7.2 ROTATIONS, RÉFLEXIONS ET HOMOTHÉTIE

Cours 20

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Les transformations linéaires.
- ✓ Le lien avec les matrices.

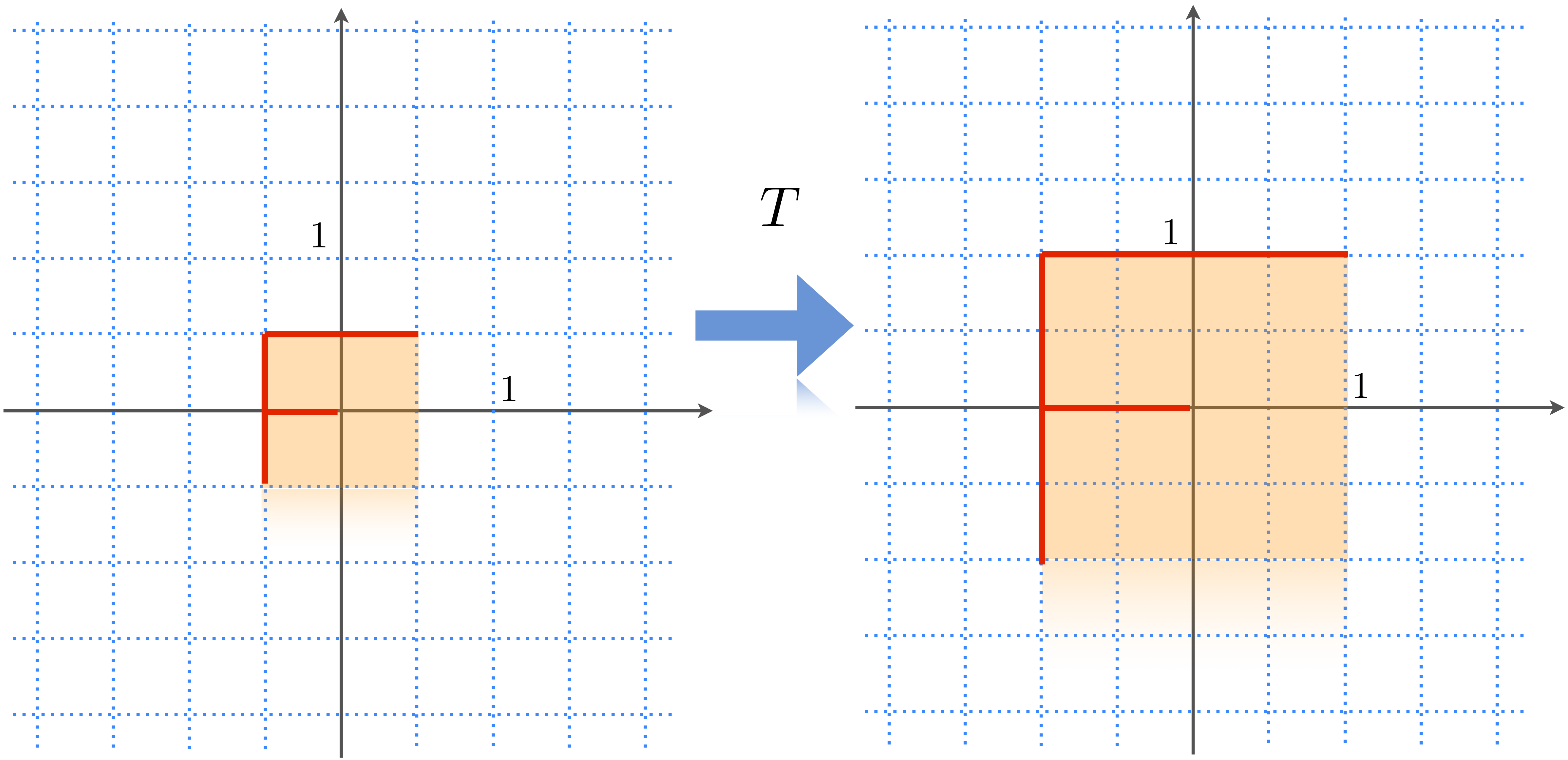
Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Les homothéties.
- ✓ Les étirements.
- ✓ Les rotations.
- ✓ Les réflexions.

En regardant de plus près les transformations linéaires
de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

on va constater que la quasi-totalité des transformations linéaires
sont des transformations géométriques vues au secondaire.

Homothéties



$$T(\vec{\imath}) = (2, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition

Une homothétie d'un facteur $k > 0$ est une transformation linéaire qui envoie chaque vecteur sur k fois lui-même.

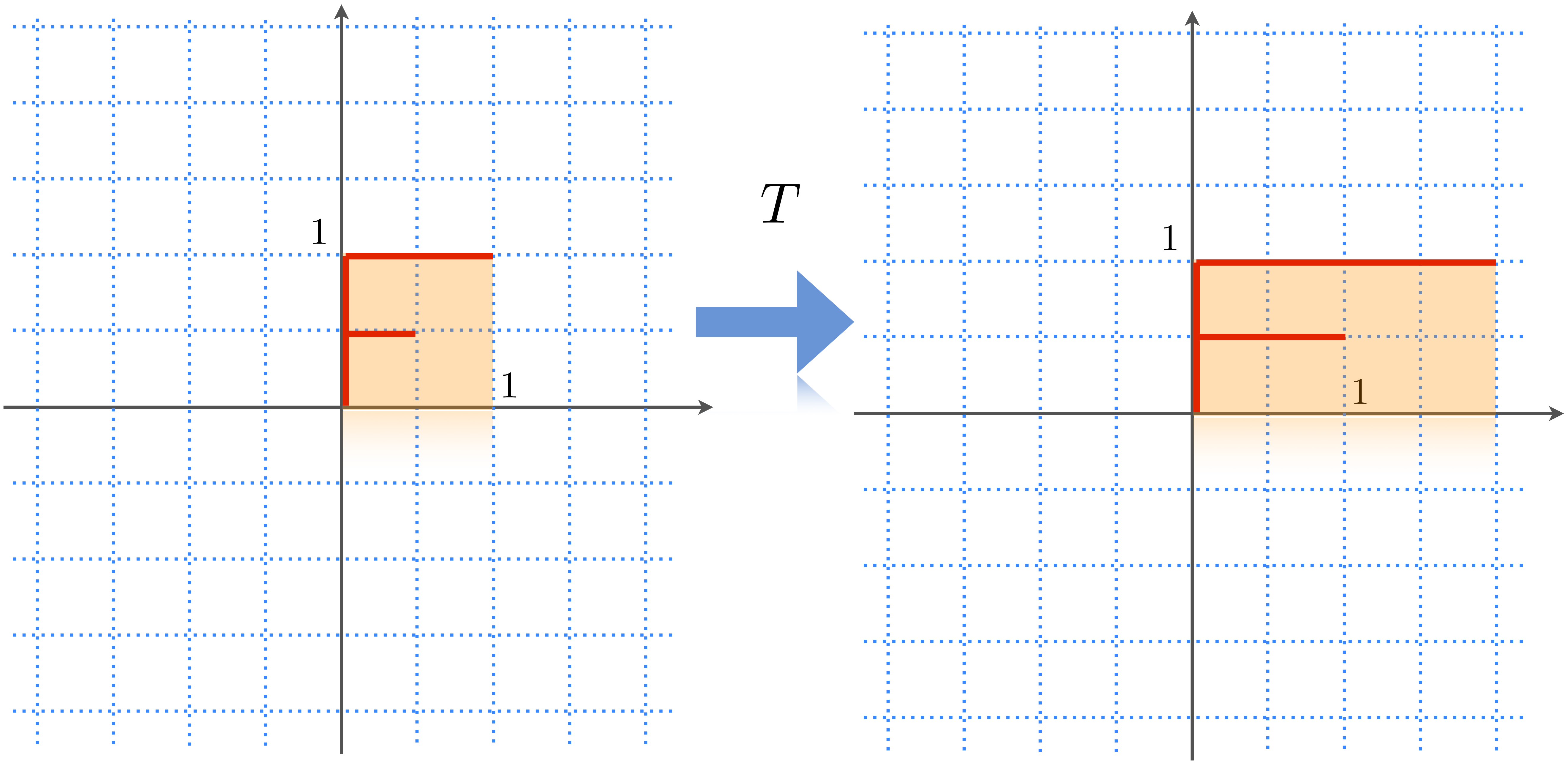
$$T(\vec{u}) = k\vec{u}$$

La matrice qui modélise une homothétie est de la forme:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On peut faire les choses à moitié...

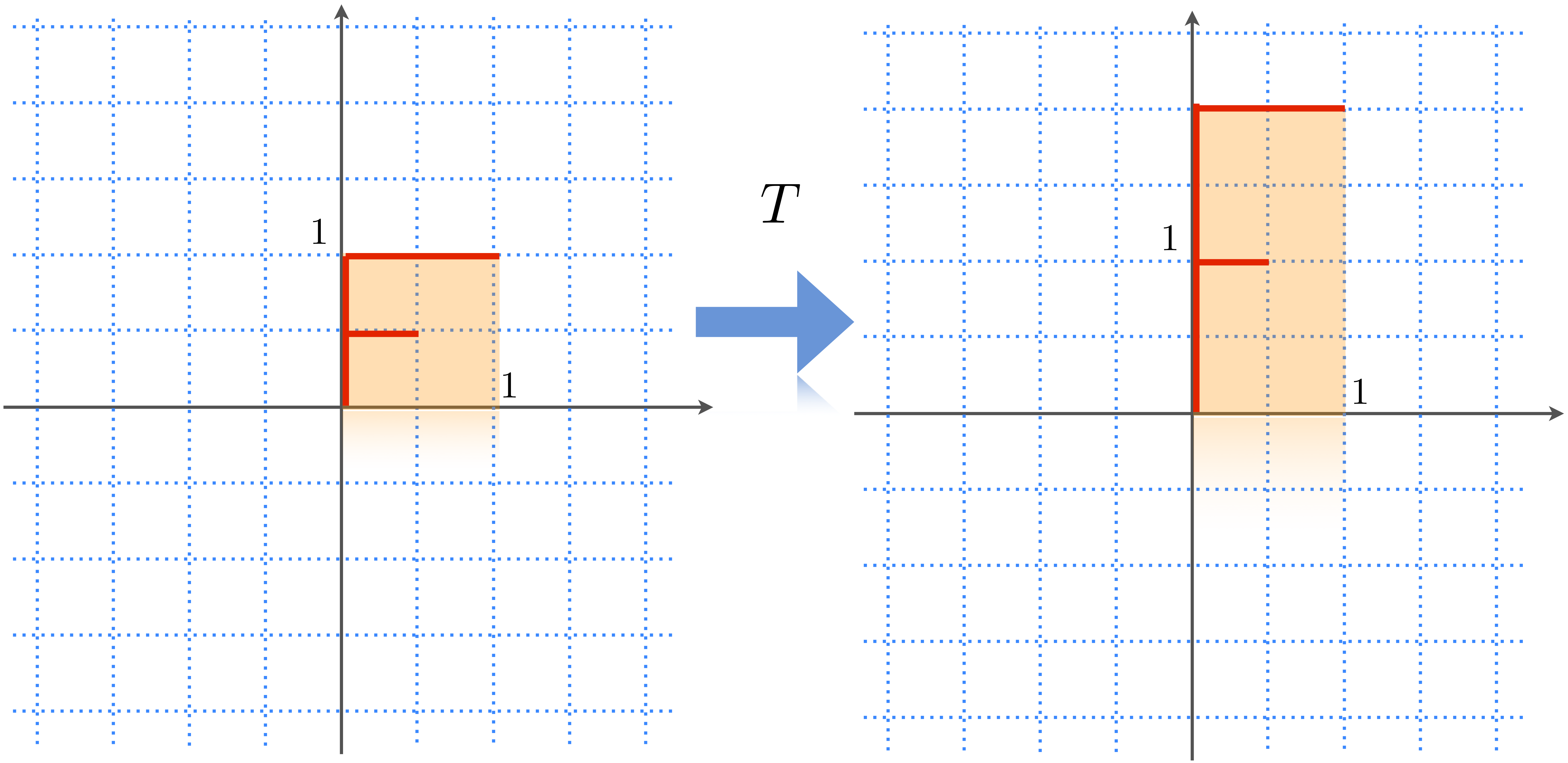


$$T(\vec{\imath}) = (2, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 1)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou bien...



$$T(\vec{\imath}) = (1, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans les deux derniers exemples, on a étiré dans une direction et laissé la direction perpendiculaire inchangée.

Mais il n'y a aucune raison pour que ces deux directions soient celle de $\vec{\imath}$ et celle de $\vec{\jmath}$!

Définition

L' étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{u}$ est une transformation linéaire qui envoie $\vec{u}$ sur k fois lui-même et $\vec{u}_\perp$ sur lui-même.

$$T(\vec{u}) = k\vec{u} \qquad\qquad T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1, 3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) = (2,6) \qquad \vec{u}_\perp = (-3,1)$$

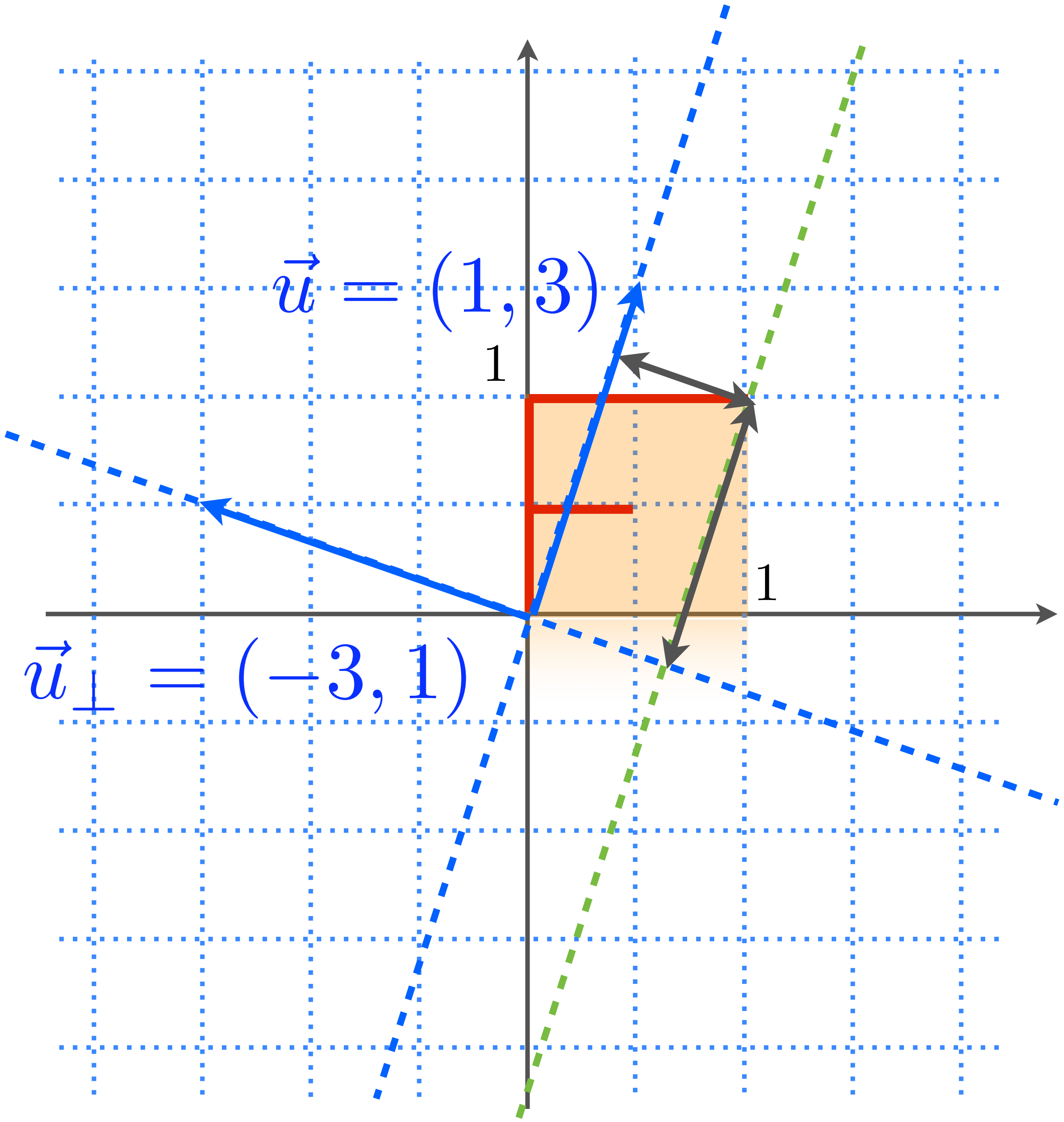
$$T(-3,1) = (-3,1)$$

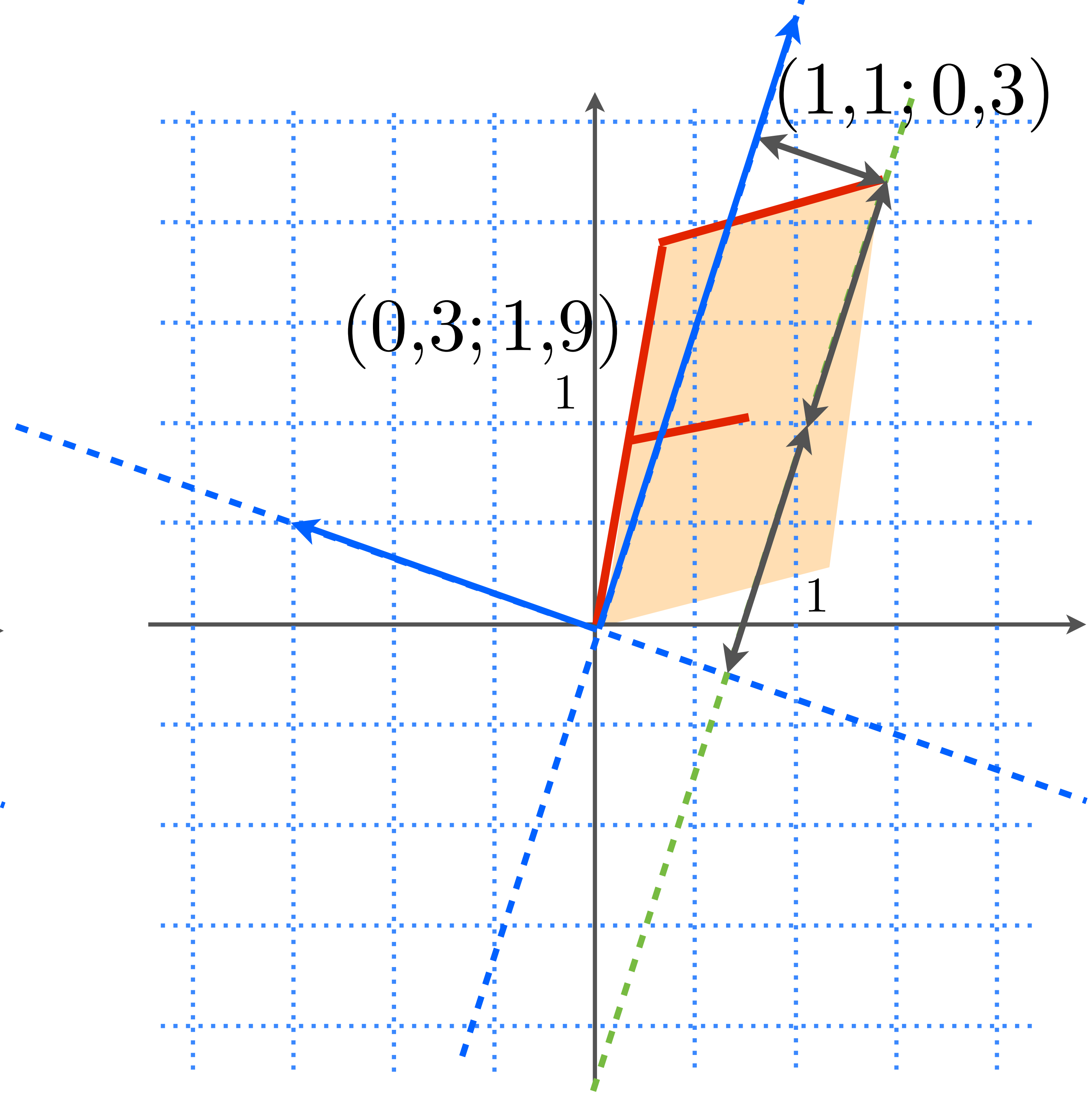
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{10}\right) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

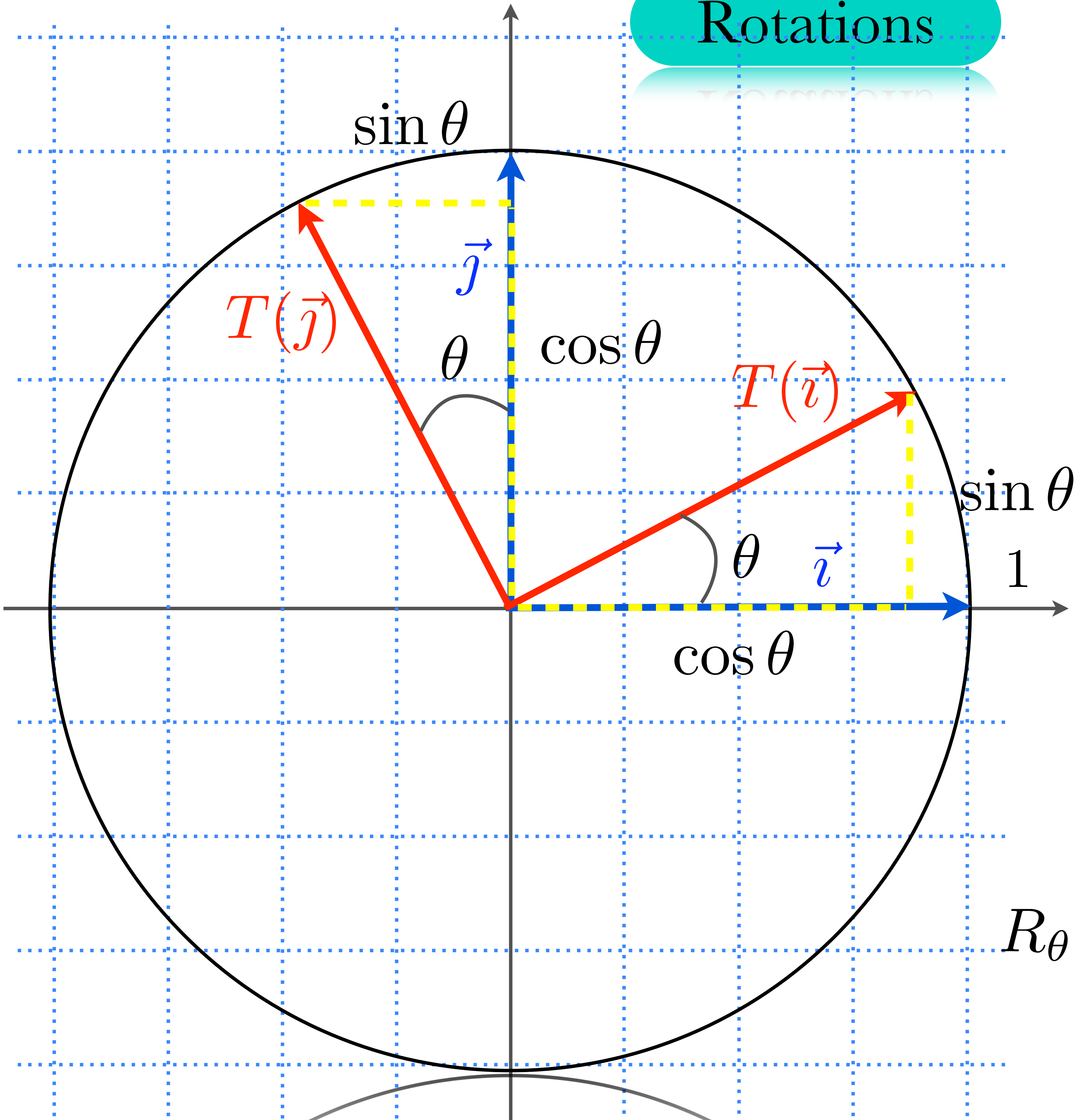
$$\vec{u} = (1, 3)$$

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!

Faites les exercices suivants

p. 265, # 1 à 3.

Rotations



$$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$T(\vec{j}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$= T(\vec{\imath})_{\perp}$$

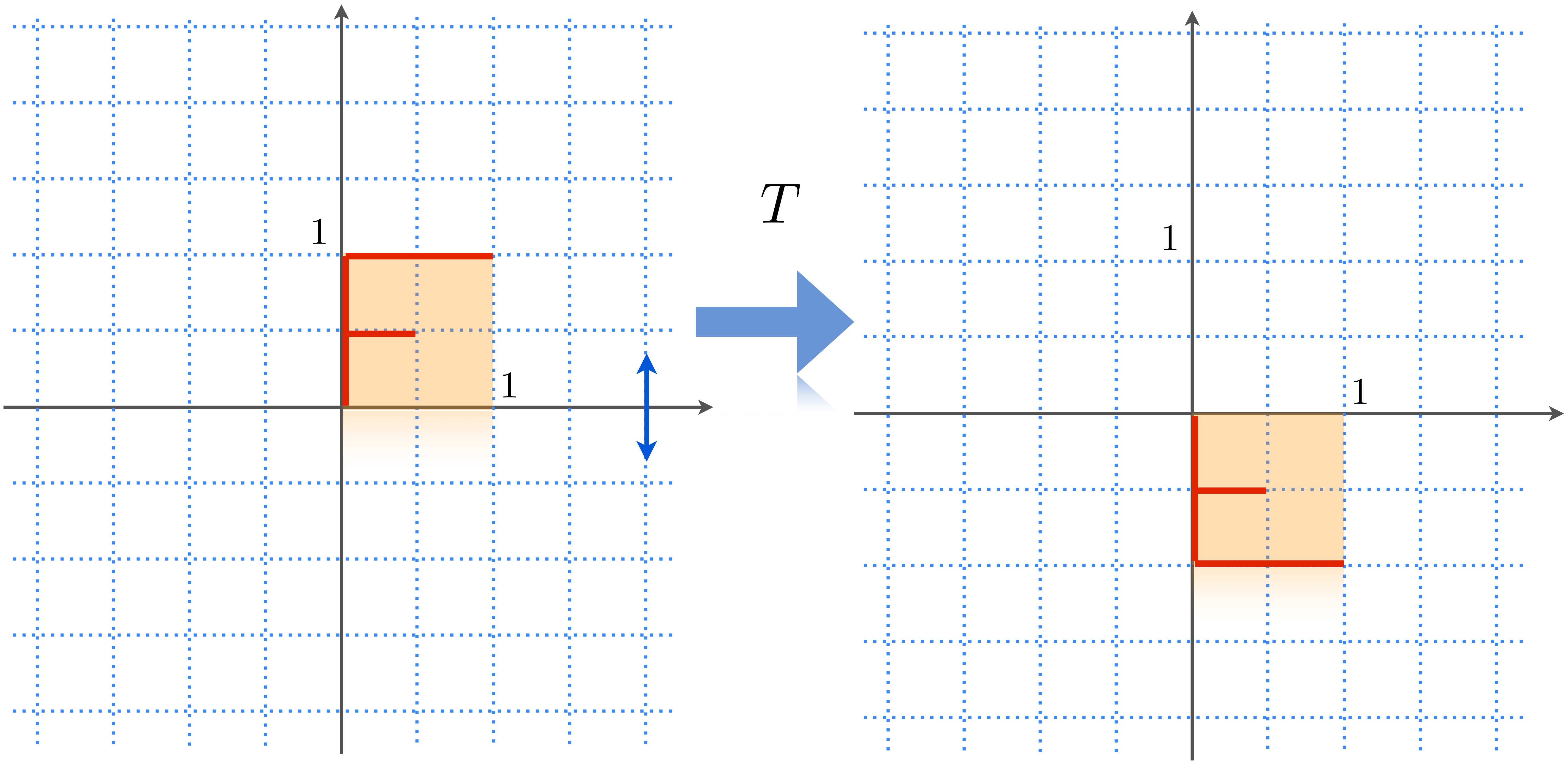
Donc, la matrice de rotation d'un angle θ est:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Faites les exercices suivants

p. 266, # 7.

Réflexion par rapport à l'axe des *x*

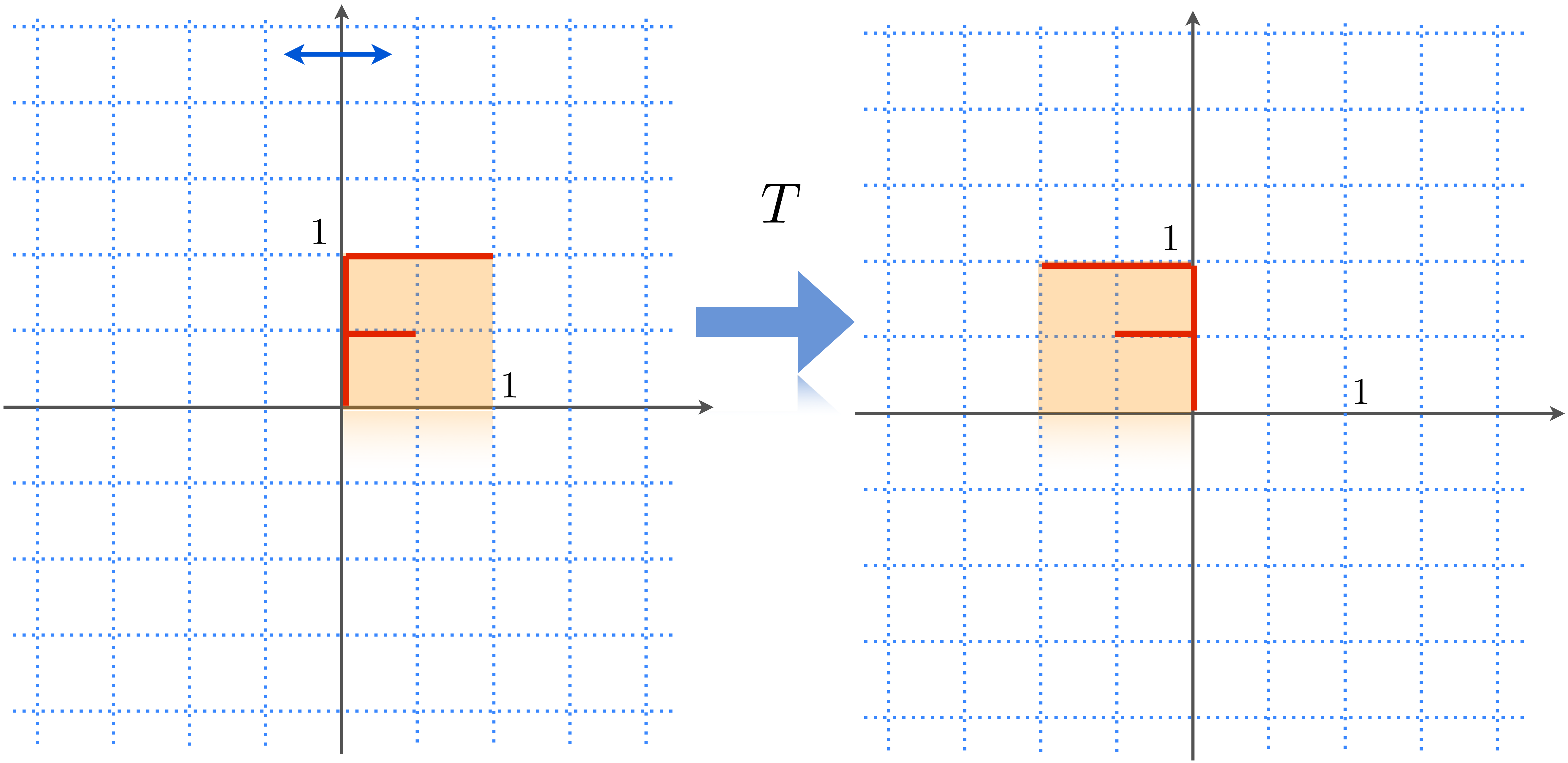


$$T(\vec{\imath}) = (1, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, -1)$$

$$\mathbf{S}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Réflexion par rapport à l'axe des y

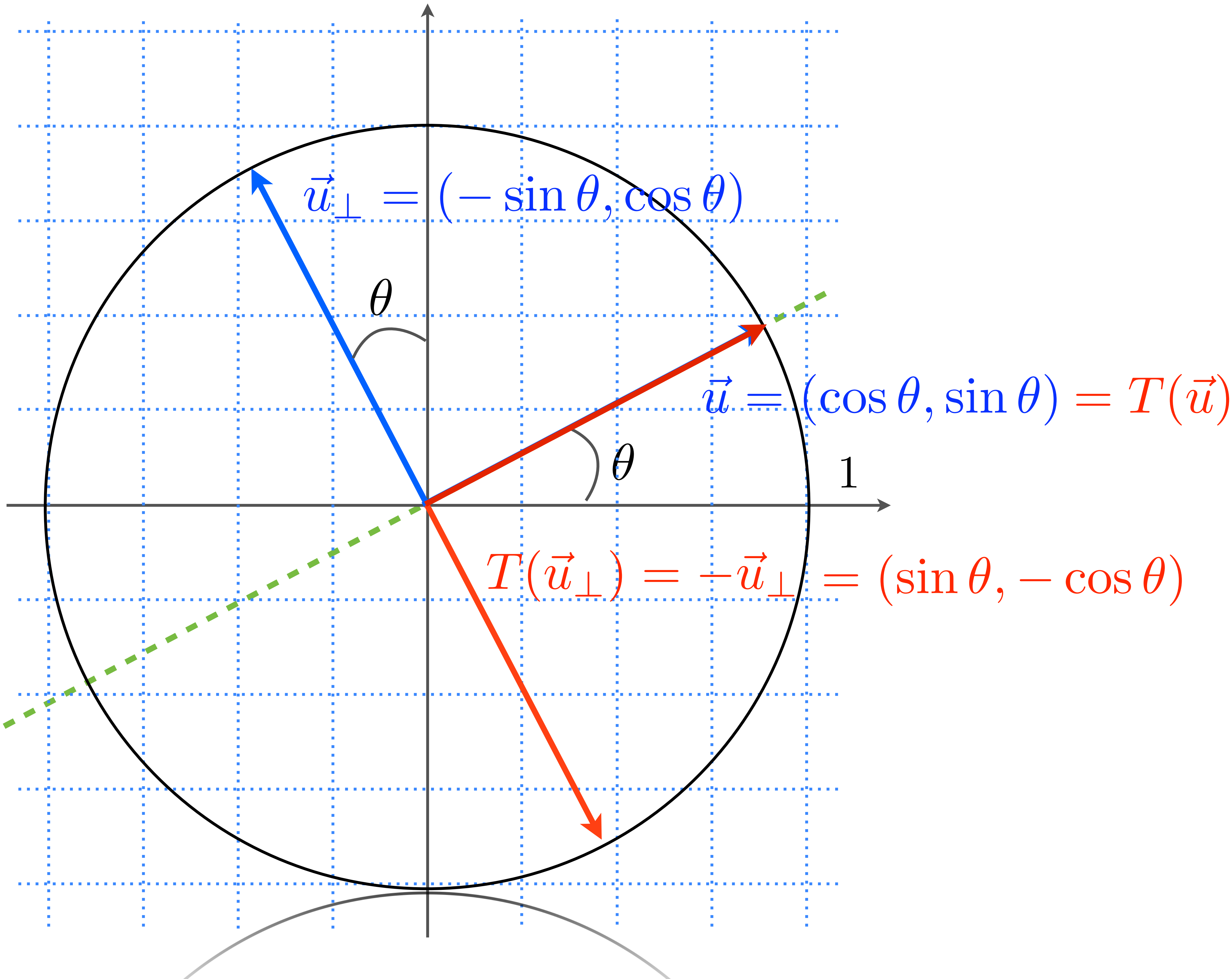


$$T(\vec{\imath}) = (-1, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 1)$$

$$\mathbf{S}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réflexion par rapport à un axe quelconque



$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{u} \qquad\quad \vec{u}_{\perp} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} T(\vec{u}) \qquad T(\vec{u}_{\perp}) = -\vec{u}_{\perp} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{S}_{\theta} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_\theta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Faites les exercices suivants

p.266, # 8 et 11

Définition Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

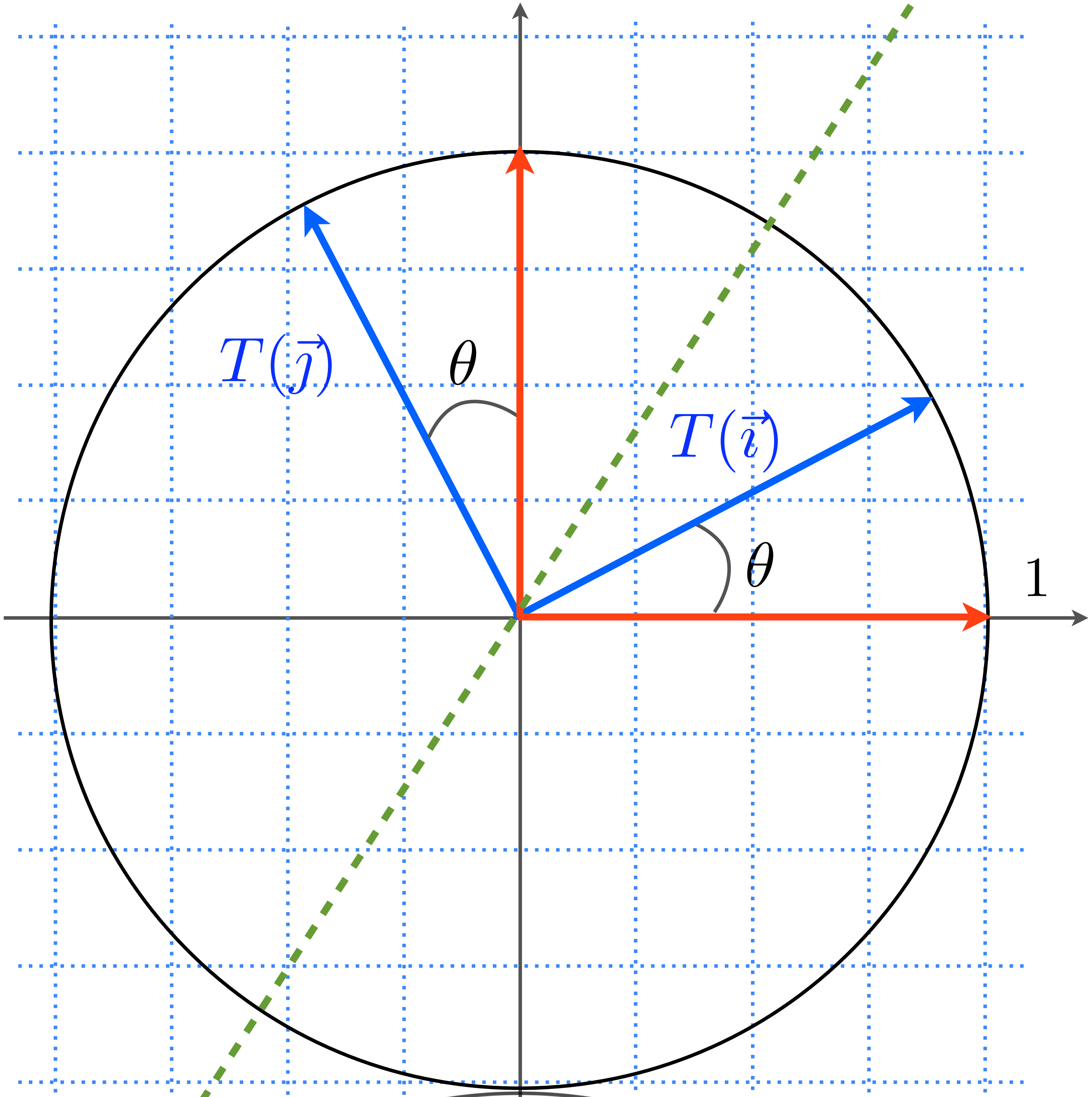
$$a^2+b^2 = 1 \iff \|(a,b)\| = 1$$

$$c^2+d^2 = 1 \iff \|(c,d)\| = 1$$

$$ac+bd = 0 \iff (a,b) \perp (c,d)$$

Donc si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale, alors

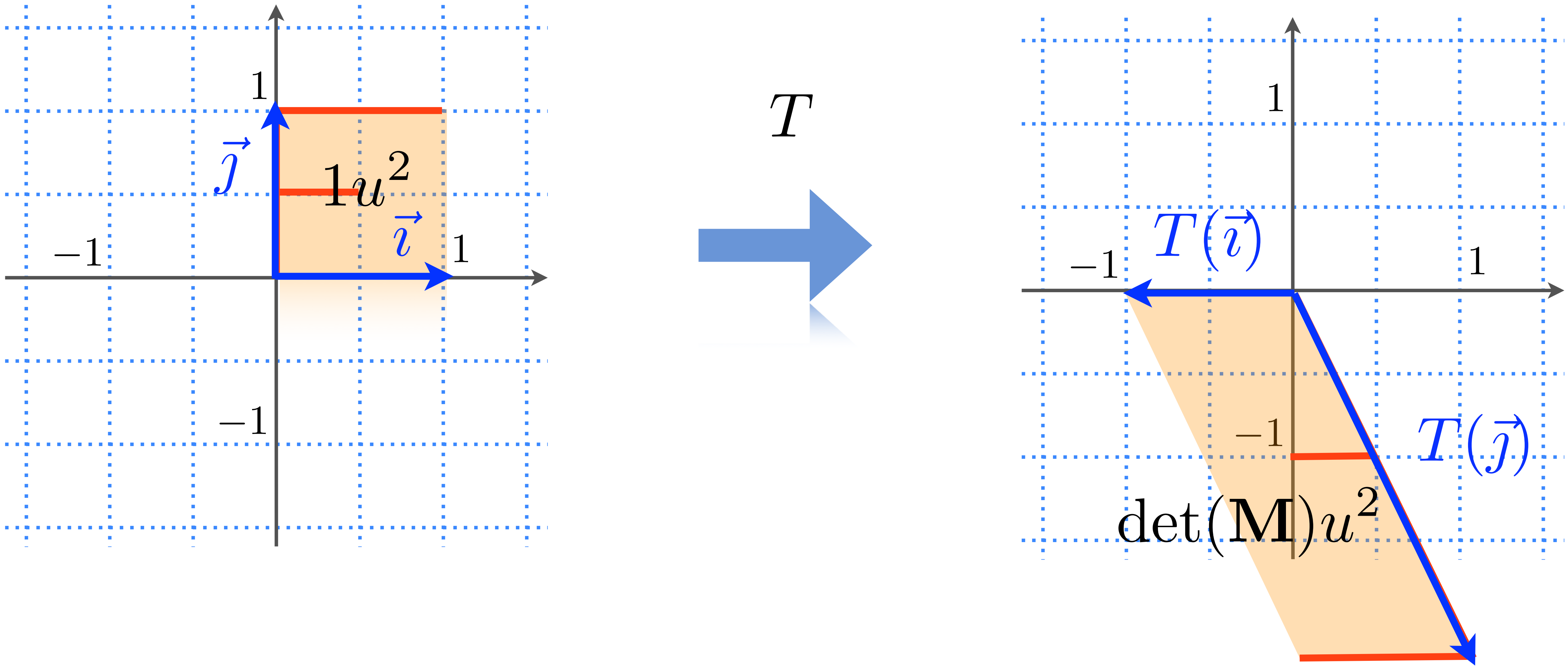
$T(\vec{\imath}) = (a, b)$ et $T(\vec{\jmath}) = (c, d)$ forment une base orthonormale.



Une rotation

ou une réflexion

Facteur de dilatation de l'aire



$$T(\vec{i}) = (a, b)$$
$$T(\vec{j}) = (c, d)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Proposition Soit F, une figure géométrique, et T, une transformation linéaire modélisée par la matrice $\mathbf{M}$.

L'aire de l'image de F par T est donnée par:

$$\text{aire}(T(F)) = \det(\mathbf{M}) \times \text{aire}(F)$$

Avec cette dernière proposition en main, on est maintenant
en mesure de distinguer les deux types
de matrices orthogonales.

Propositio

Soit $\mathbf{M}$ une matrice orthogonale, alors

Si $\det \mathbf{M} = 1$, alors $\mathbf{M}$ modélise une rotation.

Si $\det \mathbf{M} = -1$, alors $\mathbf{M}$ modélise une réflexion.

Faites les exercices suivants

Faites les exercices suivants

p.266, # 9 et 10 et 17.

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Les homothéties.
- ✓ Les étirements.
- ✓ Les rotations.
- ✓ Les réflexions.

Devoir: p. 265, # 1 à 22.