3.2 PRODUIT VECTORIEL

Cours 7

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Le déterminant en dimension 3.
- ✓ Le calcul d'un volume à l'aide du déterminant.
- ✓ La façon de résoudre un système d'équations linéaires à trois équations et à trois inconnues à l'aide de la règle de Cramer.

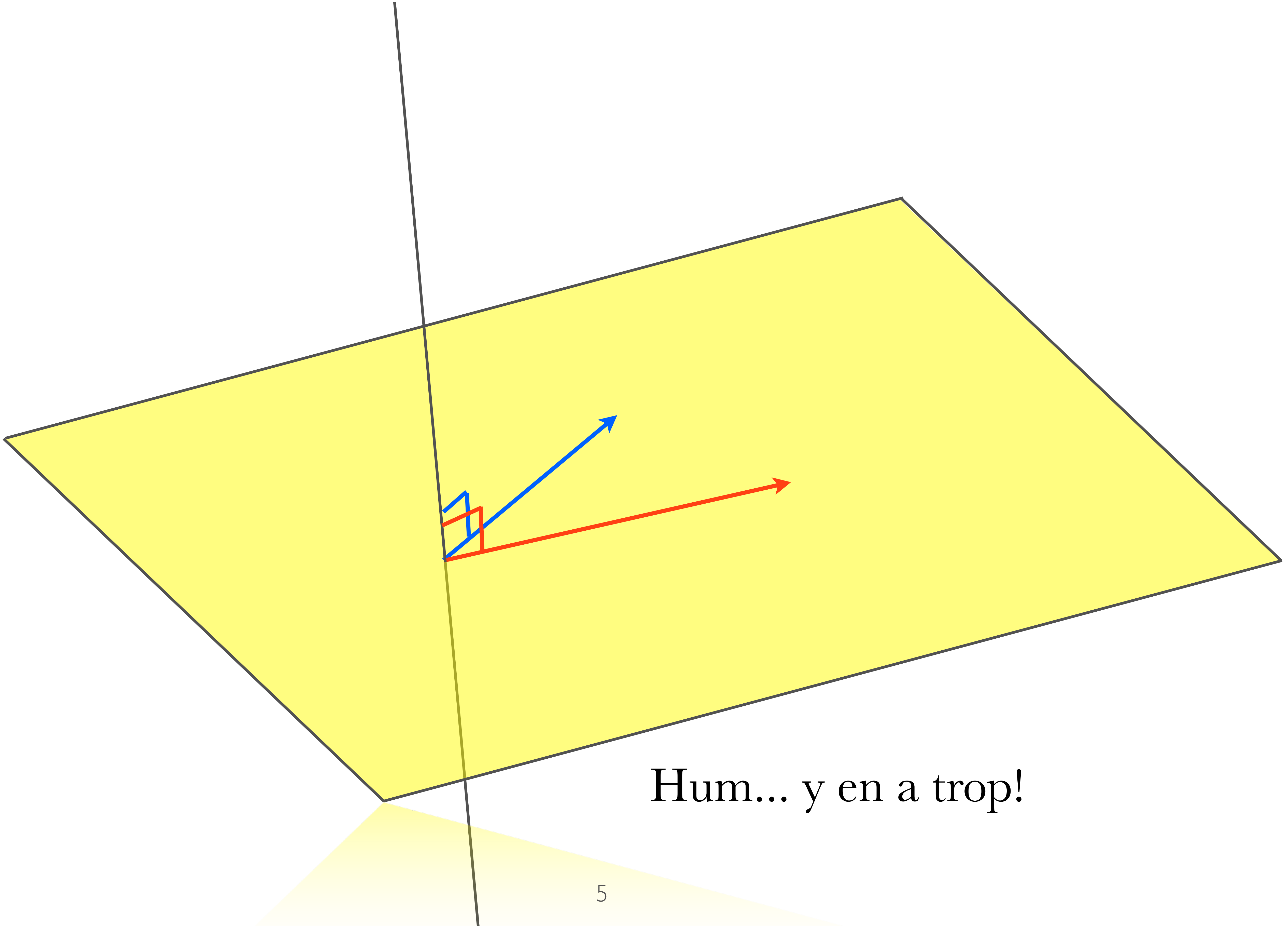
Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ La façon de trouver un vecteur dans l'espace qui est simultanément perpendiculaire à deux autres.
- ✓ La définition du produit vectoriel.
- ✓ La définition du produit mixte.

Question:

Étant donné deux vecteurs dans l'espace, comment en trouver un qui soit simultanément perpendiculaire aux deux autres?

Réponse géométrique:



Hum... y en a trop!

Réponse algébrique:
Celle qui vient le plus naturellement!

Soit $\quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad$ et $\quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

On cherche $\quad \vec{w} = (x, y, z) \quad$ telle que $\quad \vec{w} \perp \vec{u} \quad$ et $\quad \vec{w} \perp \vec{v}$,

c'est-à-dire $\quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \quad$ et $\quad \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\begin{cases} u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0 \\ v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad - \begin{cases} v_1 u_1 x + v_1 u_2 y + v_1 u_3 z = 0 \\ u_1 v_1 x + u_1 v_2 y + u_1 v_3 z = 0 \end{cases}$$

$$v_1 \cancel{u_1} x - u_1 \cancel{v_1} x + v_1 u_2 y - u_1 v_2 y + v_1 u_3 z - u_1 v_3 z = 0$$

$$(v_1 u_2 - u_1 v_2) y + (v_1 u_3 - u_1 v_3) z = 0$$

réponse facile: $\quad z = \qquad\qquad y = -(\;)$

$$y = -(v_1 u_3 - v_3 u_1) \quad z = (v_1 u_2 - v_2 u_1)$$

Maintenant, il ne reste plus qu'à trouver x.

$$\begin{cases} u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0 \\ v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 u_1 x + v_2 u_2 y + v_2 u_3 z = 0 \\ u_2 v_1 x + u_2 v_2 y + u_2 v_3 z = 0 \end{cases}$$

$$(v_2 u_1 - u_2 v_1)x + (v_2 u_3 - u_2 v_3)z = 0$$

mais

$$(v_2 u_1 - u_2 v_1) = -(v_1 u_2 - v_2 u_1) = -z$$

d'où

$$(-z)x + (v_2 u_3 - u_2 v_3)z = 0$$

donc, $x = (v_2 u_3 - v_3 u_2)$

En résumant,

$$x = (v_2u_3 - v_3u_2) \quad y = -(v_1u_3 - v_3u_1) \quad z = (v_1u_2 - v_2u_1)$$

Bizarrement, on peut réécrire ceci en termes de déterminants.

$$x = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} \qquad y = -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix} \qquad z = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$$

$$w = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

Ce qui motive la définition suivante.

Définition:

Soit $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$, et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.
Le produit vectoriel de deux vecteurs est l'opération interne définie comme suit:

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{v}, \vec{u}) \longmapsto \vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

On a déjà vérifié que

$$(\vec{v} \wedge \vec{u}) \perp \vec{v} \qquad \text{et} \qquad (\vec{v} \wedge \vec{u}) \perp \vec{u}$$

Exemple: Soient $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (2, 0, 1)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2)\vec{\imath} - (-5)\vec{\jmath} + (-4)\vec{k} = (2, 5, -4)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (1)(2) + (2)(5) + (3)(-4) = 2 + 10 - 12 = 0$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (2)(2) + (0)(5) + (1)(-4) = 4 - 4 = 0$$

Faites les exercices suivants

p. 113, # 1 et 3

Propriétés du produit vectoriel

PV1. $\vec{v} \wedge \vec{v} = 0$

PV2. $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$

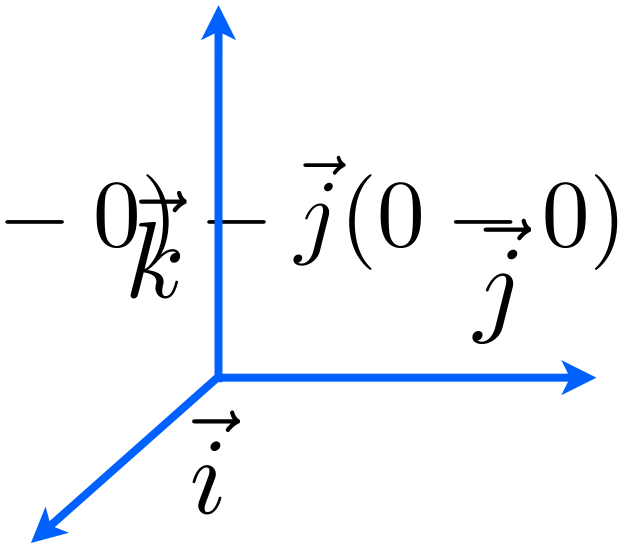
PV3. $(k\vec{v}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge (k\vec{u}) = k(\vec{v} \wedge \vec{u})$

PV4. $\vec{v} \wedge (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} \wedge \vec{u}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$

PV5. $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}, \vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}, \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$

Les quatre premières découlent directement des propriétés des déterminants.

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(1-0) = \vec{k}$$



$$\vec{i} \wedge \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(1-0) + \vec{k}(0-0) = -\vec{j}$$

Le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ suit la règle de la main droite.

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(0-0) = \vec{i}$$

Non-propriétés du produit vectoriel

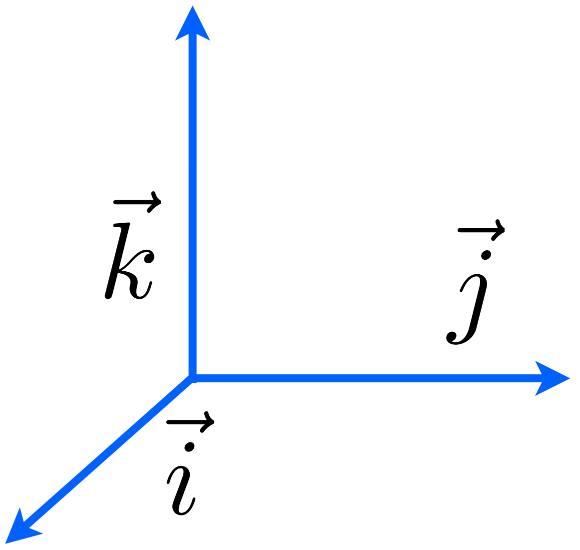
$$\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{v} \wedge \vec{u}$$ (non commutatif)

Car $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (anti commutatif)

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$$ (non associatif)

Car $(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} \; = \vec{0} \wedge \vec{j} \; = \vec{0}$

$$\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} \; = -\vec{j}$$



Calculons sa norme.

Hum... pas facile!

Commençons par vérifier l'identité suivante:

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = ((bf - ce), -(af - cd), (ae - bd))$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + cf$$

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 + (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 =$$

$$= (bf - ce)^2 + (af - cd)^2 + (ae - bd)^2 + (ad + be + cf)^2$$

$$= (bf)^2 - \cancel{2bfce} + (ce)^2 + (af)^2 - \cancel{2afcd} + (cd)^2 + (ae)^2 - \cancel{2aebd} + (bd)^2$$

$$+(ad)^2 + (be)^2 + (cf)^2 + \cancel{2adbe} + \cancel{2adcf} + \cancel{2becf}$$

$$= (bf)^2 + (ce)^2 + (af)^2 + (cd)^2 + (ae)^2 + (bd)^2 \;\; +(ad)^2 + (be)^2 + (cf)^2$$

$$= ((ad)^2 + (ae)^2 + (af)^2) + ((bd)^2 + (be)^2 + (bf)^2) + ((cd)^2 + (ce)^2 + (cf)^2)$$

$$= a^2(d^2 + e^2 + f^2) + b^2(d^2 + e^2 + f^2) + c^2(d^2 + e^2 + f^2)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2) \;\; = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$$

Donc, on a bien $$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$$

d'où on tire $$\left(\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)^2 + \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)^2 = 1$$

Mais $$\left(\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

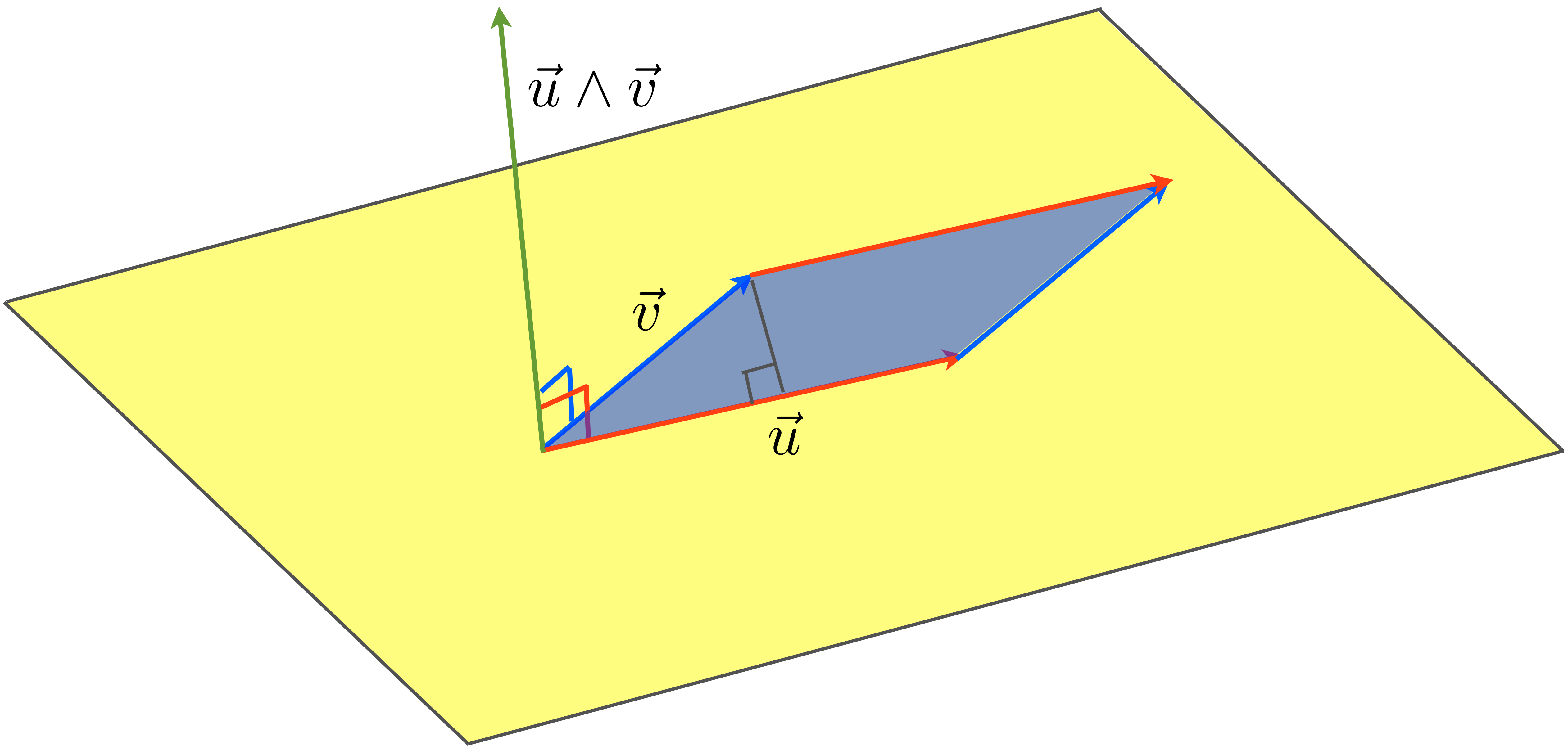
$$\left(\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2\theta$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$$

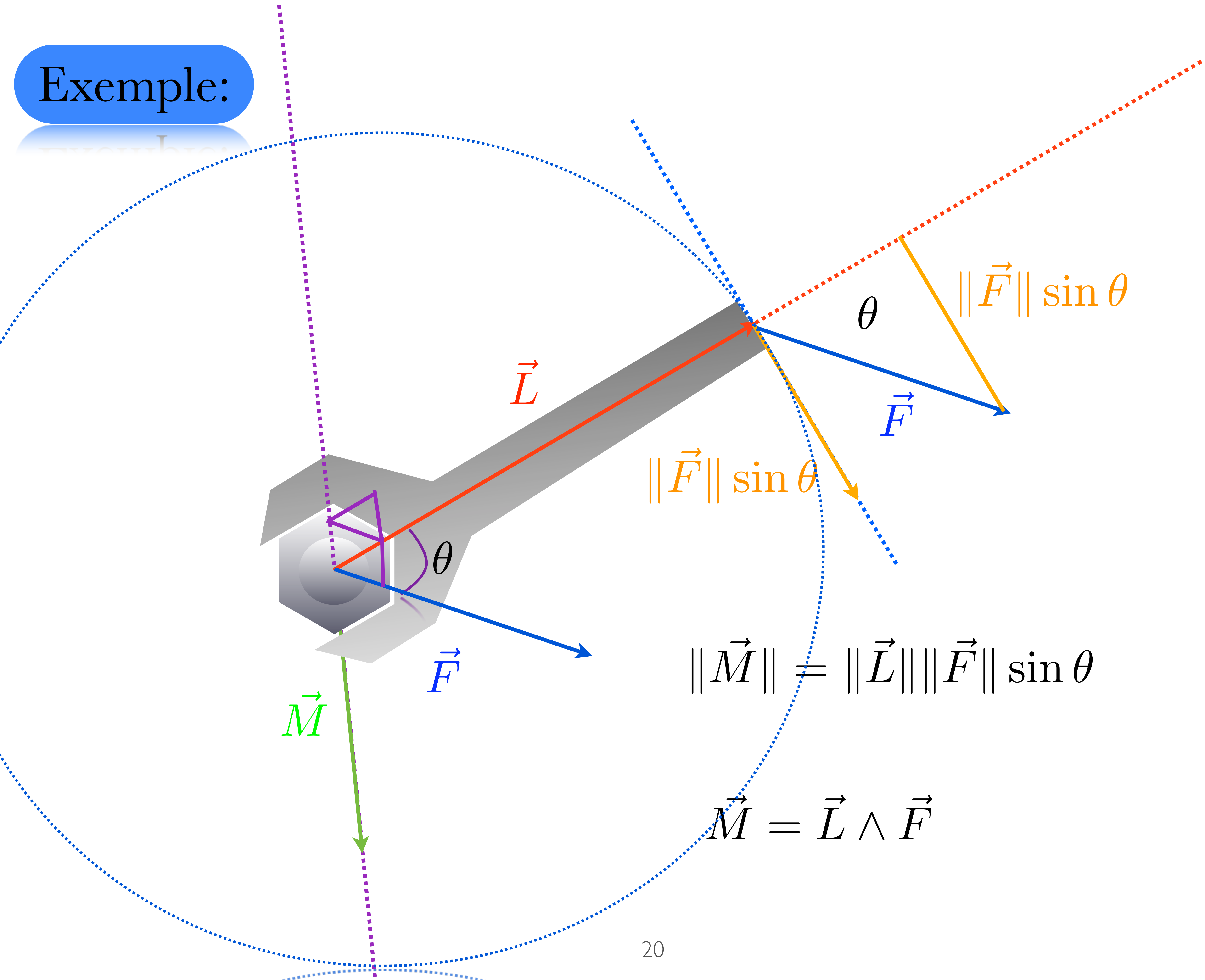
$$= base \times hauteur \; = \text{ aire du parallélogramme}$$



Faites les exercices suivants

p. 113, # 5 et 6.

Exemple:



$$\|\vec{M}\| = \|\vec{L}\| \|\vec{F}\| \sin\theta$$

$$\vec{M} = \vec{L} \wedge \vec{F}$$

Théorème:

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Preuve: $(\Longrightarrow)$ Si $\vec{u} \parallel \vec{v}$, alors $\vec{u} = k\vec{v}$

et donc, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ka & kb & kc \\ a & b & c \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \vec{0}$

$(\Longleftarrow)$ Si $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta = 0 \quad \text{mais}$$

donc, $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$,

d'où $\sin\theta = 0$ et $\theta = 0, \pi$.

Faites les exercices suivants

p. 113, #2.

Produit mixte de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

Le produit mixte est:

$$\overbrace{(\underbrace{\vec{u} \wedge \vec{v}}_{\text{vecteur}}) \cdot \underbrace{\vec{w}}_{\text{vecteur}}}^{\text{nombre}} \neq \underbrace{\vec{u}}_{\text{vecteur}} \wedge \underbrace{(\overbrace{\vec{v} \cdot \vec{w}}^{\text{nombre}})}_{\text{Pas de sens!}}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

$$= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

On a directement que le produit mixte nous donne:

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Le volume orienté du parallélépipède engendré par

$$\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}$$

Faites les exercices suivants

p. 113, # 1 à 4

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Le produit vectoriel.
- ✓ La norme du produit vectoriel qui est l'aire du parallélogramme.
- ✓ Le produit mixte.

Devoir: p. 113, # 1 à 18