

6.3 DÉTERMINANT

Cours 19

Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ L'inverse d'une matrice.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ L'inverse d'une matrice.
- ✓ Quelques théorèmes qui encadrent son existence.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ L'inverse d'une matrice.
- ✓ Quelques théorèmes qui encadrent son existence.
- ✓ Les matrices élémentaires.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ L'inverse d'une matrice.
- ✓ Quelques théorèmes qui encadrent son existence.
- ✓ Les matrices élémentaires.
- ✓ L'algorithme de Gauss pour trouver l'inverse.

Aujourd'hui, nous allons voir

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Le déterminant d'une matrice carrée.

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Le déterminant d'une matrice carrée.
- ✓ Les propriétés du déterminant.

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Le déterminant d'une matrice carrée.
- ✓ Les propriétés du déterminant.
- ✓ La matrice adjointe.

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Le déterminant d'une matrice carrée.
- ✓ Les propriétés du déterminant.
- ✓ La matrice adjointe.
- ✓ Le calcul de l'inverse à l'aide de la matrice adjointe.

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée, le **mineur** de la i -ième ligne et de la j -ième colonne, noté \mathbf{A}_{ij} est la sous-matrice de \mathbf{A} obtenue en y enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne.

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée, le **mineur** de la i -ième ligne et de la j -ième colonne, noté \mathbf{A}_{ij} est la sous-matrice de \mathbf{A} obtenue en y enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée, le **mineur** de la i -ième ligne et de la j -ième colonne, noté \mathbf{A}_{ij} est la sous-matrice de \mathbf{A} obtenue en y enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & \color{red}{a_{23}} & \dots & \color{red}{a_{2n}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée, le **mineur** de la i -ième ligne et de la j -ième colonne, noté \mathbf{A}_{ij} est la sous-matrice de \mathbf{A} obtenue en y enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée, le **mineur** de la i -ième ligne et de la j -ième colonne, noté \mathbf{A}_{ij} est la sous-matrice de \mathbf{A} obtenue en y enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} , noté $\det(\mathbf{A})$, est défini de manière récursive comme suit:

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} , noté $\det(\mathbf{A})$, est défini de manière récursive comme suit:

Si $n = 1$

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} , noté $\det(\mathbf{A})$, est défini de manière récursive comme suit:

$$\text{Si } n = 1 \qquad \det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} , noté $\det(\mathbf{A})$, est défini de manière récursive comme suit:

$$\text{Si } n = 1 \qquad \det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

$$\text{Si } n > 1$$

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} , noté $\det(\mathbf{A})$, est défini de manière récursive comme suit:

$$\text{Si } n = 1 \qquad \det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

$$\text{Si } n > 1 \qquad \det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} , noté $\det(\mathbf{A})$, est défini de manière récursive comme suit:

$$\text{Si } n = 1 \qquad \det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

On fixe une ligne ...

$$\text{Si } n > 1 \qquad \det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} , noté $\det(\mathbf{A})$, est défini de manière récursive comme suit:

$$\text{Si } n = 1 \quad \det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

Si $n > 1$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

On fixe une ligne ...

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} , noté $\det(\mathbf{A})$, est défini de manière récursive comme suit:

$$\text{Si } n = 1 \quad \det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

Si $n > 1$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

On fixe une ligne ...

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} , noté $\det(\mathbf{A})$, est défini de manière récursive comme suit:

$$\text{Si } n = 1 \quad \det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

Si $n > 1$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

On fixe une ligne ...

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

ou une colonne.

Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice carrée $n \times n$, le **déterminant** de \mathbf{A} , noté $\det(\mathbf{A})$, est défini de manière récursive comme suit:

$$\text{Si } n = 1 \quad \det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

$$\text{Si } n > 1 \quad \det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

On fixe une ligne ...

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

ou une colonne.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \det(\mathbf{A}_{11})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \det(\mathbf{A}_{11})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \det(\mathbf{A}_{11})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \det(\mathbf{A}_{11})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13}\det(\mathbf{A}_{13})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13}\det(\mathbf{A}_{13})$$

$$- \dots$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13}\det(\mathbf{A}_{13}) \\ - \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(\mathbf{A}_{1n})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13}\det(\mathbf{A}_{13}) \\ - \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(\mathbf{A}_{1n})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13}\det(\mathbf{A}_{13})$$

$$- \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(\mathbf{A}_{1n})$$

$$= -a_{21}\det(\mathbf{A}_{21})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11} \det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12} \det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13} \det(\mathbf{A}_{13}) \\ &\quad - \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(\mathbf{A}_{1n}) \\ &= -a_{21} \det(\mathbf{A}_{21}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13}\det(\mathbf{A}_{13})$$

$$- \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(\mathbf{A}_{1n})$$

$$= -a_{21}\det(\mathbf{A}_{21}) + a_{22}\det(\mathbf{A}_{22})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13}\det(\mathbf{A}_{13})$$

$$- \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(\mathbf{A}_{1n})$$

$$= -a_{21}\det(\mathbf{A}_{21}) + a_{22}\det(\mathbf{A}_{22}) - a_{32}\det(\mathbf{A}_{32})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11} \det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12} \det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13} \det(\mathbf{A}_{13}) \\ &\quad - \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(\mathbf{A}_{1n}) \\ &= -a_{21} \det(\mathbf{A}_{21}) + a_{22} \det(\mathbf{A}_{22}) - a_{32} \det(\mathbf{A}_{32}) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11} \det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12} \det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13} \det(\mathbf{A}_{13}) \\ &\quad - \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(\mathbf{A}_{1n}) \\ &= -a_{21} \det(\mathbf{A}_{21}) + a_{22} \det(\mathbf{A}_{22}) - a_{32} \det(\mathbf{A}_{32}) \\ &\quad + \dots + (-1)^{n+2} a_{n2} \det(\mathbf{A}_{n2}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13}\det(\mathbf{A}_{13}) \\ &\quad - \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(\mathbf{A}_{1n}) \\ &= -a_{21}\det(\mathbf{A}_{21}) + a_{22}\det(\mathbf{A}_{22}) - a_{32}\det(\mathbf{A}_{32}) \\ &\quad + \dots + (-1)^{n+2} a_{n2}\det(\mathbf{A}_{n2}) \end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Example

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Example

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|ccc|}
 1 & 2 & -3 & 2 \\
 2 & -1 & 3 & 4 \\
 -2 & 1 & 1 & 3 \\
 5 & 2 & -1 & 2
 \end{array} \\
 \\
 = \begin{array}{c|ccc|c|ccc|c|ccc|c|ccc|}
 -1 & 3 & 4 & & 2 & 3 & 4 & & 2 & -1 & 4 & & 2 & -1 & 3 \\
 1 & 1 & 3 & -2 & -2 & 1 & 3 & -3 & -2 & 1 & 3 & -2 & -2 & 1 & 1 \\
 2 & -1 & 2 & & 5 & -1 & 2 & & 5 & 2 & 2 & & 5 & 2 & -1
 \end{array}
 \end{array}$$

Example

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & -3 & 2 & & \\
 2 & -1 & 3 & 4 & & \\
 -2 & 1 & 1 & 3 & & \\
 5 & 2 & -1 & 2 & &
 \end{array} \right| \\
 \\
 = \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc}
 -1 & 3 & 4 & -2 & 2 & 3 & 4 & -3 & 2 & -1 & 4 & -2 & 2 & -1 & 3 \\
 1 & 1 & 3 & -2 & -2 & 1 & 3 & -3 & -2 & 1 & 3 & -2 & -2 & 1 & 1 \\
 2 & -1 & 2 & -2 & 5 & -1 & 2 & -3 & 5 & 2 & 2 & -2 & 5 & 2 & -1
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Example

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Example

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Example

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right|$$

Example

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right|$$

Example

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Propriétés des déterminants

$$1) \quad \det(\mathbf{I}_{n \times n}) = 1$$

Propriétés des déterminants

$$1) \det(\mathbf{I}_{n \times n}) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Propriétés des déterminants

$$1) \det(\mathbf{I}_{n \times n}) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \dots + 0$$

Propriétés des déterminants

$$1) \det(\mathbf{I}_{n \times n}) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \dots + 0$$

Propriétés des déterminants

$$1) \det(\mathbf{I}_{n \times n}) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \dots + 0 = \dots =$$

Propriétés des déterminants

$$1) \det(\mathbf{I}_{n \times n}) = 1$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \dots + 0 \\
 & = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \dots + 0 = \dots = \\
 & = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0
 \end{aligned}$$

Propriétés des déterminants

$$1) \det(\mathbf{I}_{n \times n}) = 1$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \dots + 0 \\
 & = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \dots + 0 = \dots = \\
 & = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 1
 \end{aligned}$$

Propriétés des déterminants

2) Si \mathbf{A} a une ligne ou une colonne de zéros, alors

Propriétés des déterminants

- 2) Si \mathbf{A} a une ligne ou une colonne de zéros, alors
- $$\det \mathbf{A} = 0$$

Propriétés des déterminants

2) Si \mathbf{A} a une ligne ou une colonne de zéros, alors

$$\det \mathbf{A} = 0$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

Propriétés des déterminants

2) Si \mathbf{A} a une ligne ou une colonne de zéros, alors

$$\det \mathbf{A} = 0$$

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} (0) \det(\mathbf{A}_{ik}) = 0\end{aligned}$$

Propriétés des déterminants

2) Si \mathbf{A} a une ligne ou une colonne de zéros, alors

$$\det \mathbf{A} = 0$$

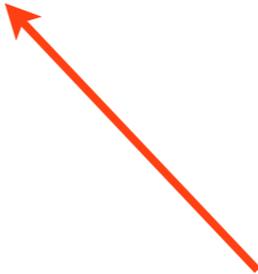
$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} (0) \det(\mathbf{A}_{ik}) = 0 \end{aligned}$$

en développant selon cette ligne de zéros.

Propriétés des déterminants

2) Si \mathbf{A} a une ligne ou une colonne de zéros, alors

$$\det \mathbf{A} = 0$$

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} (0) \det(\mathbf{A}_{ik}) = 0\end{aligned}$$


en développant selon cette ligne de zéros.

Propriétés des déterminants

3)

Propriétés des déterminants

- 3) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en multipliant une ligne (ou colonne) par une constante, alors

Propriétés des déterminants

- 3) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en multipliant une ligne (ou colonne) par une constante, alors

$$\det \mathbf{B} = k \det \mathbf{A}$$

Propriétés des déterminants

- 3) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en multipliant une ligne (ou colonne) par une constante, alors

$$\det \mathbf{B} = k \det \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Propriétés des déterminants

- 3) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en multipliant une ligne (ou colonne) par une constante, alors

$$\det \mathbf{B} = k \det \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Propriétés des déterminants

- 3) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en multipliant une ligne (ou colonne) par une constante, alors

$$\det \mathbf{B} = k \det \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{B} = \sum_{r=1}^n (-1)^{2+r} ka_{2r} \det(\mathbf{A}_{2r})$$

Propriétés des déterminants

- 3) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en multipliant une ligne (ou colonne) par une constante, alors

$$\det \mathbf{B} = k \det \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= \sum_{r=1}^n (-1)^{2+r} ka_{2r} \det(\mathbf{A}_{2r}) \\ &= k \sum_{r=1}^n (-1)^{2+r} a_{2r} \det(\mathbf{A}_{2r}) \end{aligned}$$

Propriétés des déterminants

- 3) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en multipliant une ligne (ou colonne) par une constante, alors

$$\det \mathbf{B} = k \det \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{B} = \sum_{r=1}^n (-1)^{2+r} ka_{2r} \det(\mathbf{A}_{2r})$$

$$= k \sum_{r=1}^n (-1)^{2+r} a_{2r} \det(\mathbf{A}_{2r}) = k \det \mathbf{A}$$

Propriétés des déterminants

- 4) Si \mathbf{A} a deux lignes ou deux colonnes identiques, alors

Propriétés des déterminants

- 4) Si \mathbf{A} a deux lignes ou deux colonnes identiques, alors $\det \mathbf{A} = 0$

Propriétés des déterminants

4) Si \mathbf{A} a deux lignes ou deux colonnes identiques, alors $\det \mathbf{A} = 0$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 alors $\det \mathbf{A} = 0$

Propriétés des déterminants

4) Si \mathbf{A} a deux lignes ou deux colonnes identiques, alors $\det \mathbf{A} = 0$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 alors $\det \mathbf{A} = 0$

car

Propriétés des déterminants

4) Si \mathbf{A} a deux lignes ou deux colonnes identiques, alors $\det \mathbf{A} = 0$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 alors $\det \mathbf{A} = 0$

car
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$

Propriétés des déterminants

4) Si \mathbf{A} a deux lignes ou deux colonnes identiques, alors $\det \mathbf{A} = 0$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 alors $\det \mathbf{A} = 0$

car
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab$$

Propriétés des déterminants

4) Si \mathbf{A} a deux lignes ou deux colonnes identique, alors $\det \mathbf{A} = 0$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 alors $\det \mathbf{A} = 0$

car
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Propriétés des déterminants

4) Si \mathbf{A} a deux lignes ou deux colonnes identiques, alors $\det \mathbf{A} = 0$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 alors $\det \mathbf{A} = 0$

$$\text{car } \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Si \mathbf{A} est de format $n \times n$ avec $n > 2$, on peut développer le déterminant en ne développant jamais avec les deux lignes (deux colonnes) identiques.

Propriétés des déterminants

4) Si \mathbf{A} a deux lignes ou deux colonnes identiques, alors $\det \mathbf{A} = 0$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 alors $\det \mathbf{A} = 0$

$$\text{car } \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Si \mathbf{A} est de format $n \times n$ avec $n > 2$, on peut développer le déterminant en ne développant jamais avec les deux lignes (deux colonnes) identiques.

Le résultat sera une (potentiellement très grosse) somme de déterminants 2×2 avec deux lignes (ou deux colonnes) identiques.

Propriétés des déterminants

4) Si \mathbf{A} a deux lignes ou deux colonnes identiques, alors $\det \mathbf{A} = 0$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 alors $\det \mathbf{A} = 0$

$$\text{car } \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Si \mathbf{A} est de format $n \times n$ avec $n > 2$, on peut développer le déterminant en ne développant jamais avec les deux lignes (deux colonnes) identiques.

Le résultat sera une (potentiellement très grosse) somme de déterminants 2×2 avec deux lignes (ou deux colonnes) identiques.

Donc, une grosse somme de zéros!

Propriétés des déterminants

- 5) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en ajoutant un multiple d'une ligne (ou colonne) à une autre, alors

Propriétés des déterminants

- 5) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en ajoutant un multiple d'une ligne (ou colonne) à une autre, alors

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$$

Propriétés des déterminants

- 5) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en ajoutant un multiple d'une ligne (ou colonne) à une autre, alors

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Propriétés des déterminants

- 5) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en ajoutant un multiple d'une ligne (ou colonne) à une autre, alors

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} & \dots & a_{3n} + ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{B} = \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} (a_{3r} + ka_{1r}) \det(\mathbf{A}_{3r})$$

$$\begin{aligned}\det \mathbf{B} &= \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} (a_{3r} + ka_{1r}) \det(\mathbf{A}_{3r}) \\ &= \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} a_{3r} \det(\mathbf{A}_{3r}) + \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} ka_{1r} \det(\mathbf{A}_{3r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{B} &= \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} (a_{3r} + ka_{1r}) \det(\mathbf{A}_{3r}) \\
&= \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} a_{3r} \det(\mathbf{A}_{3r}) + \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} ka_{1r} \det(\mathbf{A}_{3r}) \\
&= \det \mathbf{A} + k \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} a_{1r} \det(\mathbf{A}_{3r})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{B} &= \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} (a_{3r} + ka_{1r}) \det(\mathbf{A}_{3r}) \\
&= \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} a_{3r} \det(\mathbf{A}_{3r}) + \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} ka_{1r} \det(\mathbf{A}_{3r}) \\
&= \det \mathbf{A} + k \sum_{r=1}^n (-1)^{3+r} a_{1r} \det(\mathbf{A}_{3r}) \\
&= \det \mathbf{A} + 0
\end{aligned}$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} & \dots & a_{3n} + ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} & \dots & a_{3n} + ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} & \dots & a_{3n} + ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det \mathbf{A} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} & \dots & a_{3n} + ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det \mathbf{A} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} & \dots & a_{3n} + ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det \mathbf{A} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} + k(0)$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} & \dots & a_{3n} + ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det \mathbf{A} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} + k(0) = \det \mathbf{A}$$

Propriétés des déterminants

- 6) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

Propriétés des déterminants

6) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$$

Propriétés des déterminants

- 6) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 , alors $\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$

Propriétés des déterminants

- 6) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 , alors $\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$

car

Propriétés des déterminants

- 6) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 , alors $\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$

car $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Propriétés des déterminants

- 6) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 , alors $\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$

$$\text{car } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Propriétés des déterminants

- 6) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 , alors $\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$

$$\text{car } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad)$$

Propriétés des déterminants

- 6) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 , alors $\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$

$$\text{car } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

Propriétés des déterminants

- 6) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 , alors $\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$

$$\text{car } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

Si \mathbf{A} est de format $n \times n$ avec $n > 2$, on peut développer le déterminant en ne développant jamais avec les deux lignes (ou deux colonnes) interchangées.

Propriétés des déterminants

- 6) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 , alors $\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$

$$\text{car } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

Si \mathbf{A} est de format $n \times n$ avec $n > 2$, on peut développer le déterminant en ne développant jamais avec les deux lignes (ou deux colonnes) interchangées.

Le résultat sera une (potentiellement très grosse) somme de déterminants 2×2 .

Propriétés des déterminants

- 6) Si \mathbf{B} est obtenue de \mathbf{A} en interchangeant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$$

Si \mathbf{A} est une matrice 2×2 , alors $\det \mathbf{A} = - \det \mathbf{B}$

$$\text{car } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

Si \mathbf{A} est de format $n \times n$ avec $n > 2$, on peut développer le déterminant en ne développant jamais avec les deux lignes (ou deux colonnes) interchangées.

Le résultat sera une (potentiellement très grosse) somme de déterminants 2×2 .

Si on interchange leurs deux lignes et qu'on met les -1 en évidence, on obtient $- \det \mathbf{B}$.

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.


$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.


$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.

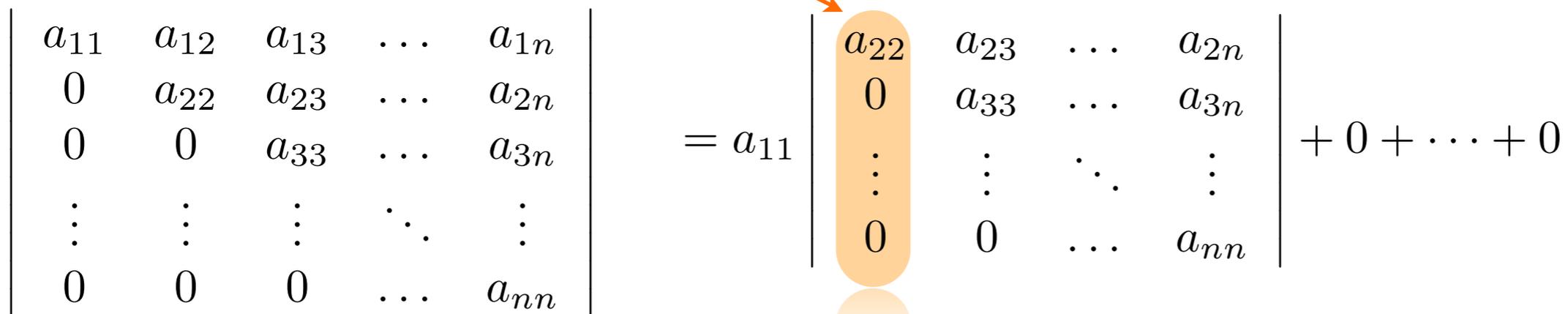
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.


$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$
$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$
$$= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$
$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$
$$= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$

$$= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0 = \dots =$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$

$$= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0 = \dots =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

Proposition

Soit \mathbf{A} , une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors le déterminant de \mathbf{A} est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

En développant selon la première colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0$$
$$= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0 = \dots =$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Faites les exercices suivants

p. 225, # 1.

Proposition

$$\det(k\mathbf{A}_{n \times n}) = k^n \det(\mathbf{A}_{n \times n})$$

Proposition

$$\det(k\mathbf{A}_{n \times n}) = k^n \det(\mathbf{A}_{n \times n})$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposition

$$\det(k\mathbf{A}_{n \times n}) = k^n \det(\mathbf{A}_{n \times n})$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposition

$$\det(k\mathbf{A}_{n \times n}) = k^n \det(\mathbf{A}_{n \times n})$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix} \\ & = k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Proposition

$$\det(k\mathbf{A}_{n \times n}) = k^n \det(\mathbf{A}_{n \times n})$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix} \\ & = k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix} = \dots = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Proposition

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

Proposition

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

Une preuve directe de ceci n'est pas particulièrement amusante!

Proposition

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

Une preuve directe de ceci n'est pas particulièrement amusante!

Mais,

Proposition $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Une preuve directe de ceci n'est pas particulièrement amusante!

Mais,

si on passe par les matrices élémentaires... c'est plus beaucoup plus sympathique!

Proposition $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Une preuve directe de ceci n'est pas particulièrement amusante!

Mais,

si on passe par les matrices élémentaires... c'est plus beaucoup plus sympathique!

Lemme:

Proposition $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Une preuve directe de ceci n'est pas particulièrement amusante!

Mais,

si on passe par les matrices élémentaires... c'est plus beaucoup plus sympathique!

Lemme: Si \mathbf{E} est une matrice élémentaire, alors

Proposition $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Une preuve directe de ceci n'est pas particulièrement amusante!

Mais,

si on passe par les matrices élémentaires... c'est plus beaucoup plus sympathique!

Lemme: Si \mathbf{E} est une matrice élémentaire, alors

$$\det(\mathbf{EA}) = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

Proposition $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Une preuve directe de ceci n'est pas particulièrement amusante!

Mais,

si on passe par les matrices élémentaires... c'est plus beaucoup plus sympathique!

Lemme: Si \mathbf{E} est une matrice élémentaire, alors

$$\det(\mathbf{EA}) = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

Il y a trois types de matrices élémentaires, donc trois cas à vérifier.

(Type $\frac{L_i \leftrightarrow L_j}{\longrightarrow}$)

(Type $\xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}$) $\det \mathbf{E}$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \right) \quad \det \mathbf{E} = - \det \mathbf{I}$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \right) \quad \det \mathbf{E} = - \det \mathbf{I} = -1$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \right) \quad \det \mathbf{E} = - \det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \right) \quad \det \mathbf{E} = - \det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = - \det \mathbf{A}$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1) \det \mathbf{A}$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i} \right)$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i} \right) \quad \det \mathbf{E}$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

Car \mathbf{E} est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

Car \mathbf{E} est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

Car \mathbf{E} est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) = k \det \mathbf{A}$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

Car \mathbf{E} est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) = k \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

Car \mathbf{E} est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) = k \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow L_i + kL_j}\right)$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

Car \mathbf{E} est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) = k \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow L_i + kL_j}\right) \quad \det \mathbf{E}$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

Car \mathbf{E} est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) = k \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow L_i + kL_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = 1$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

Car \mathbf{E} est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) = k \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow L_i + kL_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = 1$$

Car \mathbf{E} est triangulaire, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

Car \mathbf{E} est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) = k \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow L_i + kL_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = 1$$

Car \mathbf{E} est triangulaire, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

Car \mathbf{E} est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) = k \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow L_i + kL_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = 1$$

Car \mathbf{E} est triangulaire, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) = \det \mathbf{A}$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = -\det \mathbf{I} = -1$$

$$\det(\mathbf{EA}) = -\det \mathbf{A} = (-1)\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow kL_i}\right) \quad \det \mathbf{E} = k$$

Car \mathbf{E} est diagonale, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) = k \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

$$\left(\text{Type } \xrightarrow{L_i \rightarrow L_i + kL_j}\right) \quad \det \mathbf{E} = 1$$

Car \mathbf{E} est triangulaire, donc $\det \mathbf{E}$ est le produit de sa diagonale.

$$\det(\mathbf{EA}) = \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{E})(\det \mathbf{A})$$

Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Preuve:

Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Preuve:

On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}$

Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Preuve:

On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}$ avec $\mathbf{A} \sim \mathbf{R}$

Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Preuve:

On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}$ avec $\mathbf{A} \sim \mathbf{R}$

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R})$$

Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Preuve:

On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}$ avec $\mathbf{A} \sim \mathbf{R}$

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R})$$

Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Preuve:

On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}$ avec $\mathbf{A} \sim \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Preuve:

On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}$ avec $\mathbf{A} \sim \mathbf{R}$

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R})$$

$$= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{R})$$

$\neq 0$



Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Preuve:

On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}$ avec $\mathbf{A} \sim \mathbf{R}$

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R})$$

$$= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{R})$$


$$\neq 0$$

Si $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$,

Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Preuve:

On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}$ avec $\mathbf{A} \sim \mathbf{R}$

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R})$$

$$= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{R})$$


$$\neq 0$$

Si $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$, alors $\det \mathbf{R} = 0$,

Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Preuve:

On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}$ avec $\mathbf{A} \sim \mathbf{R}$

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R})$$

$$= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{R})$$


$$\neq 0$$

Si $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$, alors $\det \mathbf{R} = 0$,

car la dernière ligne de \mathbf{R} est une ligne de zéros,

Théorème

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{I}$$

Preuve:

On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}$ avec $\mathbf{A} \sim \mathbf{R}$

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{R})$$

$$= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{R})$$


$$\neq 0$$

Si $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$, alors $\det \mathbf{R} = 0$,

car la dernière ligne de \mathbf{R} est une ligne de zéros,

et donc, $\det \mathbf{A} = 0$.

En fait, on peut reformuler le dernier théorème comme suit:

En fait, on peut reformuler le dernier théorème comme suit:

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

En fait, on peut reformuler le dernier théorème comme suit:

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff$$

En fait, on peut reformuler le dernier théorème comme suit:

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \text{ est inversible}$$

En fait, on peut reformuler le dernier théorème comme suit:

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \text{ est inversible}$$

Et cet énoncé peut peut faire gagner bien du temps!

En fait, on peut reformuler le dernier théorème comme suit:

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \text{ est inversible}$$

Et cet énoncé peut peut faire gagner bien du temps!

Car calculer un déterminant, c'est pas mal plus court
que de trouver un inverse!

Preuve:

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

Preuve: $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Si $\det \mathbf{A} \neq 0$,

Preuve: $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Si $\det \mathbf{A} \neq 0$, alors $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{I}$

Preuve: $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Si $\det \mathbf{A} \neq 0$, alors $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{I}$

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{I} \mathbf{B})$$

Preuve: $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Si $\det \mathbf{A} \neq 0$, alors $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{IB}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{IB}) \end{aligned}$$

Preuve: $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Si $\det \mathbf{A} \neq 0$, alors $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{IB}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{IB}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Preuve: $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Si $\det \mathbf{A} \neq 0$, alors $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{IB}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{IB}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n) \det(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Preuve: $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Si $\det \mathbf{A} \neq 0$, alors $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{IB}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{IB}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n) \det(\mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Preuve: $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Si $\det \mathbf{A} \neq 0$, alors $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{I}$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{IB}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{IB}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n) \det(\mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})\end{aligned}$$

$$\det \mathbf{A} = 0$$

Si $\det \mathbf{A} = 0$,

Si $\det \mathbf{A} = 0$, reste à voir que $\det(\mathbf{AB}) = 0$,

Si $\det \mathbf{A} = 0$, reste à voir que $\det(\mathbf{AB}) = 0$,

auquel cas, on n'aura que

Si $\det \mathbf{A} = 0$, reste à voir que $\det(\mathbf{AB}) = 0$,

auquel cas, on n'aura que $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

Si $\det \mathbf{A} = 0$, reste à voir que $\det(\mathbf{AB}) = 0$,

auquel cas, on n'aura que $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

$$\text{mais } \mathbf{AB} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{RB}$$

Si $\det \mathbf{A} = 0$, reste à voir que $\det(\mathbf{AB}) = 0$,

auquel cas, on n'aura que $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

$$\text{mais } \mathbf{AB} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{RB}$$

$$\text{et } \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n) \det(\mathbf{RB})$$

Si $\det \mathbf{A} = 0$, reste à voir que $\det(\mathbf{AB}) = 0$,

auquel cas, on n'aura que $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

$$\text{mais } \mathbf{AB} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{RB}$$

$$\text{et } \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n) \det(\mathbf{RB})$$

$$\text{mais } \det(\mathbf{RB}) = 0$$

Si $\det \mathbf{A} = 0$, reste à voir que $\det(\mathbf{AB}) = 0$,

auquel cas, on n'aura que $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

$$\text{mais } \mathbf{AB} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{RB}$$

$$\text{et } \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n) \det(\mathbf{RB})$$

$$\text{mais } \det(\mathbf{RB}) = 0$$

car la dernière ligne de \mathbf{R} est une ligne de zéros,

Si $\det \mathbf{A} = 0$, reste à voir que $\det(\mathbf{AB}) = 0$,
auquel cas, on n'aura que $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$

$$\text{mais } \mathbf{AB} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \mathbf{RB}$$

$$\text{et } \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n) \det(\mathbf{RB})$$

$$\text{mais } \det(\mathbf{RB}) = 0$$

car la dernière ligne de \mathbf{R} est une ligne de zéros,

et donc, la dernière ligne de \mathbf{RB} aussi.

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Preuve:

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Preuve:

$\det \mathbf{I}$

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Preuve:

$$\det \mathbf{I} = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})$$

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Preuve:

$$\det \mathbf{I} = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1})$$

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Preuve:

$$\det \mathbf{I} = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$$

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Preuve:

$$\det \mathbf{I} = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$$

Proposition

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Preuve:

$$\det \mathbf{I} = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$$

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}$$

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Preuve:

$$\det \mathbf{I} = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$$

Proposition

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}$$

Transposer ne fait qu'interchanger le rôle des lignes et des colonnes.

Définition

Définition

Soit \mathbf{A} une matrice carrée, le cofacteur de l'élément a_{ij} , noté C_{ij} est:

Définition

Soit \mathbf{A} une matrice carrée, le cofacteur de l'élément a_{ij} , noté \mathbf{C}_{ij} est:

$$\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$$

Définition

Soit \mathbf{A} une matrice carrée, le cofacteur de l'élément a_{ij} , noté \mathbf{C}_{ij} est:

$$\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$$

Remarque

Définition

Soit \mathbf{A} une matrice carrée, le cofacteur de l'élément a_{ij} , noté \mathbf{C}_{ij} est:

$$\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$$

Remarque

Cette définition permet la réécriture du déterminant comme suit:

Définition

Soit \mathbf{A} une matrice carrée, le cofacteur de l'élément a_{ij} , noté \mathbf{C}_{ij} est:

$$\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$$

Remarque

Cette définition permet la réécriture du déterminant comme suit:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n a_{1k} \mathbf{C}_{1k}$$

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend $r = 2, s = 1$

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend $r = 2, s = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend $r = 2, s = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} \mathbf{C}_{1k}$$

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend $r = 2, s = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} \mathbf{C}_{1k}$$

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend $r = 2, s = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} \mathbf{C}_{1k}$$

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend $r = 2, s = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} \mathbf{C}_{1k}$$

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend $r = 2, s = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} \mathbf{C}_{1k}$$

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend $r = 2, s = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} \mathbf{C}_{1k} = \det \mathbf{B}$$

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend $r = 2, s = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} \mathbf{C}_{1k} = \det \mathbf{B}$$

Propositio

Si $r \neq s$, alors $\sum_{k=1}^n a_{rk} \mathbf{C}_{sk} = 0$.

Preuve:

L'idée devient explicite si on prend $r = 2, s = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} \mathbf{C}_{1k} = \det \mathbf{B} = 0$$

Définition

La matrice des cofacteurs de \mathbf{A} , notée $\text{cof}(\mathbf{A})$, est:

Définition

La matrice des cofacteurs de \mathbf{A} , notée $\text{cof}(\mathbf{A})$, est:

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1n} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \mathbf{C}_{n2} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

La matrice des cofacteurs de \mathbf{A} , notée $\text{cof}(\mathbf{A})$, est:

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1n} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \mathbf{C}_{n2} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

Définition

La matrice des cofacteurs de \mathbf{A} , notée $\text{cof}(\mathbf{A})$, est:

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1n} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \mathbf{C}_{n2} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

La matrice adjointe de \mathbf{A} , notée $\text{adj}(\mathbf{A})$, est:

Définition

La matrice des cofacteurs de \mathbf{A} , notée $\text{cof}(\mathbf{A})$, est:

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1n} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \mathbf{C}_{n2} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

La matrice adjointe de \mathbf{A} , notée $\text{adj}(\mathbf{A})$, est:

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = (\text{cof}(\mathbf{A}))^{\top}$$

Exemple

Example

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Example

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{cof}(\mathbf{A})$

Example

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Example

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Example

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Example

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Example

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Example

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Example

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(\mathbf{A})$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = (\text{cof}(\mathbf{A}))^T$$

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = (\text{cof}(\mathbf{A}))^T = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse d'une matrice est donné par:

L'inverse d'une matrice est donné par:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj} \mathbf{A}$$

L'inverse d'une matrice est donné par:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj} \mathbf{A}$$

Vérification:

L'inverse d'une matrice est donné par:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj} \mathbf{A}$$

Vérification:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1n} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \mathbf{C}_{n2} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}^T$$

L'inverse d'une matrice est donné par:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj} \mathbf{A}$$

Vérification:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1n} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \mathbf{C}_{n2} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \dots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \dots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \dots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \cdots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \cdots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum a_{1k} \mathbf{C}_{1k} & \sum a_{1k} \mathbf{C}_{2k} & \cdots & \sum a_{1k} \mathbf{C}_{nk} \\ \sum a_{2k} \mathbf{C}_{1k} & \sum a_{2k} \mathbf{C}_{2k} & \cdots & \sum a_{2k} \mathbf{C}_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{nk} \mathbf{C}_{1k} & \sum a_{nk} \mathbf{C}_{2k} & \cdots & \sum a_{nk} \mathbf{C}_{nk} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \dots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \dots & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum a_{1k} \mathbf{C}_{1k} & \sum a_{1k} \mathbf{C}_{2k} & \dots & \sum a_{1k} \mathbf{C}_{nk} \\ \sum a_{2k} \mathbf{C}_{1k} & \sum a_{2k} \mathbf{C}_{2k} & \dots & \sum a_{2k} \mathbf{C}_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{nk} \mathbf{C}_{1k} & \sum a_{nk} \mathbf{C}_{2k} & \dots & \sum a_{nk} \mathbf{C}_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum a_{1k} \mathbf{C}_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum a_{2k} \mathbf{C}_{2k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum a_{nk} \mathbf{C}_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum a_{1k} \mathbf{C}_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum a_{2k} \mathbf{C}_{2k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum a_{nk} \mathbf{C}_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum a_{1k} \mathbf{C}_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum a_{2k} \mathbf{C}_{2k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum a_{nk} \mathbf{C}_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum a_{1k} \mathbf{C}_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum a_{2k} \mathbf{C}_{2k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum a_{nk} \mathbf{C}_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum a_{1k} \mathbf{C}_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum a_{2k} \mathbf{C}_{2k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum a_{nk} \mathbf{C}_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{adj}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -1(1 - 8) + 0 - 3(4 - 1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -1(1 - 8) + 0 - 3(4 - 1) = -2$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -1(1 - 8) + 0 - 3(4 - 1) = -2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -1(1 - 8) + 0 - 3(4 - 1) = -2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2×2 , cela va vraiment plus vite!

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -2$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -2$$

$$\mathbf{A}^{-1}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

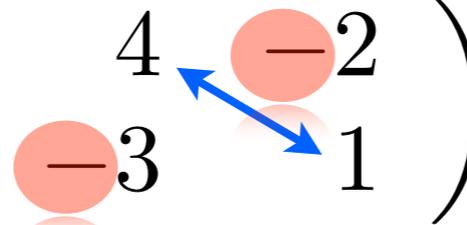
$$\det \mathbf{A} = -2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Cette méthode d'inversion de matrice peut être plus longue.

Mais si la matrice est une 2 x 2, cela va vraiment plus vite!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$


$$\det \mathbf{A} = -2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calculer \mathbf{A}^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{2}L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Faites les exercices suivants

p.226 # 5, 6 et 7

Aujourd'hui, nous avons vu

1. Les différents types de...

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Le déterminant d'une matrice carrée.

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Le déterminant d'une matrice carrée.
- ✓ Les propriétés du déterminant.

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Le déterminant d'une matrice carrée.
- ✓ Les propriétés du déterminant.
- ✓ La matrice adjointe.

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Le déterminant d'une matrice carrée.
- ✓ Les propriétés du déterminant.
- ✓ La matrice adjointe.
- ✓ Le calcul de l'inverse à l'aide de la matrice adjointe.

Devoir:

p. 225, # 1 à 8.