6.1 LE LANGAGE MATRICIEL

Cours 16

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ La définition d’une matrice.
- ✓ Les définitions de matrices particulières.
- ✓ La somme de matrices.
- ✓ La multiplication d’une matrice par un scalaire.
- ✓ La multiplication de matrices.

Définition

Une matrice $\mathbf{A}$ de format $m \times n$ est un tableau rectangulaire ordonné de mn éléments disposés sur m lignes et n colonnes.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

Parfois, on spécifie la taille de la matrice ici.

Définition Une matrice ligne est une matrice de format $1 \times n$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition Une matrice colonne est une matrice de format $m \times 1$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Définition Une matrice nulle est une matrice dont toutes les entrées sont nulles.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition Une matrice carrée est une matrice de format $n \times n$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi & \sqrt{2} & -1 \\ e & e^2 & e^3 & e^4 \\ 37 & 41 & 17 & 5 \\ \sqrt[3]{\pi} & 1 & 2\pi & 3 \end{pmatrix}$$

Faites les exercices suivants

p.204 # 2 et 3

Définition La diagonale principale d'une matrice carrée est l'ensemble des éléments de la forme a_{ii}.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{diag}(A) = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}\}$$

Définition Une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est une matrice carrée dont tous les éléments sous (ou au-dessus de) la diagonale principale sont nuls.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition Une matrice identité est une matrice carrée dont les éléments de la diagonale principale sont tous 1 et les autres sont tous nuls.

$$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{n\times n} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition

Une matrice symétrique est une matrice carrée qui est symétrique par rapport à la diagonale principale, c'est-à-dire que $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition Une matrice anti symétrique est une matrice carrée qui est anti symétrique par rapport à la diagonale principale, c'est-à-dire que $a_{ij} = -a_{ji}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Définition

Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ et $\mathbf{B} = (b_{ij})$, deux matrices de même format, qu'on note:

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

La somme des deux matrices est l'opération interne définie comme suit:

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \longmapsto \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2-5 & 3+1 \\ 2-3 & 1+0 & 4+11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

Propriétés de la somme de matrices

Soit $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$$

Définition

Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})$, une matrice et k, un nombre réel. La multiplication par un scalaire est l'opération externe définie comme suit:

$$\mathbb{R} \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$(k, \mathbf{A}) \longmapsto k\mathbf{A}$$

$$k\mathbf{A} = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$$

Exemple

$$
\color{red}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{3}\cdot 2 & \color{red}{3}\cdot 3 & \color{red}{3}\cdot 1 \\ \color{red}{3}\cdot 0 & \color{red}{3}\cdot 5 & \color{red}{3}\cdot -2 \\ \color{red}{3}\cdot -1 & \color{red}{3}\cdot 3 & \color{red}{3}\cdot 6 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 0 & 15 & -6 \\ -3 & 9 & 18 \end{pmatrix}
$$

Propriétés de la multiplication par un scalaire

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$$

$$(k + r)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + r\mathbf{A}$$

$$(kr)\mathbf{A} = k(r\mathbf{A})$$

Définition Un espace vectoriel sur les réels est la donnée

1. d'un ensemble $\mathcal{V}$ dont les éléments sont nommés des vecteurs;
2. d'une opération interne sur $\mathcal{V}$ appelée la somme qui respecte les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \vec{v}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{v} \\ (\vec{v}+\vec{u})+\vec{w}=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{w}) \\ \vec{v}+\vec{0}=\vec{v} \\ \vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0} \end{cases}$$

3. d'une opération externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{V}$ appelée multiplication par un scalaire qui respecte les propriétés suivantes;

$$\begin{cases} a(b\vec{v})=(ab)\vec{v} \\ (a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v} \\ a(\vec{v}+\vec{u})=a\vec{v}+a\vec{u} \\ 1\vec{v}=\vec{v} \end{cases}$$

Définition

La transposée d'une matrice $\mathbf{A}_{m\times n} = (a_{ij})$, notée $\mathbf{A}^T$, est la matrice $\mathbf{B}_{n\times m} = (a_{ji})$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriétés de la transposition

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(k\mathbf{A})^T = k\left(\mathbf{A}^T\right)$$

On peut reformuler la définition d'une matrice symétrique et anti symétrique à l'aide des transposées.

$$\mathbf{A} \text{ est symétrique} \iff \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \text{ est anti symétrique} \iff \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$$

Définition

Soit $\mathbf{A}_{m\times n} = (a_{ij})$ et $\mathbf{B}_{n\times r} = (b_{ij})$, deux matrices. On définit le produit de ces deux matrices comme étant la matrice:

$$\mathbf{C}_{m\times r} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)$$

Remarque:

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times r} = \mathbf{C}_{m\times r}$$

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times r} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kr} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kr} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(2)+(3)(5)+(-1)(-3) & (1)(4)+(3)(-1)+(-1)(1) \\ (2)(2)+(0)(5)+(-3)(-3) & (2)(4)+(0)(-1)+(-3)(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 13 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = (13)$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & 12 & 4 \\ -6 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

L'exemple ici est assez clair!

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Faites les exercices suivants

p.205, # 5 et 8

Propriétés de la multiplication de matrices

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

$$k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

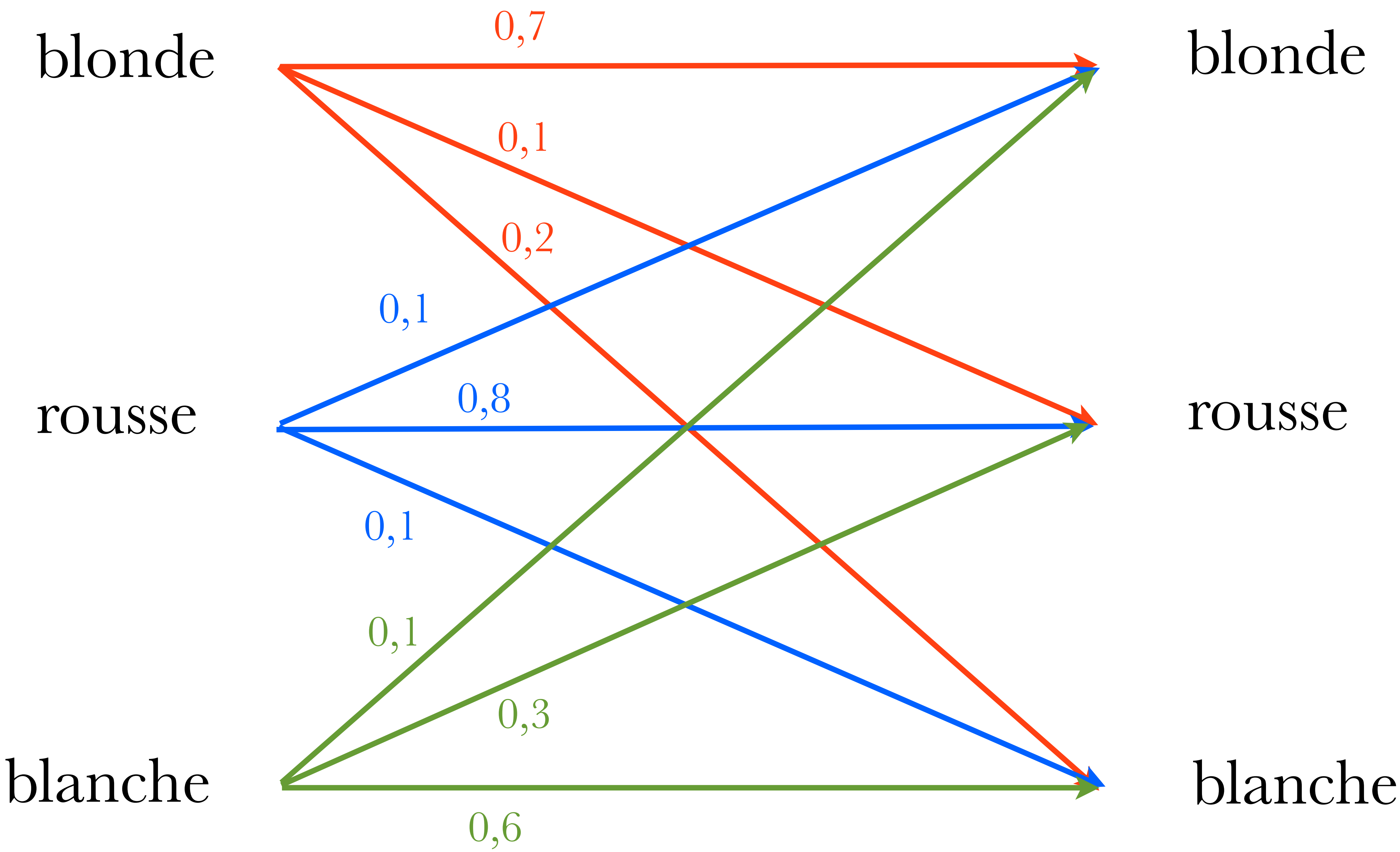
$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

Exemple

Après une pub de bière



$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \text{blonde} & \text{rousse} & \text{blanche} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{blonde} \\ \text{rousse} \\ \text{blanche} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \color{red}{0,7} & \color{red}{0,1} & \color{red}{0,2} \\ \color{blue}{0,1} & \color{blue}{0,8} & \color{blue}{0,1} \\ \color{green}{0,1} & \color{green}{0,3} & \color{green}{0,6} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 100 & 100 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{red}{0,7} & \color{red}{0,1} & \color{red}{0,2} \\ \color{blue}{0,1} & \color{blue}{0,8} & \color{blue}{0,1} \\ \color{green}{0,1} & \color{green}{0,3} & \color{green}{0,6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 120 & 90 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 90 & 120 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{red}{0,7} & \color{red}{0,1} & \color{red}{0,2} \\ \color{blue}{0,1} & \color{blue}{0,8} & \color{blue}{0,1} \\ \color{green}{0,1} & \color{green}{0,3} & \color{green}{0,6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 132 & 84 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 84 & 132 & 84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{red}{0,7} & \color{red}{0,1} & \color{red}{0,2} \\ \color{blue}{0,1} & \color{blue}{0,8} & \color{blue}{0,1} \\ \color{green}{0,1} & \color{green}{0,3} & \color{green}{0,6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80,4 & 139,2 & 80,4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_0\mathbf{A} = \mathbf{X}_1$$

$$\mathbf{X}_1\mathbf{A} = \mathbf{X}_2$$

$$\mathbf{X}_2\mathbf{A} = \mathbf{X}_3$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{X}_n\mathbf{A} = \mathbf{X}_{n+1} \stackrel{?}{=} \mathbf{X}_n$$

$\mathbf{X}_n\mathbf{A} = \mathbf{X}_n$ Ici, $\mathbf{X}_n$ est un état stable.

$$\mathbf{X}_n\mathbf{A} = \mathbf{X}_n\mathbf{I}$$

$$\mathbf{X}_n\mathbf{A} - \mathbf{X}_n\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}_n(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

On a donc un système d'équations linéaires homogènes à résoudre.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

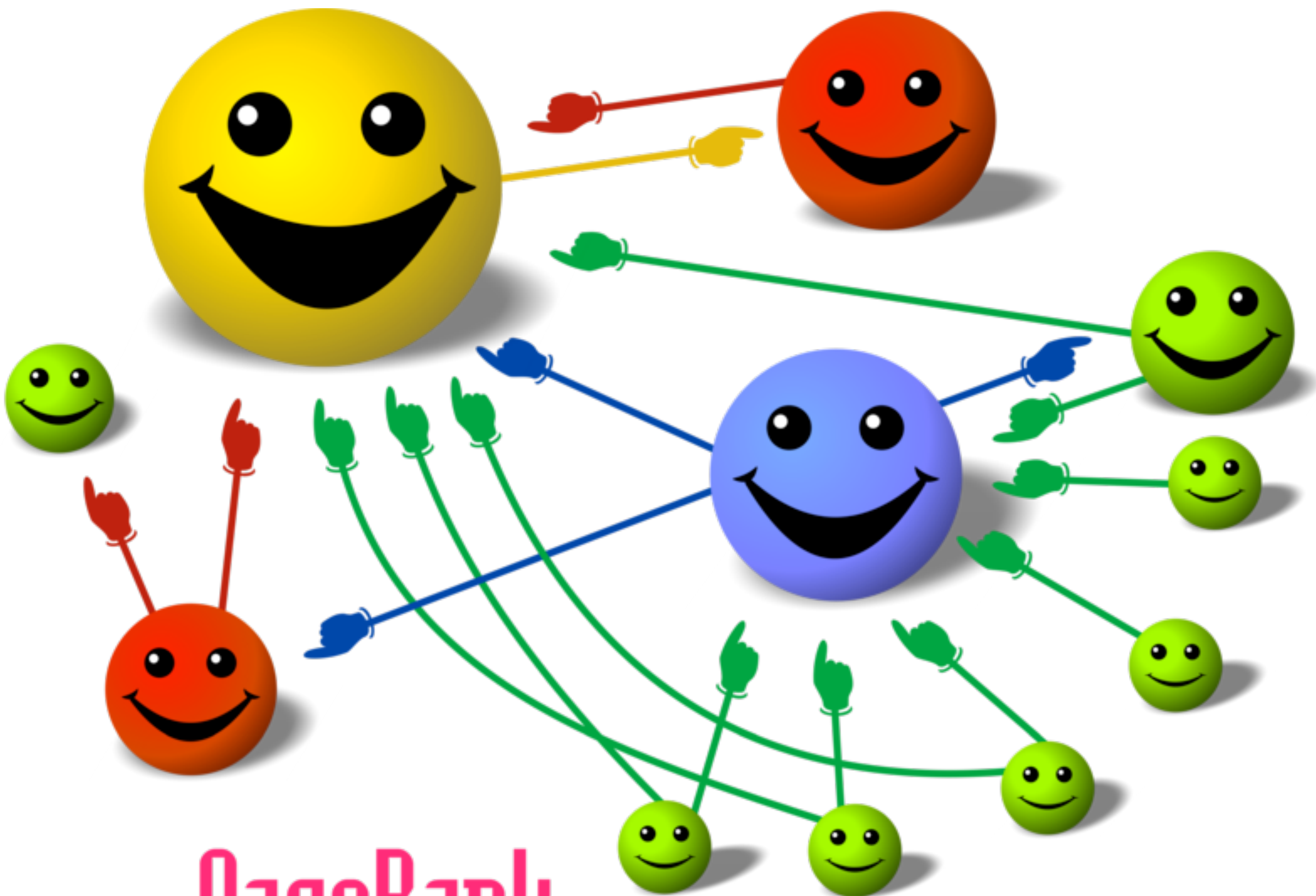
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7-1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8-1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & -0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & -0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -0,3x & + & 0,1y & + & 0,1z & = & 0 \\ 0,1x & - & 0,2y & + & 0,3z & = & 0 \\ 0,2x & + & 0,1y & - & 0,4z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 2t \\ z & = & t \end{array} \right.$$

L'équilibre de la bière: $\begin{pmatrix} 75 & 150 & 75 \end{pmatrix}$

Google



PageRank

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ La définition d'une matrice.
- ✓ Les définitions de matrices particulières.
- ✓ La somme de matrices.
- ✓ La multiplication d'une matrice par un scalaire.
- ✓ La multiplication de matrices.

Devoir: p.204, # 1 à 19