6.3 DÉTERMINANT

Cours 19

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ L'inverse d'une matrice.
- ✓ Quelques théorèmes qui encadrent son existence.
- ✓ Les matrices élémentaires.
- ✓ L'algorithme de Gauss pour trouver l'inverse.

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Le déterminant d’une matrice carrée.
- ✓ Les propriétés du déterminant.
- ✓ La matrice adjointe.
- ✓ Le calcul de l’inverse à l’aide de la matrice adjointe.

Définition

Soit $\mathbf{A}$, une matrice carrée, le **mineur** de la i-ième ligne et de la j-ième colonne, noté $\mathbf{A}_{ij}$ est la sous-matrice de $\mathbf{A}$ obtenue en y enlevant la i-ième ligne et la j-ième colonne.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & & \cancel{a_{2n}} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cancel{a_{n2}} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

Soit **A**, une matrice carrée *n* x *n*, le **déterminant** de **A**, noté $\det(\mathbf{A})$, est défini de manière récursive comme suit:

Si $n = 1$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

Si $n > 1$

On fixe une ligne ...

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

ou une colonne.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) \; - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) \; + a_{13}\det(\mathbf{A}_{13})$$

$$- \ldots \; + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(\mathbf{A}_{1n})$$

$$= -a_{21}\det(\mathbf{A}_{21}) + a_{22}\det(\mathbf{A}_{22}) - a_{32}\det(\mathbf{A}_{32})$$

$$+ \ldots \quad + (-1)^{n+2} a_{n2}\det(\mathbf{A}_{n2})$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} -3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Propriétés des déterminants

1) $\det(\mathbf{I}_{n\times n}) = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \cdots + 0$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \cdots + 0 \quad = \cdots =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 \quad = 1$$

Propriétés des déterminants

2) Si $\mathbf{A}$ a une ligne ou une colonne de zéros, alors

$$\det \mathbf{A} = 0$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} (0) \det(\mathbf{A}_{ik}) = 0$$

en développant selon cette ligne de zéros.

Propriétés des déterminants

3) Si $\mathbf{B}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en multipliant une ligne (ou colonne) par une constante, alors

$$\det \mathbf{B} = k \det \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{B} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{2+r} k a_{2r} \det(\mathbf{A}_{2r})$$

$$= k \sum_{r=1}^{n} (-1)^{2+r} a_{2r} \det(\mathbf{A}_{2r}) = k \det \mathbf{A}$$

Propriétés des déterminants

4) Si $\mathbf{A}$ a deux lignes ou deux colonnes identique, alors $\det \mathbf{A} = 0$

Si $\mathbf{A}$ est une matrice 2 x 2 alors $\det \mathbf{A} = 0$

car $$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Si $\mathbf{A}$ est de format n x n avec $n > 2$, on peut développer le déterminant en ne développant jamais avec les deux lignes (deux colonnes) identiques.

Le résultat sera une (potentiellement très grosse) somme de déterminants *2* x *2* avec deux lignes (ou deux colonnes) identiques.

Donc, une grosse somme de zéros!

Propriétés des déterminants

5) Si $\mathbf{B}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en ajoutant un multiple d'une ligne (ou colonne) à une autre, alors

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} & \dots & a_{3n} + ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{B} &= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{3+r} (a_{3r} + k a_{1r}) \det(\mathbf{A}_{3r}) \\
&= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{3+r} a_{3r} \det(\mathbf{A}_{3r}) + \sum_{r=1}^{n} (-1)^{3+r} k a_{1r} \det(\mathbf{A}_{3r}) \\
&= \det \mathbf{A} + k \sum_{r=1}^{n} (-1)^{3+r} a_{1r} \det(\mathbf{A}_{3r}) \\
&= \det \mathbf{A} + 0
\end{aligned}$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} & \cdots & a_{3n} + ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det \mathbf{A} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} + k(0) = \det \mathbf{A}$$

Propriétés des déterminants

6) Si $\mathbf{B}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{B}$$

Si $\mathbf{A}$ est une matrice 2 x 2, alors $\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{B}$

car $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$

Si $\mathbf{A}$ est de format n x n avec $n > 2$, on peut développer le déterminant en ne développant jamais avec les deux lignes (ou deux colonnes) interchangées.

Le résultat sera une (potentiellement très grosse) somme de déterminants *2* x *2* .

Si on interchange leurs deux lignes et qu'on met les -1 en évidence, on obtient $-\det \mathbf{B}$.

Proposition Soit **A** ,une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de **A** est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \cdots + 0$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \cdots + 0 \qquad = \cdots =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} \qquad = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Faites les exercices suivants

p. 225, # 1.

Proposition

$$\det(k\mathbf{A}_{n\times n}) = k^n \det(\mathbf{A}_{n\times n})$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposition $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Une preuve directe de ceci n'est pas particulièrement amusante!

Mais,

si on passe par les matrices élémentaires... c'est plus beaucoup plus sympathique!

Lemme: Si $\mathbf{E}$ est une matrice élémentaire, alors

$$\det(\mathbf{EA}) = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

Il y a trois types de matrices élémentaires, donc trois cas à vérifier.

(Type $\xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}$) $\quad \det \mathbf{E} \;= -\det \mathbf{I} \;= -1$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} \quad = (-1)\det \mathbf{A} \quad = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

(Type $\xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}$) $\quad \det \mathbf{E} \;= k$

Car $\mathbf{E}$ est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) \quad = k\det \mathbf{A} \quad = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

(Type $\xrightarrow{L_i \rightarrow L_i + kL_j}$) $\quad \det \mathbf{E} \;= 1$

Car $\mathbf{E}$ est triangulaire, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) \quad = \det \mathbf{A} \quad = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

Théorème $\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$

Preuve: On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_n\mathbf{R}$ avec $\mathbf{A} \sim \mathbf{R}$

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_n\mathbf{R}) = \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_n\mathbf{R})$$

$$= \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\ldots\det(\mathbf{E}_n)\det(\mathbf{R})$$

$\neq 0$

Si $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$, alors $\det \mathbf{R} = 0$,

car la dernière ligne de $\mathbf{R}$ est une ligne de zéros,

et donc, $\det \mathbf{A} = 0$.

En fait, on peut reformuler le dernier théorème comme suit:

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \text{ est inversible}$$

Et cet énoncé peut peut faire gagner bien du temps!

Car calculer un déterminant, c'est pas mal plus court
que de trouver un inverse!

Preuve: $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Si $\det \mathbf{A} \neq 0$, alors $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_n\mathbf{I}$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_n\mathbf{IB}) \\
&= \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\ldots\det(\mathbf{E}_n)\det(\mathbf{IB}) \\
&= \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\ldots\det(\mathbf{E}_n)\det(\mathbf{B}) \\
&= \det(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_n)\det(\mathbf{B}) \\
&= \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})
\end{aligned}$$

$$\det \mathbf{A} = 0$$

Si $\det \mathbf{A} = 0$, reste à voir que $\det(\mathbf{AB}) = 0$,

auquel cas, on n'aura que $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

mais $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_n\mathbf{RB}$

et $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_n) \det(\mathbf{RB})$

mais $\det(\mathbf{RB}) = 0$

car la dernière ligne de $\mathbf{R}$ est une ligne de zéros,

et donc, la dernière ligne de $\mathbf{RB}$ aussi.

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Preuve:

$$\det \mathbf{I} \; = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) \; = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) \; = 1$$

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^{T}) = \det \mathbf{A}$$

Transposer ne fait qu'interchanger le rôle des lignes et des colonnes.

Définition Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée, le cofacteur de l'élément a_{ij}, noté $\mathbf{C}_{ij}$ est:

$$\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$$

Remarque Cette définition permet la réécriture du déterminant comme suit:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{1}^{n} a_{1k} \mathbf{C}_{1k}$$

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{rk}\mathbf{C}_{sk} = 0.$

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend $r = 2, s = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k}\mathbf{C}_{1k} = \det \mathbf{B} = 0$$

Définition La matrice des cofacteurs de $\mathbf{A}$, notée $\operatorname{cof}(\mathbf{A})$, est:

$$\operatorname{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1n} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \mathbf{C}_{n2} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition La matrice adjointe de $\mathbf{A}$, notée $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$, est:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = (\operatorname{cof}(\mathbf{A}))^\top$$

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = (\mathrm{cof}(\mathbf{A}))^T = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse d'une matrice est donné par:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathrm{adj}\mathbf{A}$$

Vérification:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1n} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \mathbf{C}_{n2} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \dots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \dots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum a_{1k}\mathbf{C}_{1k} & \sum a_{1k}\mathbf{C}_{2k} & \dots & \sum a_{1k}\mathbf{C}_{nk} \\ \sum a_{2k}\mathbf{C}_{1k} & \sum a_{2k}\mathbf{C}_{2k} & \dots & \sum a_{2k}\mathbf{C}_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{nk}\mathbf{C}_{1k} & \sum a_{nk}\mathbf{C}_{2k} & \dots & \sum a_{nk}\mathbf{C}_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum a_{1k}\mathbf{C}_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum a_{2k}\mathbf{C}_{2k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum a_{nk}\mathbf{C}_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum a_{1k}\mathbf{C}_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum a_{2k}\mathbf{C}_{2k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum a_{nk}\mathbf{C}_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -1(1-8) + 0 - 3(4-1) = -2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calculer $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2} L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Faites les exercices suivants

p.226 # 5, 6 et 7

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Le déterminant d'une matrice carrée.
- ✓ Les propriétés du déterminant.
- ✓ La matrice adjointe.
- ✓ Le calcul de l'inverse à l'aide de la matrice adjointe.

Devoir: p. 225, # 1 à 8.