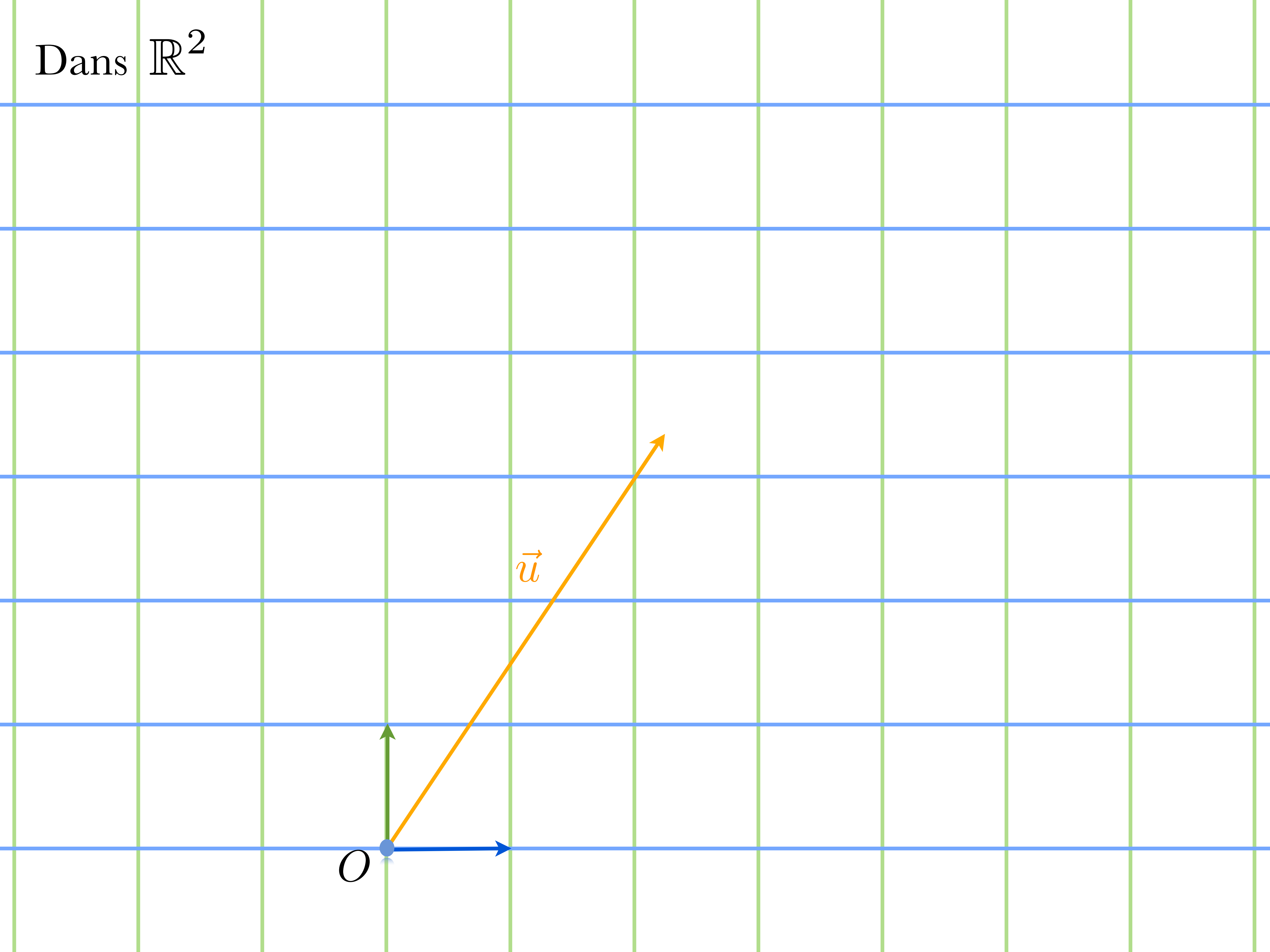
Malheureusement, si la base n'est pas orthonormée, le produit scalaire est presque sans intérêt.

Dans $\mathbb{R}^2$

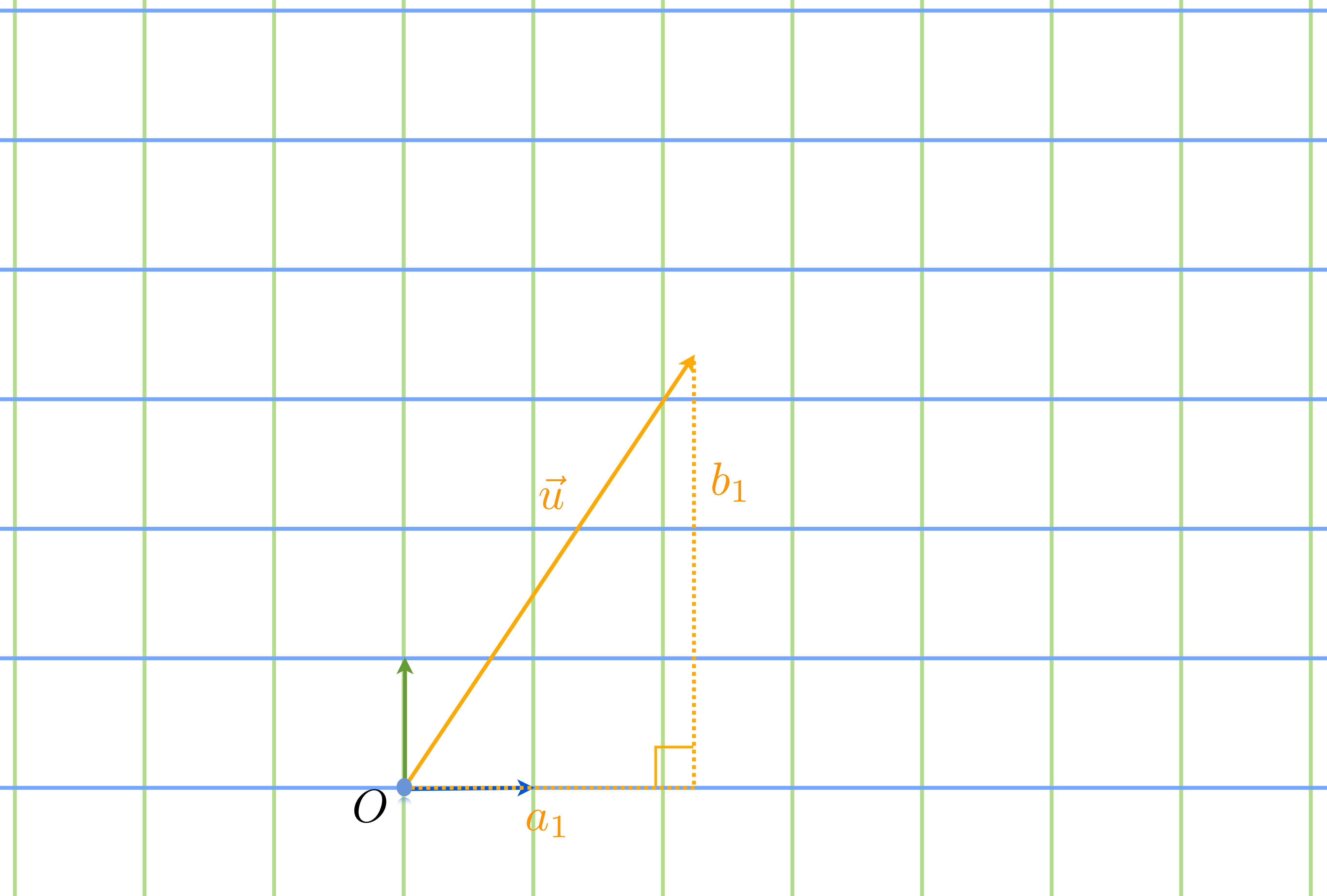
Dans $\mathbb{R}^2$



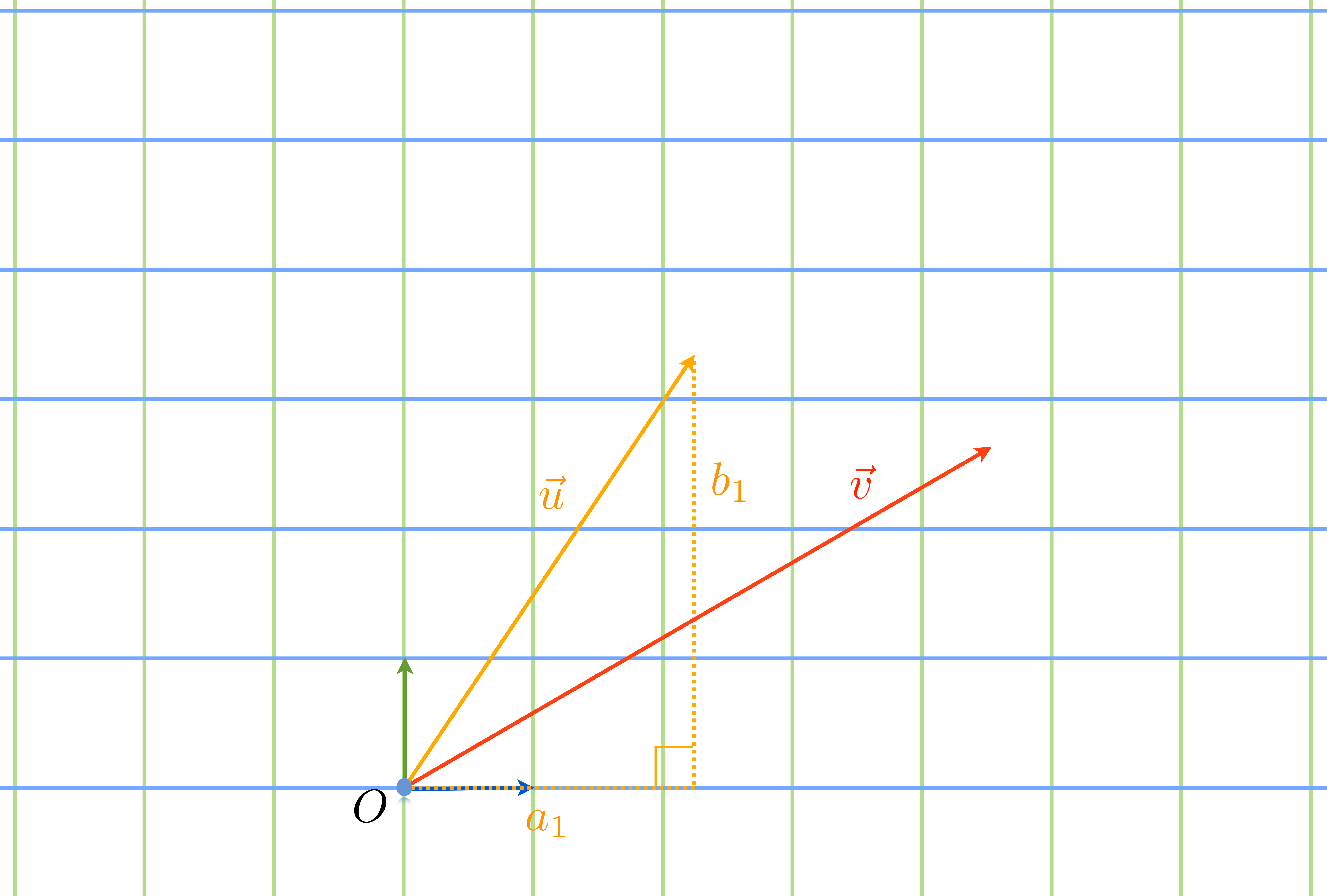
Dans $\mathbb{R}^2$

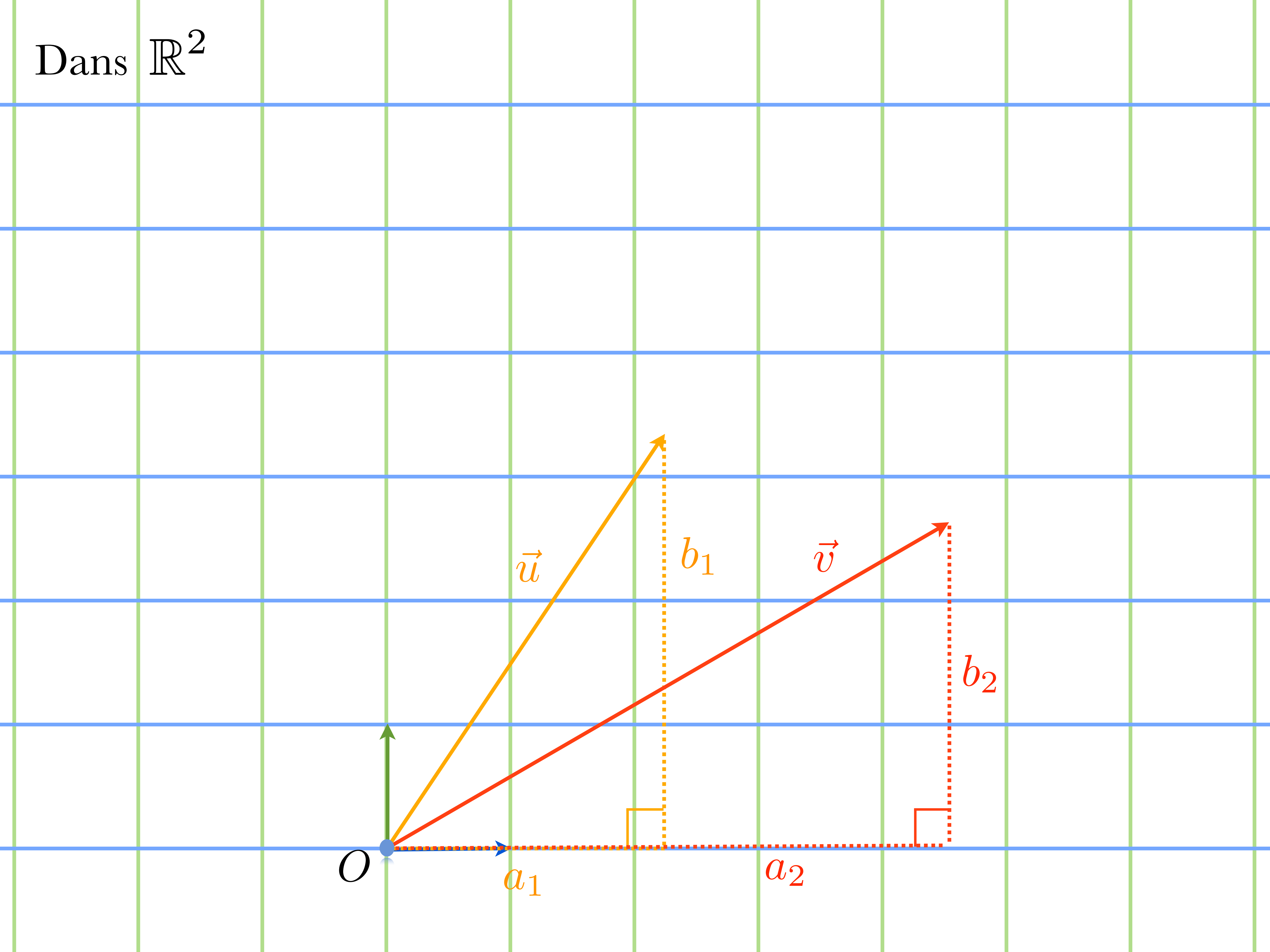


Dans $\mathbb{R}^2$

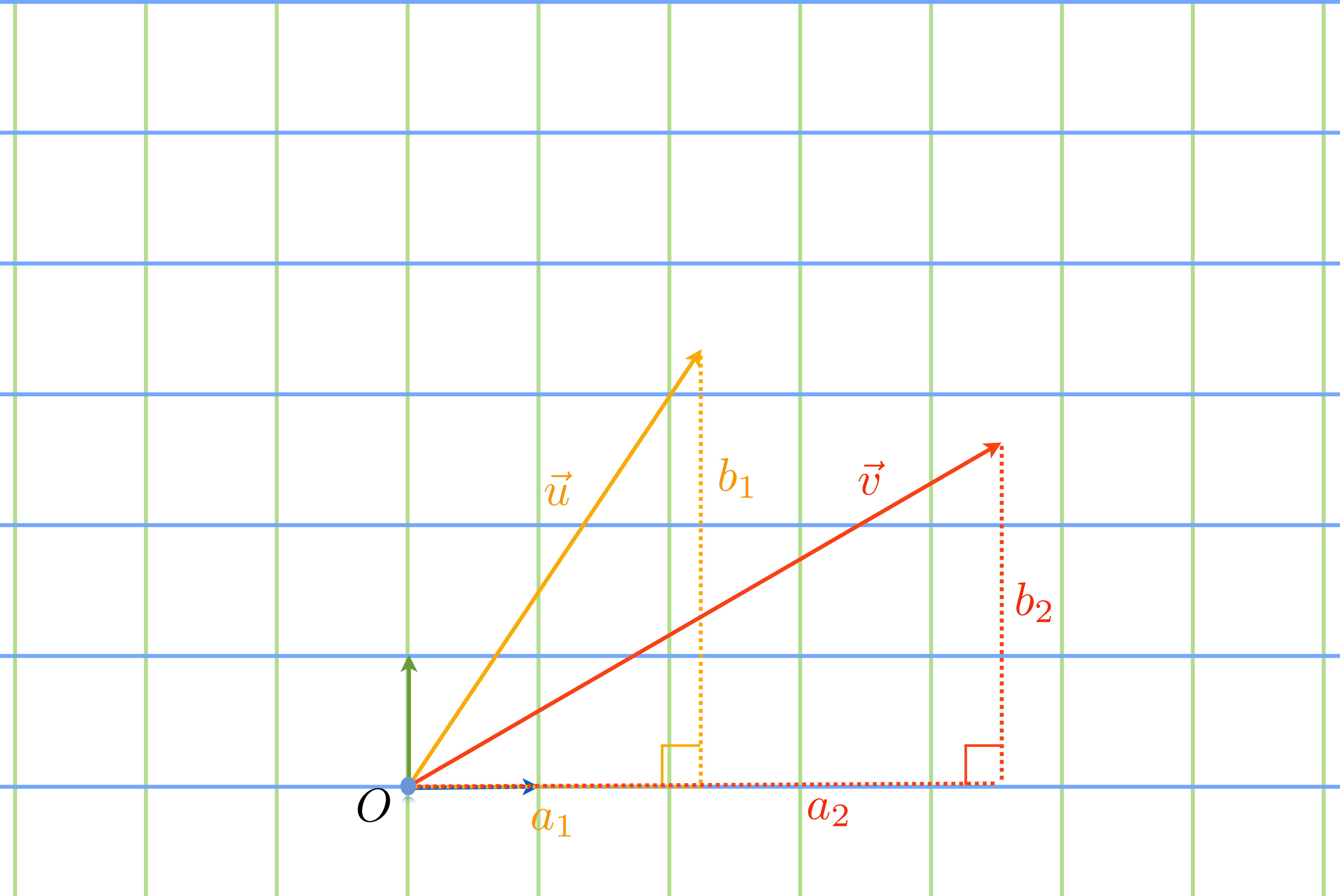


Dans $\mathbb{R}^2$

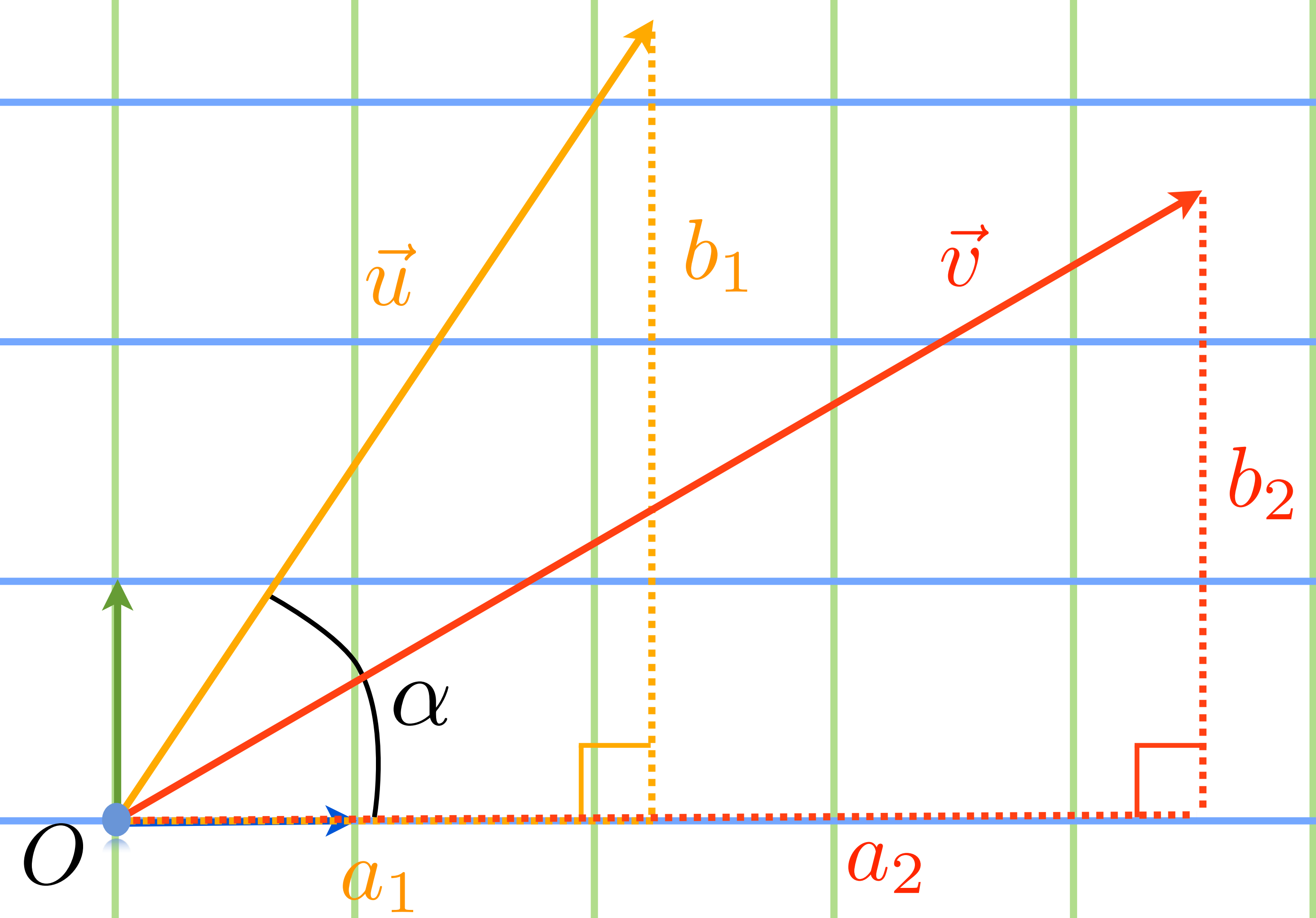



Dans $\mathbb{R}^2$
$\vec{u}$
$\vec{v}$
b_1
b_2
O
a_1
a_2

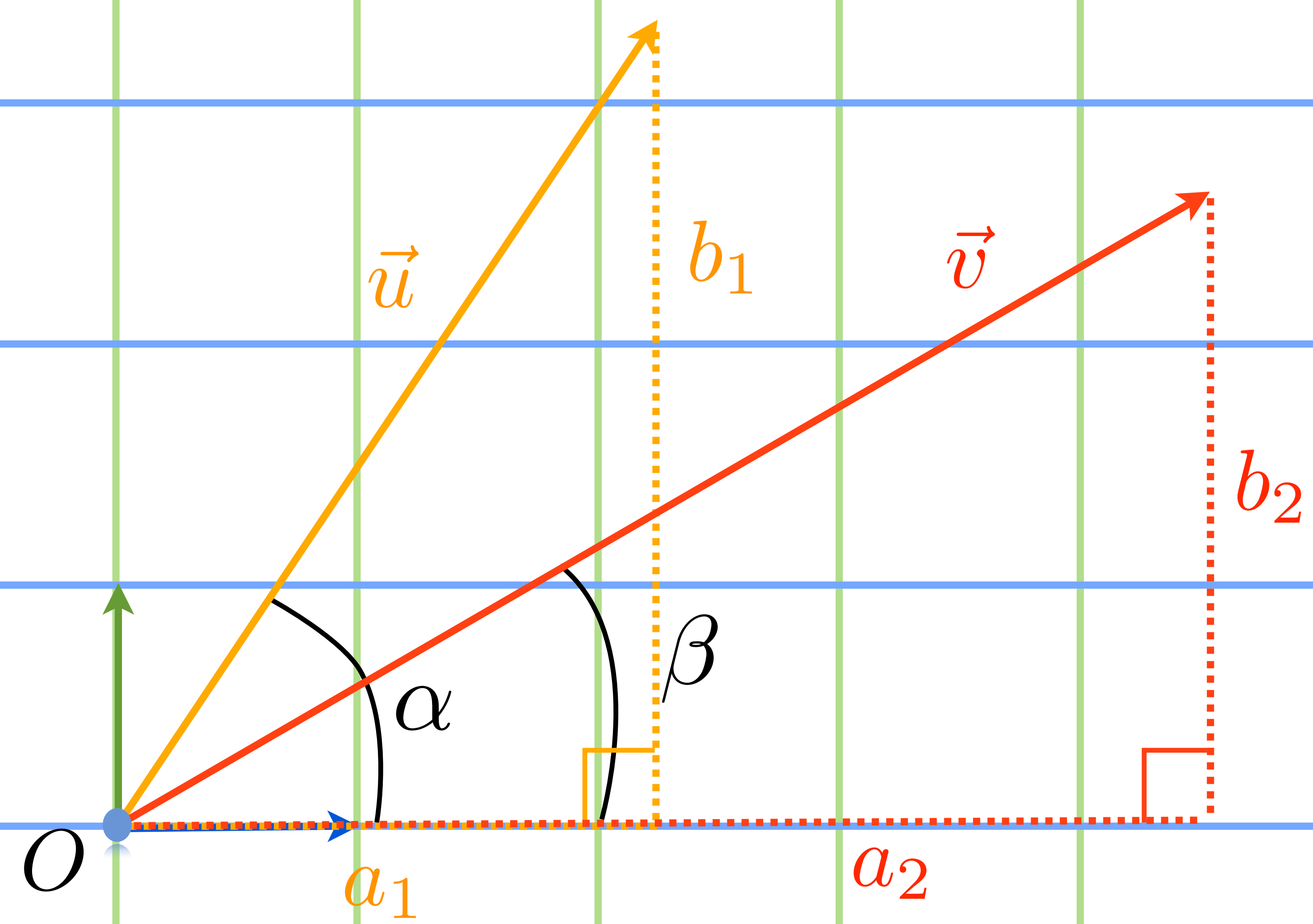
Dans $\mathbb{R}^2$ $\qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$



Dans $\mathbb{R}^2$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$

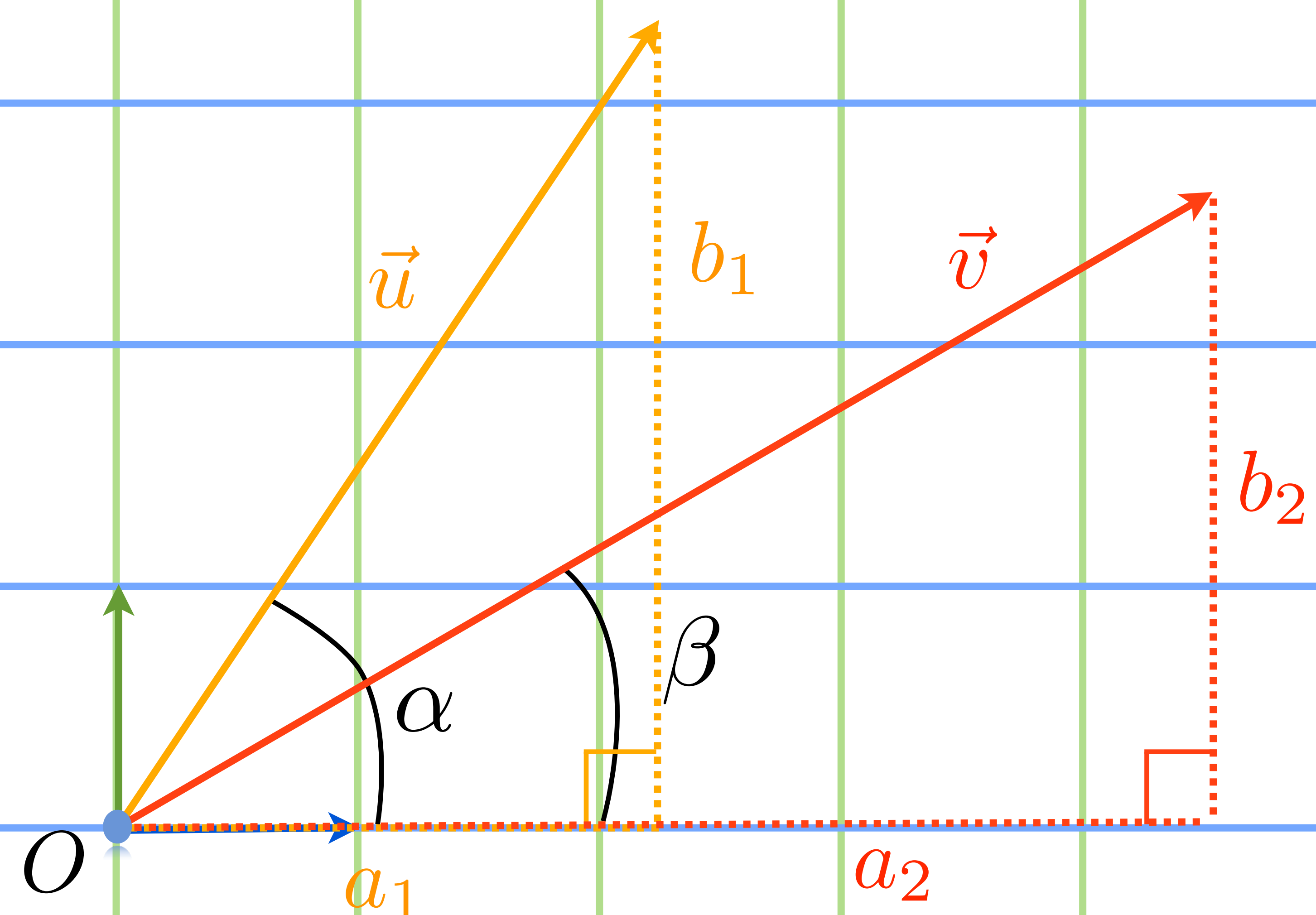


Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$



Dans $\mathbb{R}^2$ $\qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$

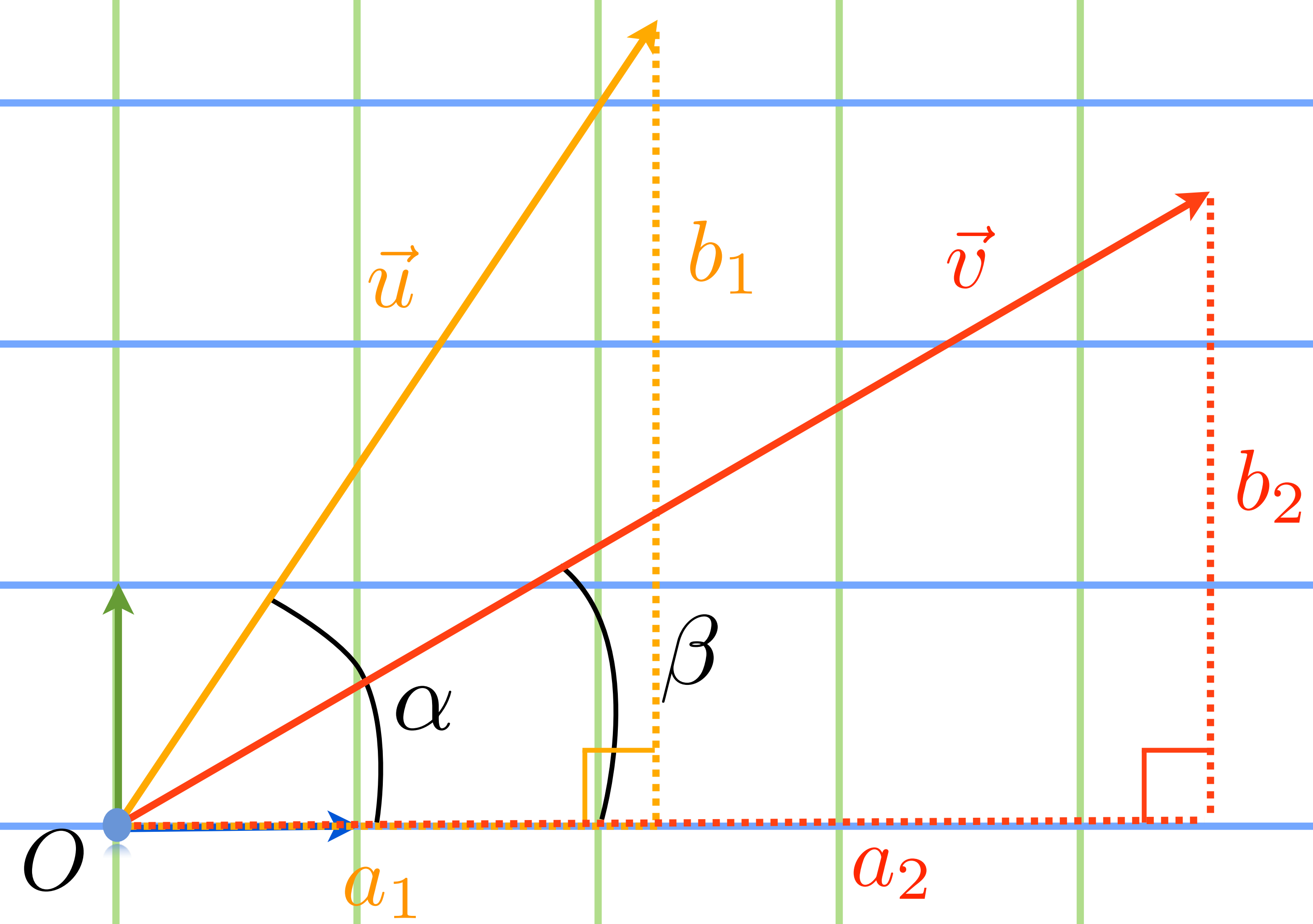
$$= (\|\vec{u}\|\cos\alpha)(\|\vec{v}\|\cos\beta) + (\|\vec{u}\|\sin\alpha)(\|\vec{v}\|\sin\beta)$$



Dans $\mathbb{R}^2$ $\qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$

$$= (\|\vec{u}\|\cos\alpha)(\|\vec{v}\|\cos\beta) + (\|\vec{u}\|\sin\alpha)(\|\vec{v}\|\sin\beta)$$

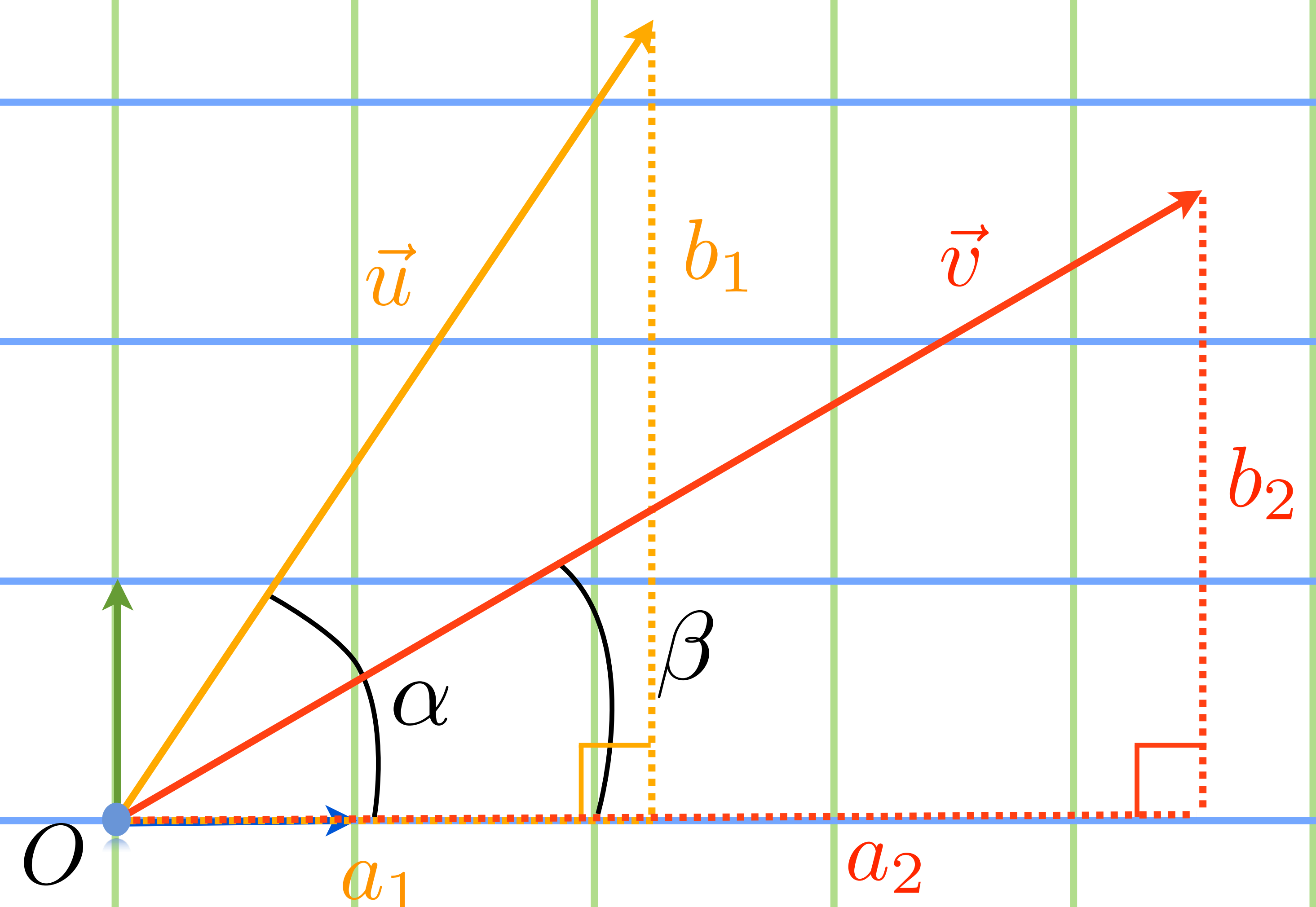
$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$



Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$

$$= (\|\vec{u}\|\cos\alpha)(\|\vec{v}\|\cos\beta) + (\|\vec{u}\|\sin\alpha)(\|\vec{v}\|\sin\beta)$$

$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \quad = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\alpha-\beta)$$

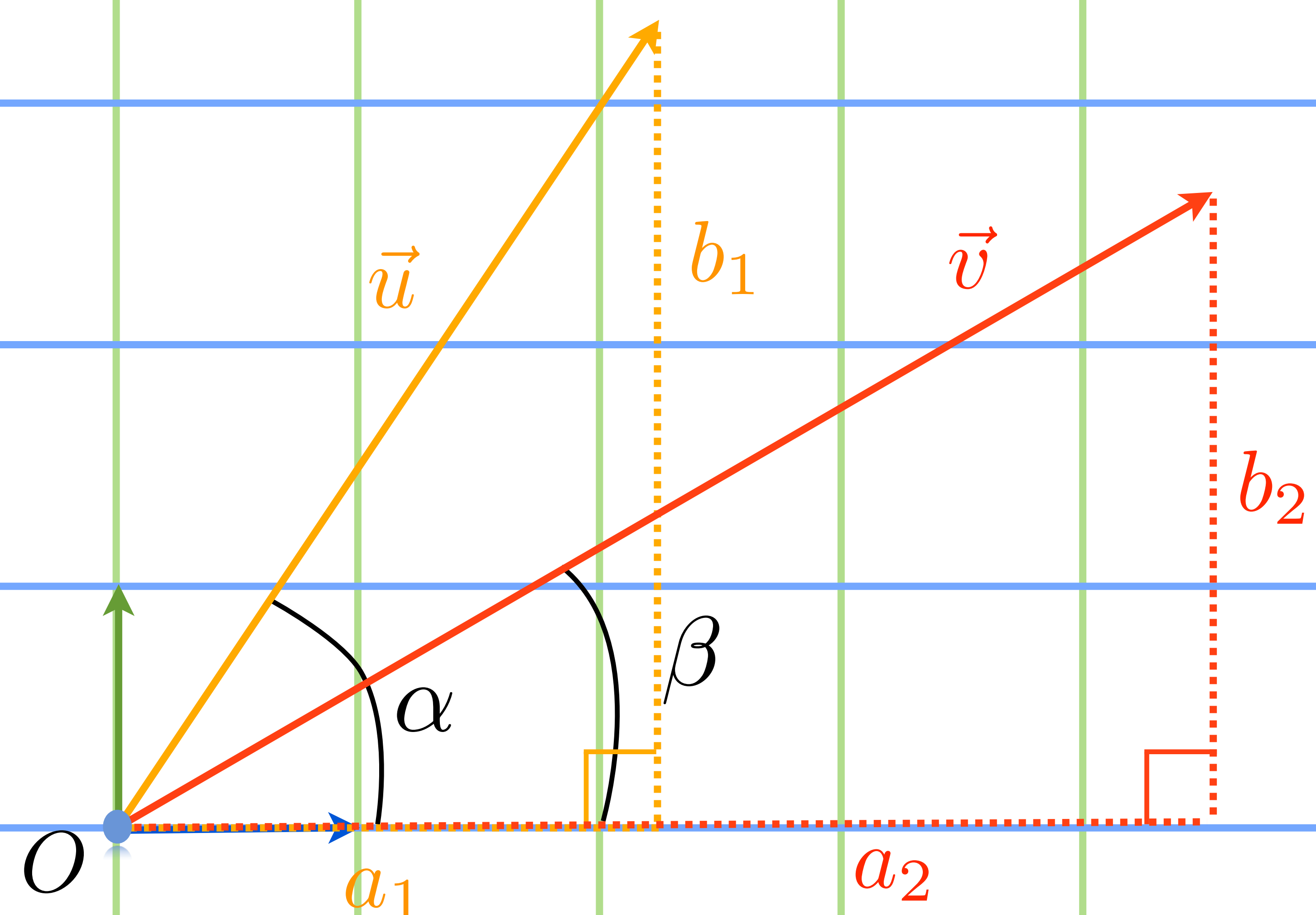


Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2$

$$= (\|\vec{u}\|\cos\alpha)(\|\vec{v}\|\cos\beta) + (\|\vec{u}\|\sin\alpha)(\|\vec{v}\|\sin\beta)$$

$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \quad = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\alpha-\beta)$$

$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\beta-\alpha)$$

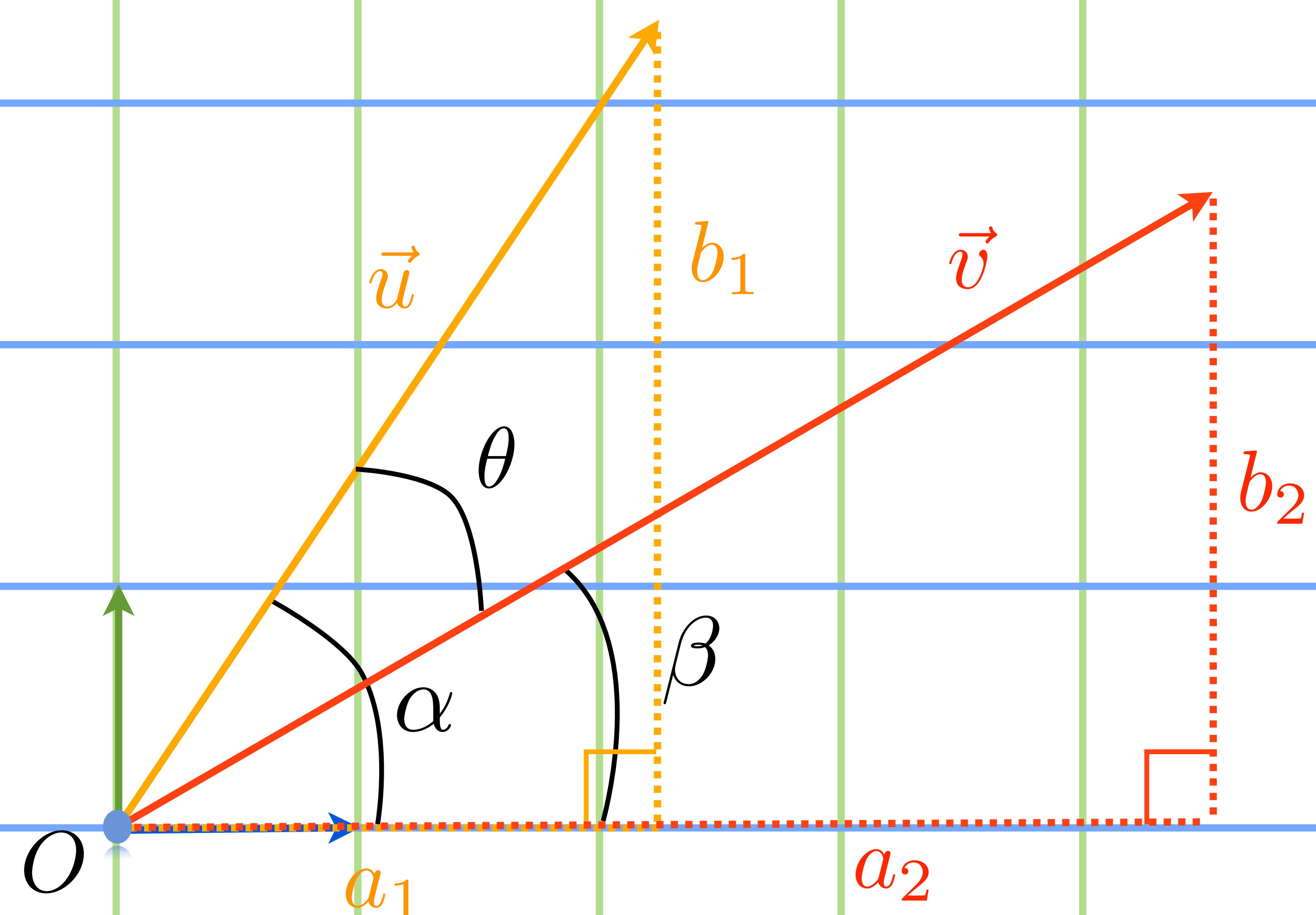


Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2$

$$= (\|\vec{u}\|\cos\alpha)(\|\vec{v}\|\cos\beta) + (\|\vec{u}\|\sin\alpha)(\|\vec{v}\|\sin\beta)$$

$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \quad = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\alpha-\beta)$$

$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\beta-\alpha)$$



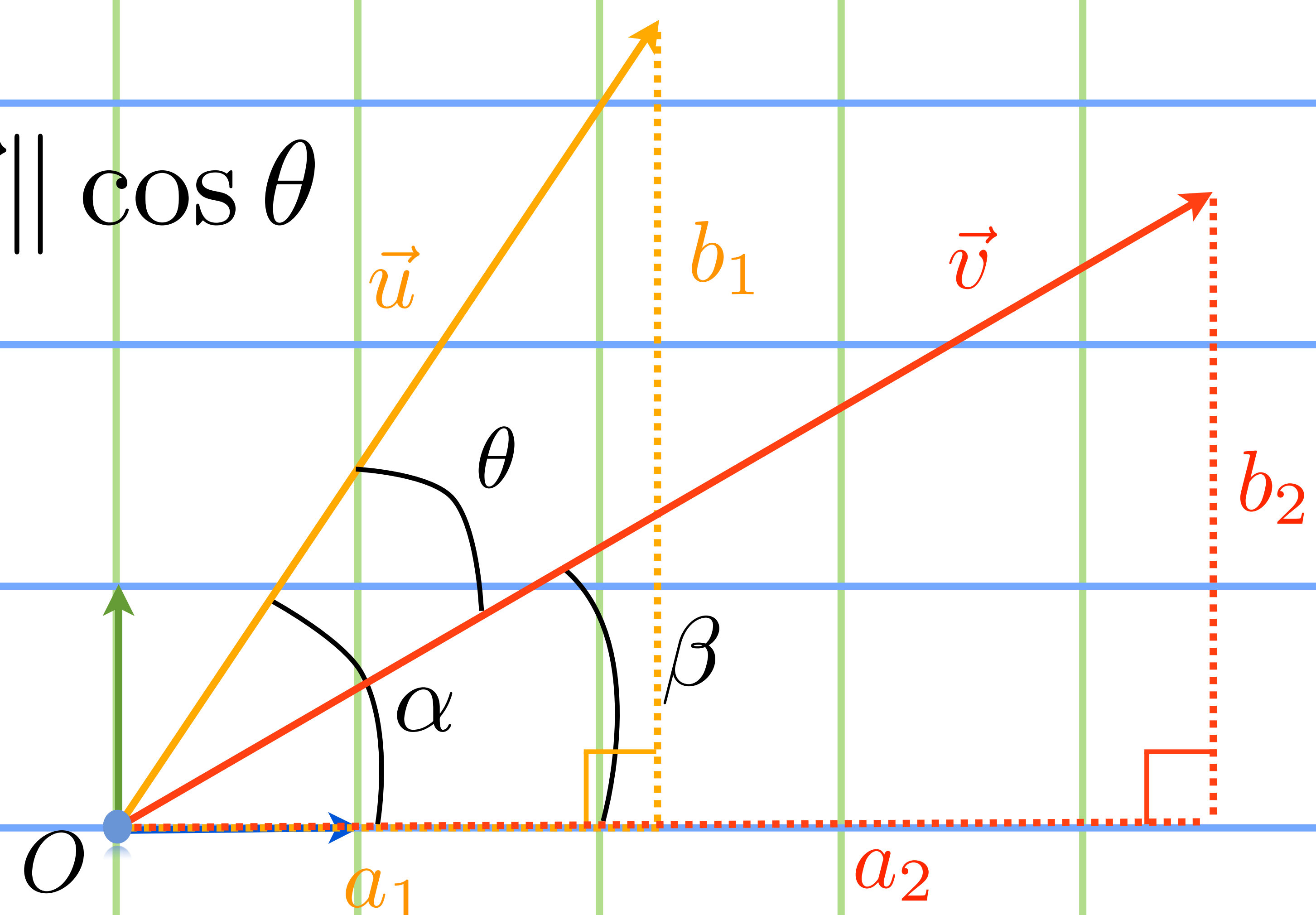
Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2$

$$= (\|\vec{u}\|\cos\alpha)(\|\vec{v}\|\cos\beta) + (\|\vec{u}\|\sin\alpha)(\|\vec{v}\|\sin\beta)$$

$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \qquad = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\alpha-\beta)$$

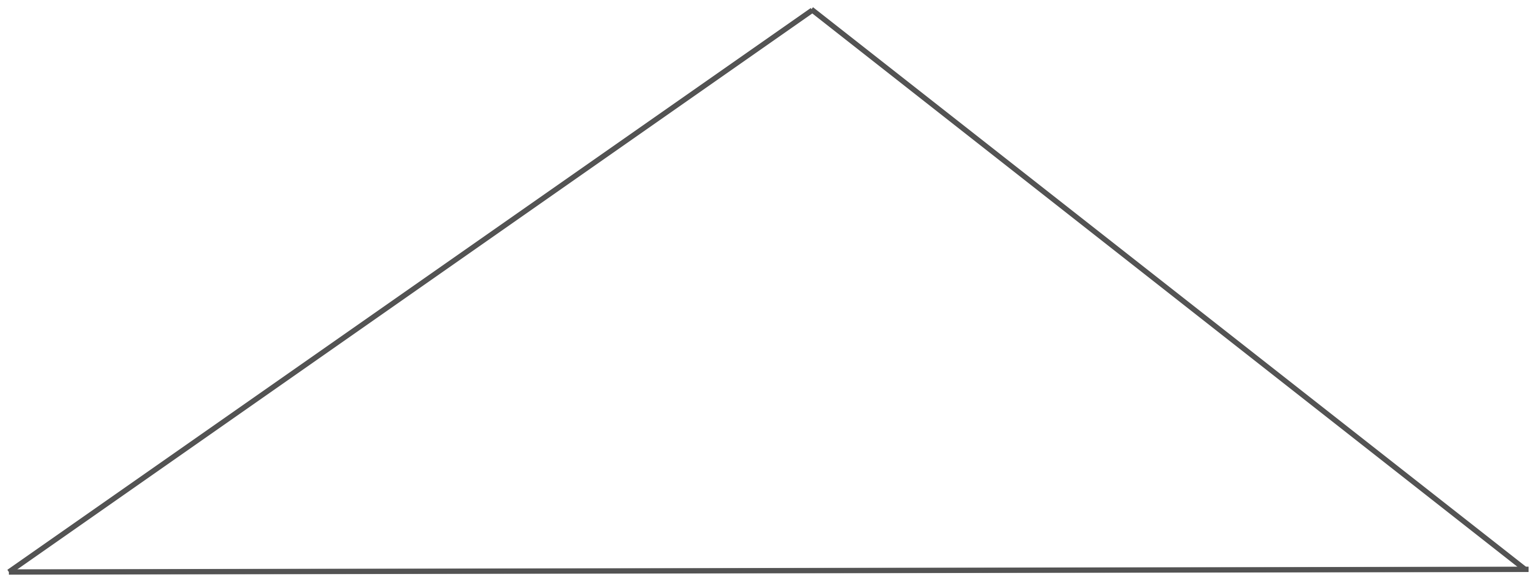
$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\beta-\alpha)$$

$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$$

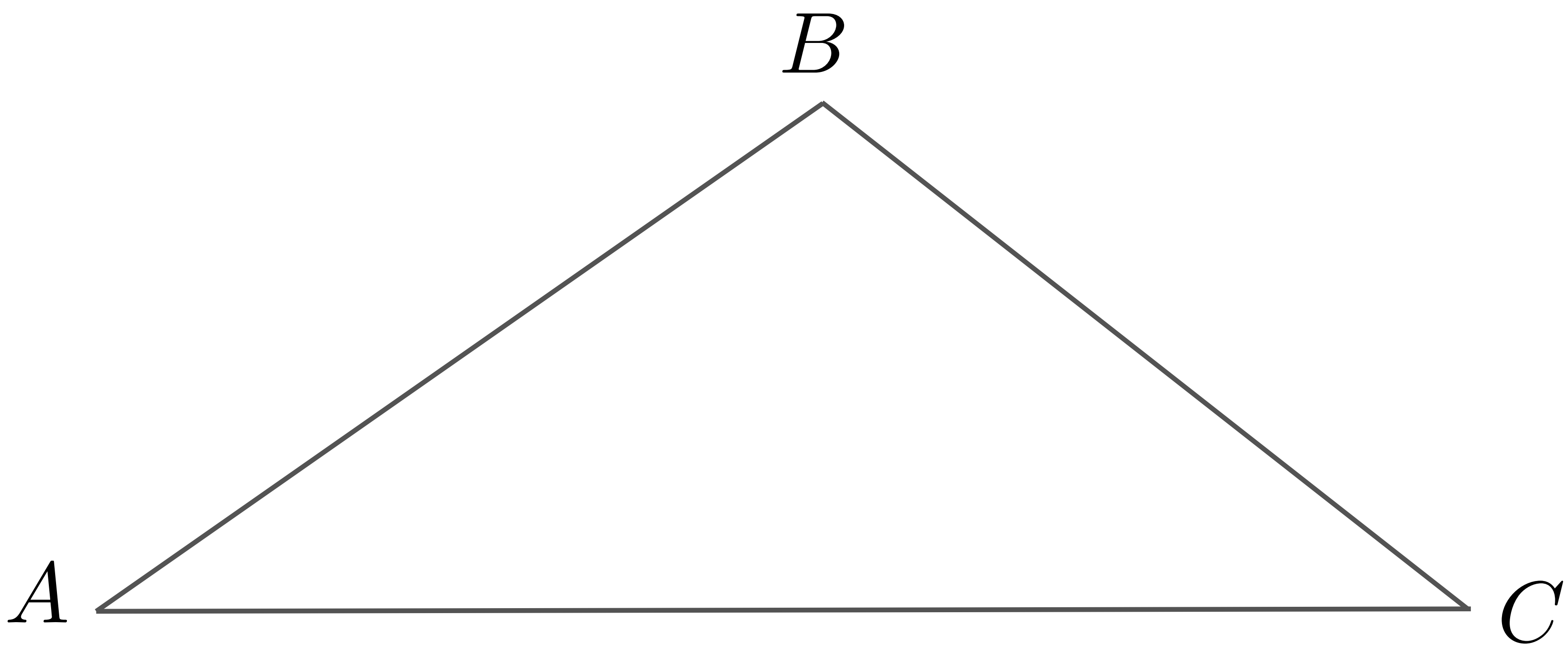


Loi des cosinus

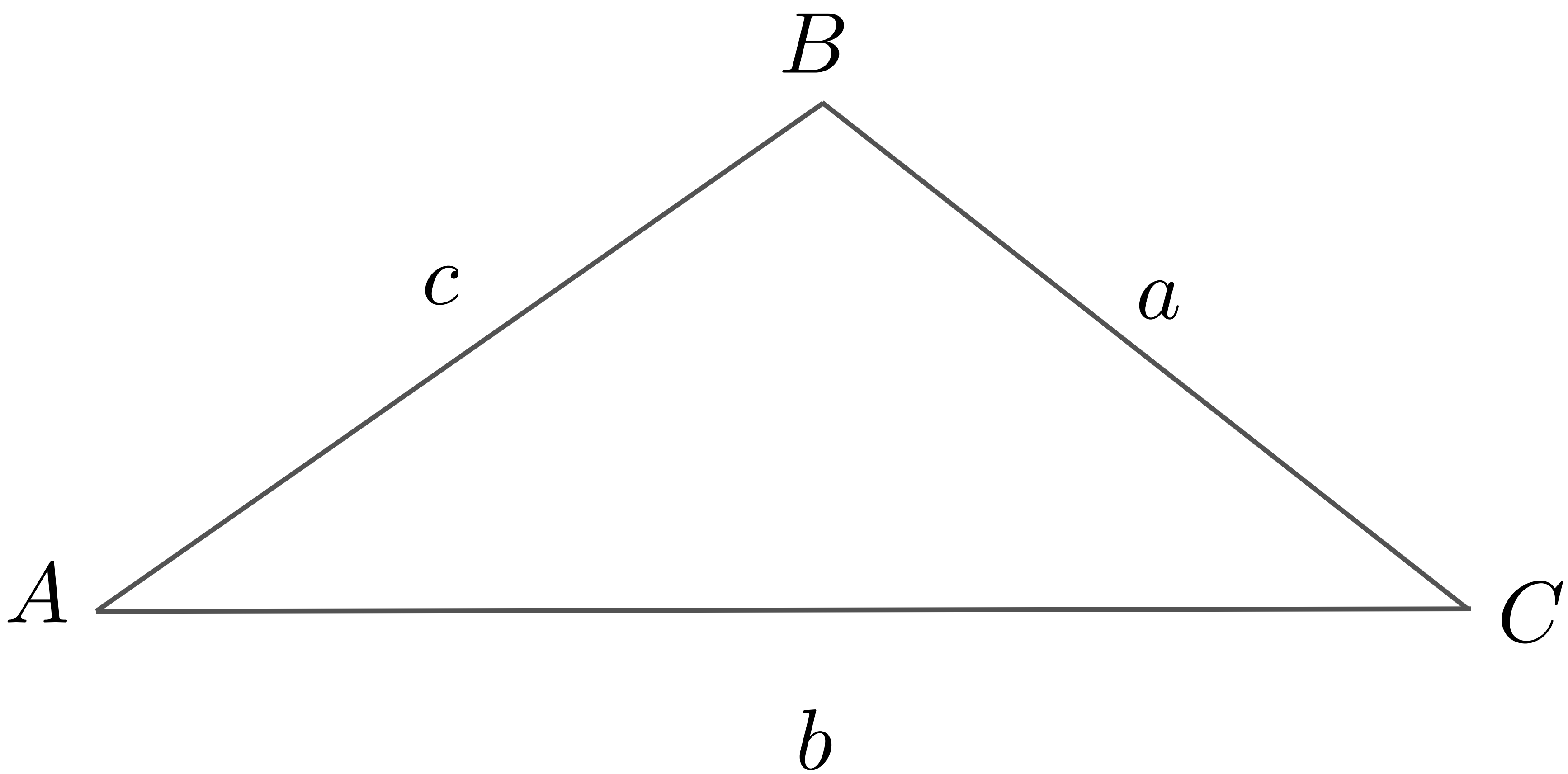
Loi des cosinus



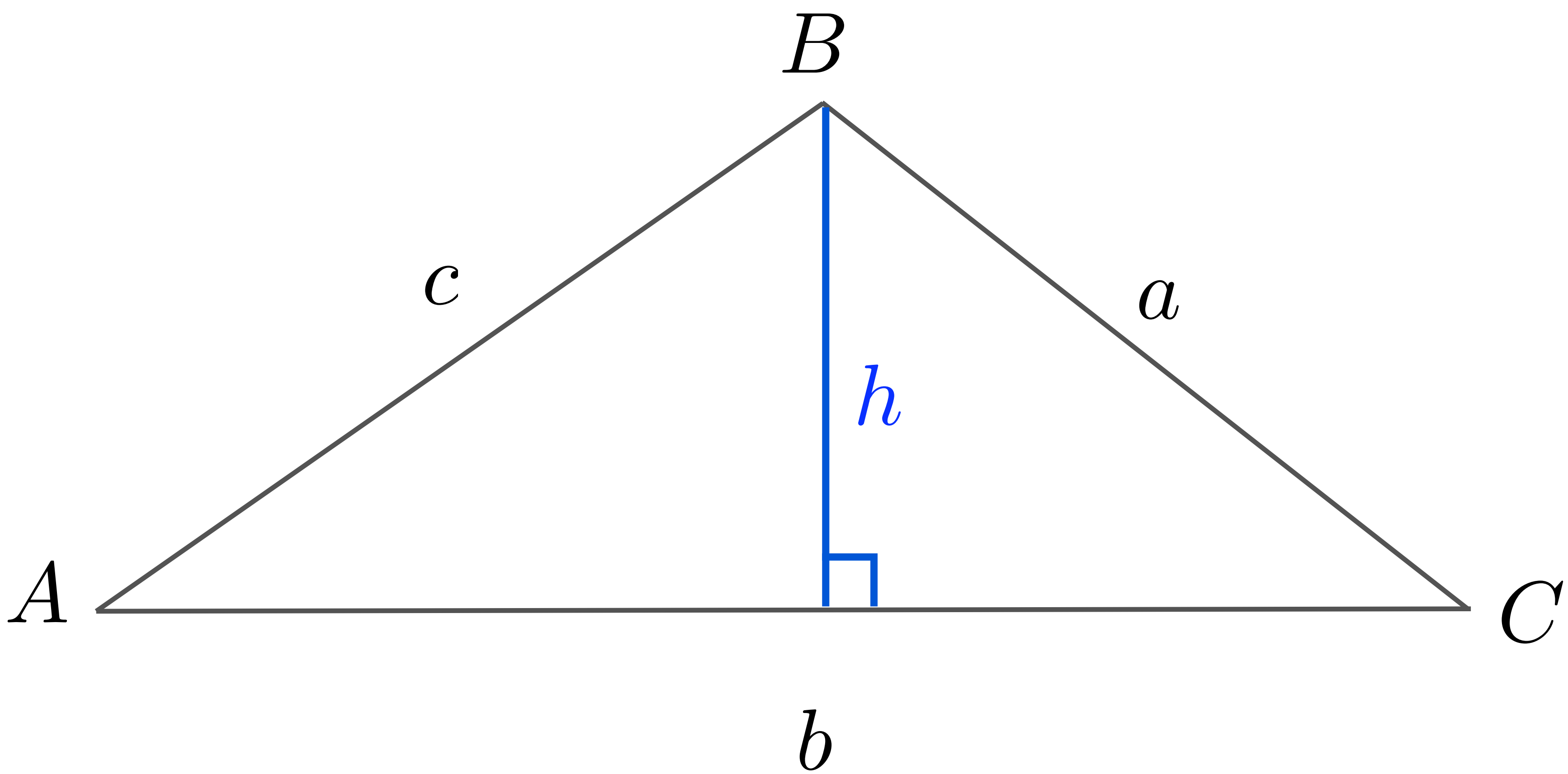
Loi des cosinus



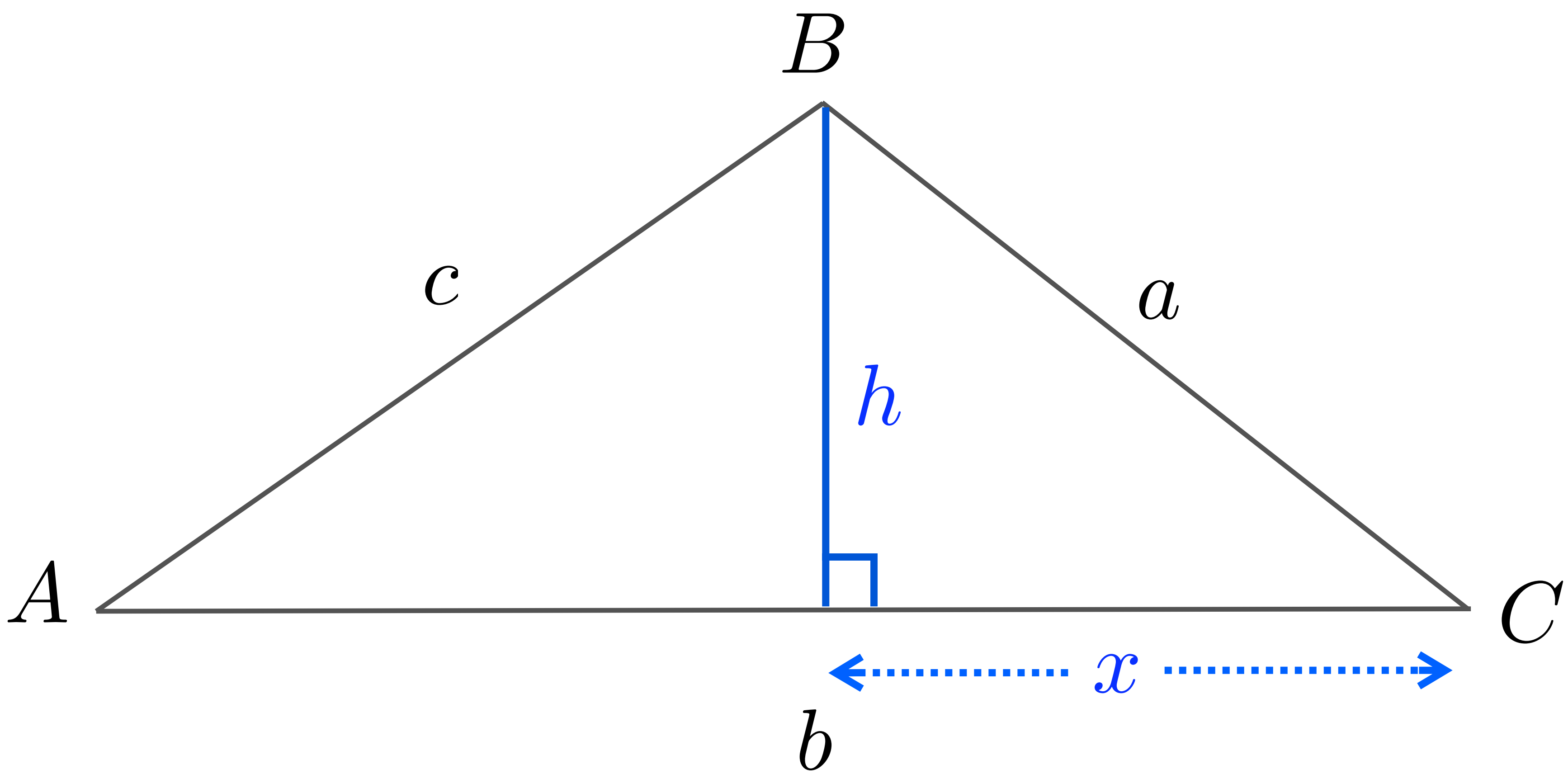
Loi des cosinus



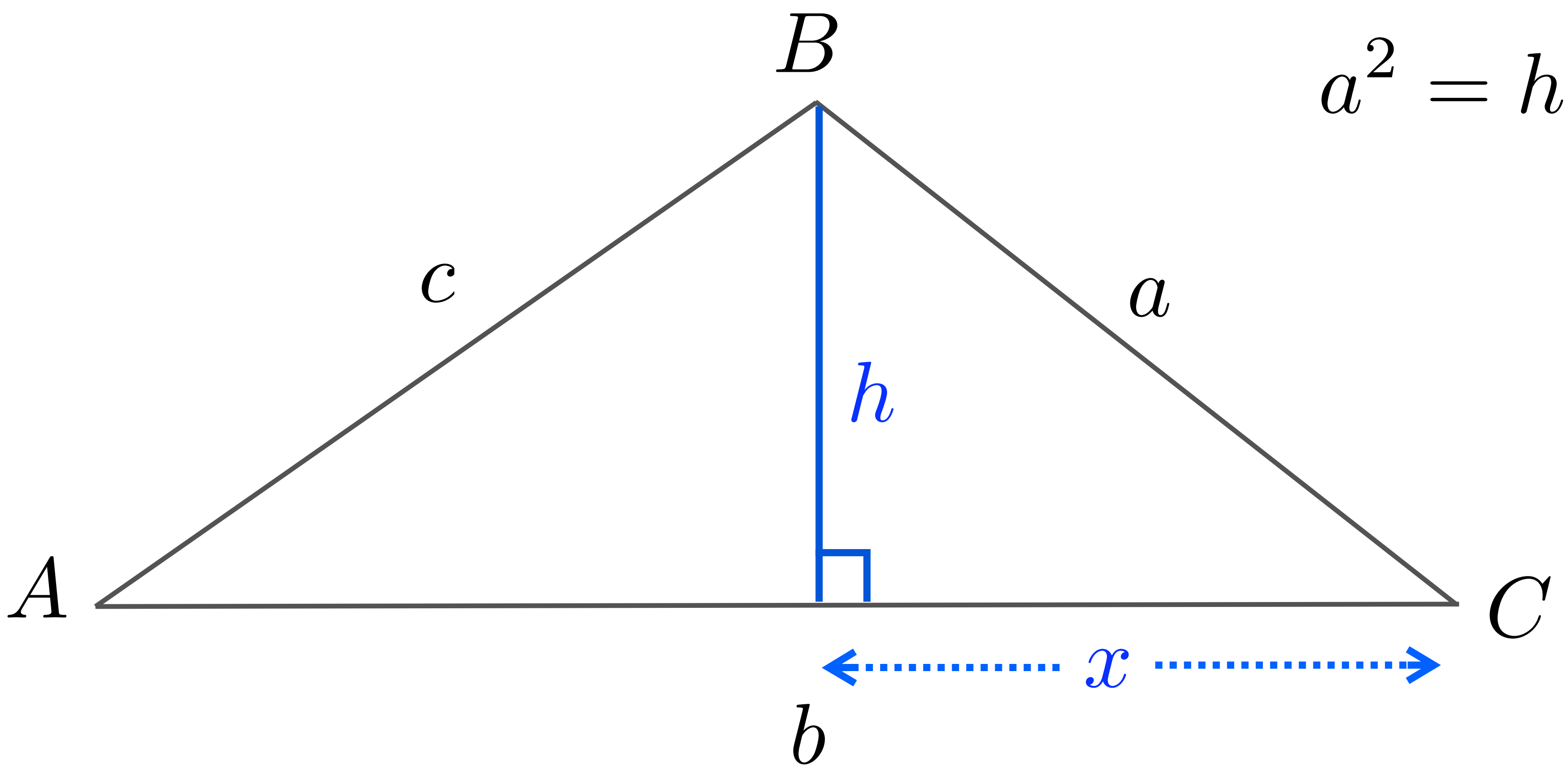
Loi des cosinus



Loi des cosinus

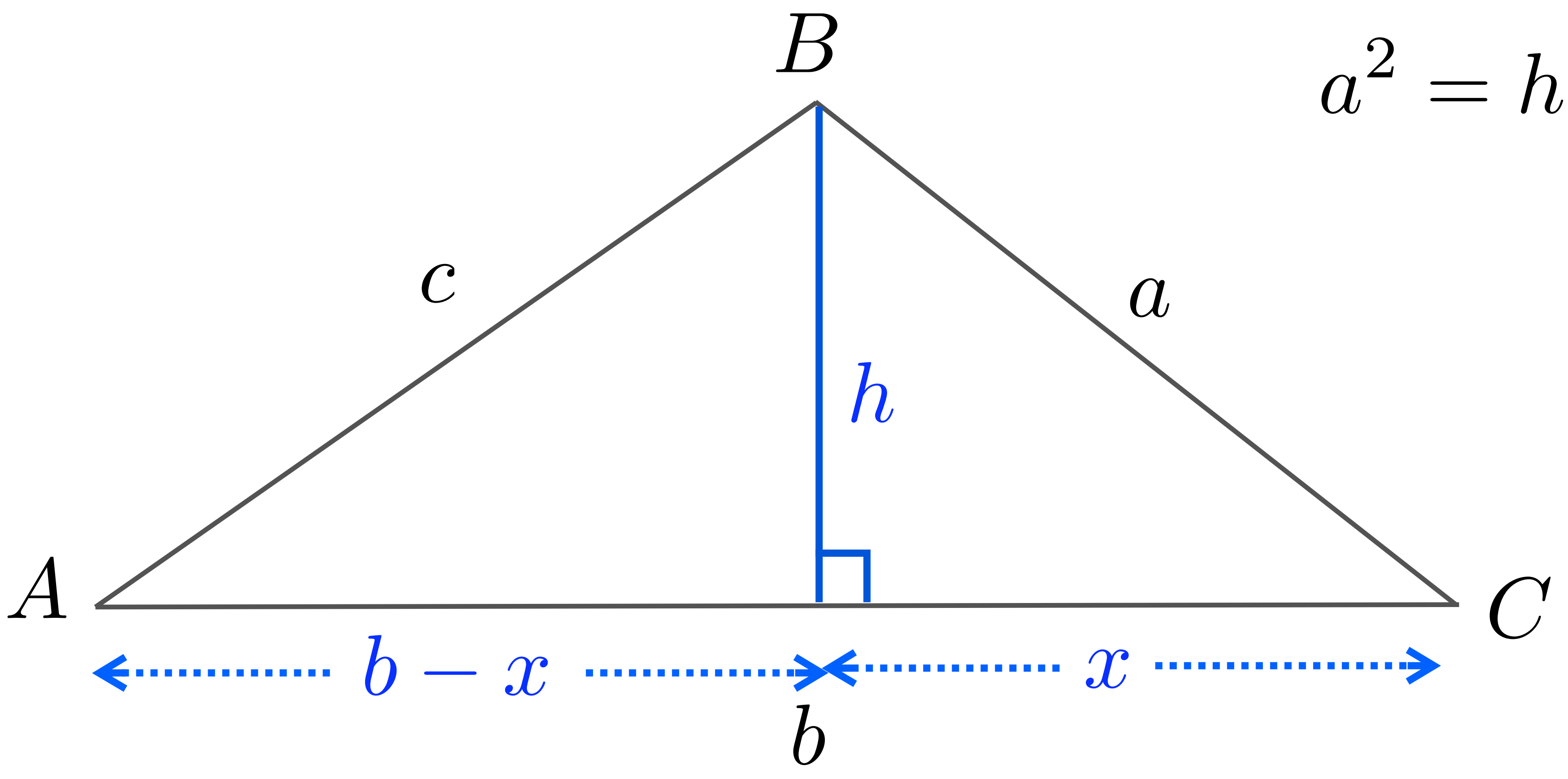


Loi des cosinus



$$a^2 = h^2 + x^2$$

Loi des cosinus

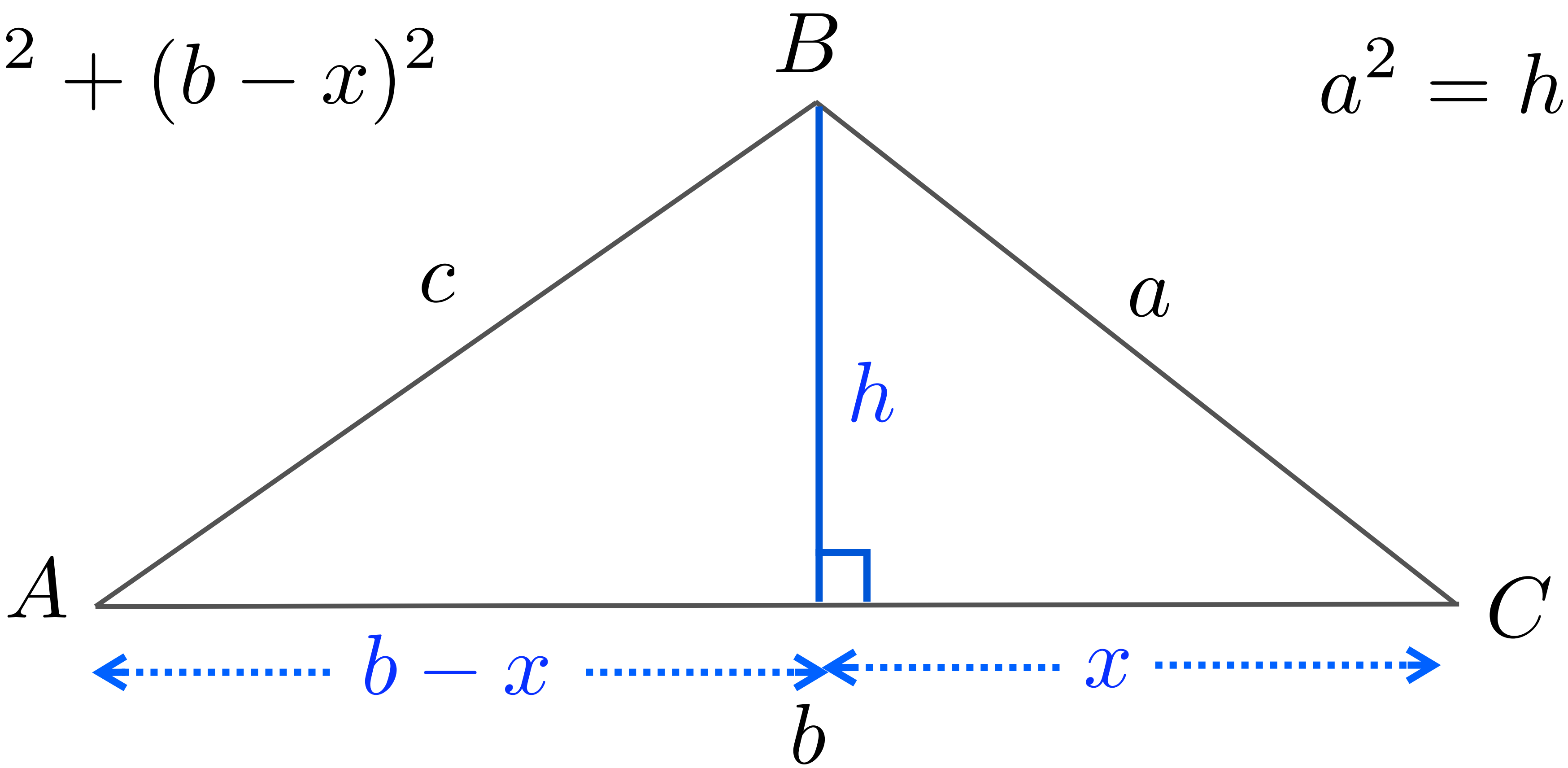


$$a^2 = h^2 + x^2$$

Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2$$

$$a^2 = h^2 + x^2$$



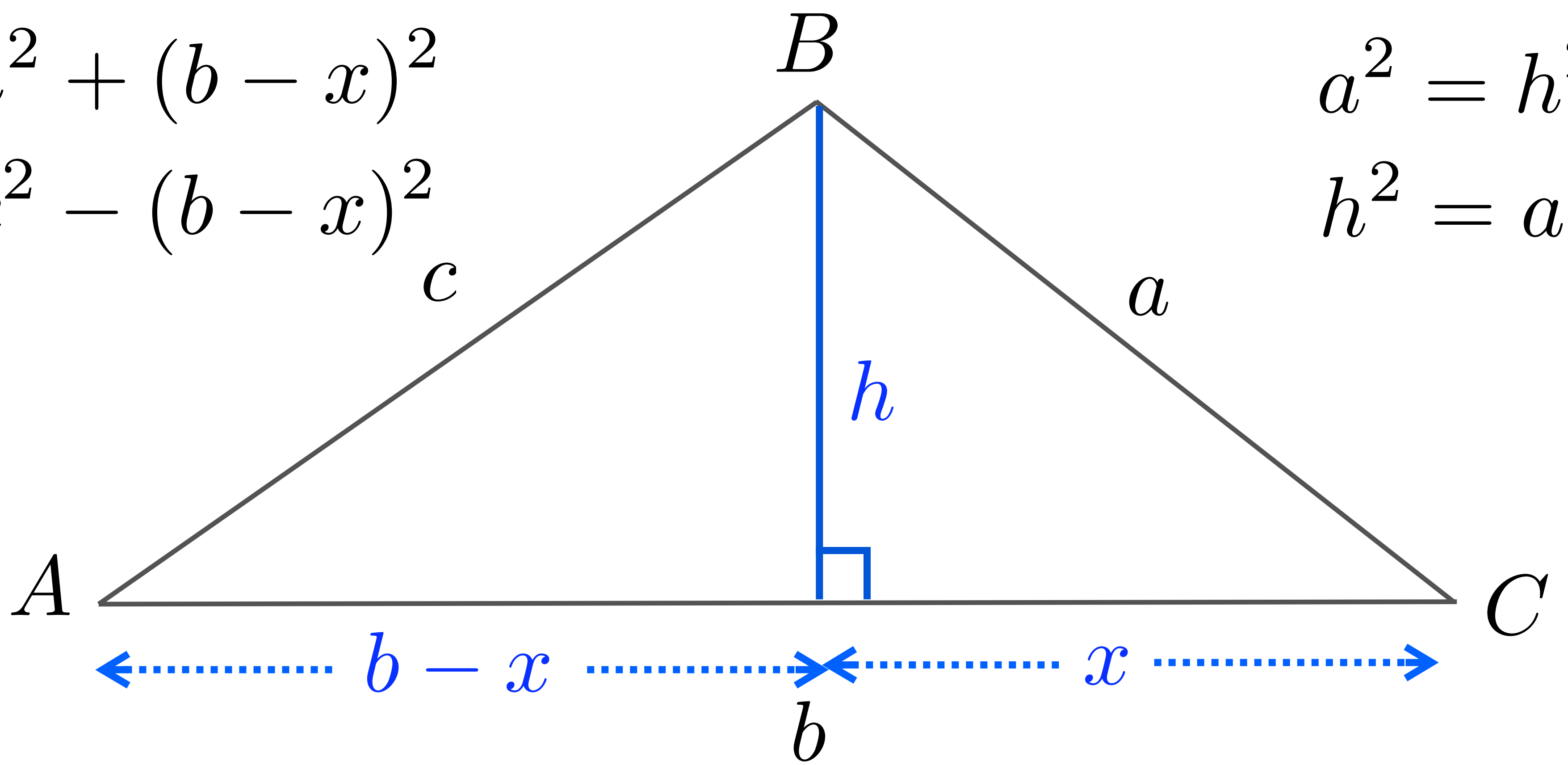
Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2$$

$$h^2 = c^2 - (b - x)^2$$

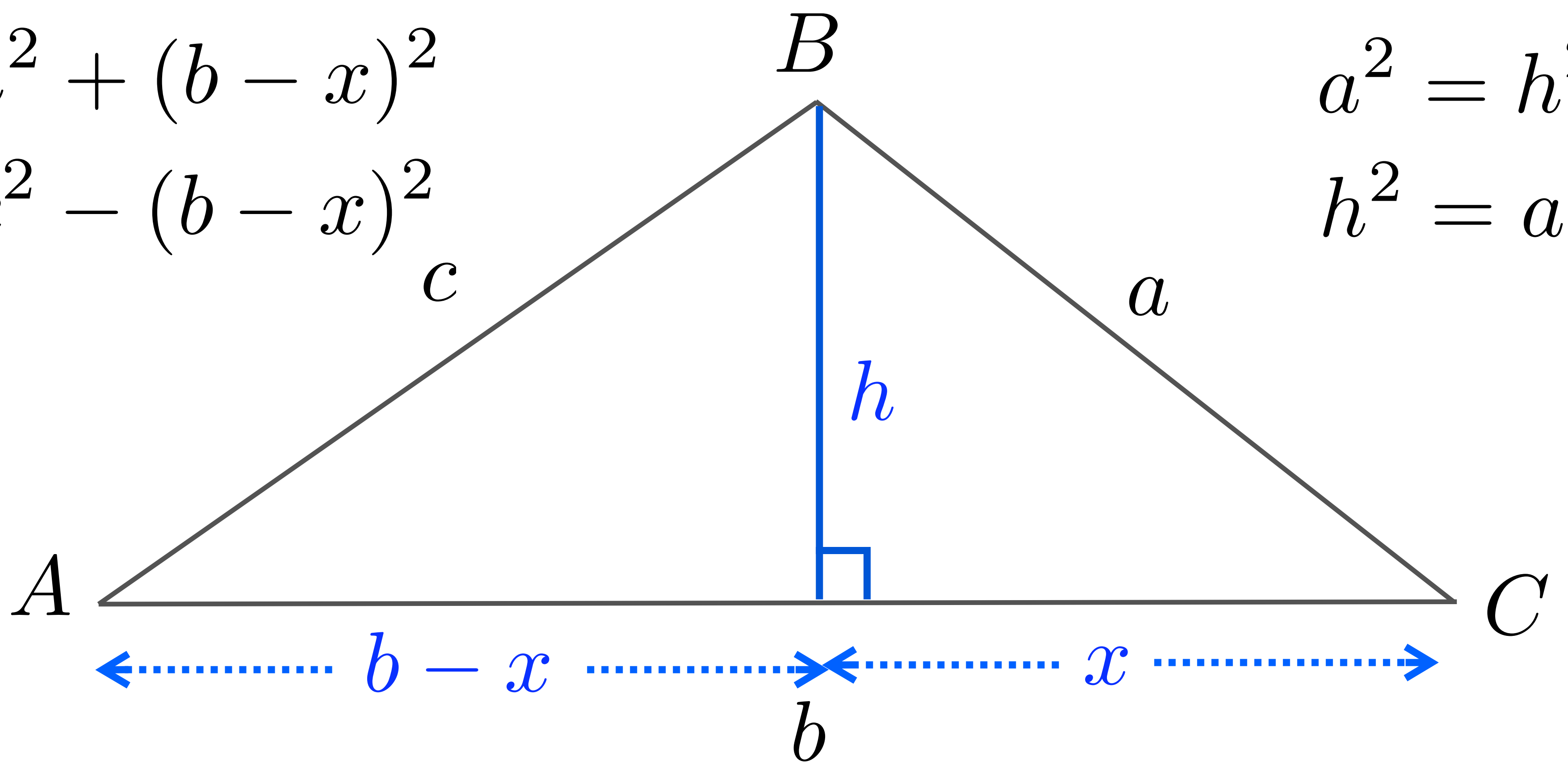
$$a^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$



Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2$$
$$h^2 = c^2 - (b - x)^2$$



$$a^2 = h^2 + x^2$$
$$h^2 = a^2 - x^2$$

$$a^2 - x^2 = c^2 - (b^2 - 2bx + x^2)$$

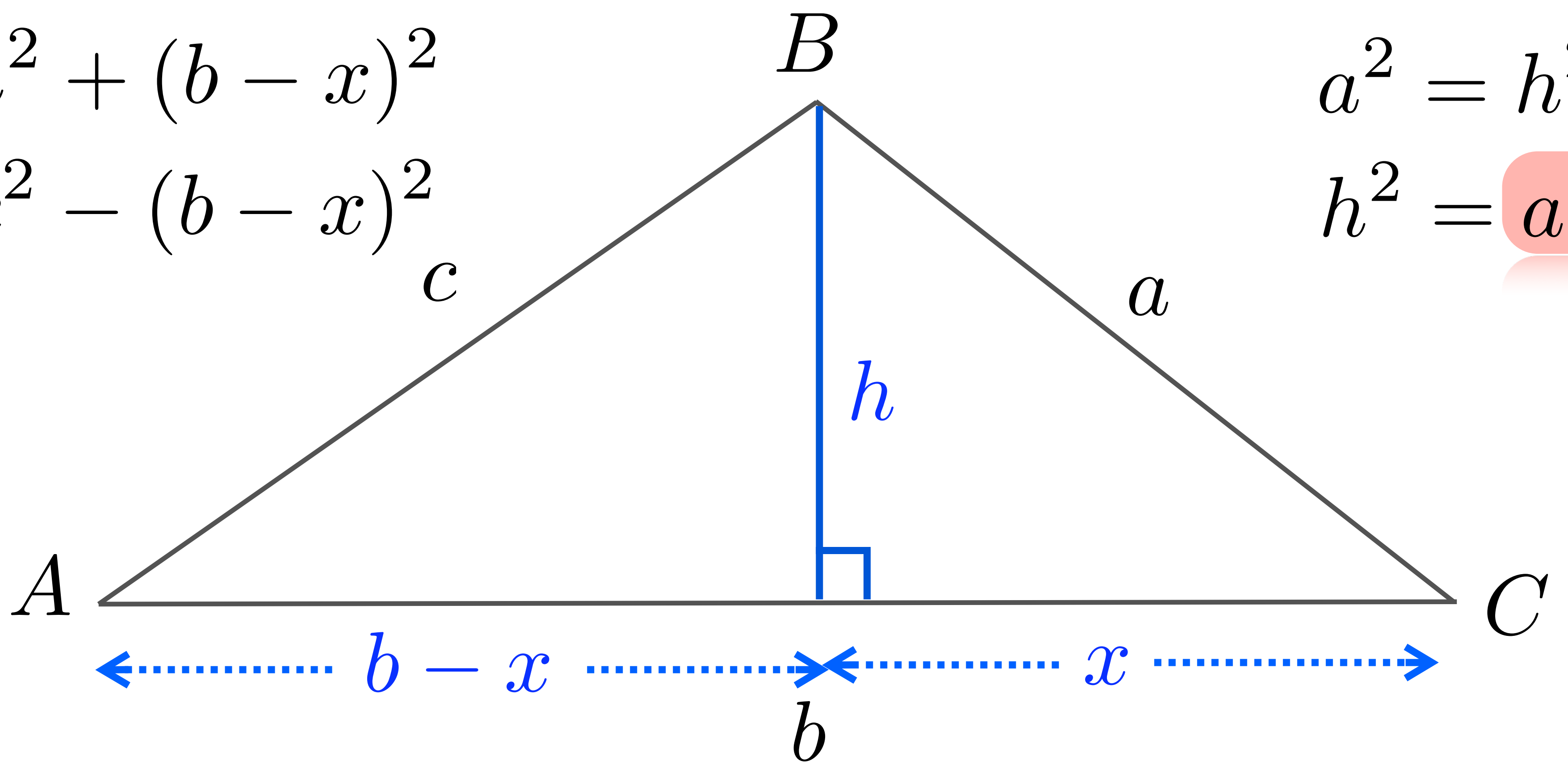
Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2$$

$$h^2 = c^2 - (b - x)^2$$

$$a^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$



$$a^2 - x^2 = c^2 - (b^2 - 2bx + x^2)$$

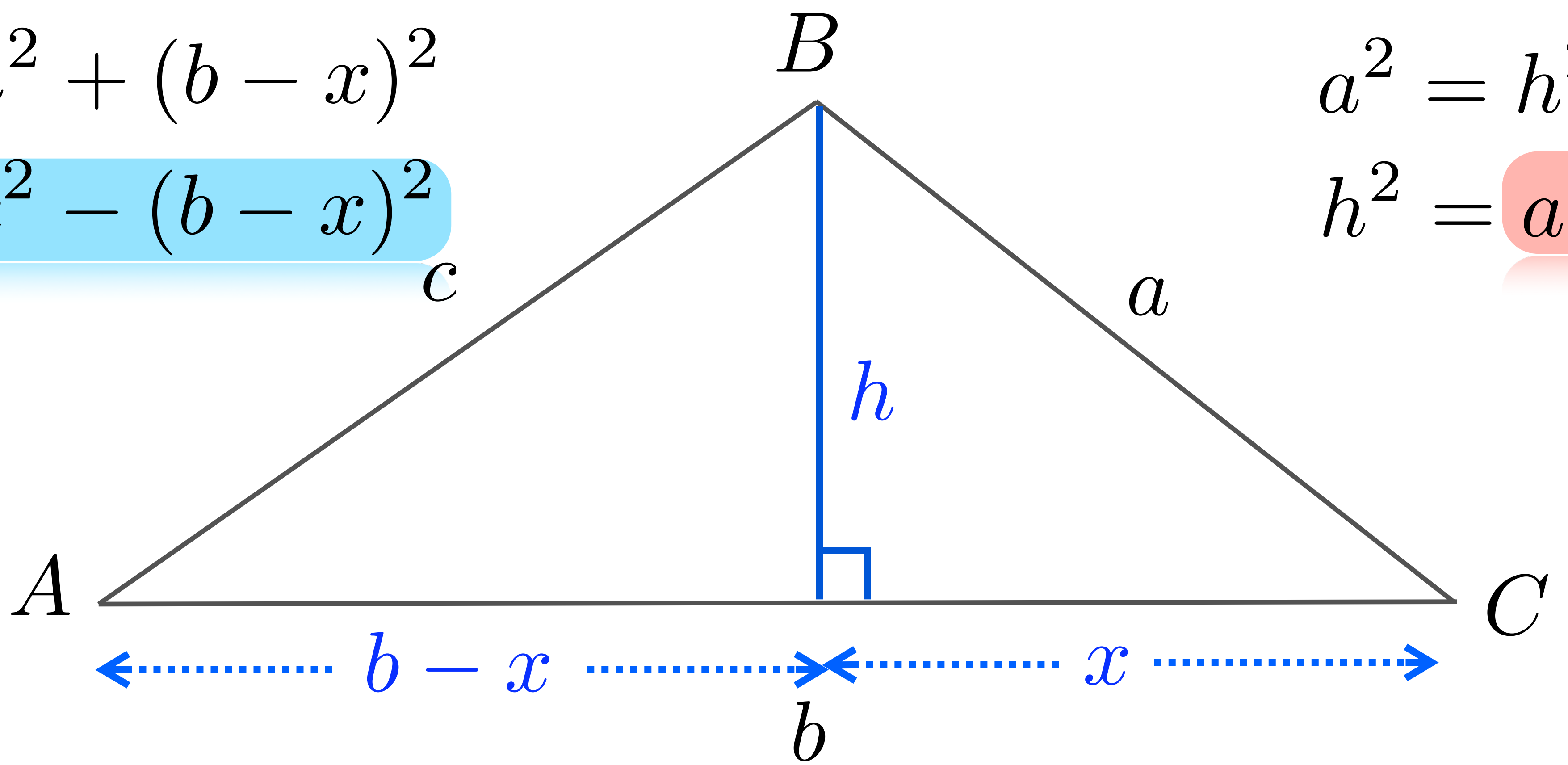
Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2$$

$$h^2 = c^2 - (b - x)^2$$

$$a^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$



$$a^2 - x^2 = c^2 - (b^2 - 2bx + x^2)$$

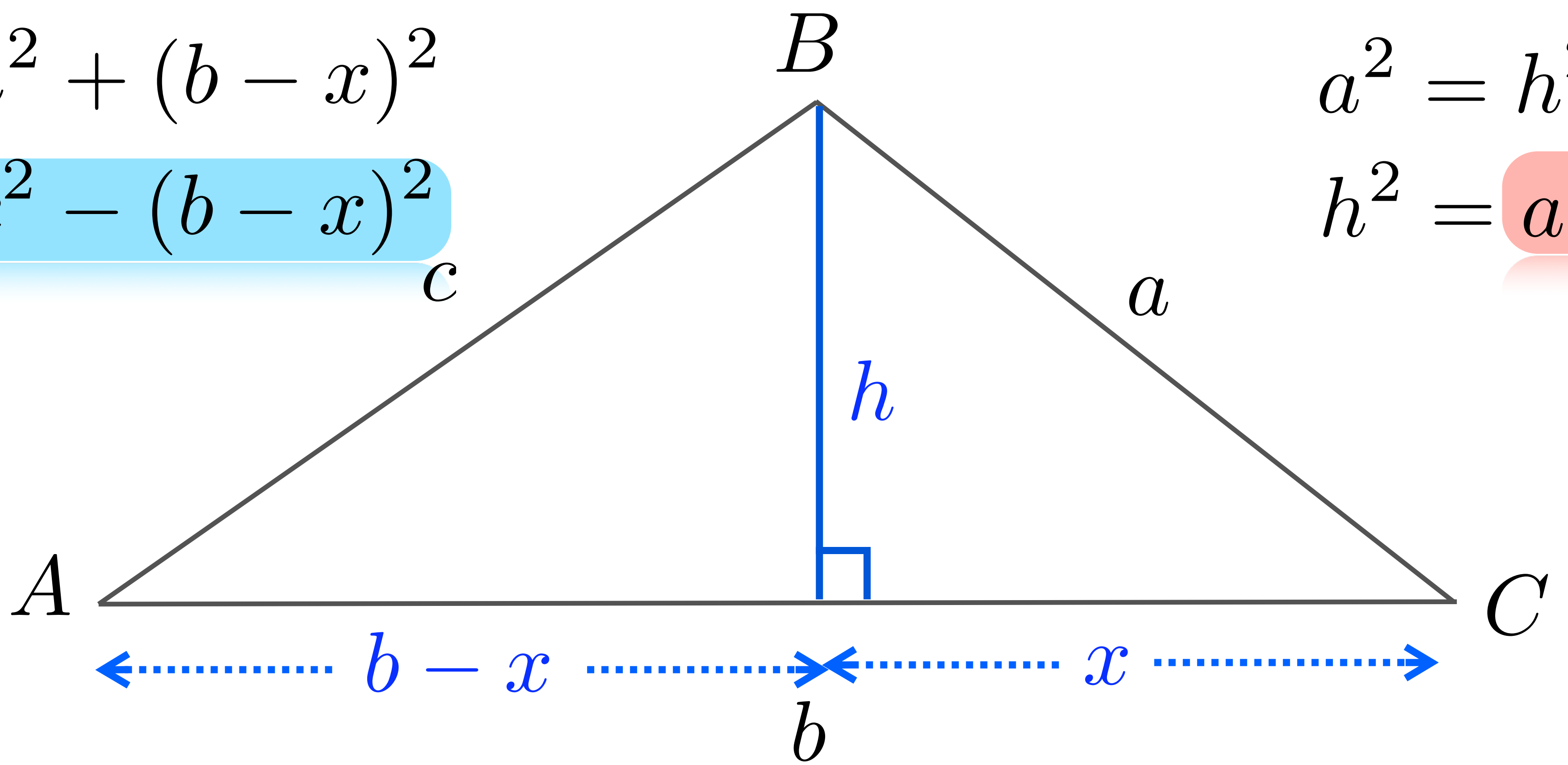
Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2$$

$$h^2 = c^2 - (b - x)^2$$

$$a^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$



$$a^2 - \cancel{x^2} = c^2 - (b^2 - 2bx + \cancel{x^2})$$

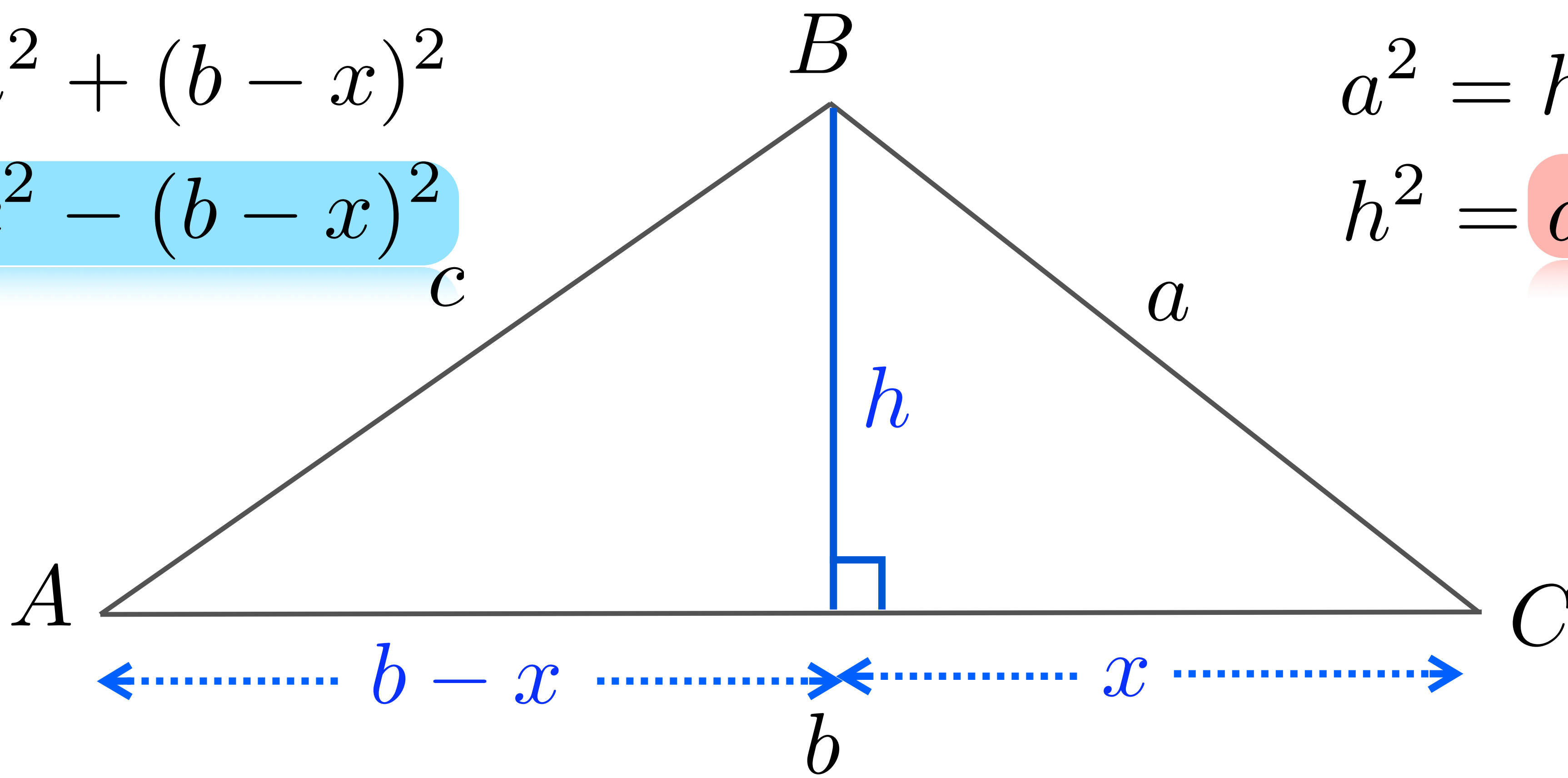
Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2$$

$$h^2 = c^2 - (b - x)^2$$

$$a^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$



$$a^2 - \cancel{x^2} = c^2 - (b^2 - 2bx + \cancel{x^2})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$$

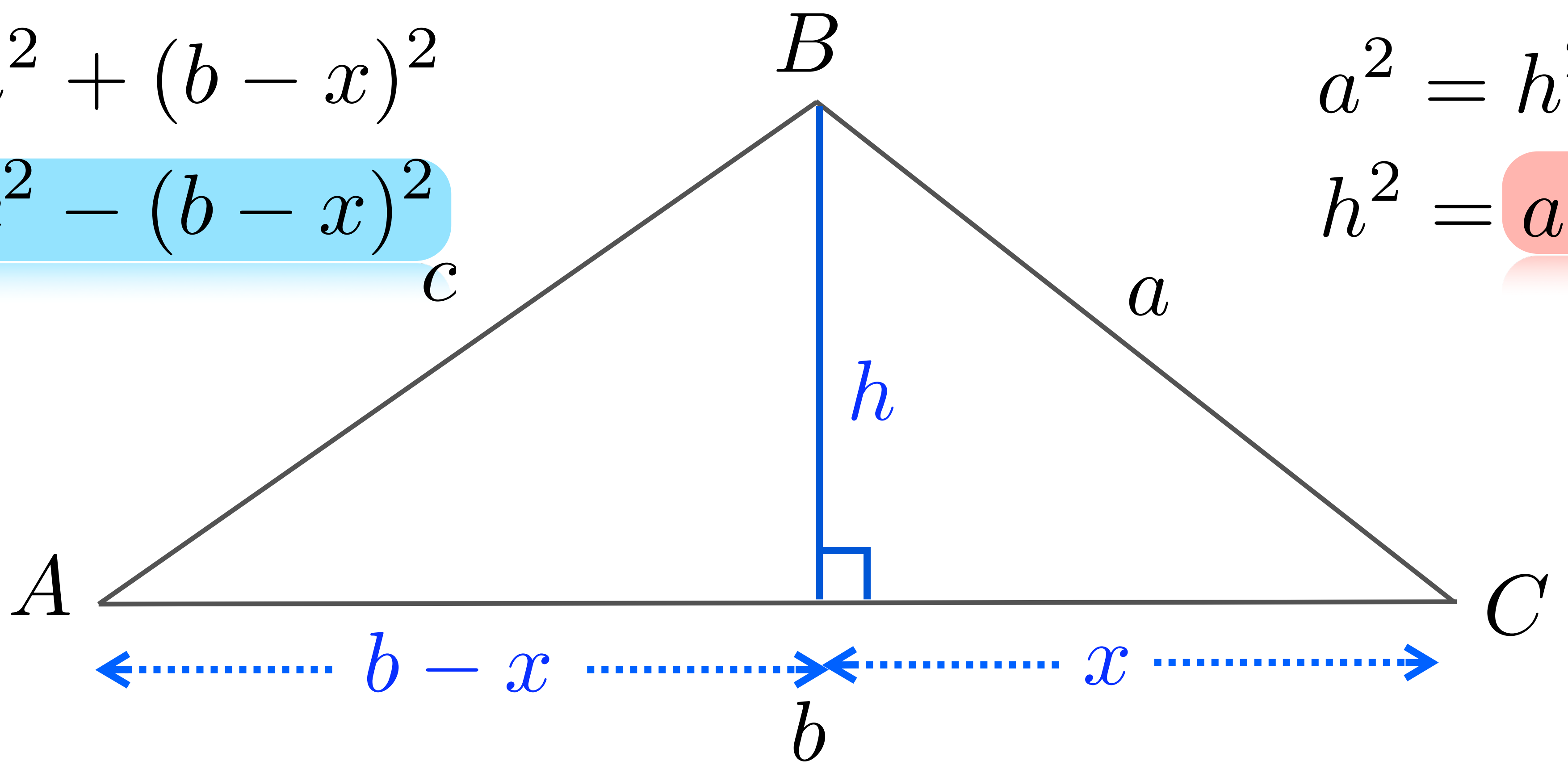
Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2$$

$$h^2 = c^2 - (b - x)^2$$

$$a^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$



$$a^2 - \cancel{x^2} = c^2 - (b^2 - 2bx + \cancel{x^2})$$

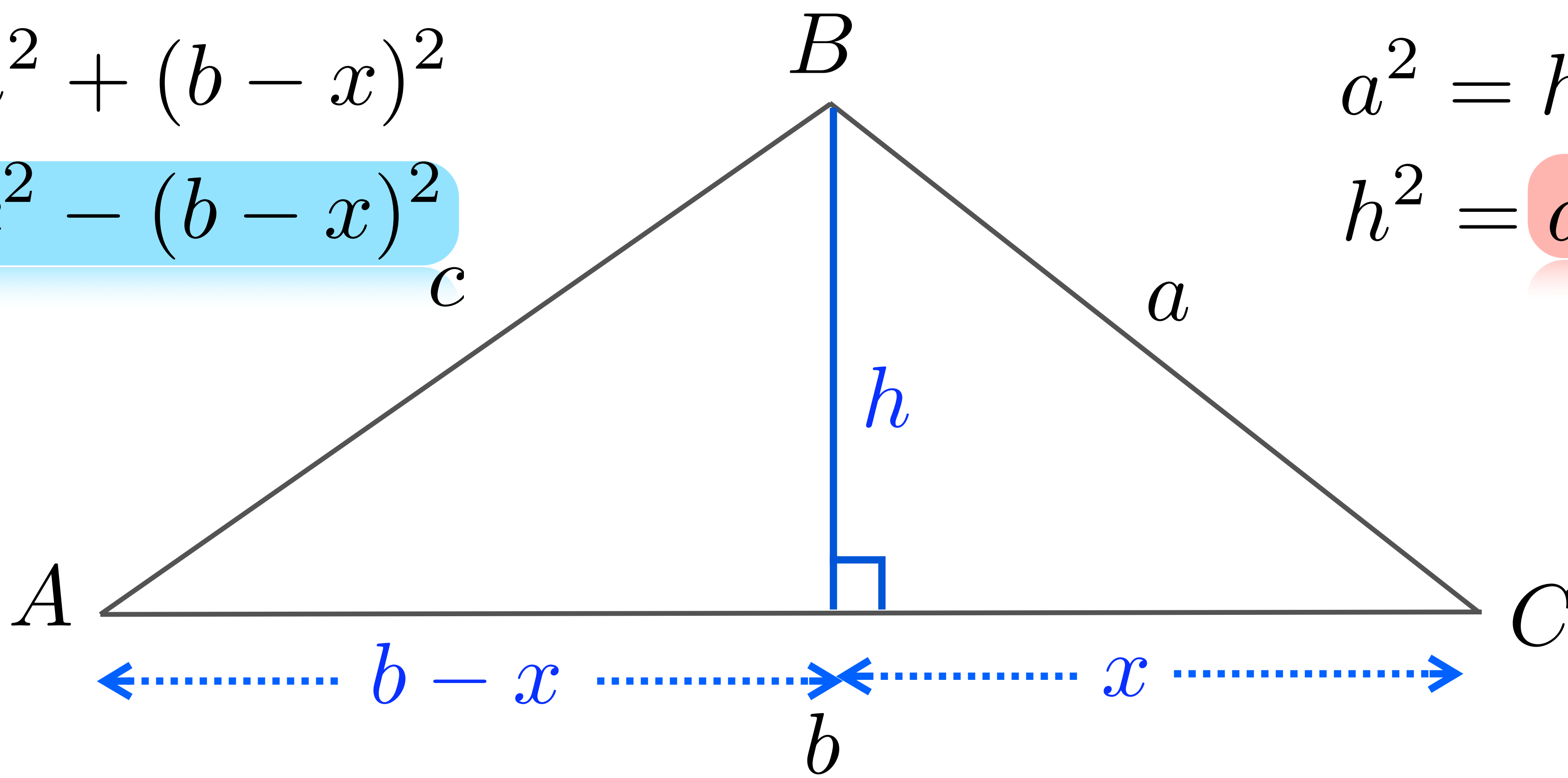
$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$$

Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b-x)^2$$

$$h^2 = c^2 - (b-x)^2$$



$$a^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$

$$a^2 - \cancel{x^2} = c^2 - (b^2 - 2bx + \cancel{x^2})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$$

$$\frac{x}{a} = \cos C$$

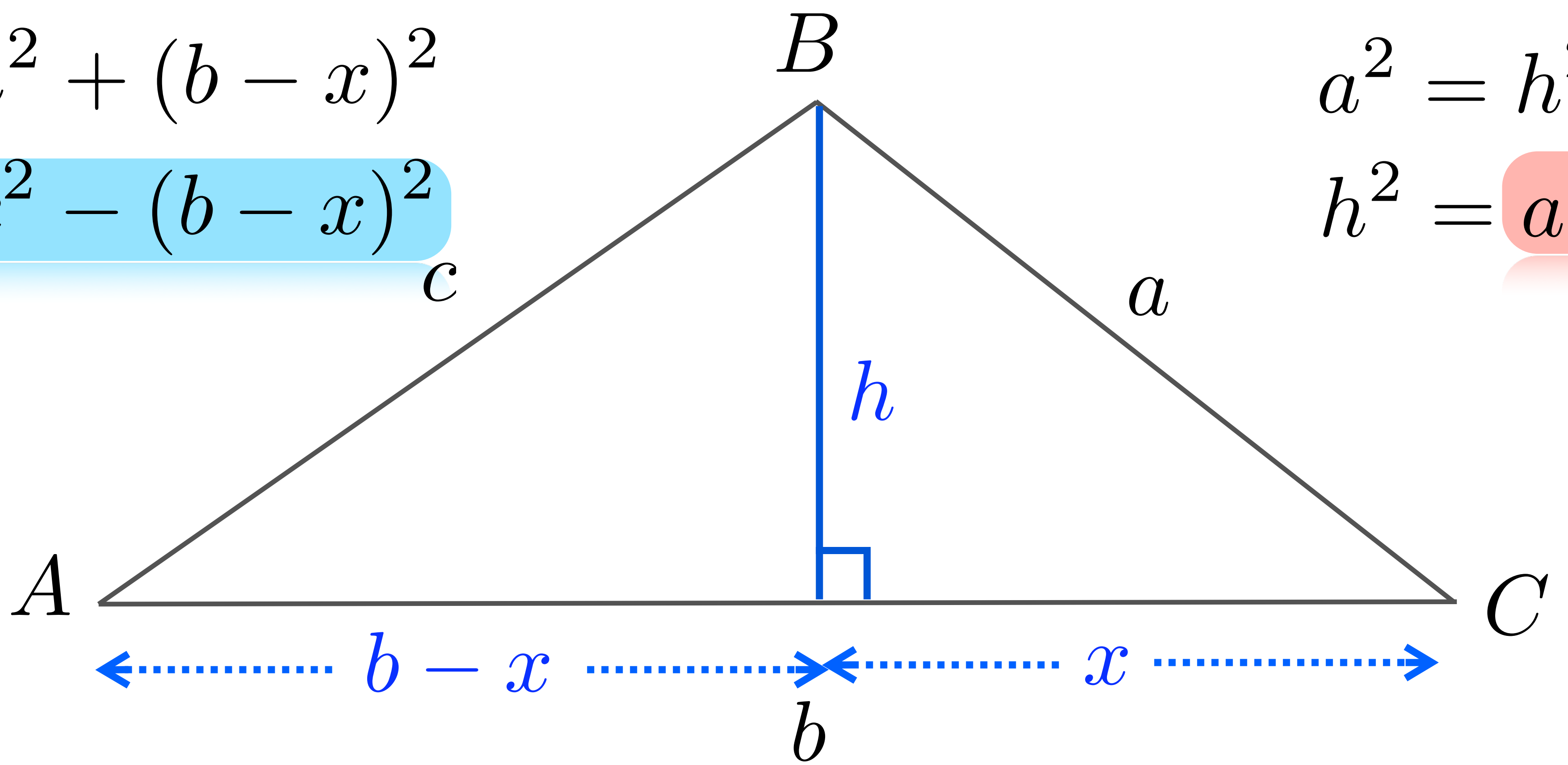
Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b-x)^2$$

$$h^2 = c^2 - (b-x)^2$$

$$a^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$



$$a^2 - \cancel{x^2} = c^2 - (b^2 - 2bx + \cancel{x^2})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$$

$$\frac{x}{a} = \cos C$$

$$x = a\cos C$$

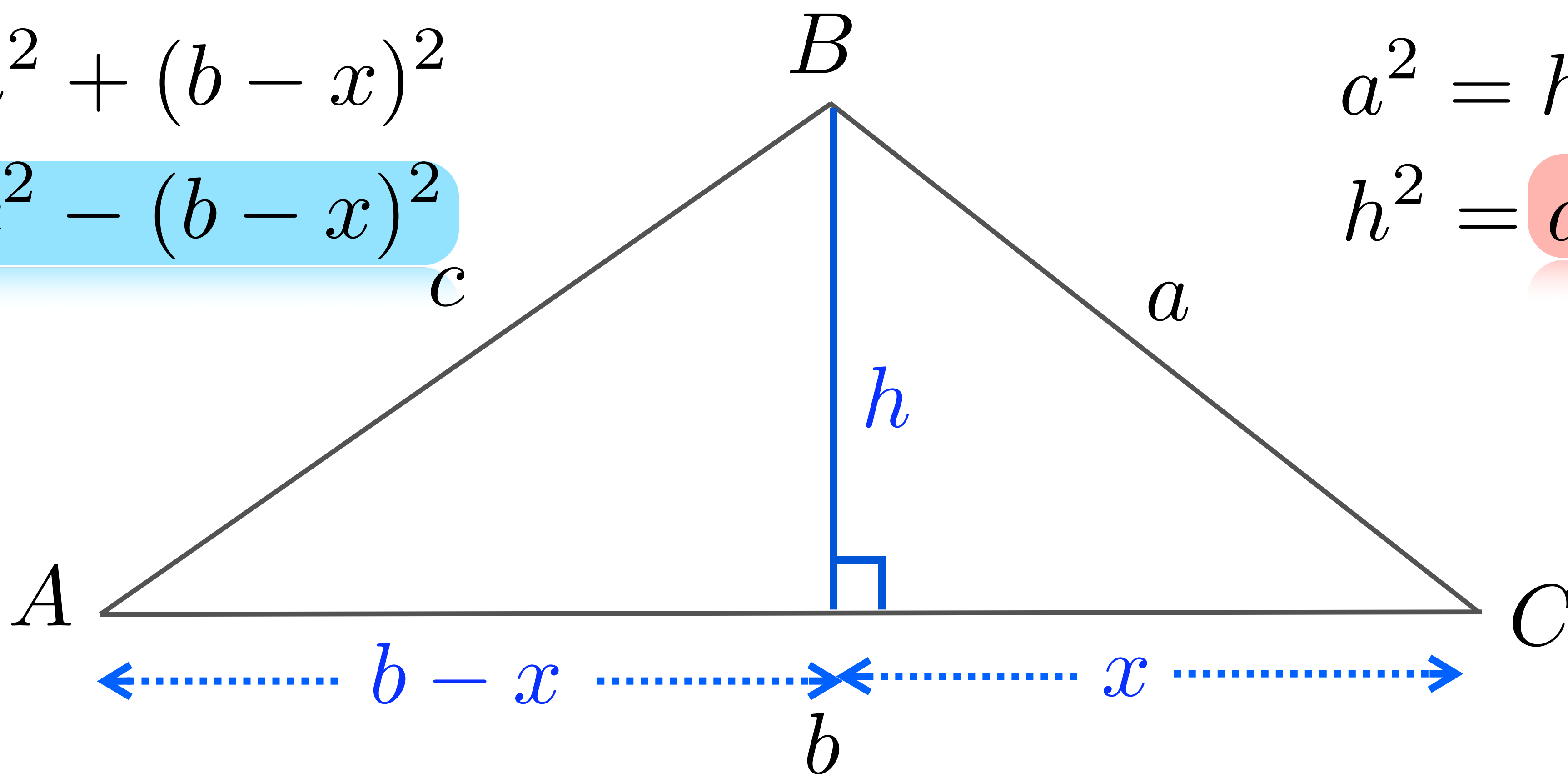
Loi des cosinus

$$c^2 = h^2 + (b-x)^2$$

$$h^2 = c^2 - (b-x)^2$$

$$a^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$



$$a^2 - \cancel{x^2} = c^2 - (b^2 - 2bx + \cancel{x^2})$$

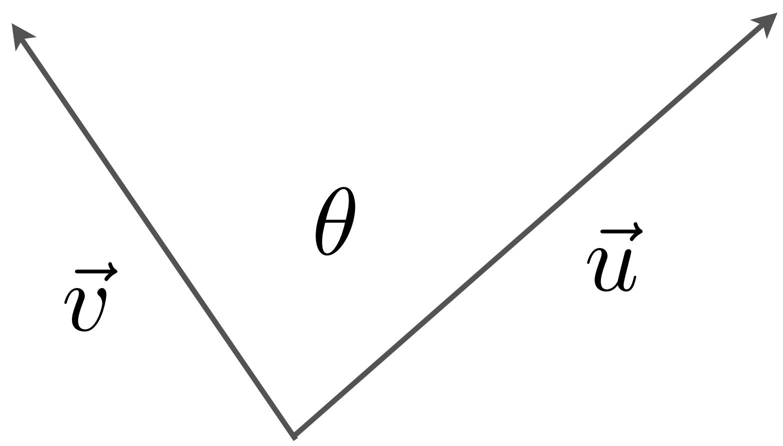
$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$$

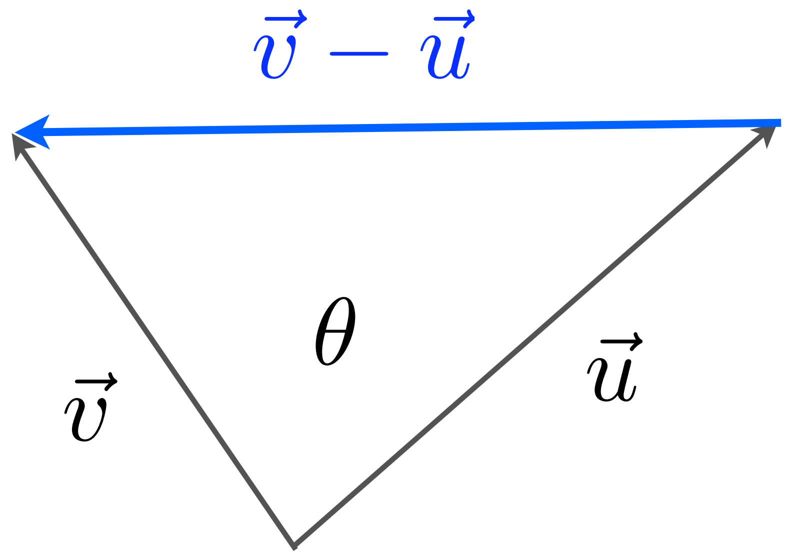
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$$

$$\frac{x}{a} = \cos C$$

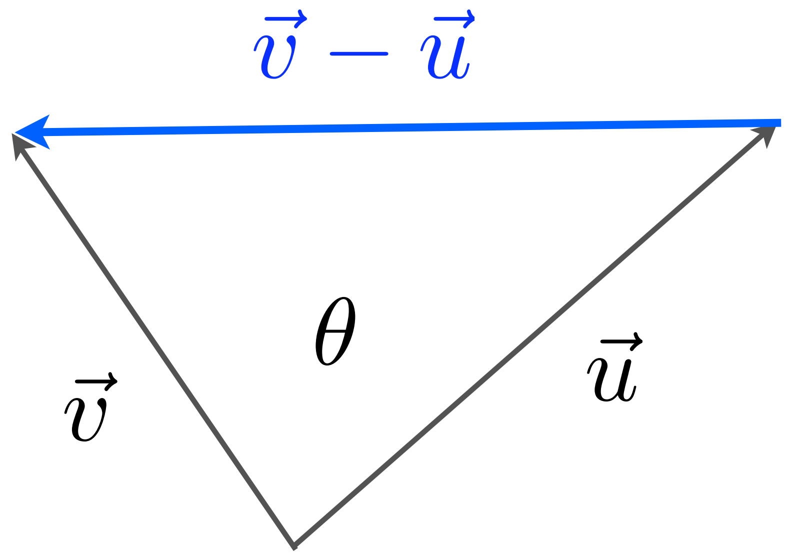
$$x = a \cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

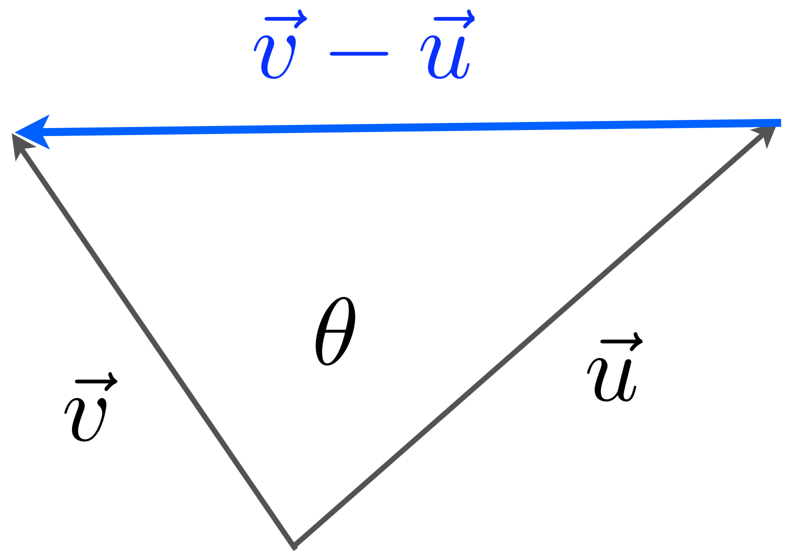

$\vec{v}$
θ
$\vec{u}$



$\vec{v} - \vec{u}$
θ
$\vec{v}$
$\vec{u}$

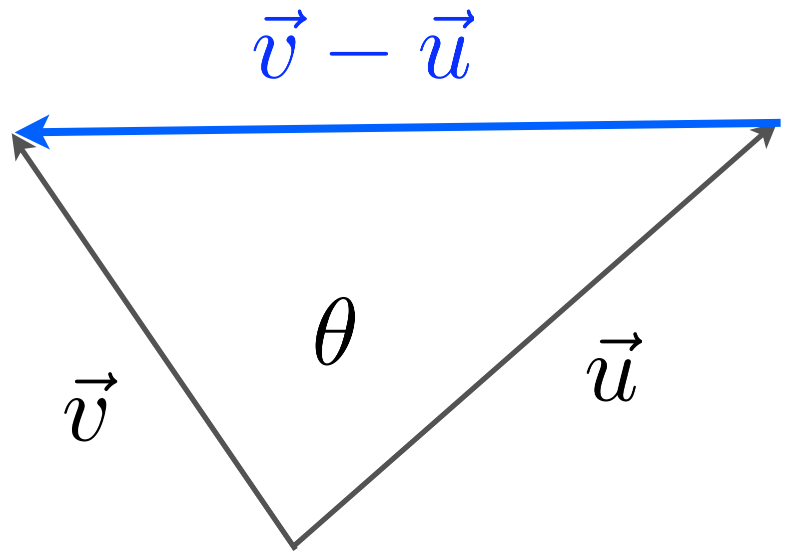


$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

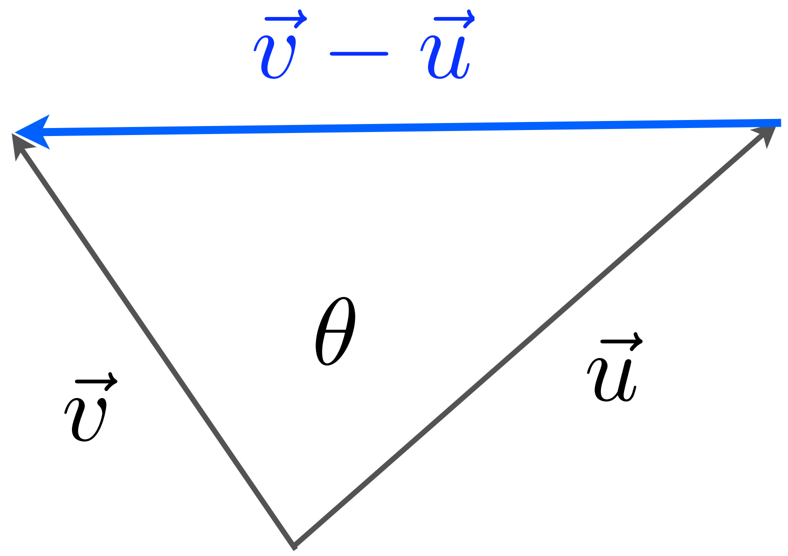
$$\vec{u} = (a, b, c)$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

$$\vec{v} = (d, e, f)$$

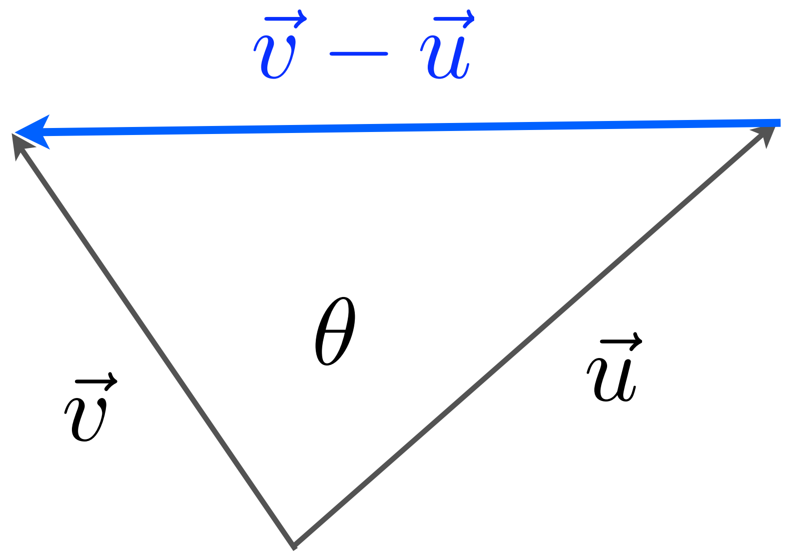


$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$



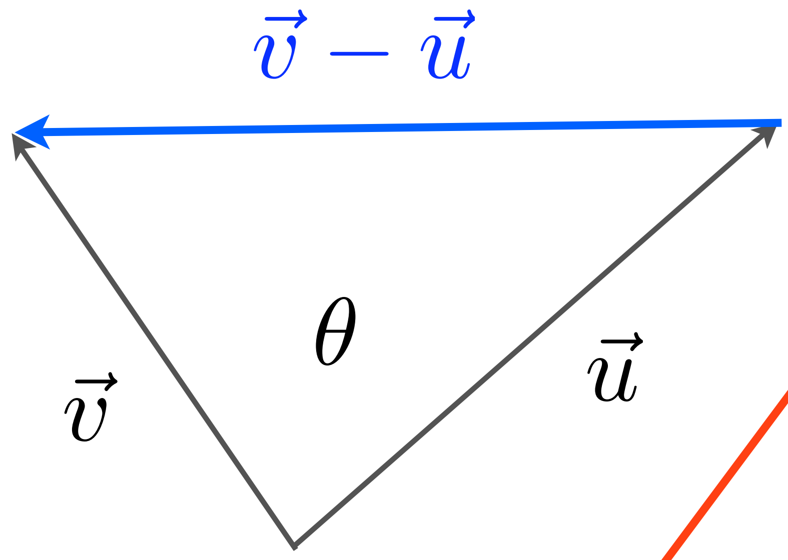
$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$



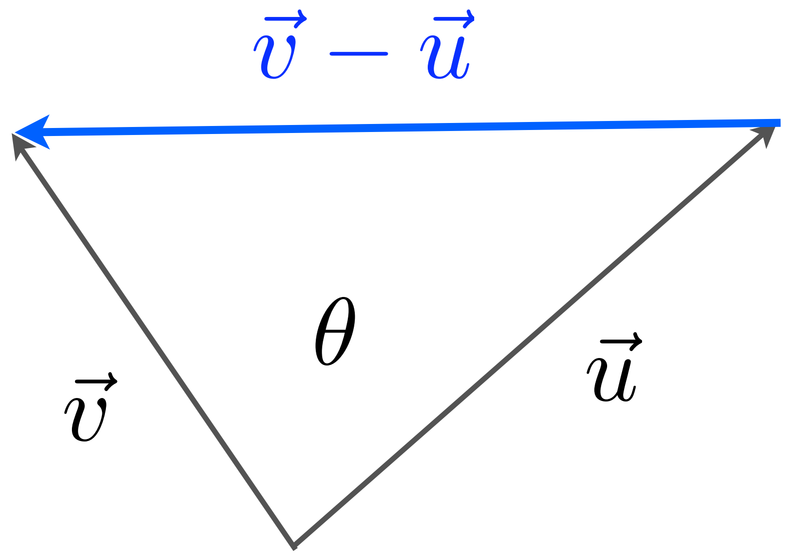
$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

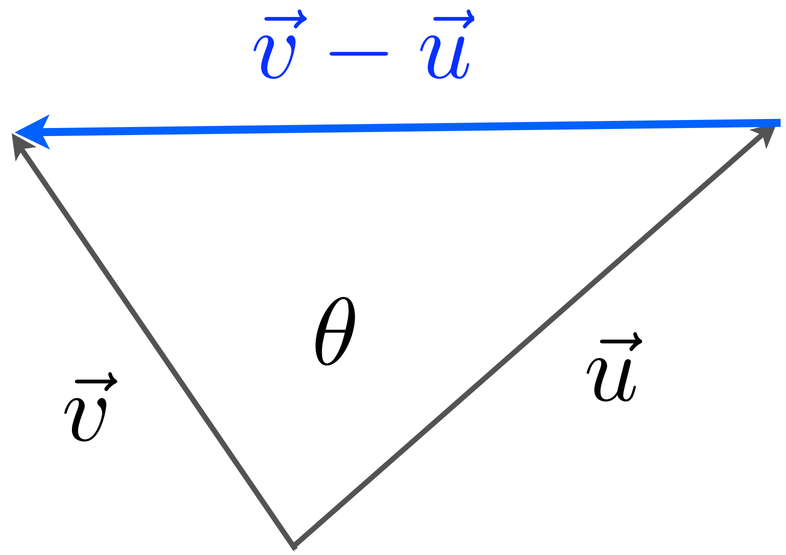
$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$(d^2 - 2da + a^2) + (e^2 - 2eb + b^2) + (f^2 - 2fc + c^2)$$

$$= (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

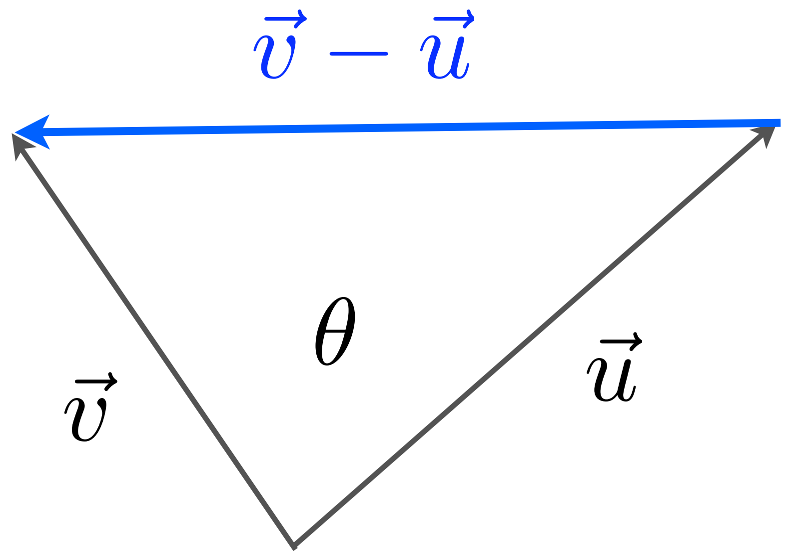
$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d - a)^2 + (e - b)^2 + (f - c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$(d^2 - 2da + a^2) + (e^2 - 2eb + b^2) + (f^2 - 2fc + c^2)$$

$$= (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

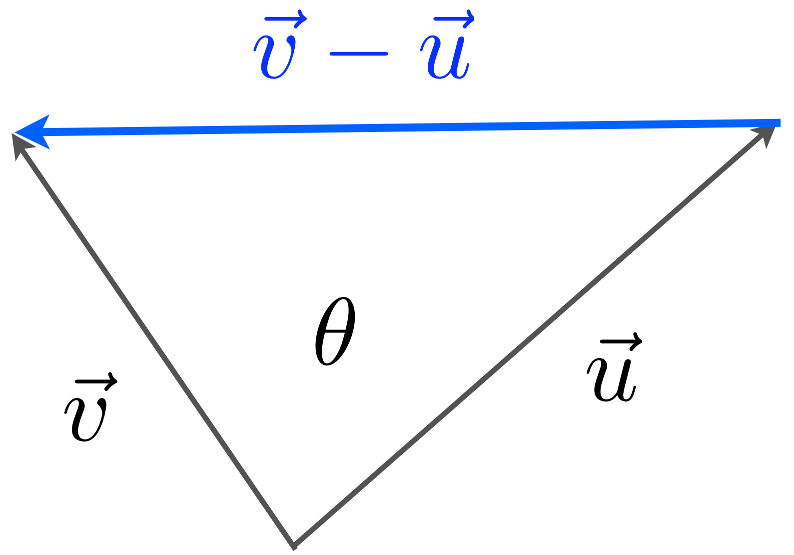
$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$(d^2 - 2da + a^2) + (e^2 - 2eb + b^2) + (f^2 - 2fc + c^2)$$

$$= (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

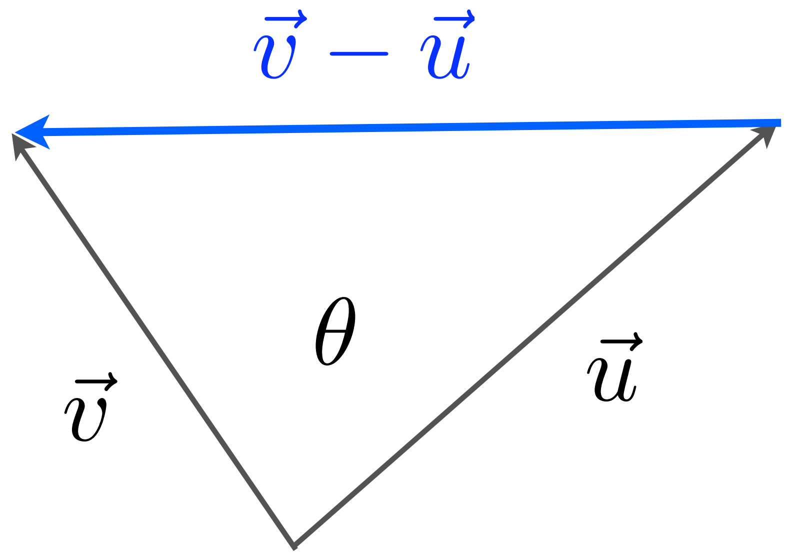
$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$(\cancel{d^2} - 2da + a^2) + (e^2 - 2eb + b^2) + (f^2 - 2fc + c^2)$$

$$= (\cancel{d^2} + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$



$$\|\vec{v}-\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

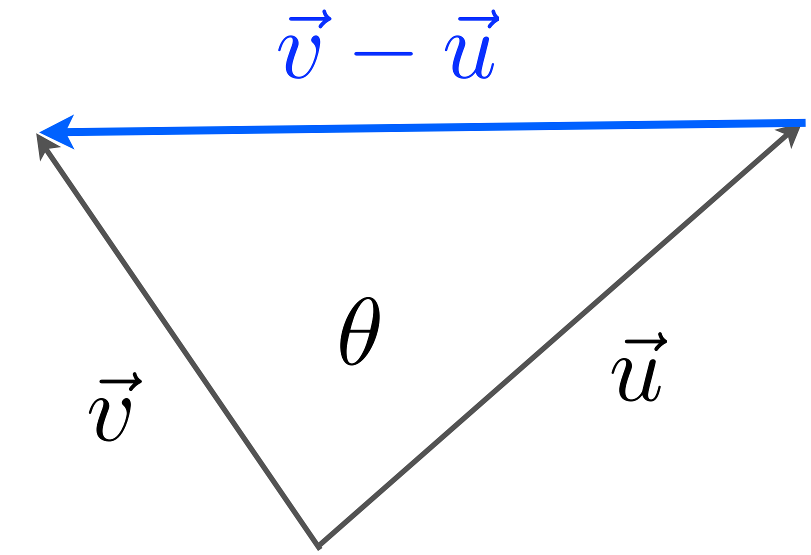
$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v}-\vec{u} = (d-a, e-b, f-c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2+e^2+f^2) + (a^2+b^2+c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$(\cancel{d^2} - 2da + \cancel{a^2}) + (e^2 - 2eb + b^2) + (f^2 - 2fc + c^2)$$

$$= (\cancel{d^2} + e^2 + f^2) + (\cancel{a^2} + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

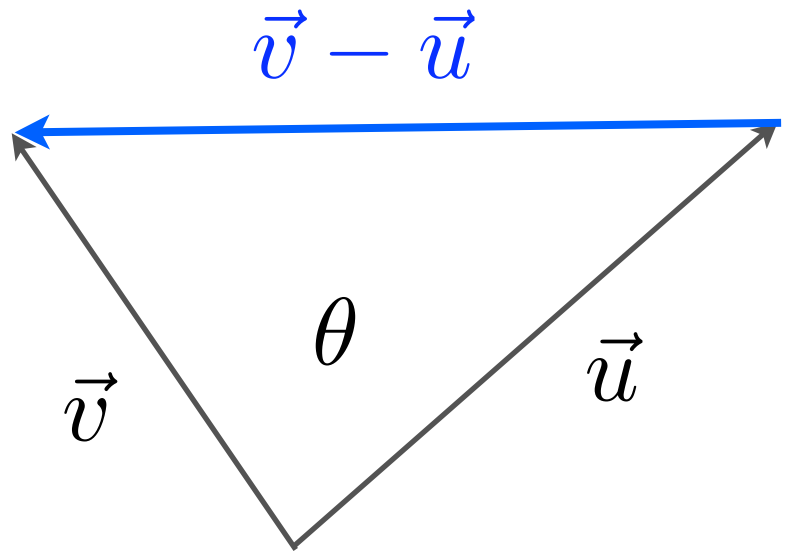
$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$(\cancel{d^2} - 2da + \cancel{a^2}) + (\cancel{e^2} - 2eb + b^2) + (f^2 - 2fc + c^2)$$

$$= (\cancel{d^2} + \cancel{e^2} + f^2) + (\cancel{a^2} + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

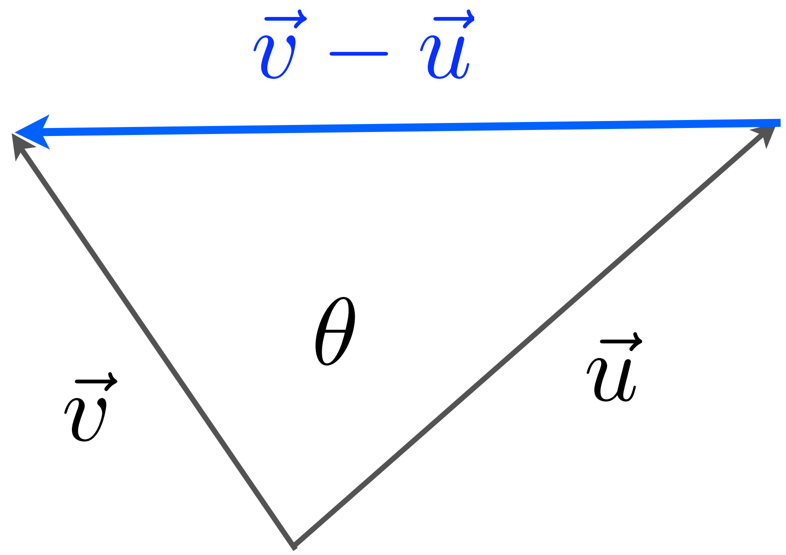
$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$(\cancel{d^2} - 2da + \cancel{a^2}) + (\cancel{e^2} - 2eb + \cancel{b^2}) + (f^2 - 2fc + c^2)$$

$$= (\cancel{d^2} + \cancel{e^2} + f^2) + (\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

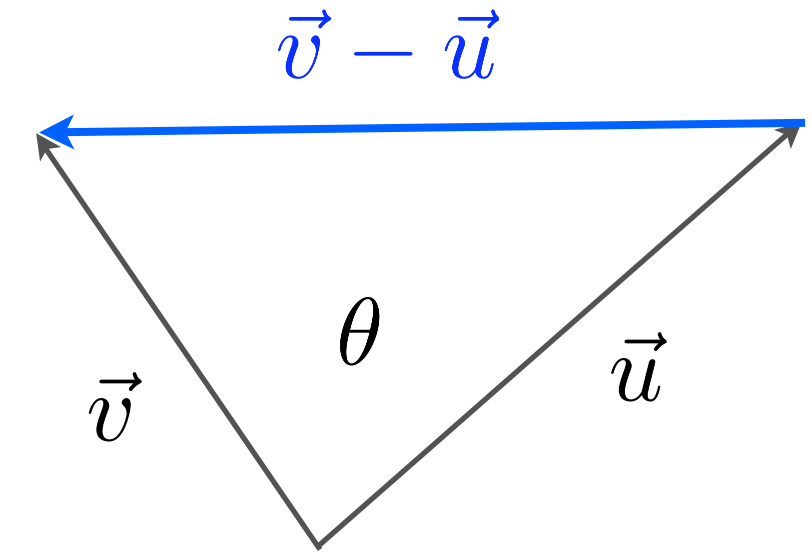
$$\vec{u} = (a, b, c) \qquad \vec{v} - \vec{u} = (d-a, e-b, f-c)$$

$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$(\cancel{d^2} - 2da + \cancel{a^2}) + (\cancel{e^2} - 2eb + \cancel{b^2}) + (\cancel{f^2} - 2fc + c^2)$$

$$= (\cancel{d^2} + \cancel{e^2} + \cancel{f^2}) + (\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

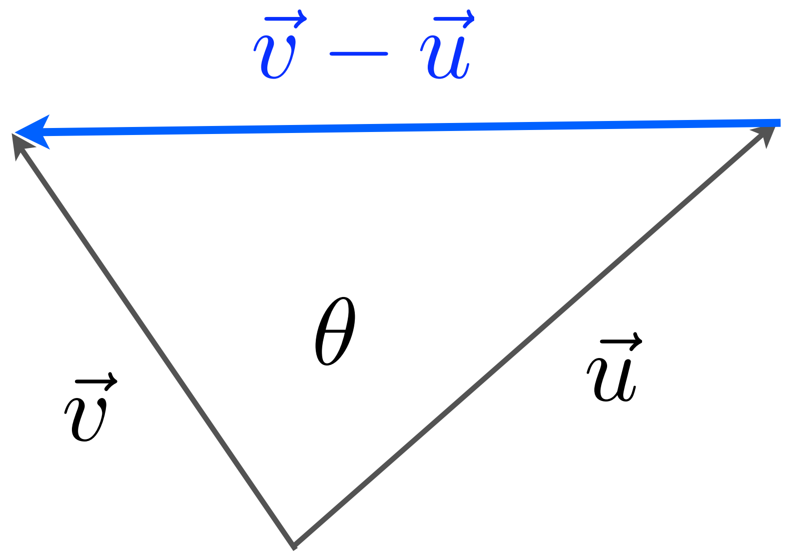
$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$(\cancel{d^2} - 2da + \cancel{a^2}) + (\cancel{e^2} - 2eb + \cancel{b^2}) + (\cancel{f^2} - 2fc + \cancel{c^2})$$

$$= (\cancel{d^2} + \cancel{e^2} + \cancel{f^2}) + (\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + \cancel{c^2}) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

$$\vec{v} = (d, e, f)$$

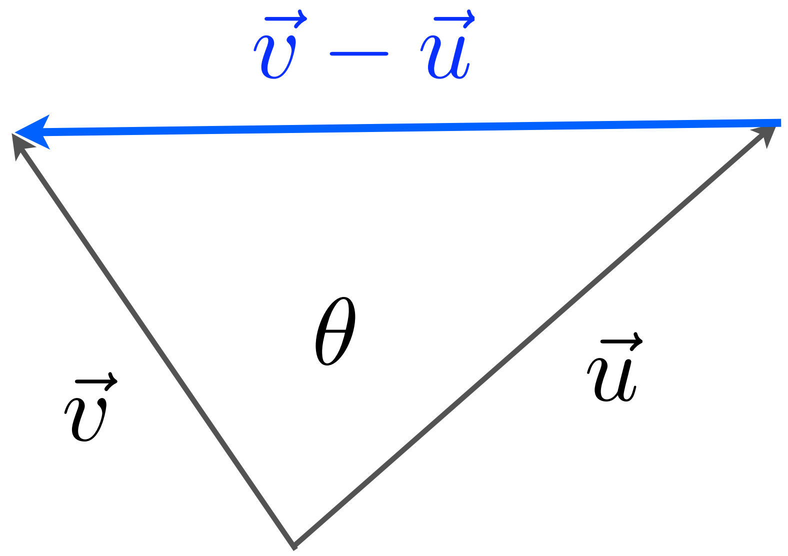
$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$(\cancel{d^2} - 2da + \cancel{a^2}) + (\cancel{e^2} - 2eb + \cancel{b^2}) + (\cancel{f^2} - 2fc + \cancel{c^2})$$

$$= (\cancel{d^2} + \cancel{e^2} + \cancel{f^2}) + (\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + \cancel{c^2}) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$-2(ad + be + cf) = -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$



$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\vec{u} = (a, b, c)$$

$$\vec{v} = (d, e, f)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (d - a, e - b, f - c)$$

$$(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2 = (d^2 + e^2 + f^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$(\cancel{d^2} - 2da + \cancel{a^2}) + (\cancel{e^2} - 2eb + \cancel{b^2}) + (\cancel{f^2} - 2fc + \cancel{c^2})$$

$$= (\cancel{d^2} + \cancel{e^2} + \cancel{f^2}) + (\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + \cancel{c^2}) - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$-2(ad + be + cf) = -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$ad + be + cf = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

Angle entre deux vecteurs

Angle entre deux vecteurs

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos\theta$$

Angle entre deux vecteurs

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|}$$

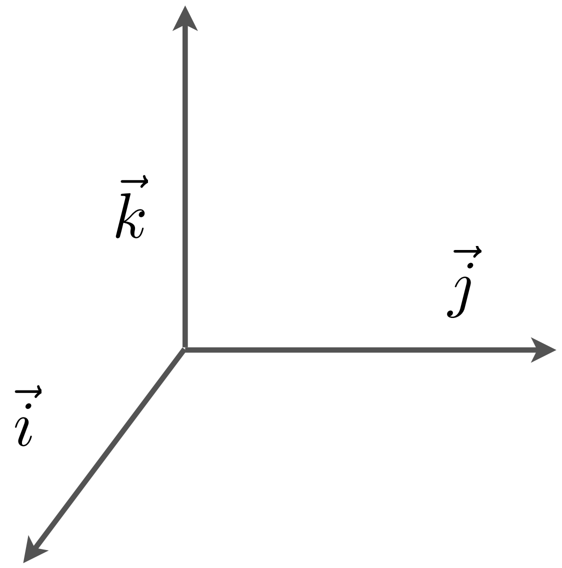
Angle entre deux vecteurs

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\|}$$

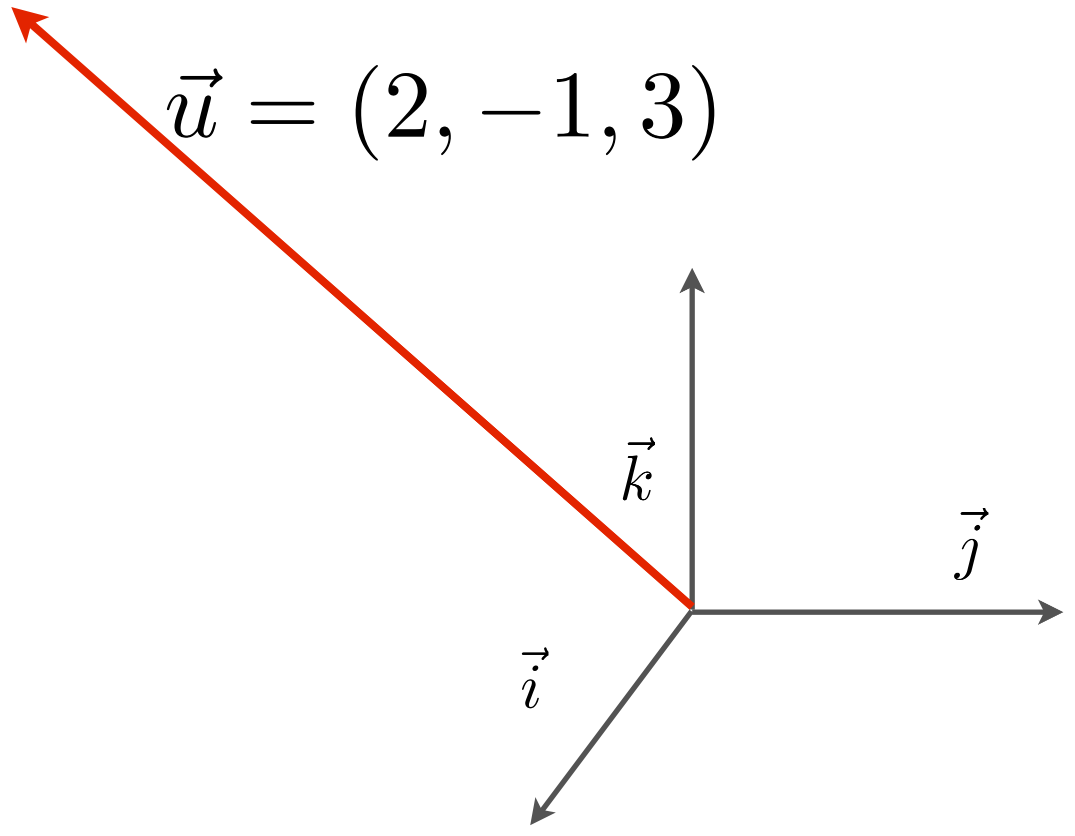
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\|}\right)$$

Exemple

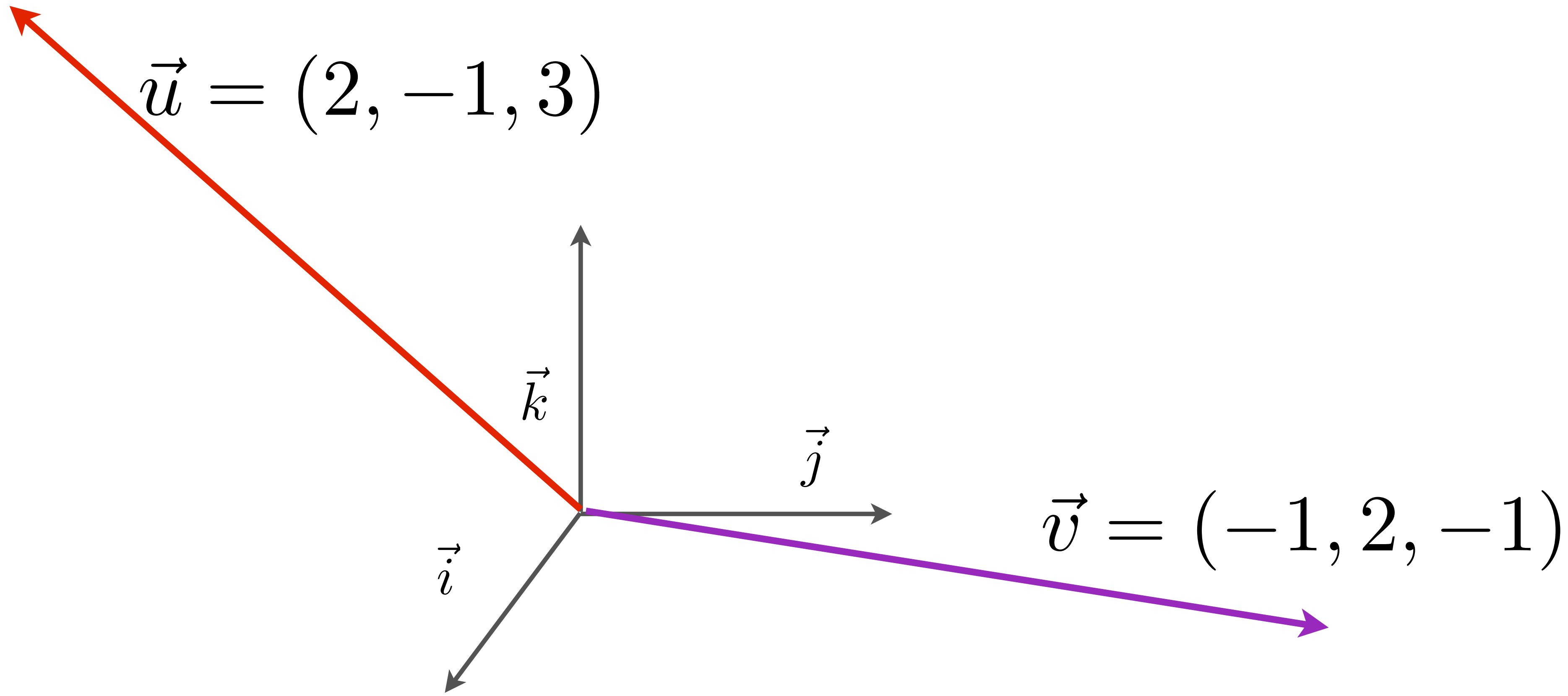


Exemple

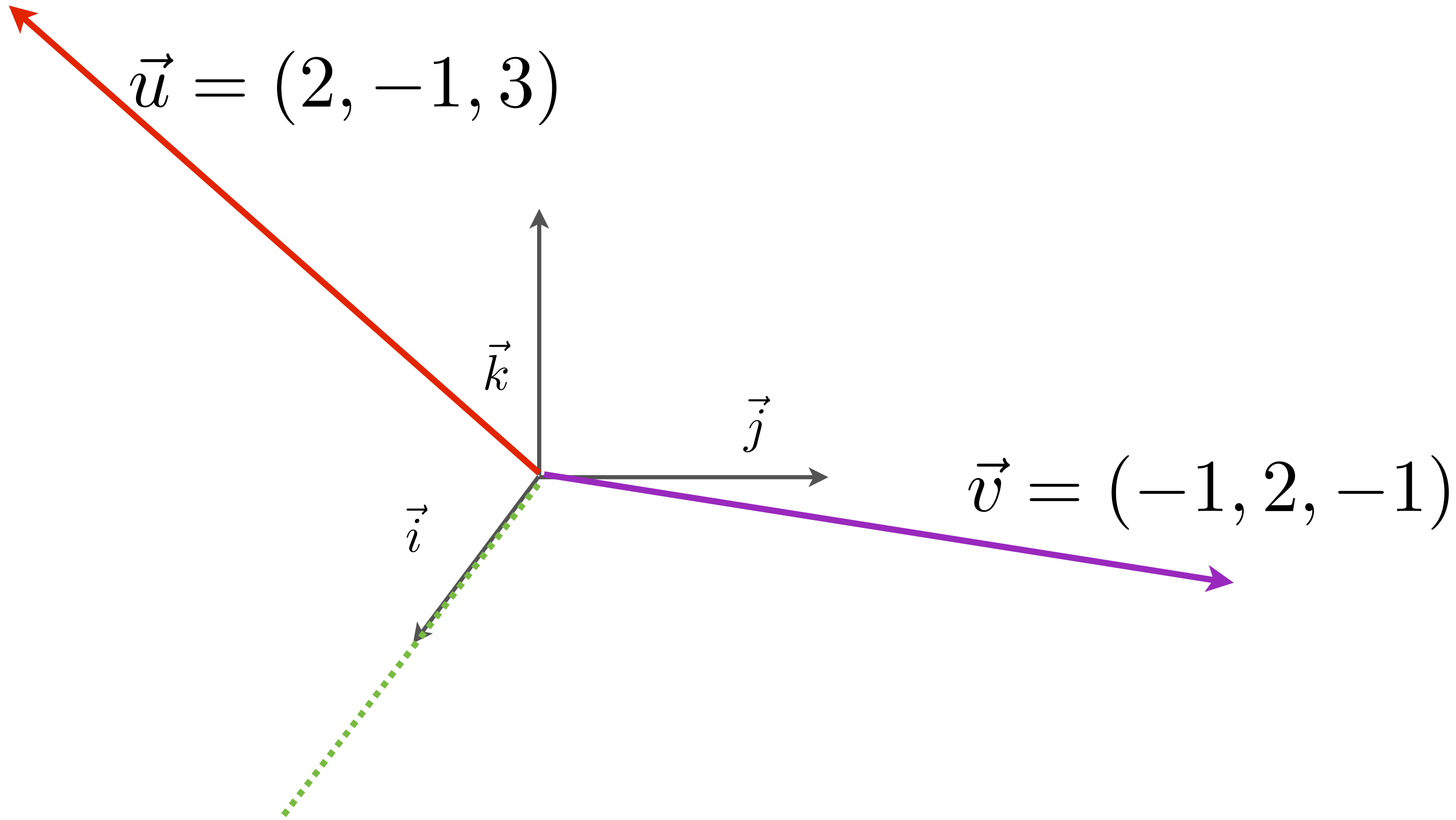
$$\vec{u} = (2, -1, 3)$$



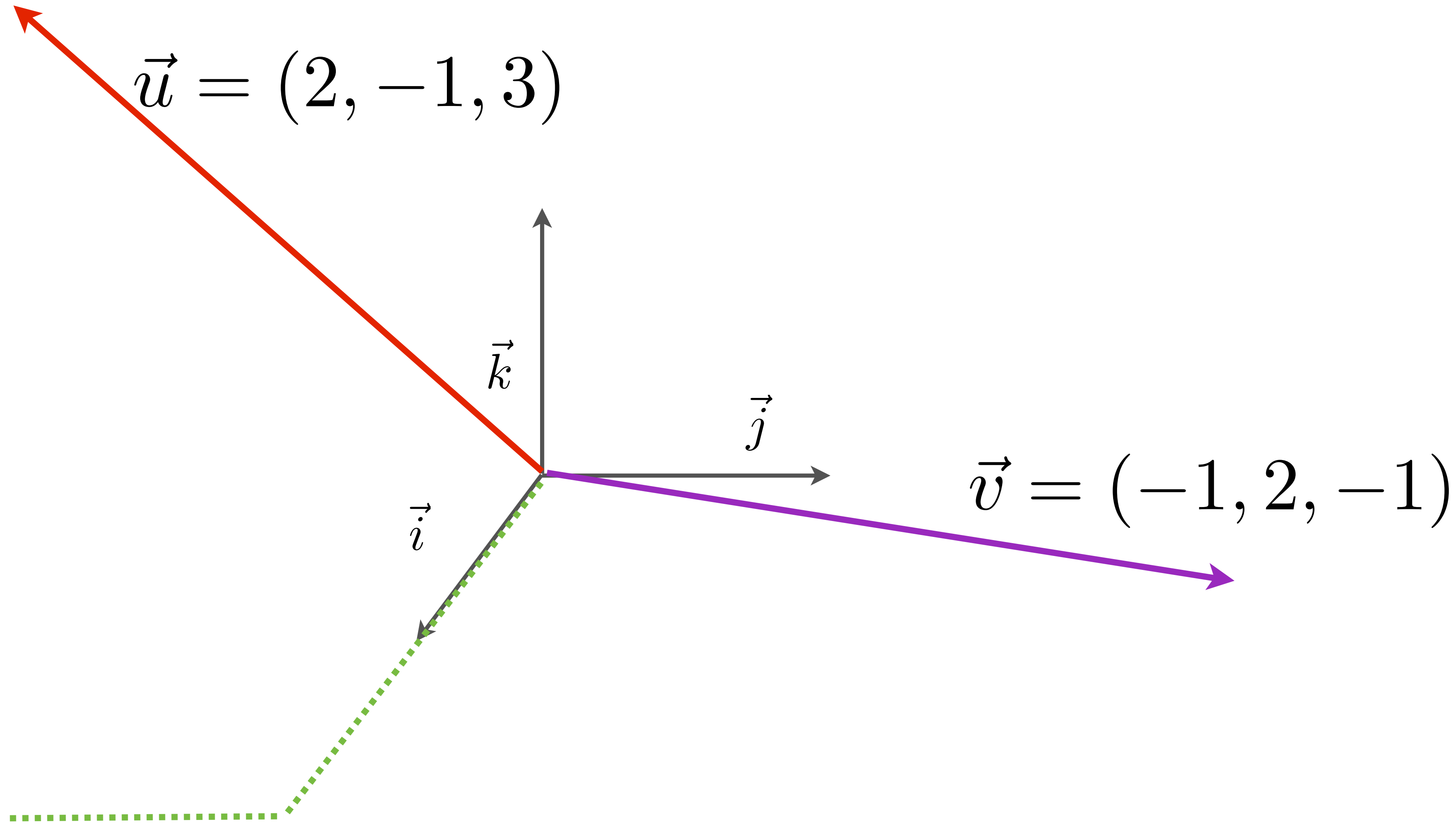
Exemple



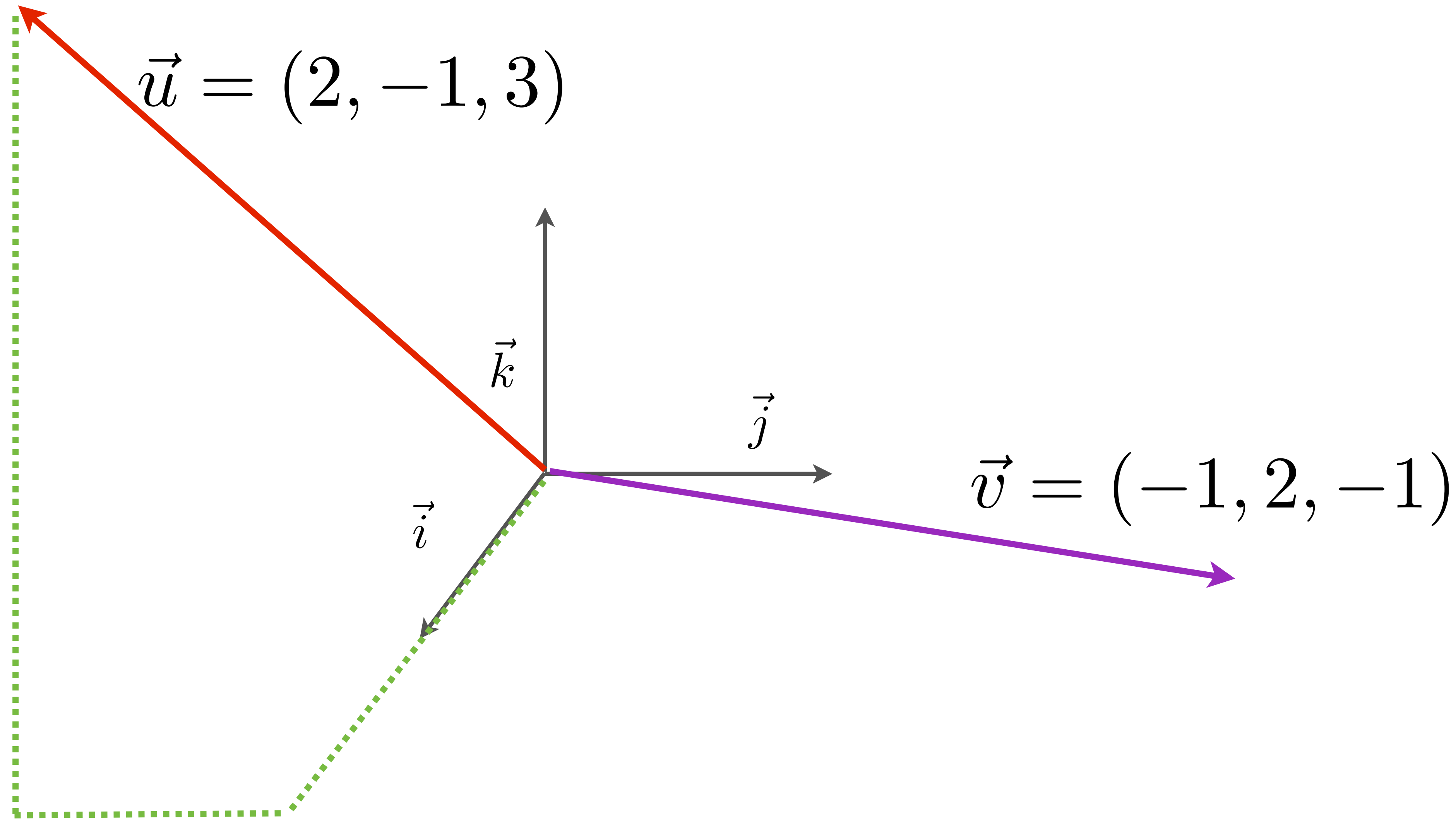
Exemple



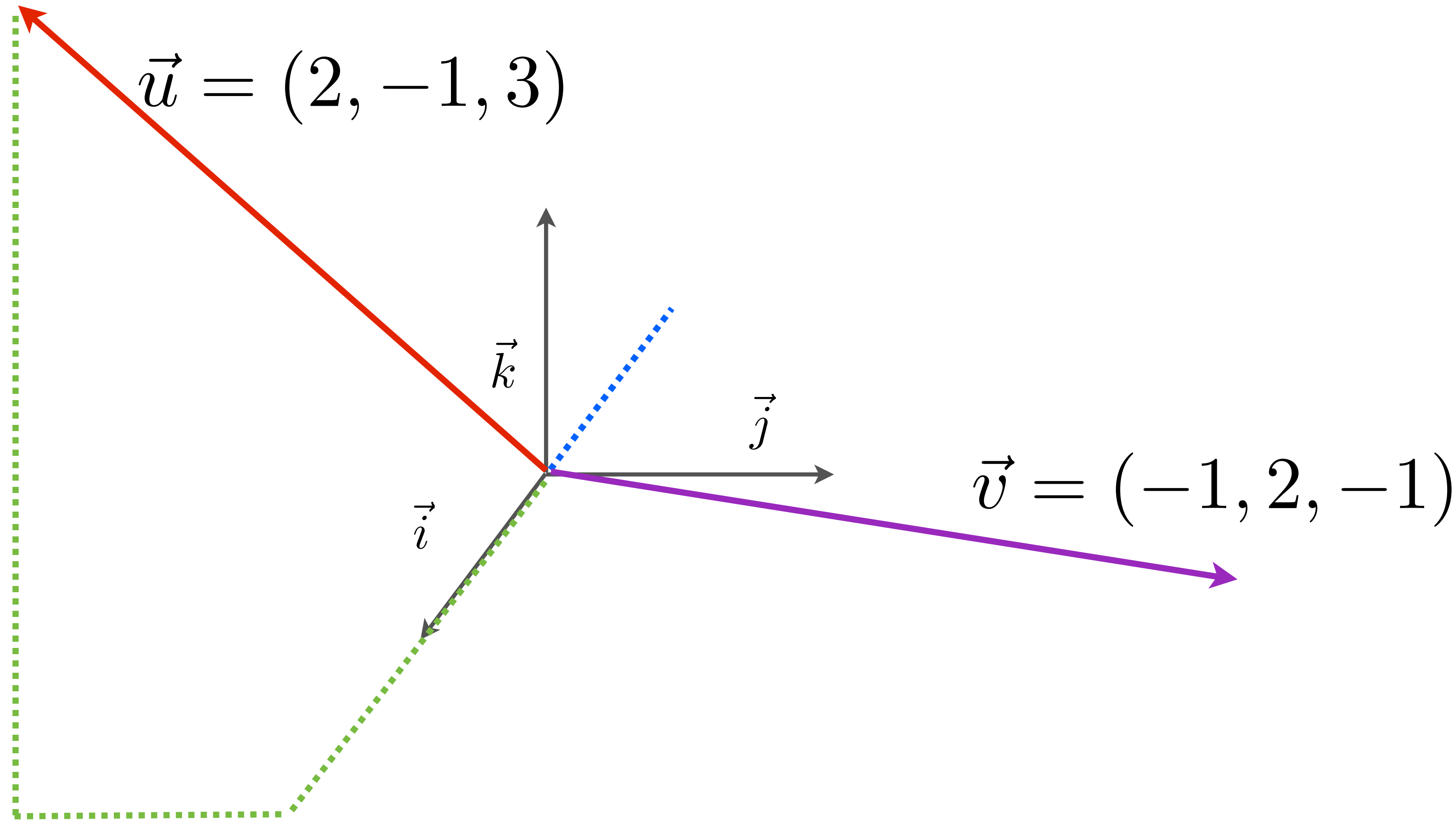
Exemple



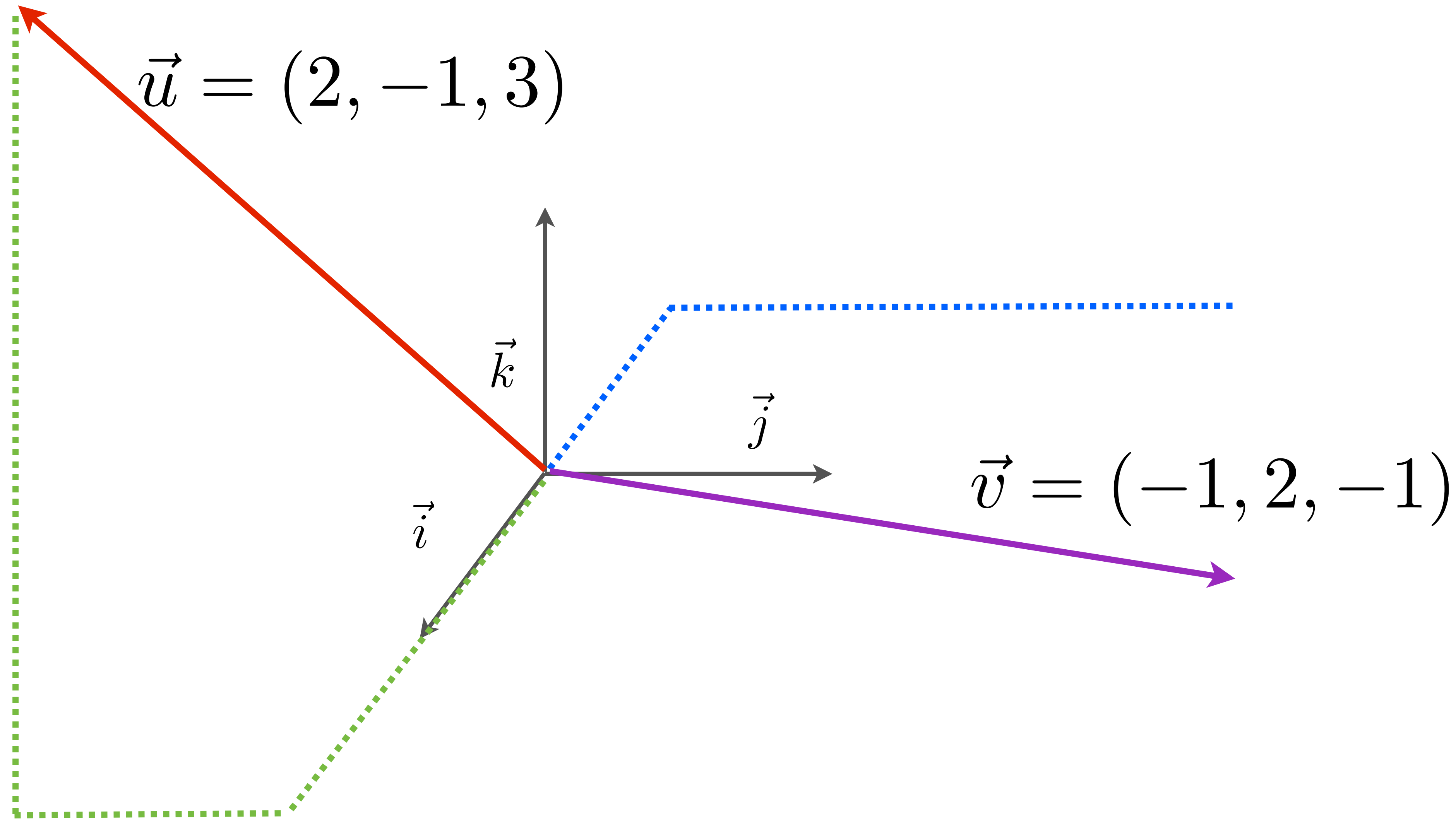
Exemple



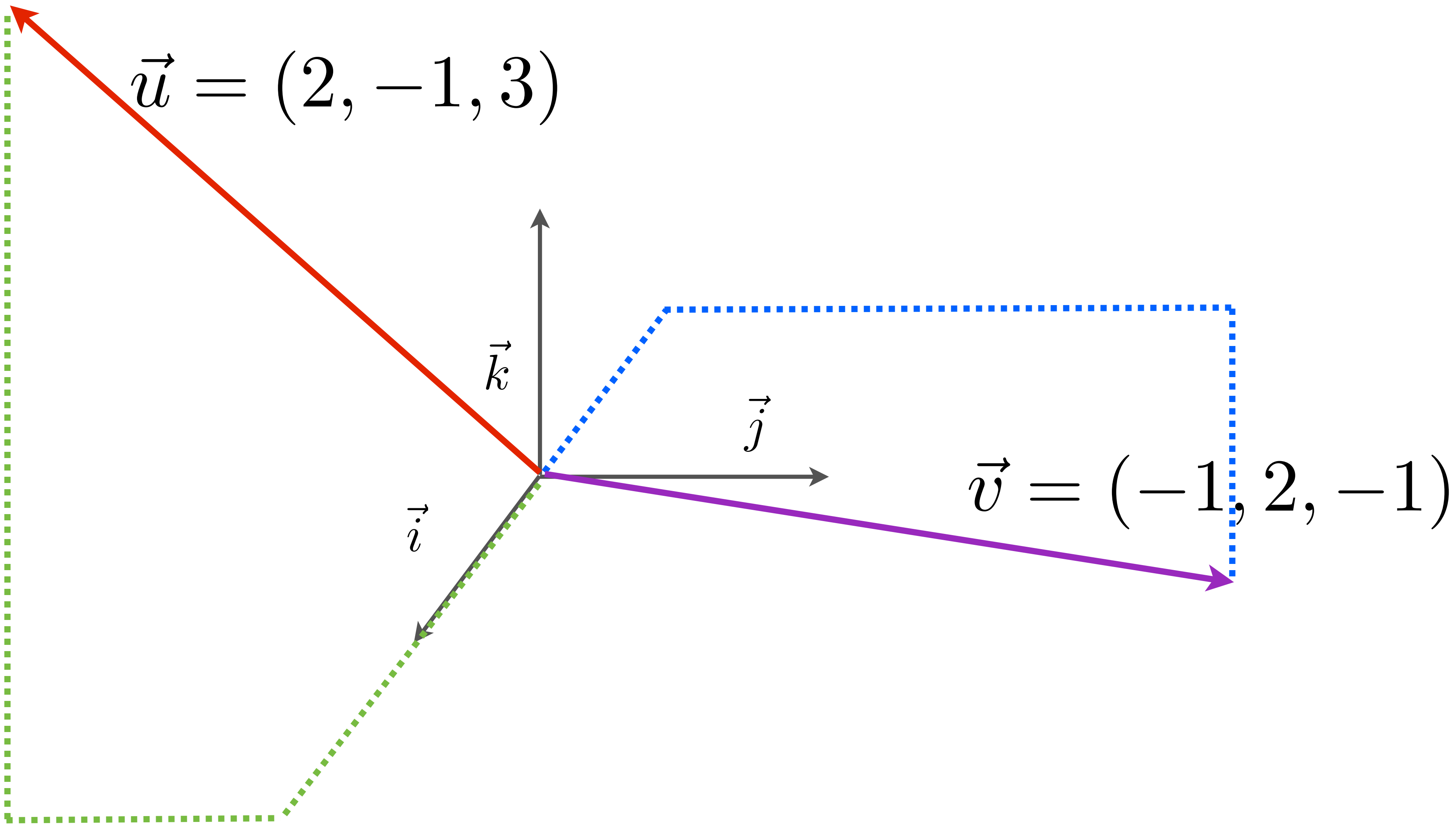
Exemple



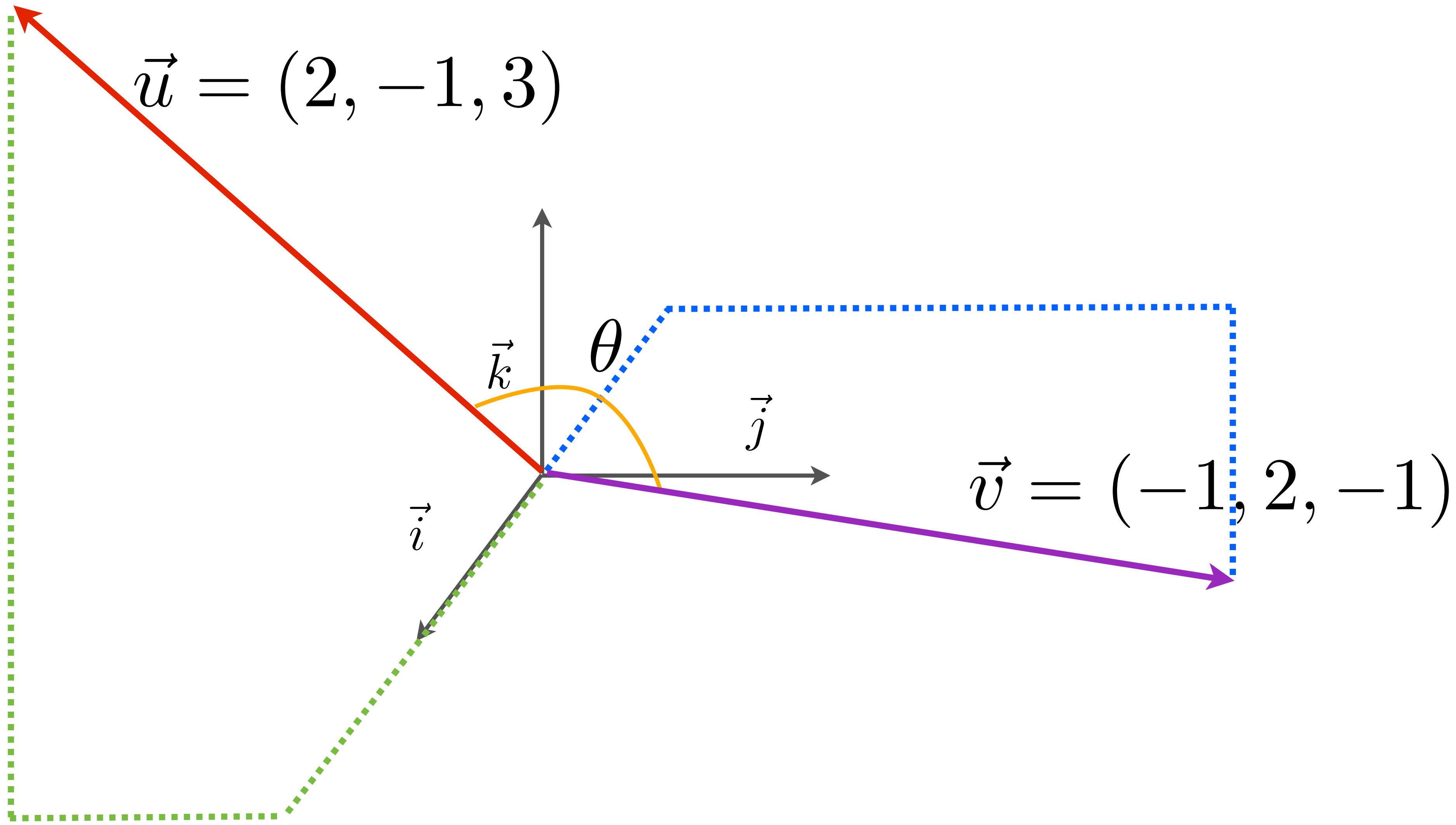
Exemple



Exemple

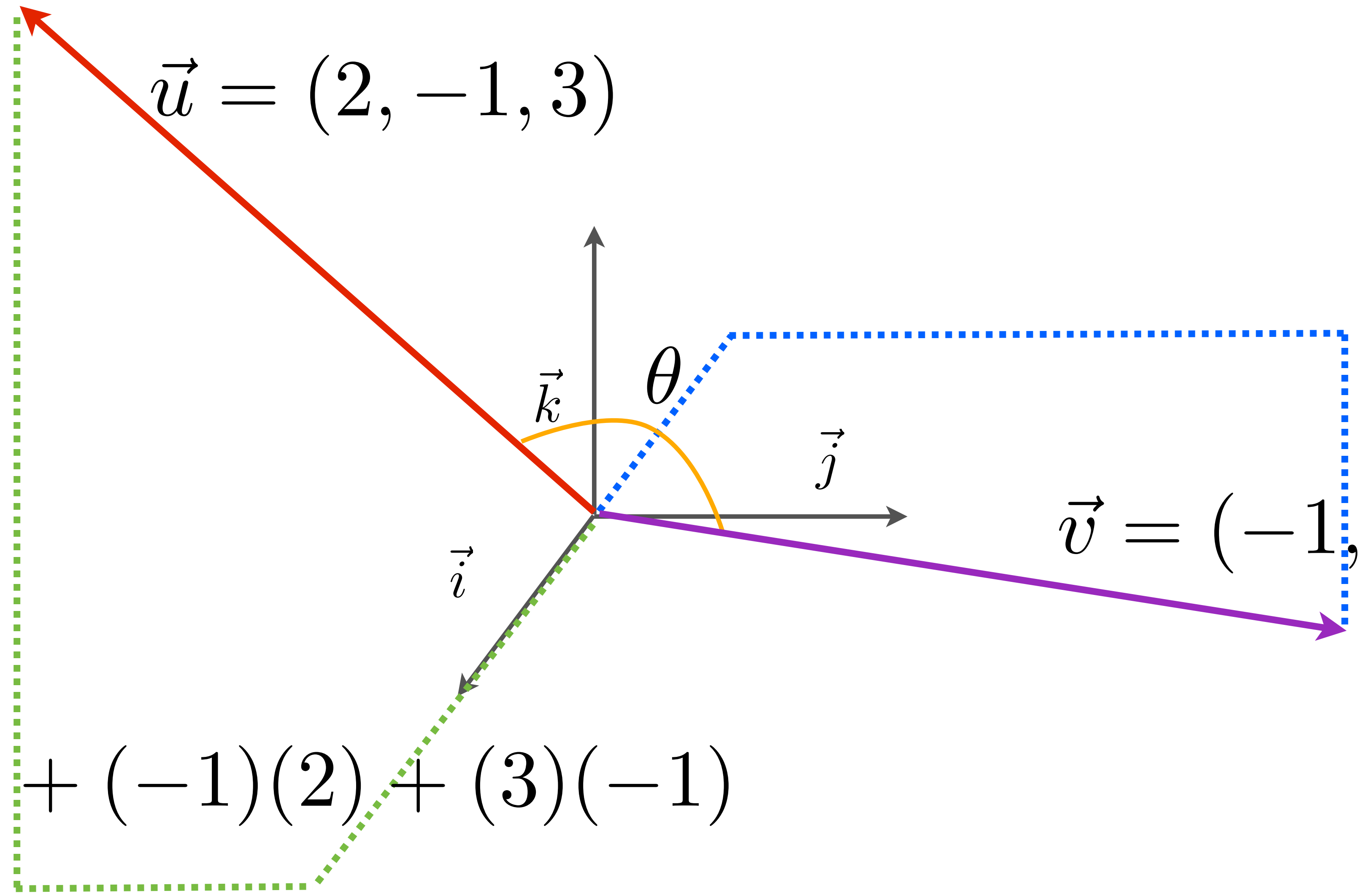


Exemple



Exemple

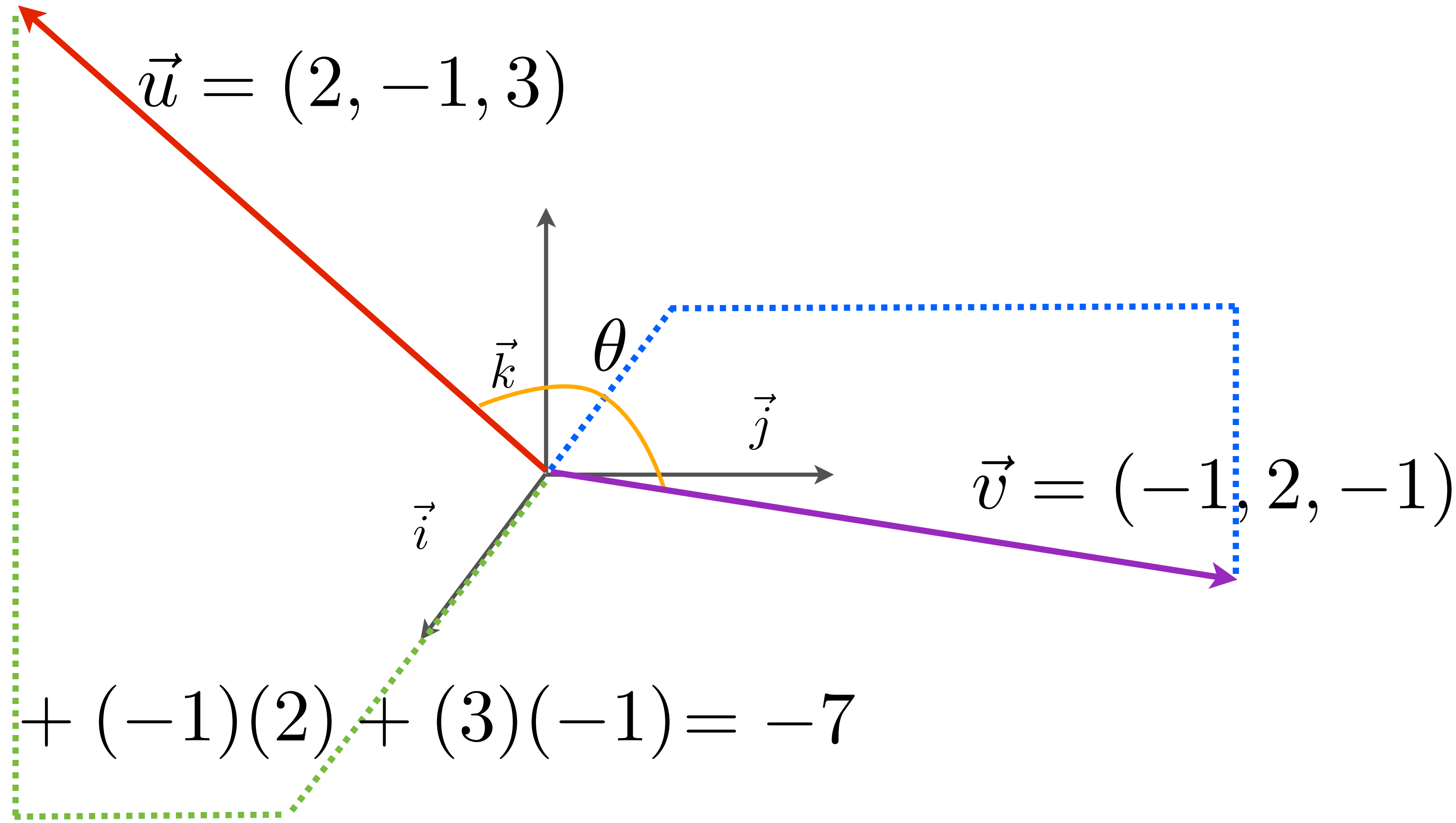
$$\vec{u} = (2, -1, 3)$$



$$\vec{v} = (-1, 2, -1)$$

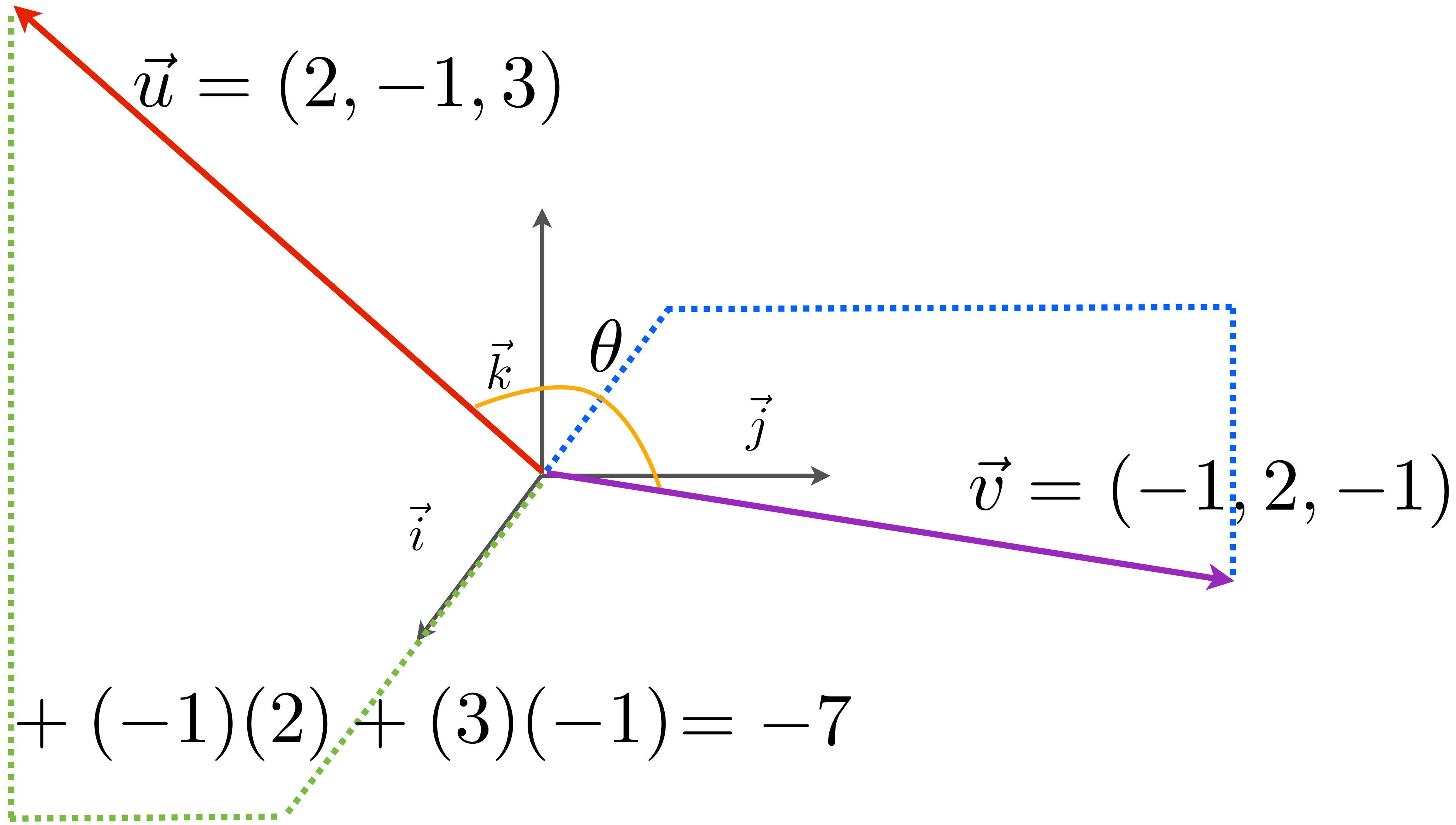
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-1) + (-1)(2) + (3)(-1)$$

Exemple



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-1) + (-1)(2) + (3)(-1) = -7$$

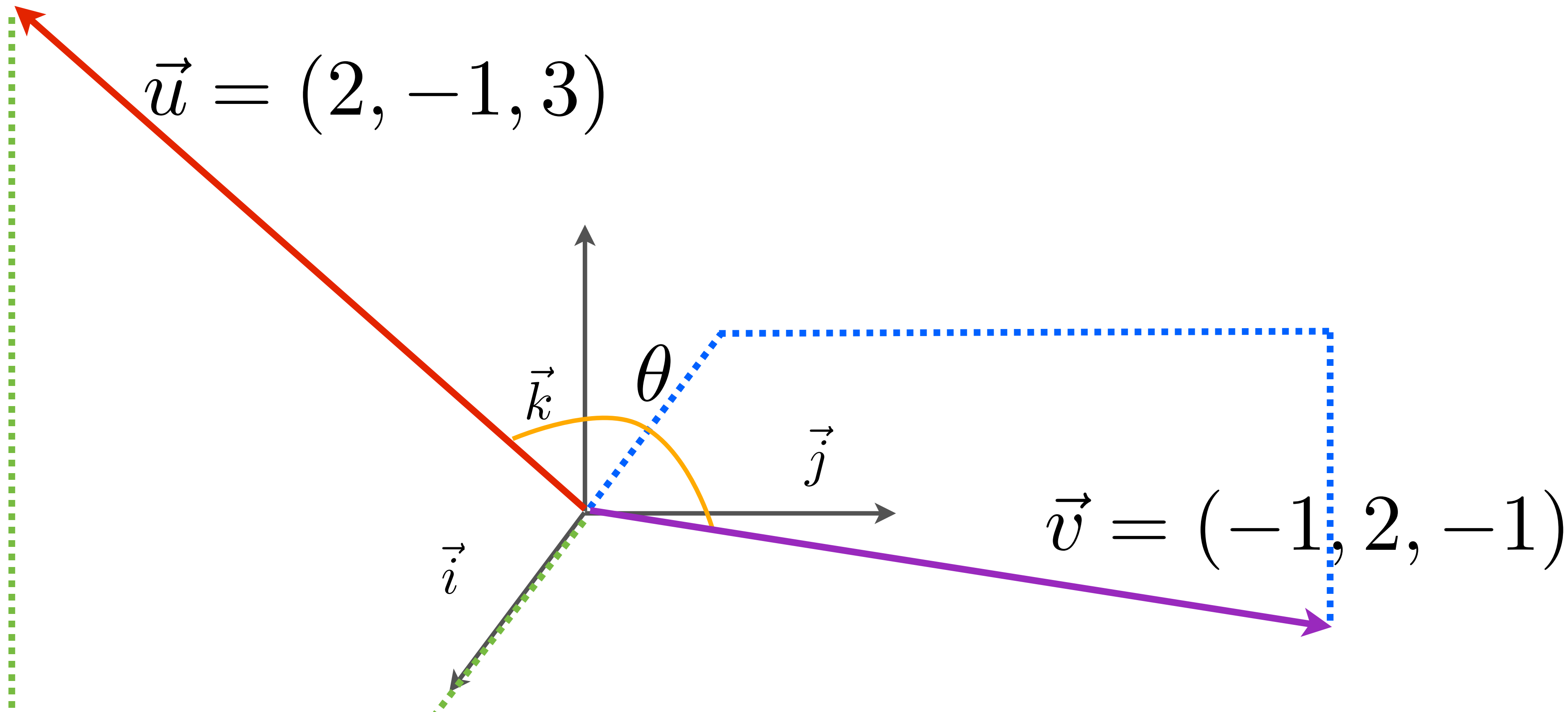
Exemple



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-1) + (-1)(2) + (3)(-1) = -7$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}$$

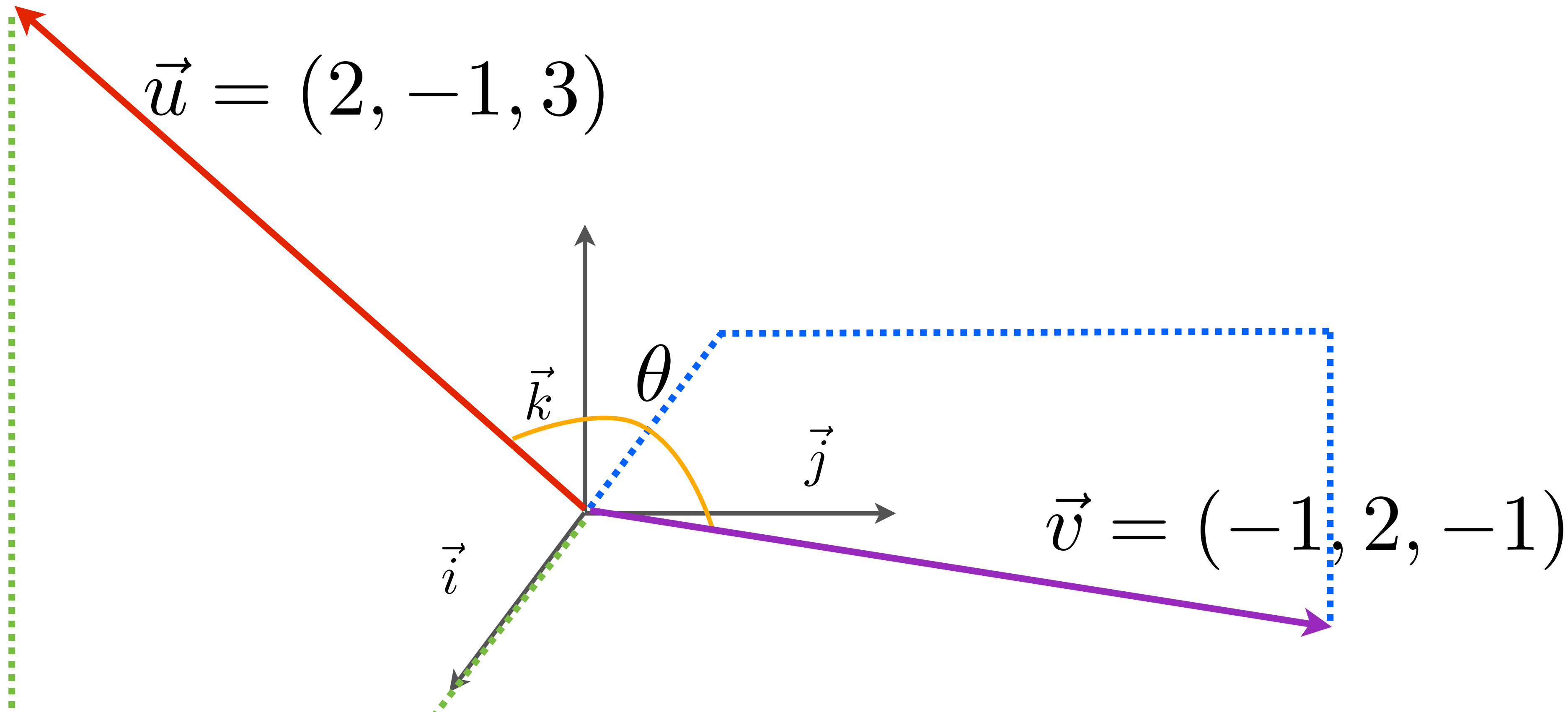
Exemple



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-1) + (-1)(2) + (3)(-1) = -7$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Exemple

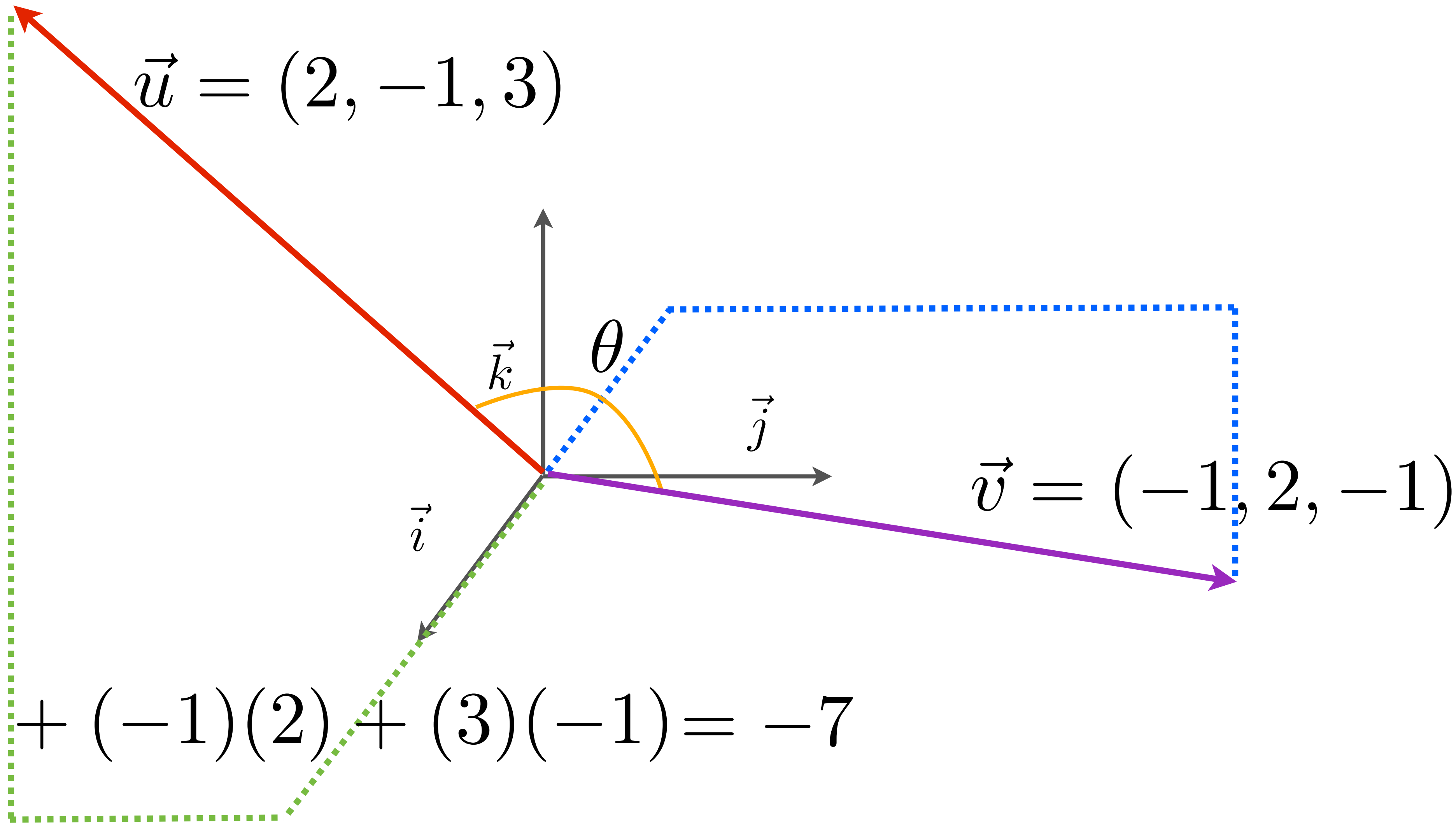


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-1) + (-1)(2) + (3)(-1) = -7$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2}$$

Exemple

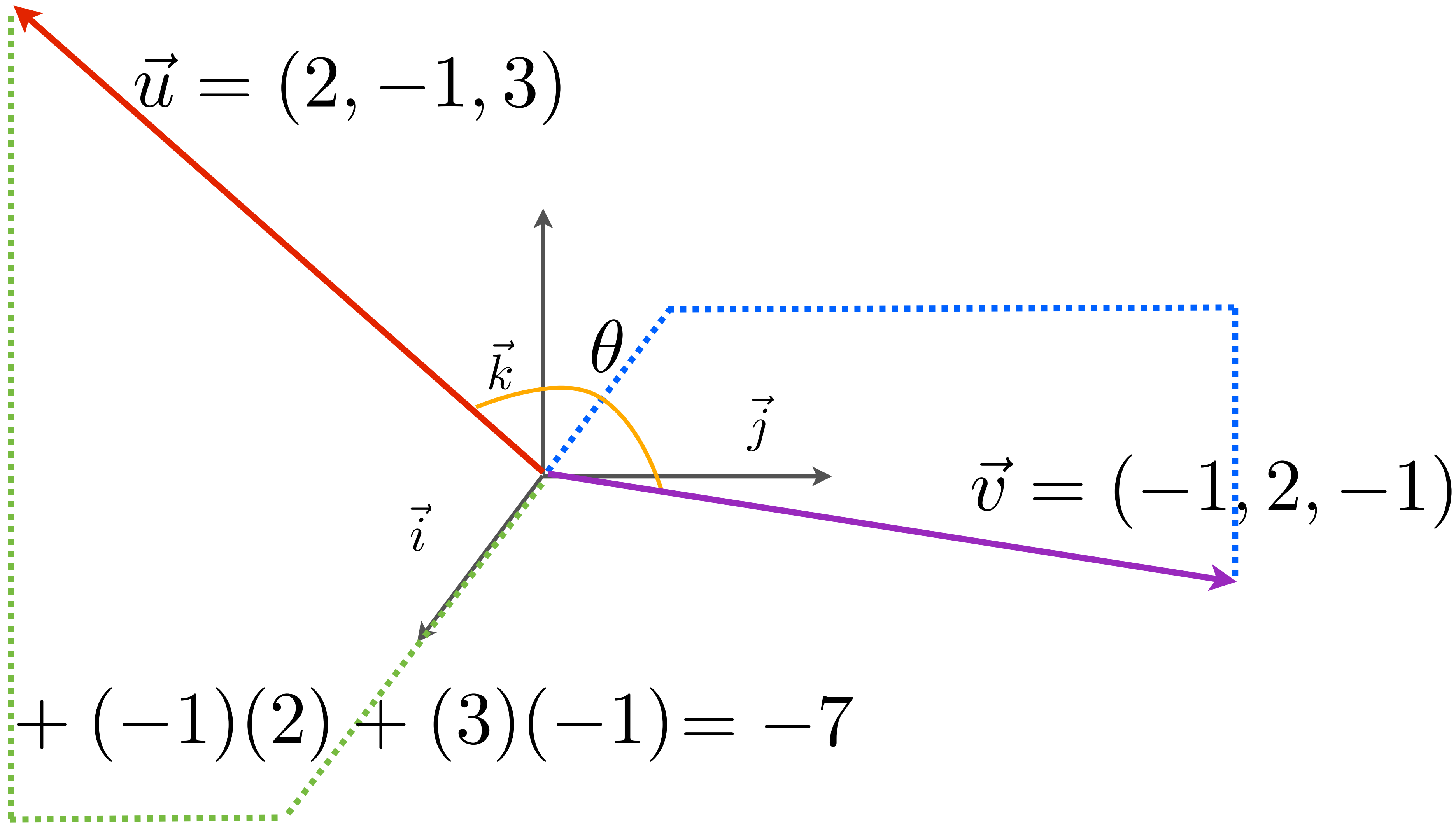


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-1) + (-1)(2) + (3)(-1) = -7$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Exemple



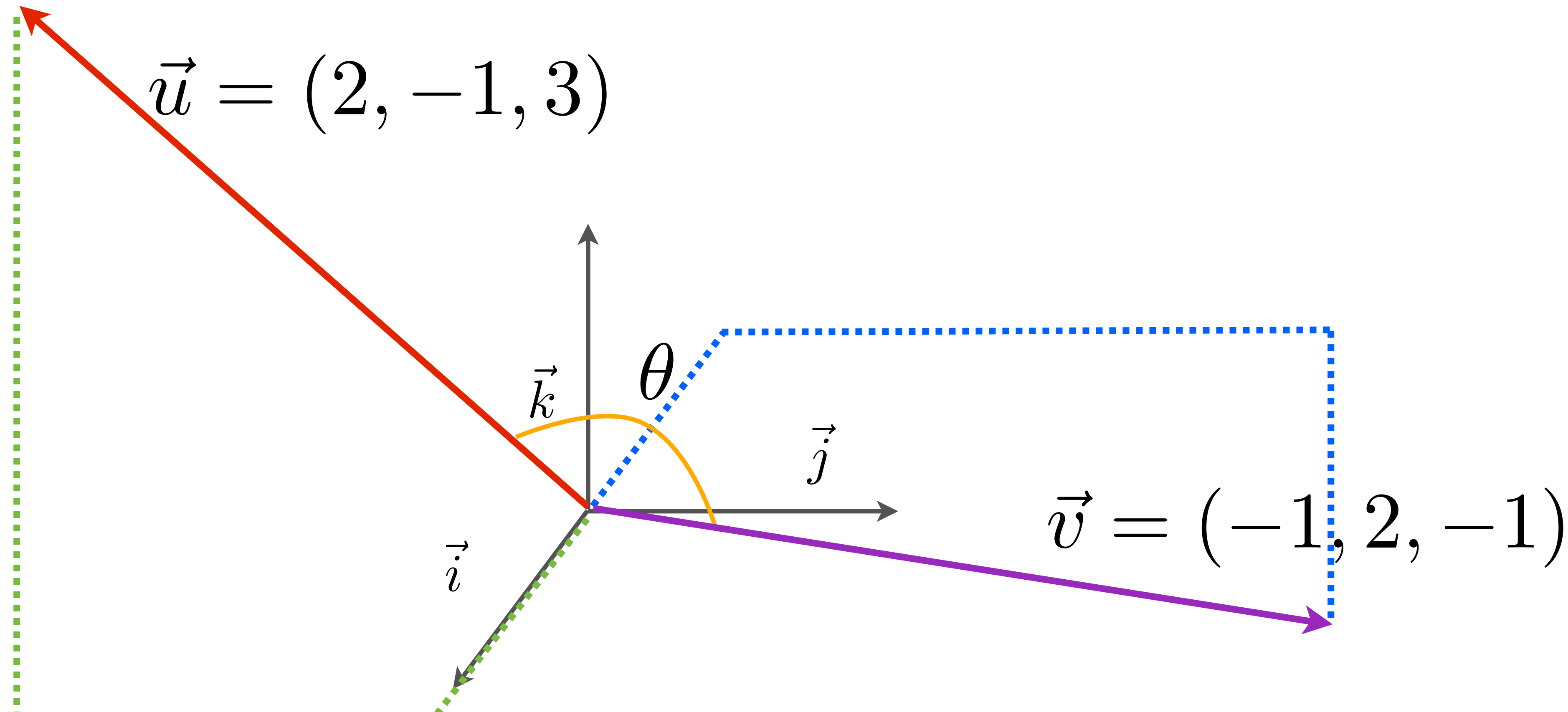
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-1) + (-1)(2) + (3)(-1) = -7$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)$$

Exemple



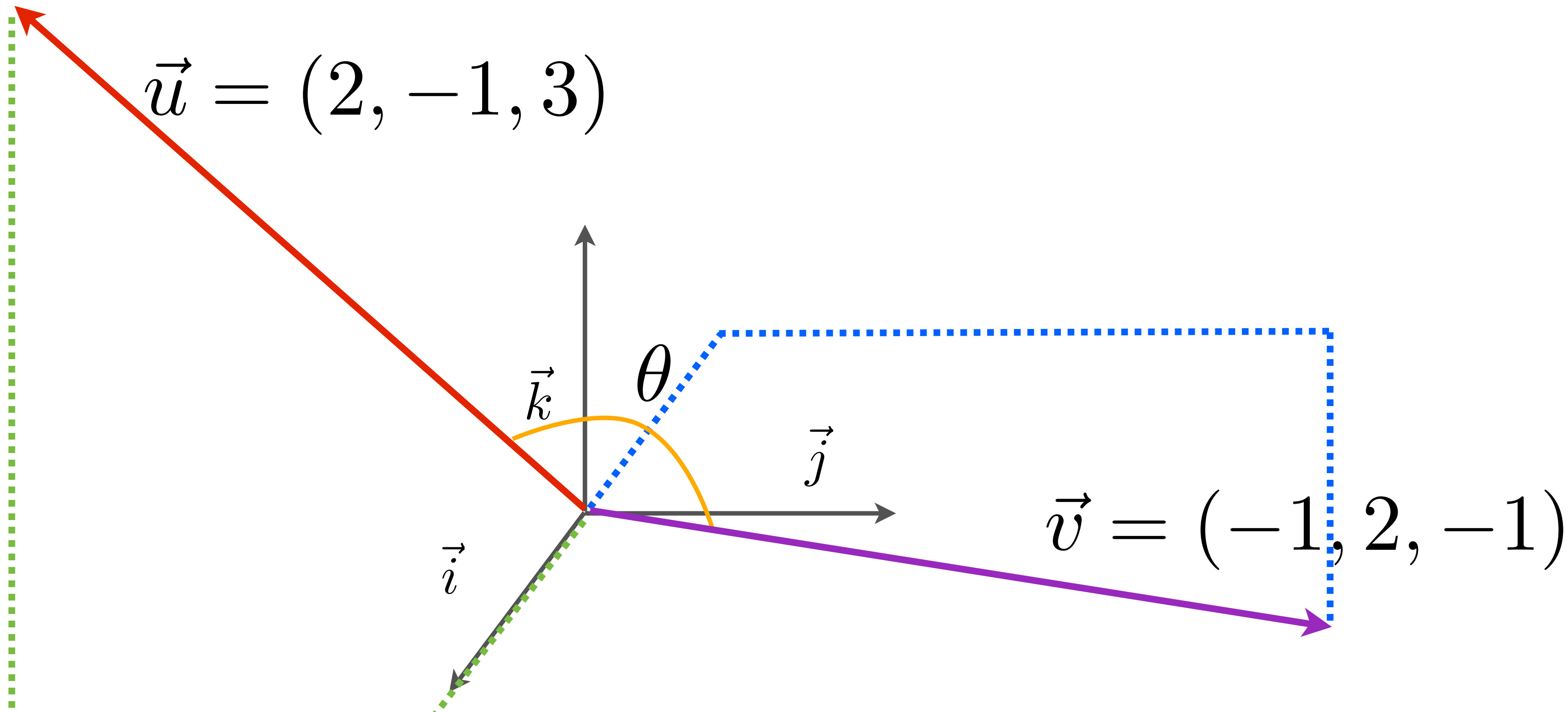
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-1) + (-1)(2) + (3)(-1) = -7$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right)$$

Exemple



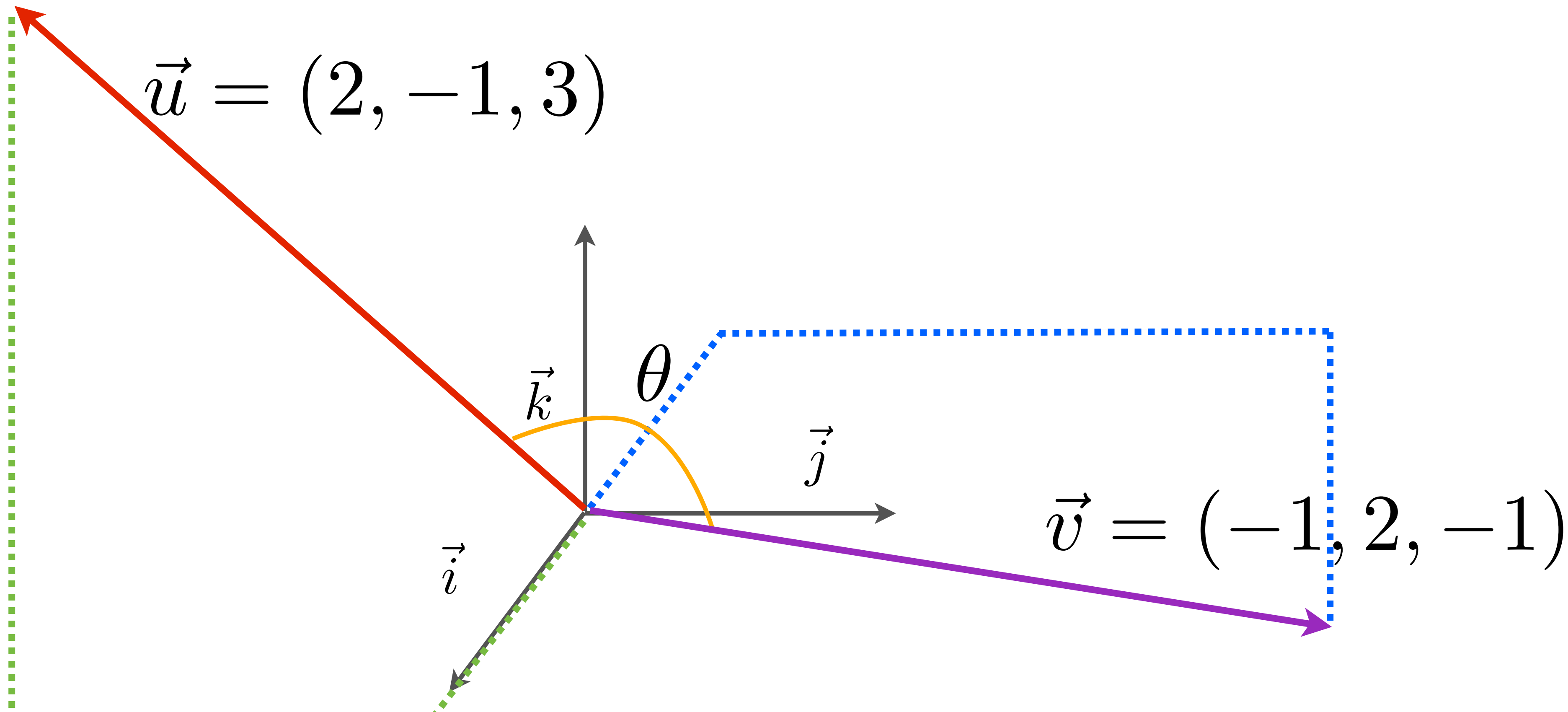
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-1) + (-1)(2) + (3)(-1) = -7$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right) \approx 2{,}4399 \ \text{rad}$$

Exemple



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-1) + (-1)(2) + (3)(-1) = -7$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right) \approx 2{,}4399 \text{ rad}$$

$$\approx 139{,}79^\circ$$

Faites les exercices suivants

p.67, # 1, 3 et 4

Aujourd'hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ La longueur d'un vecteur.

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ La longueur d’un vecteur.
- ✓ La distance entre deux points.

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ La longueur d'un vecteur.
- ✓ La distance entre deux points.
- ✓ Le produit scalaire entre deux vecteurs.

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ La longueur d’un vecteur.
- ✓ La distance entre deux points.
- ✓ Le produit scalaire entre deux vecteurs.
- ✓ Comment trouver l’angle entre deux vecteurs.

Devoir:

p. 50 # 1 à 11

et

p.67, # 1 à 3