5.1 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES (SUITE)

Cours 14

Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Les systèmes d'équations linéaires.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Les systèmes d'équations linéaires.
- ✓ Un algorithme pour les résoudre.

Aujourd’hui, nous allons voir

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Matrice ERL

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Matrice ERL
- ✓ Le rang d'une matrice

$$\begin{cases} ax + by + cz &= r \\ dx + ey + fz &= s \\ gx + hy + jz &= t \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by + cz & = r \\ dx + ey + fz & = s \\ gx + hy + jz & = t \end{cases}$$

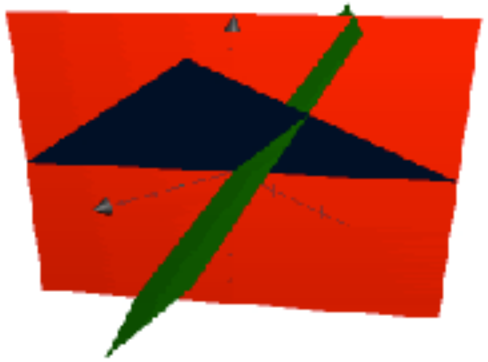
Trois plans dans l'espace

$$\begin{cases} ax + by + cz = r \\ dx + ey + fz = s \\ gx + hy + jz = t \end{cases}$$

Trois plans dans l'espace

$$\begin{cases} ax + by + cz & = r \\ dx + ey + fz & = s \\ gx + hy + jz & = t \end{cases}$$

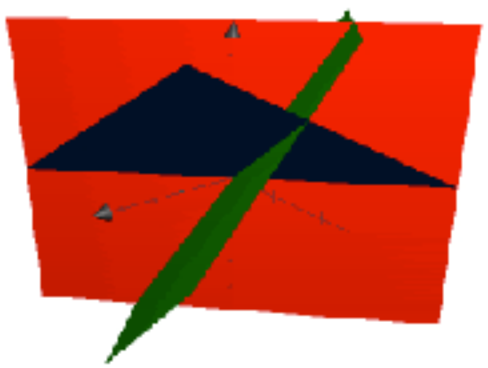
Trois plans dans l'espace

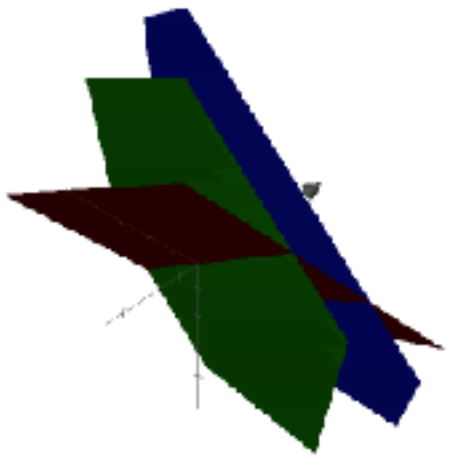


Il y a une solution unique.

$$\begin{cases} ax + by + cz &= r \\ dx + ey + fz &= s \\ gx + hy + jz &= t \end{cases}$$

Trois plans dans l'espace



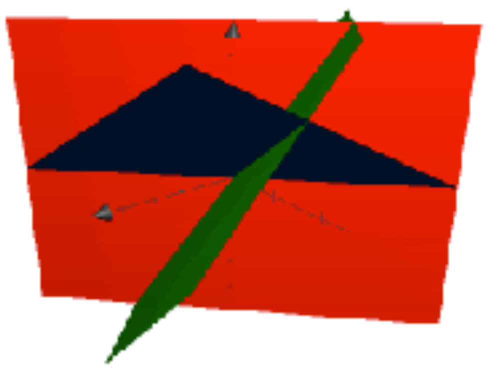


Il y a une solution unique.

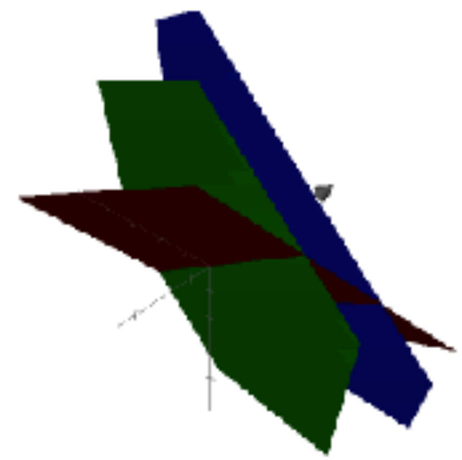
Il n'y a pas de solution.

$$\begin{cases} ax + by + cz & = r \\ dx + ey + fz & = s \\ gx + hy + jz & = t \end{cases}$$

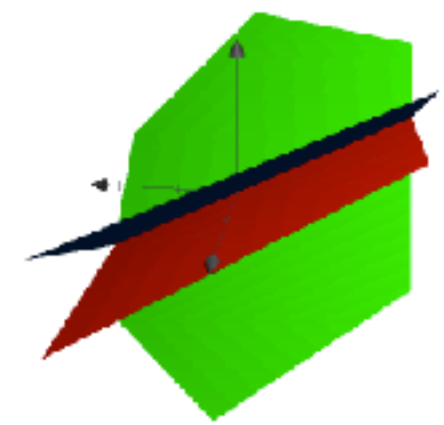
Trois plans dans l'espace



Il y a une solution unique.



Il n'y a pas de solution.



Il y a une infinité de solution.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z &= 1 \\ -x + 4y - z &= 2 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to -L_1}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z &= 1 \\ -x + 4y - z &= 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow -L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{L_2}{10}}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to \frac{L_2}{10}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to \frac{L_2}{10}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + 4L_2}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to \frac{L_2}{10}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + 4L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to \frac{L_2}{10}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + 4L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

On fait quoi avec ça?

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x - 2y + z & = 1 \\ -x + 4y - z & = 2 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to \frac{L_2}{10}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + 4L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

On fait quoi avec ça?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{10}z = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10}z = \frac{7}{10} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{10}z & = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10}z & = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + \frac{2}{10} z = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10} z = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions.

Il suffit de poser une des variables égale à un paramètre.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + \frac{2}{10}z & = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10}z & = \frac{7}{10} \end{array}\right.$$

Il y a donc une infinité de solutions.

Il suffit de poser une des variables égale à un paramètre.

Prenons par exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{ll} x + \frac{2}{10}z & = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10}z & = \frac{7}{10} \end{array}\right.$$

Il y a donc une infinité de solutions.

Il suffit de poser une des variables égale à un paramètre.

Prenons par exemple $z = k$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + \frac{2}{10}z & = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10}z & = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions.

Il suffit de poser une des variables égale à un paramètre.

Prenons par exemple $z = k$

d'où

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{10} z & = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10} z & = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions.

Il suffit de poser une des variables égale à un paramètre.

Prenons par exemple $z = k$

d'où
$$\begin{cases} x = \frac{8}{10} - \frac{2}{10} k \\ y = \frac{7}{10} + \frac{2}{10} k \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{10}z & = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10}z & = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions.

Il suffit de poser une des variables égale à un paramètre.

Prenons par exemple $z = k$

d'où $$\begin{cases} x = \frac{8}{10} - \frac{2}{10}k \\ y = \frac{7}{10} + \frac{2}{10}k \end{cases}$$

Ou, si on préfère, l'intersection de ces deux plans est la droite:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{10}z & = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10}z & = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions.

Il suffit de poser une des variables égale à un paramètre.

Prenons par exemple $z = k$

d'où $\begin{cases} x = \frac{8}{10} - \frac{2}{10}k \\ y = \frac{7}{10} + \frac{2}{10}k \end{cases}$

Ou, si on préfère, l'intersection de ces deux plans est la droite:

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{10}, \frac{7}{10}, 0\right) + k\left(-\frac{2}{10}, \frac{2}{10}, 1\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{10}z & = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10}z & = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions.

Il suffit de poser une des variables égale à un paramètre.

Prenons par exemple $z = k$

d'où
$$\begin{cases} x = \frac{8}{10} - \frac{2}{10}k \\ y = \frac{7}{10} + \frac{2}{10}k \end{cases}$$

Ou, si on préfère, l'intersection de ces deux plans est la droite:

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{10}, \frac{7}{10}, 0\right) + k\left(-\frac{2}{10}, \frac{2}{10}, 1\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + \frac{2}{10}z & = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10}z & = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions.

Il suffit de poser une des variables égale à un paramètre.

Prenons par exemple $z = k$

d'où $$\begin{cases} x = \frac{8}{10} - \frac{2}{10}k \\ y = \frac{7}{10} + \frac{2}{10}k \end{cases}$$

Ou, si on préfère, l'intersection de ces deux plans est la droite:

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{10}, \frac{7}{10}, 0\right) + k\left(-\frac{2}{10}, \frac{2}{10}, 1\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{10}z = \frac{8}{10} \\ y - \frac{2}{10}z = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions.

Il suffit de poser une des variables égale à un paramètre.

Prenons par exemple $z = k$

d'où $\begin{cases} x = \frac{8}{10} - \frac{2}{10}k \\ y = \frac{7}{10} + \frac{2}{10}k \end{cases}$

Ou, si on préfère, l'intersection de ces deux plans est la droite:

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{10}, \frac{7}{10}, 0\right) + k\left(-\frac{2}{10}, \frac{2}{10}, 1\right)$$

Faites les exercices suivants

p.174, # 9 à 11

Éventuellement, vous serez tenté de faire plus d'une opération ligne à la fois.

Éventuellement, vous serez tenté de faire plus d’une opération ligne à la fois.

Généralement, il n’y a pas de problème à faire ça, mais vous ne devez pas faire une opération ligne sur une ligne que vous venez de changer.

Exemple

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2}$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \rightarrow L_1 + L_2]{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1}$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, il y une infinité de solutions, mais...

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, il y une infinité de solutions, mais...

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, il y une infinité de solutions, mais...

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1}$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, il y une infinité de solutions, mais...

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1+L_2]{L_1 \to L_1+L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, il y une infinité de solutions, mais...

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{L_2}{5}}$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, il y une infinité de solutions, mais...

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{L_2}{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, il y une infinité de solutions, mais...

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{L_2}{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2}$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, il y une infinité de solutions, mais...

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{L_2}{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, il y une infinité de solutions, mais...

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{L_2}{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Il n'y en a qu'une!

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_1 + L_2]{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, il y une infinité de solutions, mais...

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{L_2}{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Il n'y en a qu'une! $\quad (x, y) = (-1, 1)$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\cancel{L_2 \to L_1 + L_2}]{\cancel{L_1 \to L_1 + L_2}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, il y une infinité de solutions, mais...

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{L_2}{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Il n'y en a qu'une! $\quad (x, y) = (-1, 1)$

Définition

Un système d'équations linéaires est dit **homogène** si toutes les constantes sont nulles.

Définition Un système d'équations linéaires est dit **homogène** si toutes les constantes sont nulles.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Définition Un système d'équations linéaires est dit **homogène** si toutes les constantes sont nulles.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Définition Un système d'équations linéaires est dit **homogène** si toutes les constantes sont nulles.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \boxed{0} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \boxed{0} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = \boxed{0} \end{cases}$$

Remarque:

Définition Un système d'équations linéaires est dit **homogène** si toutes les constantes sont nulles.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \boxed{0} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \boxed{0} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = \boxed{0} \end{cases}$$

Remarque: Les systèmes d'équations linéaires homogènes ont toujours au moins une solution.

Définition Un système d'équations linéaires est dit **homogène** si toutes les constantes sont nulles.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Remarque: Les systèmes d'équations linéaires homogènes ont toujours au moins une solution.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$$

On a vu comment associer une matrice à un système d'équations linéaires.

On a vu comment associer une matrice à un système d’équations linéaires.

On a aussi vu comment faire des opérations ligne sur la matrice qui ne change pas l’ensemble solution du système d’équation qui lui est associé.

On a vu comment associer une matrice à un système d'équations linéaires.

On a aussi vu comment faire des opérations ligne sur la matrice qui ne change pas l'ensemble solution du système d'équation qui lui est associé.

Maintenant essayons de classifier les formes des matrices qui sont associé à des systèmes d'équations linéaire résolut.

Définition

Définition

Une matrice est dite **échelonnée réduite ligne (ERL)** si

Définition Une matrice est dite **échelonnée réduite ligne (ERL)** si

Exemple

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Définition Une matrice est dite **échelonnée réduite ligne (ERL)** si

1. Le premier coefficient non nul d'une ligne est un 1 (on nomme ce coefficient le pivot).

Exemple

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Définition Une matrice est dite **échelonnée réduite ligne (ERL)** si

1. Le premier coefficient non nul d'une ligne est un 1 (on nomme ce coefficient le pivot).

2. Le pivot d'une ligne est toujours à droite des pivots des lignes au-dessus.

Exemple

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Définition

Une matrice est dite **échelonnée réduite ligne (ERL)** si

1. Le premier coefficient non nul d'une ligne est un 1 (on nomme ce coefficient le pivot).

2. Le pivot d'une ligne est toujours à droite des pivots des lignes au-dessus.

3. Tous les coefficients de la colonne du pivot sont nuls.

Exemple

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Définition

Deux matrices, **A** et **B** sont dites **ligne-équivalente (l-équivalente)** si **B** peut s'obtenir de **A** par une suite finie d'opérations lignes. On écrit alors;

Définition

Deux matrices, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont dites **ligne-équivalente (l-équivalente)** si $\mathbf{B}$ peut s'obtenir de $\mathbf{A}$ par une suite finie d'opérations lignes. On écrit alors;

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$$

Définition

Deux matrices, **A** et **B** sont dites **ligne-équivalente (l-équivalente)** si **B** peut s'obtenir de **A** par une suite finie d'opérations lignes. On écrit alors;

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$$

Proposition

Définition

Deux matrices, **A** et **B** sont dites **ligne-équivalente (l-équivalente)** si **B** peut s'obtenir de **A** par une suite finie d'opérations lignes. On écrit alors;

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$$

Proposition

Si $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_1$ et $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_2$

Définition

Deux matrices, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont dites **ligne-équivalente (l-équivalente)** si $\mathbf{B}$ peut s'obtenir de $\mathbf{A}$ par une suite finie d'opérations lignes. On écrit alors;

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$$

Proposition

Si $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_1$ et $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_2$ avec $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ des matrices ERL, alors

Définition

Deux matrices, **A** et **B** sont dites **ligne-équivalente (l-équivalente)** si **B** peut s'obtenir de **A** par une suite finie d'opérations lignes. On écrit alors;

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$$

Proposition

Si $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_1$ et $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_2$ avec $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ des matrices ERL, alors $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$

Définition

Deux matrices, **A** et **B** sont dites **ligne-équivalente** **(l-équivalente)** si **B** peut s'obtenir de **A** par une suite finie d'opérations lignes. On écrit alors;

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$$

Proposition

Si $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_1$ et $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_2$ avec $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ des matrices ERL, alors $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$

En d'autre terme, toutes matrices est l-équivalente à une unique matrice ERL.

Faites les exercices suivants

p.174 # 3, 4 et 5

Définition

Soit $\mathbf{A}$, une matrice et $\mathbf{E}$, sa matrice ERL l-équivalente. Le **rang** de $\mathbf{A}$, noté $r(\mathbf{A})$ est le nombre de lignes non nulles de $\mathbf{E}$.

Définition

Soit **A**, une matrice et **E**, sa matrice ERL l-équivalente. Le **rang** de **A**, noté $r(\mathbf{A})$ est le nombre de lignes non nulles de **E**.

Exemple

Définition Soit $\mathbf{A}$, une matrice et $\mathbf{E}$, sa matrice ERL l-équivalente. Le **rang** de $\mathbf{A}$, noté $r(\mathbf{A})$ est le nombre de lignes non nulles de $\mathbf{E}$.

Exemple

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right)$$

Définition

Soit $\mathbf{A}$, une matrice et $\mathbf{E}$, sa matrice ERL l-équivalente. Le **rang** de $\mathbf{A}$, noté $r(\mathbf{A})$ est le nombre de lignes non nulles de $\mathbf{E}$.

Exemple

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Définition Soit $\mathbf{A}$, une matrice et $\mathbf{E}$, sa matrice ERL l-équivalente. Le **rang** de $\mathbf{A}$, noté $r(\mathbf{A})$ est le nombre de lignes non nulles de $\mathbf{E}$.

Exemple

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Définition Soit $\mathbf{A}$, une matrice et $\mathbf{E}$, sa matrice ERL l-équivalente. Le **rang** de $\mathbf{A}$, noté $r(\mathbf{A})$ est le nombre de lignes non nulles de $\mathbf{E}$.

Exemple

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition Soit $\mathbf{A}$, une matrice et $\mathbf{E}$, sa matrice ERL l-équivalente. Le **rang** de $\mathbf{A}$, noté $r(\mathbf{A})$ est le nombre de lignes non nulles de $\mathbf{E}$.

Exemple

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

Définition Soit $\mathbf{A}$, une matrice et $\mathbf{E}$, sa matrice ERL l-équivalente. Le **rang** de $\mathbf{A}$, noté $r(\mathbf{A})$ est le nombre de lignes non nulles de $\mathbf{E}$.

Exemple

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition Soit **A**, une matrice et **E**, sa matrice ERL l-équivalente. Le **rang** de **A**, noté $r(\mathbf{A})$ est le nombre de lignes non nulles de **E**.

Exemple

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(\mathbf{A}) = 1$$

Faites les exercices suivants

p.174, # 7

Faites les exercices suivants

p.180 # 1 à 7

Aujourd’hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Les système d'équations linéaires homogène.

Devoir:

p.173, # 1 à 12

p. 180, # 1 à 7