2.2 PRODUIT SCALAIRE ET CALCUL D'ANGLES (SUITE)

Cours 5

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ La longueur d’un vecteur.
- ✓ La distance entre deux points.
- ✓ Le produit scalaire entre deux vecteurs.
- ✓ La façon de trouver l’angle entre deux vecteurs.

Aujourd'hui, nous allons voir

✓ Projection orthogonale

Théorème

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Preuve:

$(\Longrightarrow)$ Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

et donc, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$(\Longleftarrow)$ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$, mais

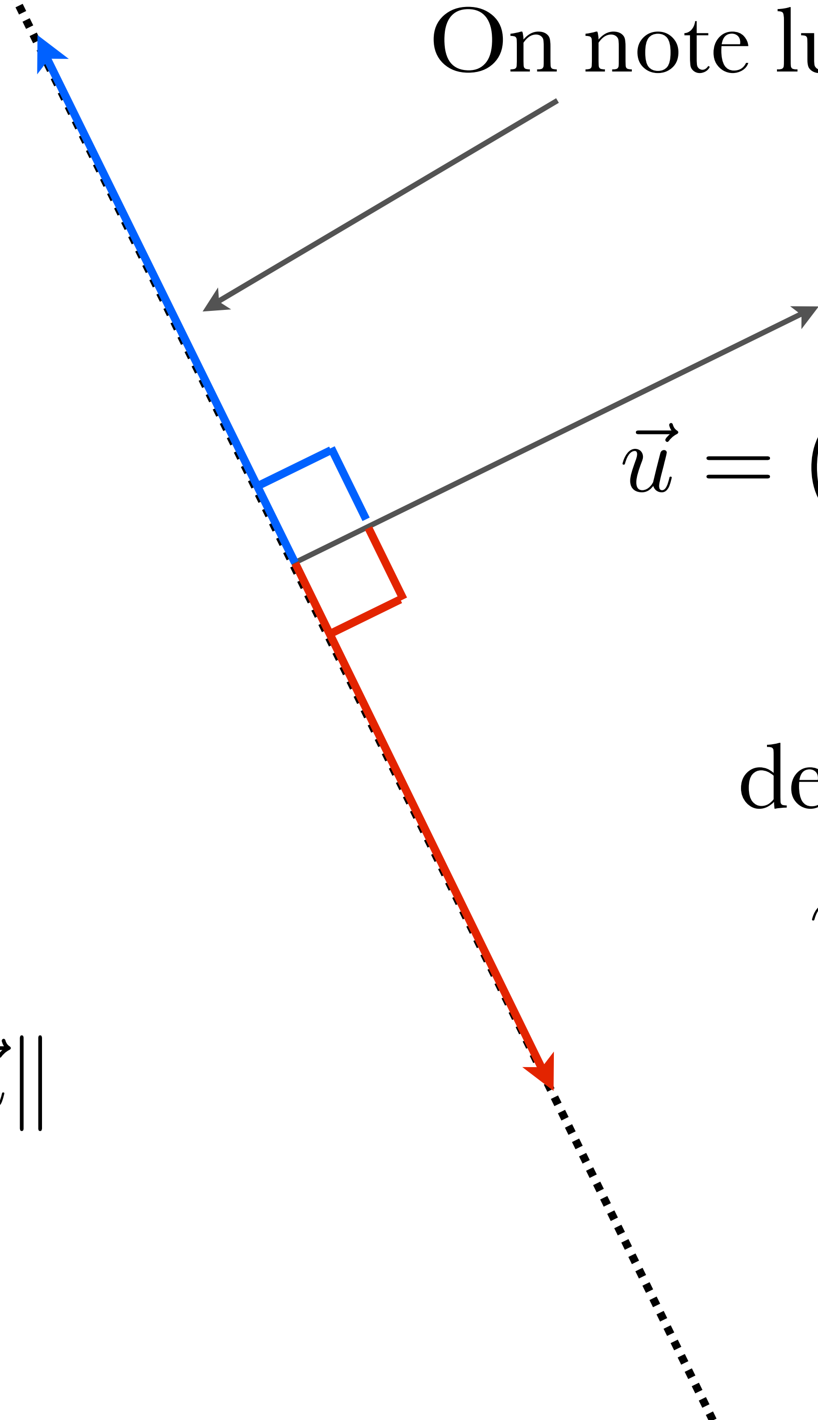
donc $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$

d'où $\cos\theta = 0$ $\quad \theta = \dfrac{\pi}{2} \quad \theta = \dfrac{3\pi}{2}$

Dans le cas particulier du plan,
si on cherche un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné,
on a l'embarras du choix!
Aussi bien en prendre un de même longueur.

Mais si on prend $\vec{v} = (-b, a)$

On note lui $\vec{u}_\perp = (-b, a)$



$\vec{u} = (a, b)$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-b, a) \cdot (a, b)$$
$$= (-b)a + ab = 0$$

donc, $\vec{u} \perp \vec{v}$

et $\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(-b)^2 + a^2}$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} = \|\vec{u}\|$$

de même pour
$\vec{w} = (b, -a)$

Propriétés du produit scalaire

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$= b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2. $(k\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (k\vec{u}) = k(\vec{v} \cdot \vec{u})$

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 + \cdots + (ka_n)b_n$$

$$= a_1(kb_1) + a_2(kb_2) + \cdots + a_n(kb_n)$$

$$= k(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)$$

3. $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + \cdots + a_n(b_n + c_n) \\
&= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + \cdots + a_n b_n + a_n c_n \\
&= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n) \\
&= \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}
\end{aligned}
$$

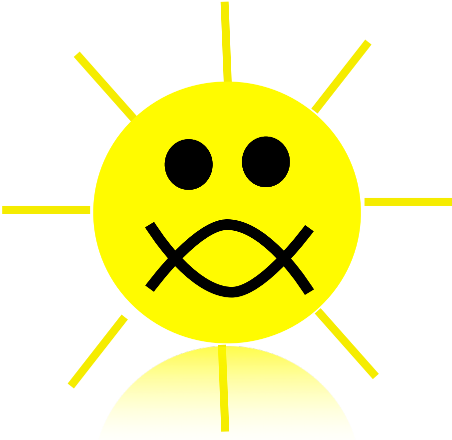
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{u} &= a_1 a_1 + a_2 a_2 + \cdots + a_n a_n \\
&= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\
&= \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2
\end{aligned}
$$

Faites les exercices suivants

p.67, # 8 et 9

Projections orthogonales



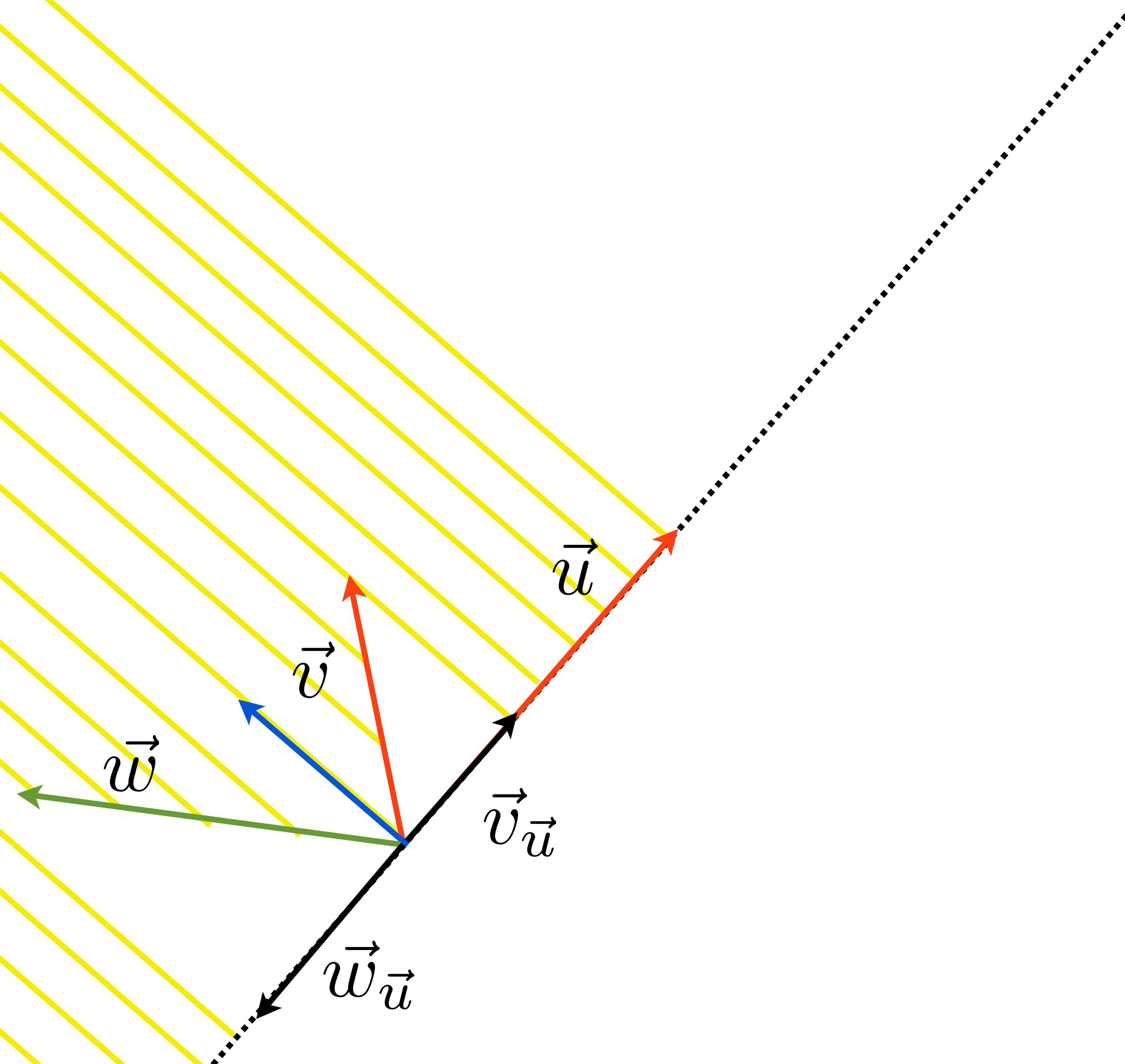
Très loin

La projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est $\vec{v}_{\vec{u}}$

Ce vecteur est tel que

1. $\vec{v}_{\vec{u}} \parallel \vec{u}$

2. $(\vec{v} - \vec{v}_{\vec{u}}) \perp \vec{u}$



$$\vec{v}_{\vec{u}} = k_1\vec{u} = \left(k_2\frac{1}{\|\vec{u}\|}\right)\vec{u} = k_2\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)$$

Vecteur unitaire

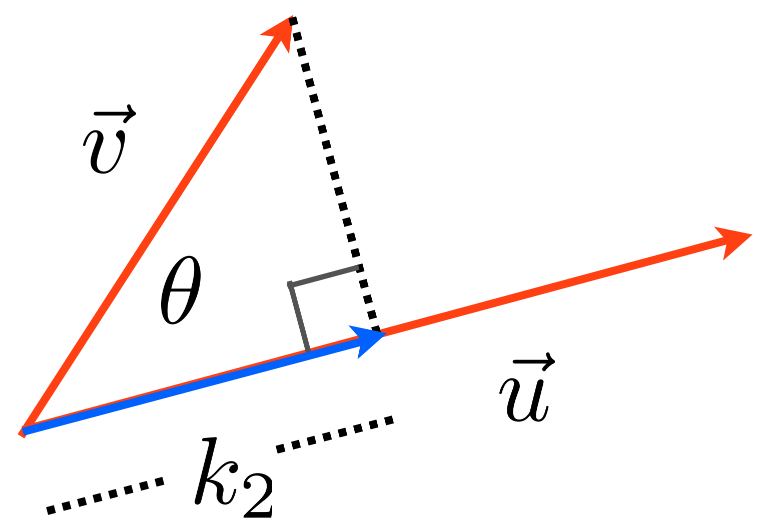
$$= \frac{\|\vec{v}\|\cos\theta}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = \frac{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{u}\|}\vec{u}$$

$$= \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$$

Hum... c'est presque
le produit scalaire ça!

$$\frac{k_2}{\|\vec{v}\|} = \cos\theta$$

$$k_2 = \|\vec{v}\|\cos\theta$$



Exemple

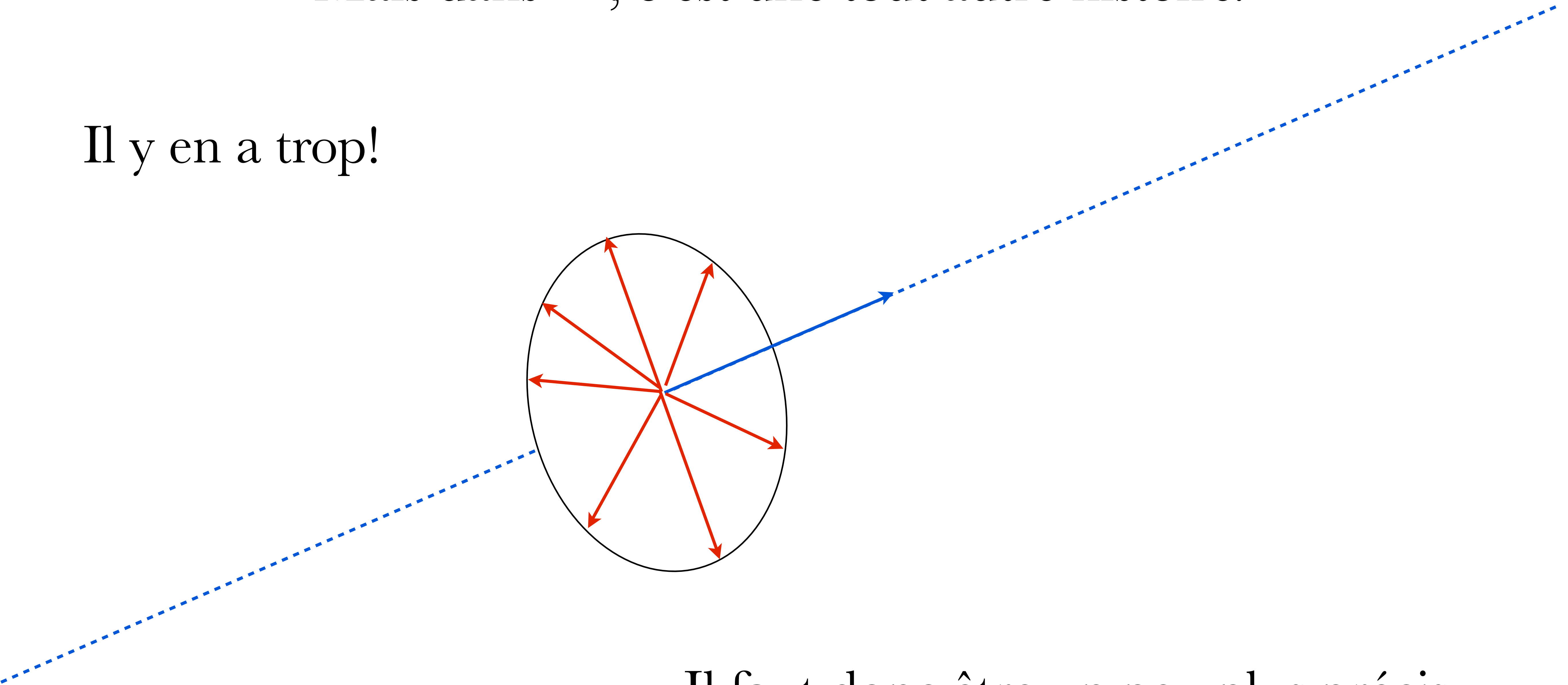
$$\vec{v} = (1, 4, -2) \qquad \vec{u} = (-3, 1, 2)$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} &= \frac{-3+4-4}{9+1+4}(-3,1,2) \\
&= -\frac{3}{14}(-3,1,2) \\
&= \left(\frac{9}{14}, -\frac{3}{14}, -\frac{6}{14}\right)
\end{aligned}$$

Si on est dans $\mathbb{R}^2$, on a vu qu'on pouvait trouver un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné.

Mais dans $\mathbb{R}^3$, c'est une tout autre histoire.

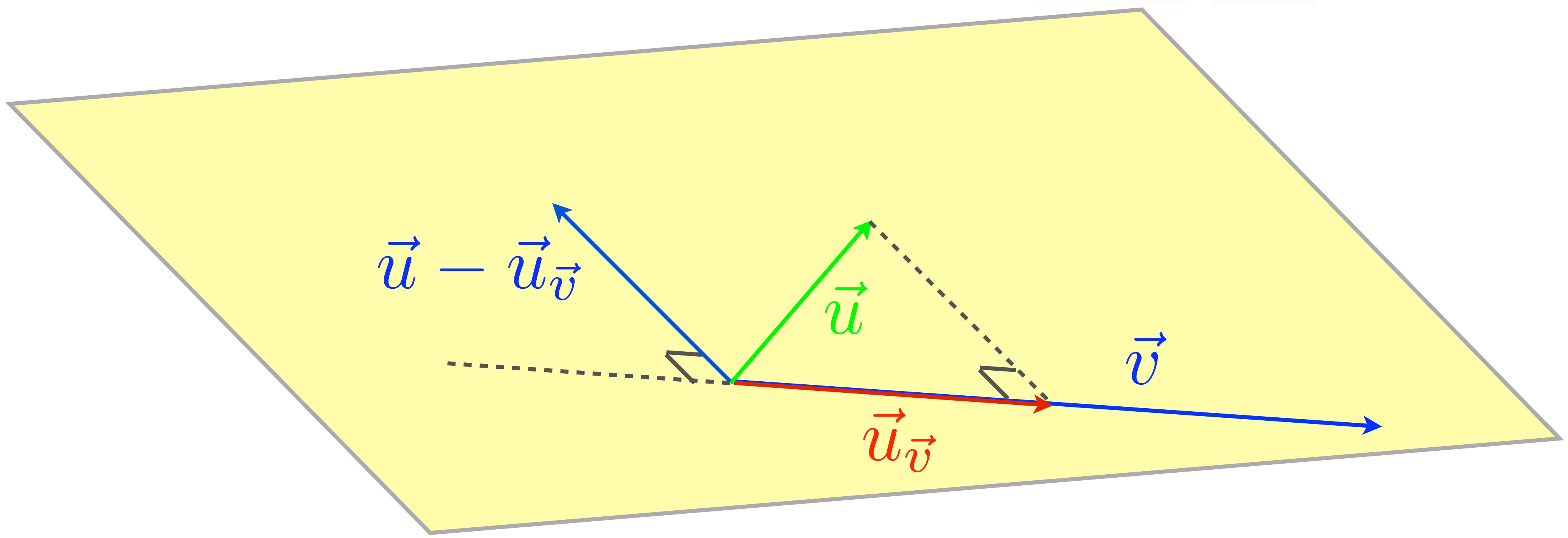
Il y en a trop!



Il faut donc être un peu plus précis.

Trouver un vecteur perpendiculaire à $\vec{v} = (1, 2, 3)$

et dans le plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{u} = (-3, 4, -1)$.



D'où

$$\vec{u} - \vec{u}_{\vec{v}} = (-3, 4, -1) - \frac{2}{14}(1, 2, 3) \;=\; \left(-\frac{22}{7}, \frac{26}{7}, -\frac{10}{7}\right)$$

est $\perp$ à $\vec{v}$ et dans le même plan que $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{u}_{\vec{v}}) = -\frac{22}{7} + \frac{52}{7} - \frac{30}{7} \;= 0$$

Faites les exercices suivants

p. 69, # 12 à 15

Devoir: p.69, # 12 à 26