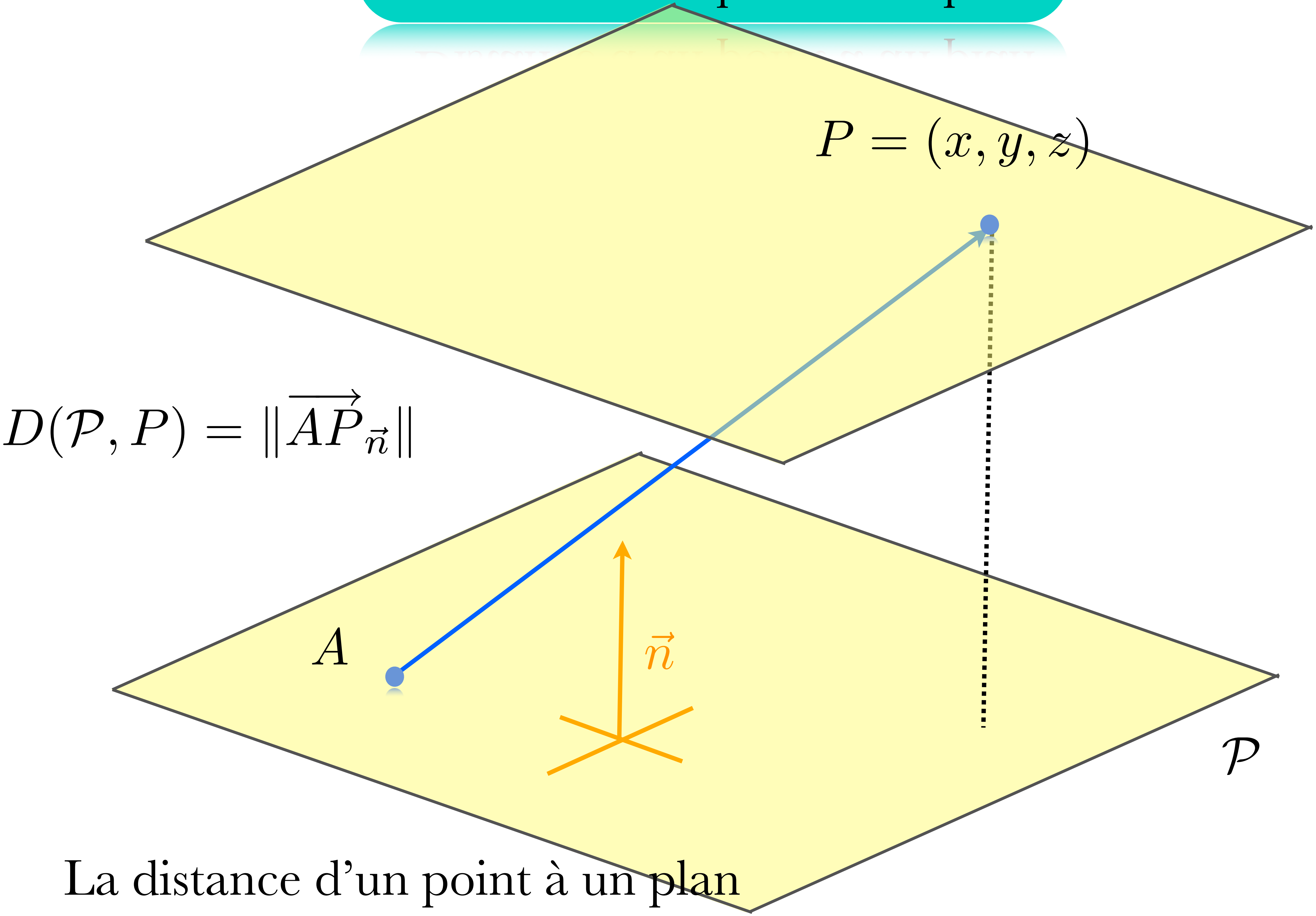
4.2 LES PLANS (SUITE)

Cours 13

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ L'intersection de deux plans.
- ✓ L'angle entre deux plans.
- ✓ La distance d'un point à un plan.

Distance d'un point à un plan



La distance d'un point à un plan

est aussi la distance entre deux plans parallèles.

Normal *vs* directeur

Si on a des vecteurs directeurs d'un plan, il est facile de trouver un vecteur normal.

$$\vec{d}_1, \vec{d}_2 \longrightarrow \vec{n} = \vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2$$

Et l'inverse maintenant?

$$\vec{n} \longrightarrow \begin{aligned} \vec{d}_1 &= \vec{n} ?? \wedge \vec{u} \\ \vec{d}_2 &= \vec{n} \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

Existe-t-il un vecteur perpendiculaire à $\vec{n}$ et qui ne soit pas dans le plan?

Ici, on peut prendre n'importe quel vecteur non nul!

NON!

Exemple

Trouver une équation vectorielle du plan d'équation

$$3x - 2y + 5z = 8$$

On a $\vec{n} = (3, -2, 5)$ est un vecteur normal au plan.

$$\vec{d}_1 = \vec{n} \wedge \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 5, 2)$$

$$\vec{d}_2 = \vec{n} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-5, 0, 3)$$

Et un point?

$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{8}{3}, 0, 0\right)$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, 0, 0\right) + r(0, 5, 2) + s(-5, 0, 3)$$

Faites les exercices suivants

p.152, # 4 et 16

Comment faire pour trouver l'intersection entre une droite et un plan?

L'équation vectorielle d'un droite

$$\mathcal{D} : (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(d_1, d_2, d_3)$$

nous donne un point sur la droite pour chaque valeur du paramètre t

Tous triplet de nombres qui satisfait l'équation

$$ax + by + cz = e$$ appartient au plan

Pour trouver l'intersection, il suffit de trouver la valeur du paramètre t pour qu'un point de la droite satisfasse à l'équation du plan.

$$a(p_1 + td_1) + b(p_2 + td_2) + c(p_3 + td_3) = e$$

Faites les exercices suivants

p.153 # 10

Intersection de deux plans

Si deux plans se croisent, alors l'intersection sera une droite.

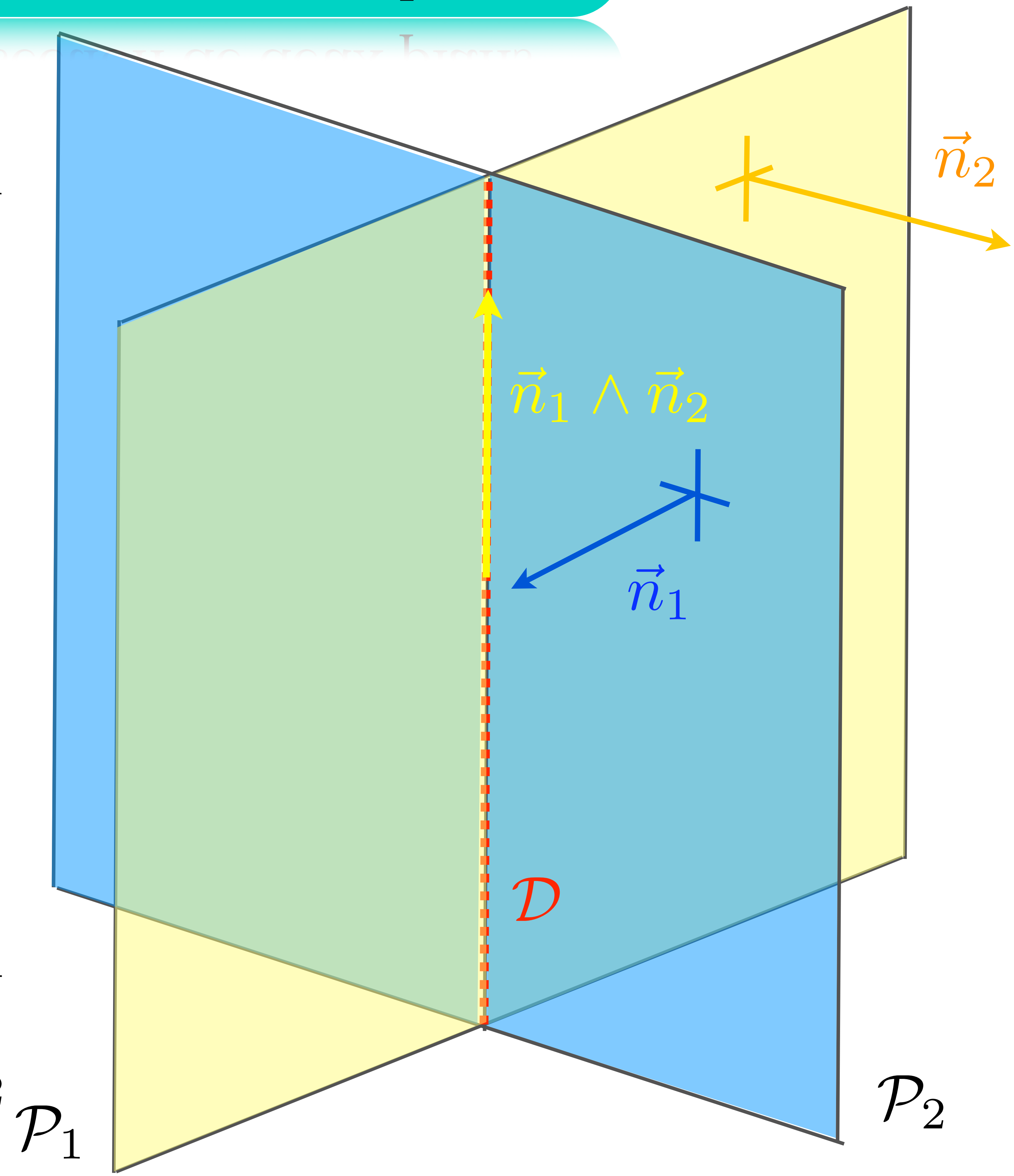
$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D}$$

Auquel cas la direction de cette droite est donnée par:

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$$

car $\vec{d} \perp \vec{n}_1$, donc $\vec{d} \parallel \mathcal{P}_1$

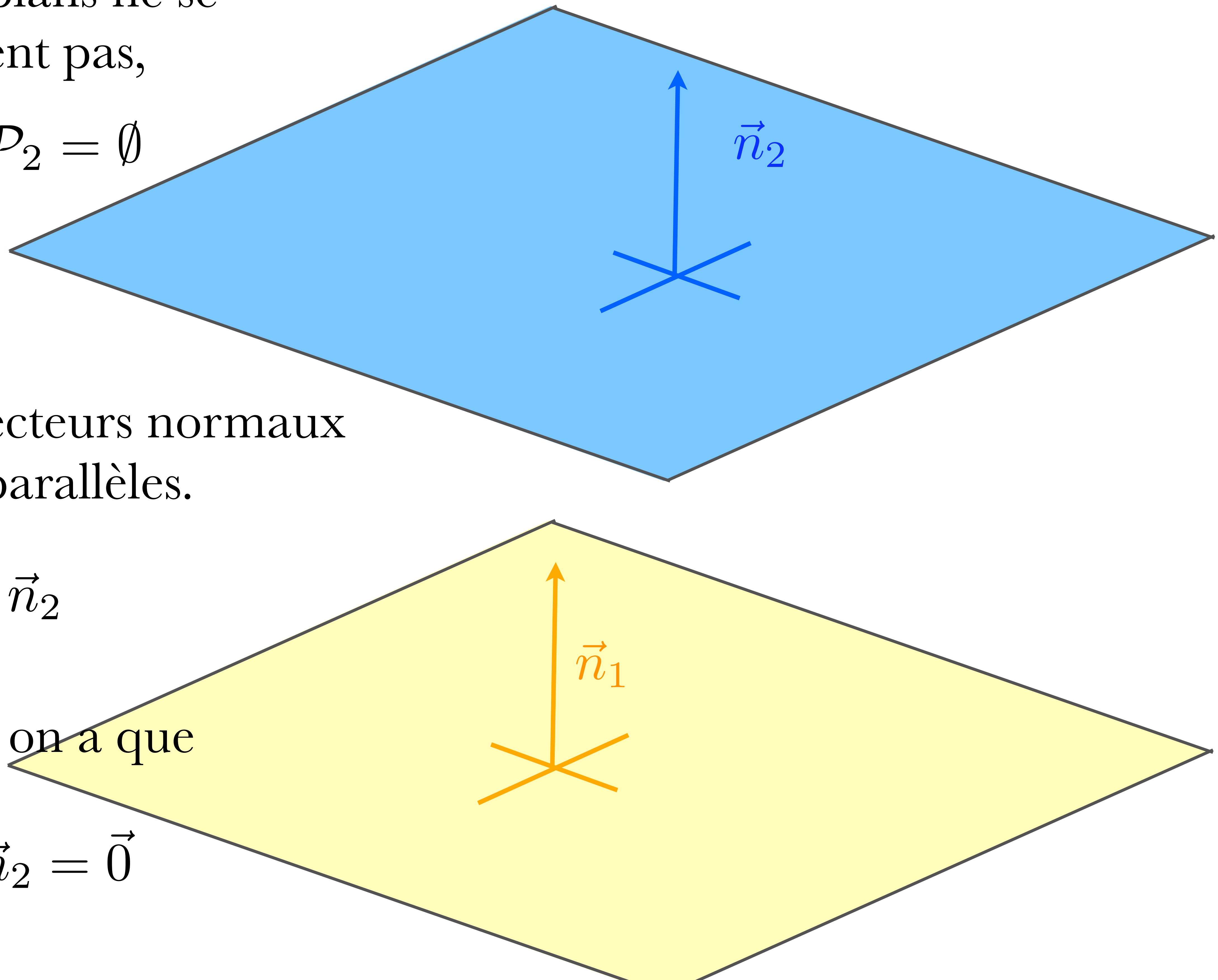
et $\vec{d} \perp \vec{n}_2$, donc $\vec{d} \parallel \mathcal{P}_2$



Intersection de deux plans

Si deux plans ne se croisent pas,

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$$



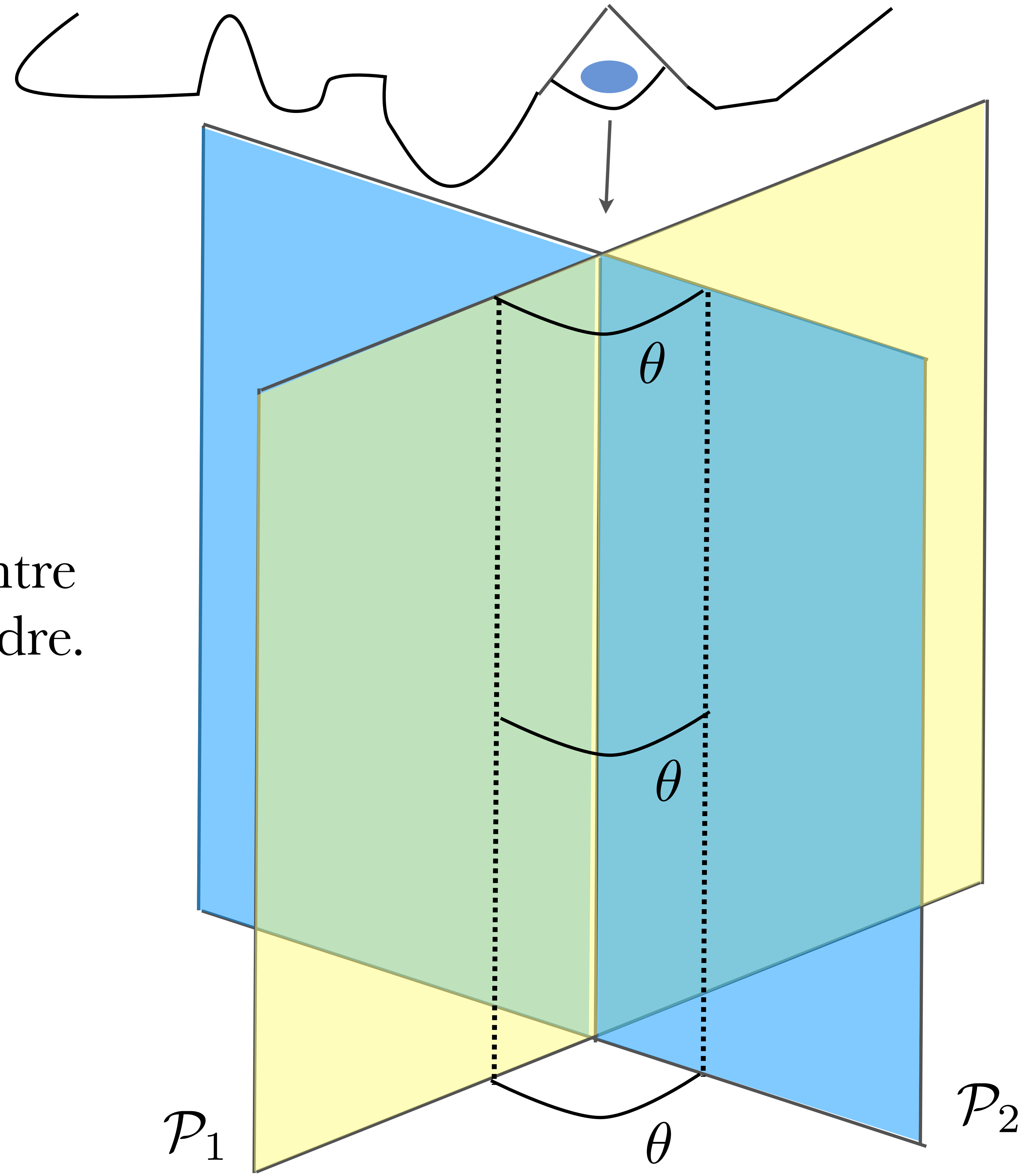
alors leurs vecteurs normaux sont parallèles.

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$$

Et donc, on a que

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \vec{0}$$

On nomme l'angle entre deux plans l'angle dièdre.

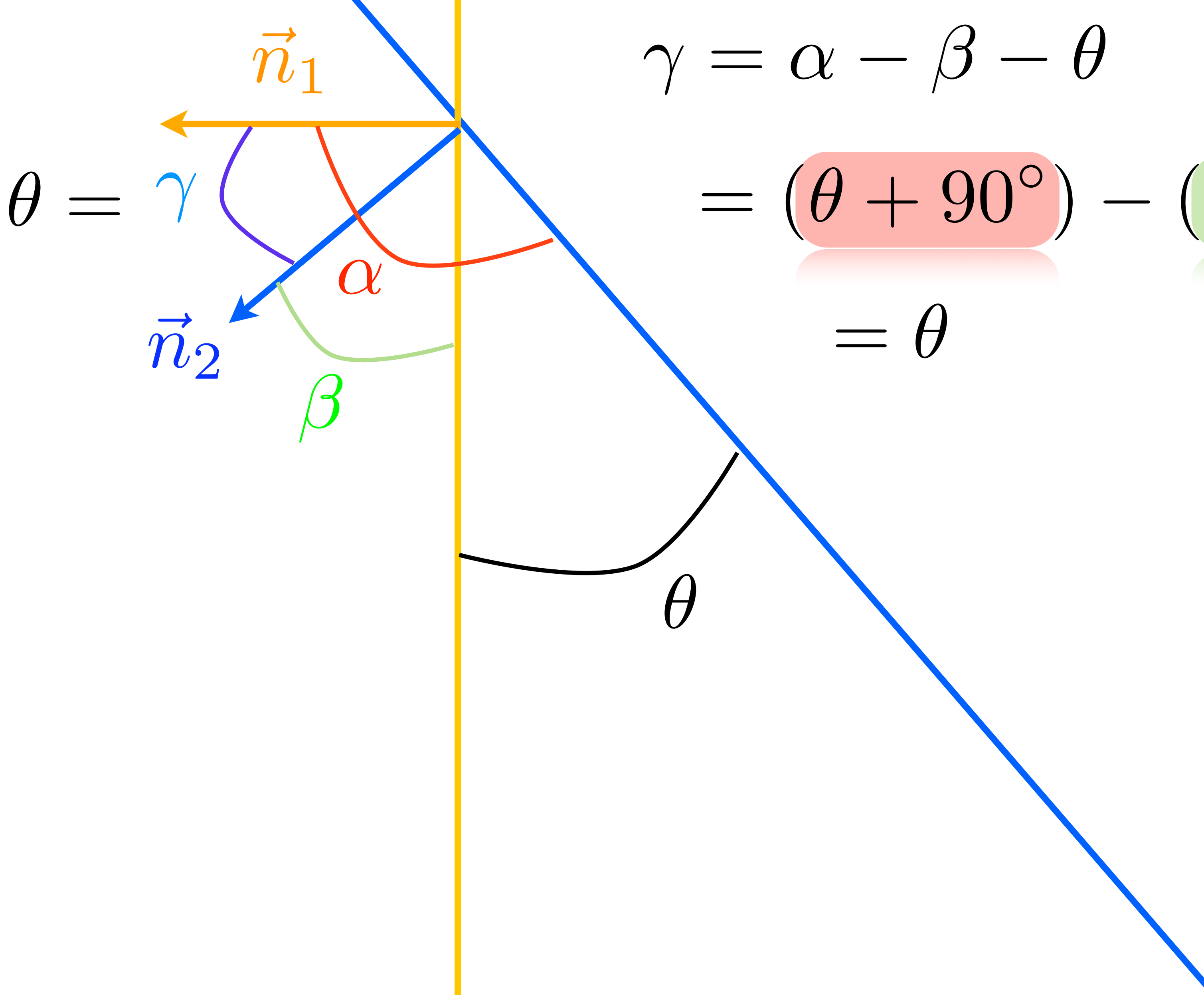


L'angle entre deux plans correspond à l'angle entre les vecteurs normaux.

$$\alpha = \boxed{\theta + 90^\circ}$$

$$\beta = \boxed{90^\circ - \theta}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha - \beta - \theta \\ &= (\theta + 90^\circ) - (90^\circ - \theta) - \theta \\ &= \theta\end{aligned}$$



Faites les exercices suivants

p.154 # 15 et 17

Devoir: p. 152, # 1 à 22

5.1 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Cours 13

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Les systèmes d'équations linéaires.
- ✓ Un algorithme pour les résoudre.

Définition Une **équation linéaire** est n'importe quelle expression de la forme:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

où $a_i, c \in \mathbb{R}$ et les x_i sont des variables.

Définition Une **solution** de l'équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

est un n-uplet $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = c$$

Résoudre une équation linéaire revient à trouver l'ensemble de toutes ses solutions.

Définition Un **système d'équations linéaires** est un ensemble d'équations linéaires. On met une accolade au début pour les délimiter.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Les indices ici servent à indiquer à quelle variable et à quelle équation un coefficient appartient.

Définition Une **solution** d'un système d'équations linéaires est un n-uplet qui est solution de chaque équation du système.

Exemple

Le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

a comme solution

$$\left(\frac{7}{11}, -\frac{1}{11}\right)$$

car $\quad 2\left(\frac{7}{11}\right) + 3\left(-\frac{1}{11}\right) \quad = \frac{14}{11} - \frac{3}{11} = 1$

et $\quad 3\left(\frac{7}{11}\right) - \left(-\frac{1}{11}\right) \quad = \frac{21}{11} + \frac{1}{11} = 2$

On a vue comment résoudre un système d'équations linéaires
à deux équations et à deux inconnues ainsi qu'à
trois équations et à trois inconnues à l'aide de la règle de Cramer.

On aimerait avoir une méthode pour résoudre des systèmes
d'équations à n équations et à m inconnues.

Qu'est-ce qu'on peut faire avec une équation sans changer l'ensemble solution?

$$a = b \qquad\qquad c = d$$

$$a = b \implies a + c = b + c \implies a + c = b + d$$

$$a = b \implies a - c = b - c \implies a - c = b - d$$

$$a = b \implies a \cdot c = b \cdot c \implies a \cdot c = b \cdot d$$

$$a = b \implies \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \implies \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Pour comprendre la méthode, regardons ce qu'on peut faire à un système d'équations sans changer l'ensemble solution.

1. Interchanger deux équations

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ {\color{red} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} {\color{red} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}\right.$$

2. Multiplier une équation par une constante

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} {\color{red}4}a_{11}x_1 + {\color{red}4}a_{12}x_2 + \cdots + {\color{red}4}a_{1n}x_n = {\color{red}4}c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}\right.$$

3. Additionner à une équation un multiple d'une autre.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcccrl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = c_1 \\ (a_{21} + 4a_{11})x_1 & + & (a_{22} + 4a_{12})x_2 & + & \dots & + & (a_{2n} + 4a_{1n})x_n & = c_2 + 4c_1 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = c_m \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + (-1)y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ (3)3x + (3)(-1)y = (3)2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 9x + (-3)y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ (9 + 2)x + (-3 + 3)y = 6 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 11x + 0y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} (11)2x + (11)3y = (11)1 \\ 11x + 0y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22x + 33y = 11 \\ 11x + 0y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} (22 + (-2 \cdot 11))x + (33 + (-2 \cdot 0))y = 11 + (-2 \cdot 7) \\ 11x + 0y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0x + 33y = -3 \\ 11x + 0y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{1}{11} \\ x = \frac{7}{11} \end{cases}$$

Lorsqu'on résout un système d'équations, tout le travail ce fait sur les coefficients des variables et sur les constantes.

On ne perd pas d'information sur le système d'équations linéaires si l'on ne conserve que ces nombres.

$$\left\{\begin{array}{rcrl} 2x & + & 3y & = 1 \\ 3x & + & (-1)y & = 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice
des coefficients

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Matrice
augmentée

Pour résoudre le système, on peut utiliser les trois opérations qu'on vient de voir et qui ne modifient pas l'ensemble solution.

Par contre, on doit les traduire en opération sur les lignes des matrices.

1. Interchanger deux lignes $\quad L_i \leftrightarrow L_j$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} d & e & f \\ a & b & c \end{array}\right)$$

2. Multiplier une ligne par une constante $\quad L_i \to kL_i$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to kL_1} \left(\begin{array}{cc|c} ka & kb & kc \\ d & e & f \end{array}\right)$$

3. Additionner à une ligne un multiple d'une autre. $\quad L_i \to L_i + kL_j$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 + kL_2} \left(\begin{array}{cc|c} a + kd & b + ke & c + kf \\ d & e & f \end{array}\right)$$

Faites les exercices suivants

p.173 # 1

Pour résoudre un système, on utilise les opérations ligne pour obtenir un système équivalent dont la solution est facilement lisible.

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & + & 3y & = 1 \\ 3x & + & (-1)y & = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to \frac{L_1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{2L_2}{11}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{3L_2}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{11}{22} + \frac{3}{22} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x & + & 0y & = \frac{7}{11} \\ 0x & + & y & = -\frac{1}{11} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & = 1 \\ 3x & + & (-1)y & = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to \frac{L_1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to -\frac{2L_2}{11}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{3L_2}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{11}{22} + \frac{3}{22} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x+3y-4z & =5 \\ -2x+y-z & =7 \\ x+5y-2z & =1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & 9 \\ 3 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & 9 \\ 0 & -12 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 \\ 0 & -12 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & -12 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 12L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 38 & -130 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \frac{L_3}{38}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{130}{38} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{65}{19} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3x + 3y - 4z &= 5 \\ -2x + y - z &= 7 \\ x + 5y - 2z &= 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{65}{19} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 5y - 2z &= 1 \\ 0x + y + 3z &= -11 \\ 0x + 0y + z &= -\frac{65}{19} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5y - 2z &= 1 \\ y + 3z &= -11 \\ z &= -\frac{65}{19} \end{cases}$$

$$y = -11 - 3\left(-\frac{65}{19}\right) = \frac{-209 + 195}{19} = -\frac{14}{19}$$

$$x = 1 - 5\left(-\frac{14}{19}\right) + 2\left(-\frac{65}{19}\right) = \frac{19 + 70 - 130}{19} = -\frac{41}{19}$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{41}{19}, -\frac{14}{19}, -\frac{65}{19}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{rrl} x & -2y & = 3 \\ -2x & +4y & = 2 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{rrl} x & -2y & = 3 \\ & 0 & = 8 \end{array}\right.$$

Pour quelles valeurs de x et de y
l'équation $0 = 8$ est-elle vérifiée?

Aucune!

Donc, le système d'équations linéaires n'a pas de solution.

$$\left\{\begin{array}{rrr} x & -2y & = 3 \\ -2x & +4y & = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x & -2y & = 3 \\ & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

La deuxième équation est toujours vraie donc inutile.

Donc, les points de cette droite

$$x - 2y = 3$$

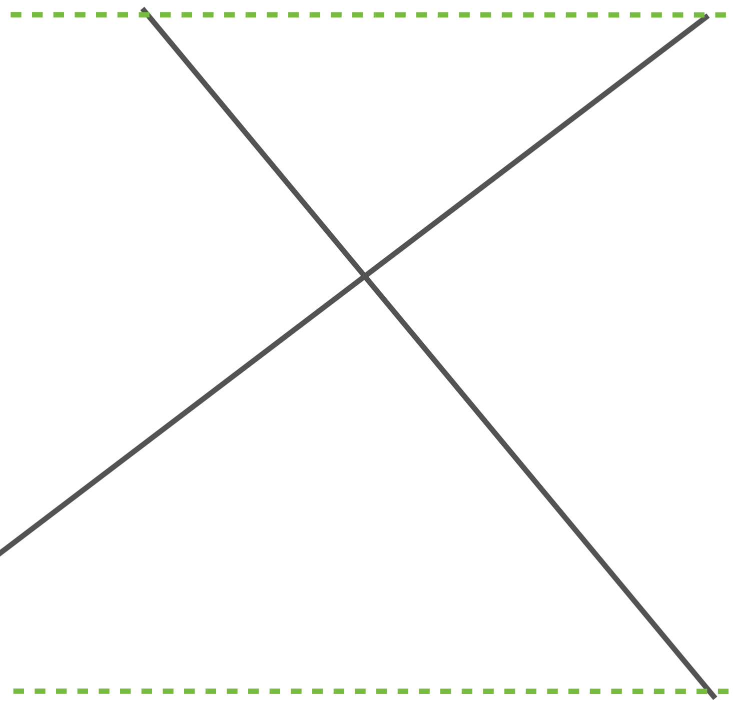
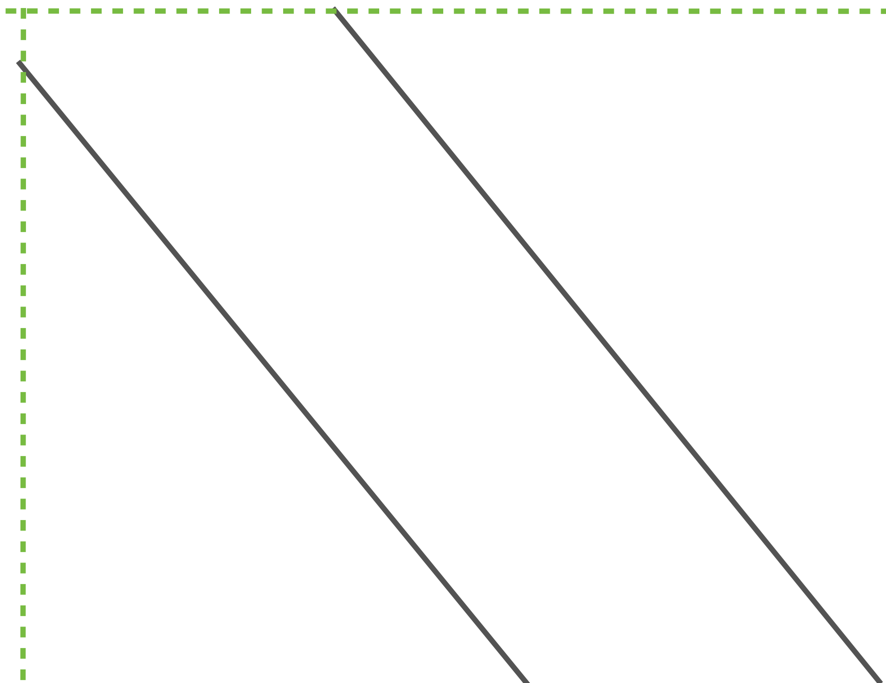
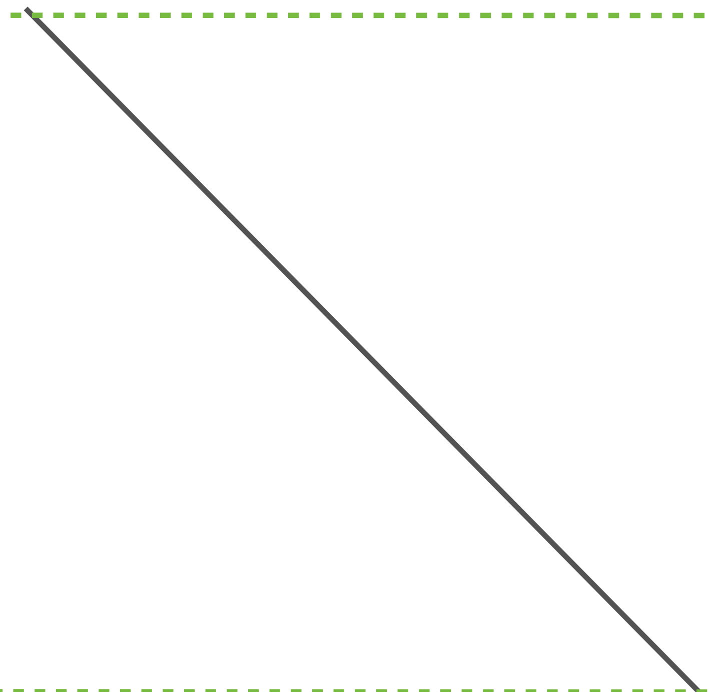
forment l'ensemble solution du système d'équations.

Interprétation géométrique

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Deux droites dans le plan

Une solution de ce système est un point de l'intersection de ces deux droites.

		
Deux droites sécantes	Deux droites parallèles distinctes	Deux droites parallèles confondues
Il y a une solution unique.	Il n'y a pas de solution.	Il y a une infinité de solutions.

Faites les exercices suivants

p.175 # 8

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ La distance d'un point à un plan.
- ✓ Système d'équations linéaires

Devoir:

p.154 # 14 à 22

p.173, #1, 2, 8 à 11