7.2 ROTATIONS, RÉFLEXIONS ET HOMOTHÉTIE

Cours 20

Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

✓ Les transformations linéaires.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Les transformations linéaires.
- ✓ Le lien avec les matrices.

Aujourd'hui, nous allons voir

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Les homothéties.

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Les homothéties.
- ✓ Les étirements.

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ Les homothéties.
- ✓ Les étirements.
- ✓ Les rotations.

Aujourd'hui, nous allons voir

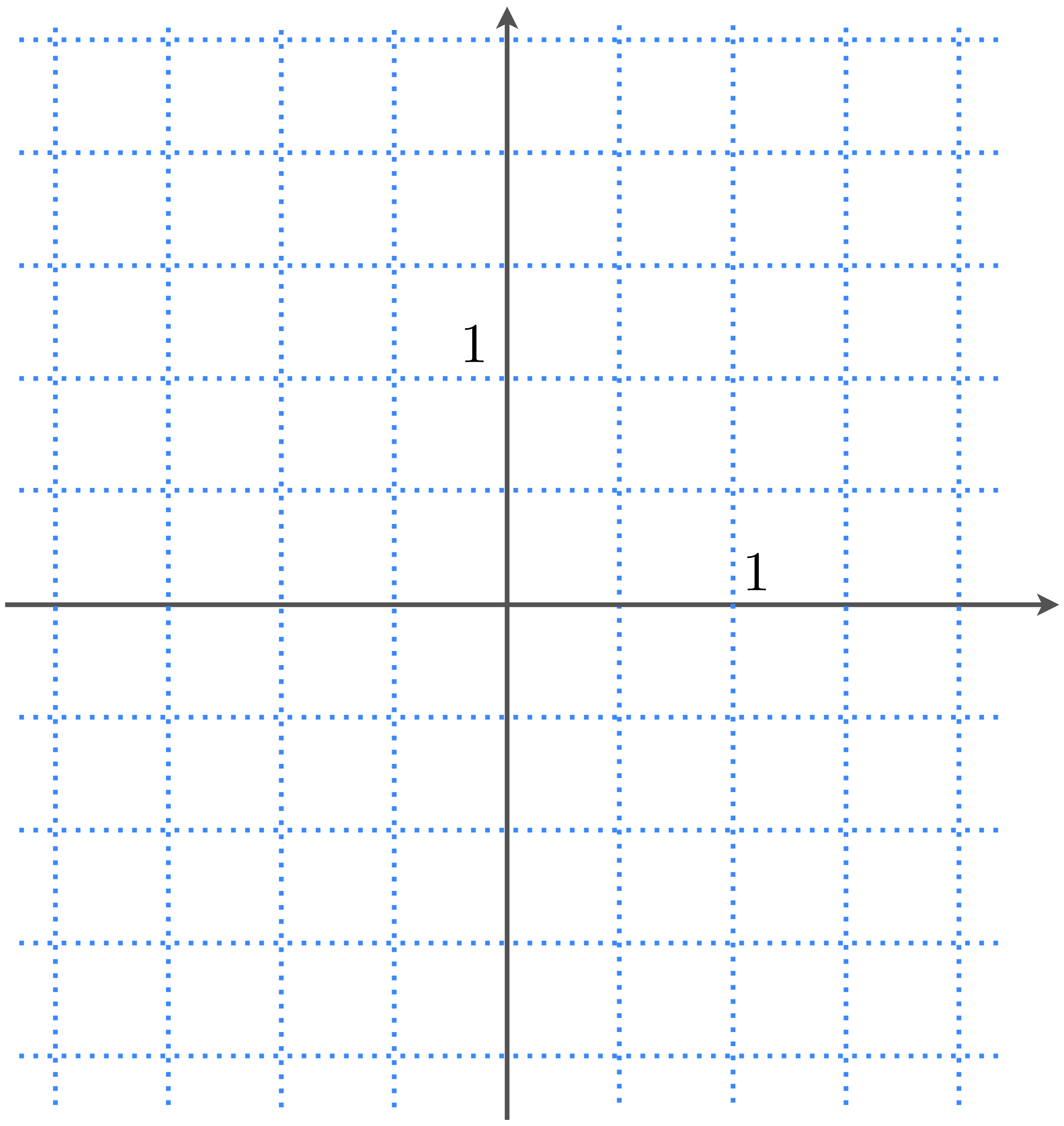
- ✓ Les homothéties.
- ✓ Les étirements.
- ✓ Les rotations.
- ✓ Les réflexions.

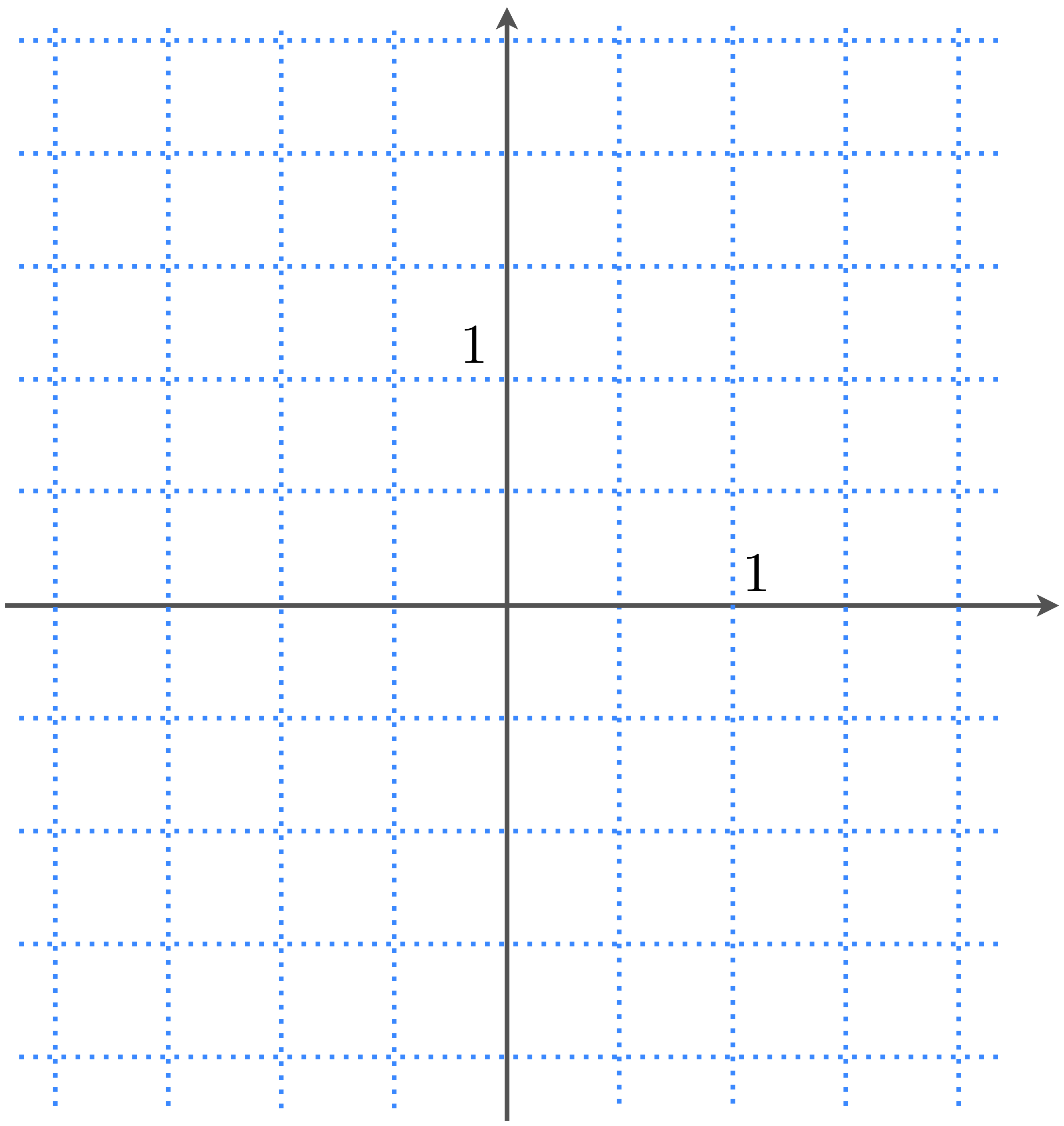
En regardant de plus près les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

En regardant de plus près les transformations linéaires
de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

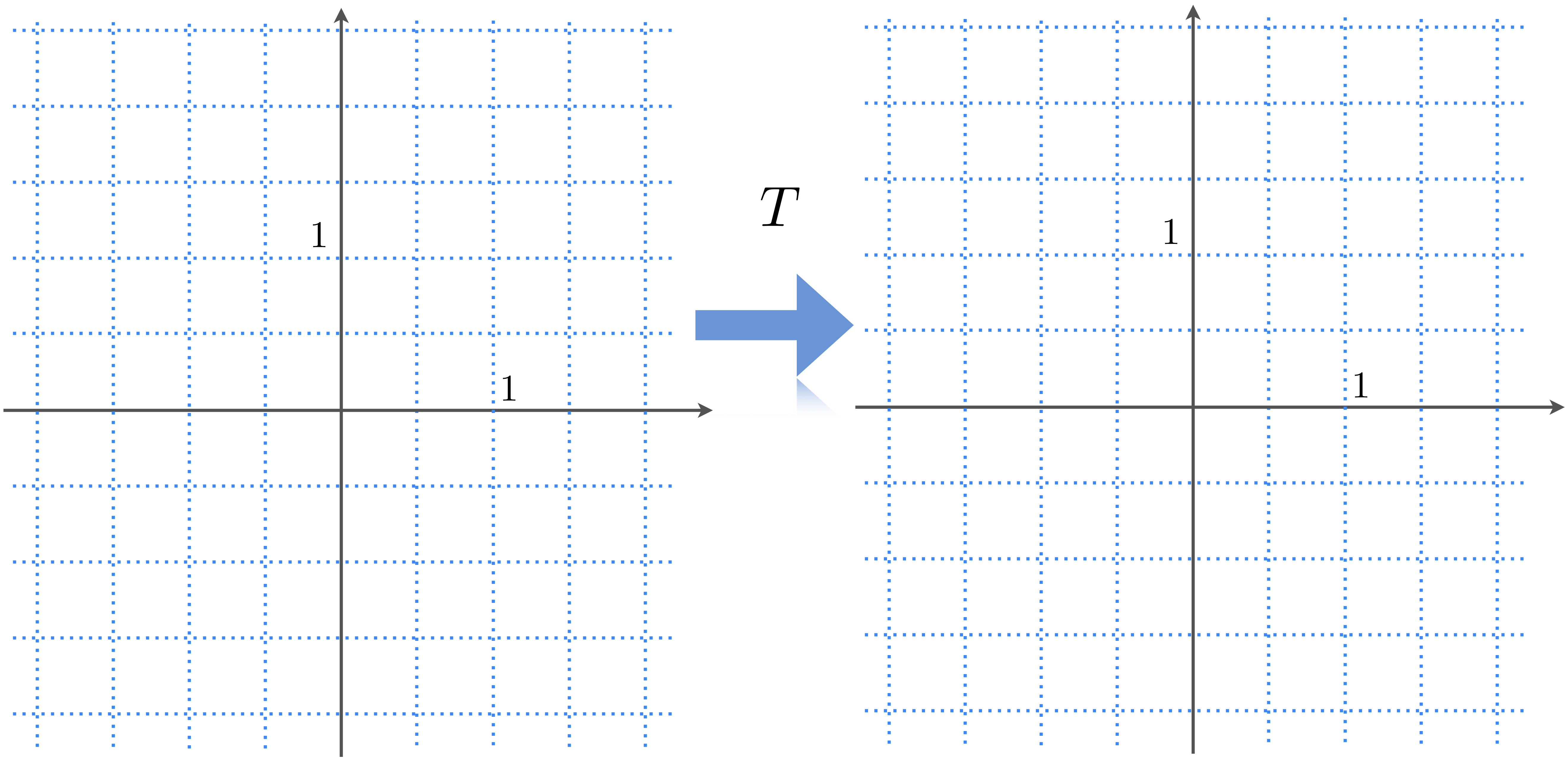
on va constater que la quasi-totalité des transformations linéaires sont des transformations géométriques vues au secondaire.

Homothéties

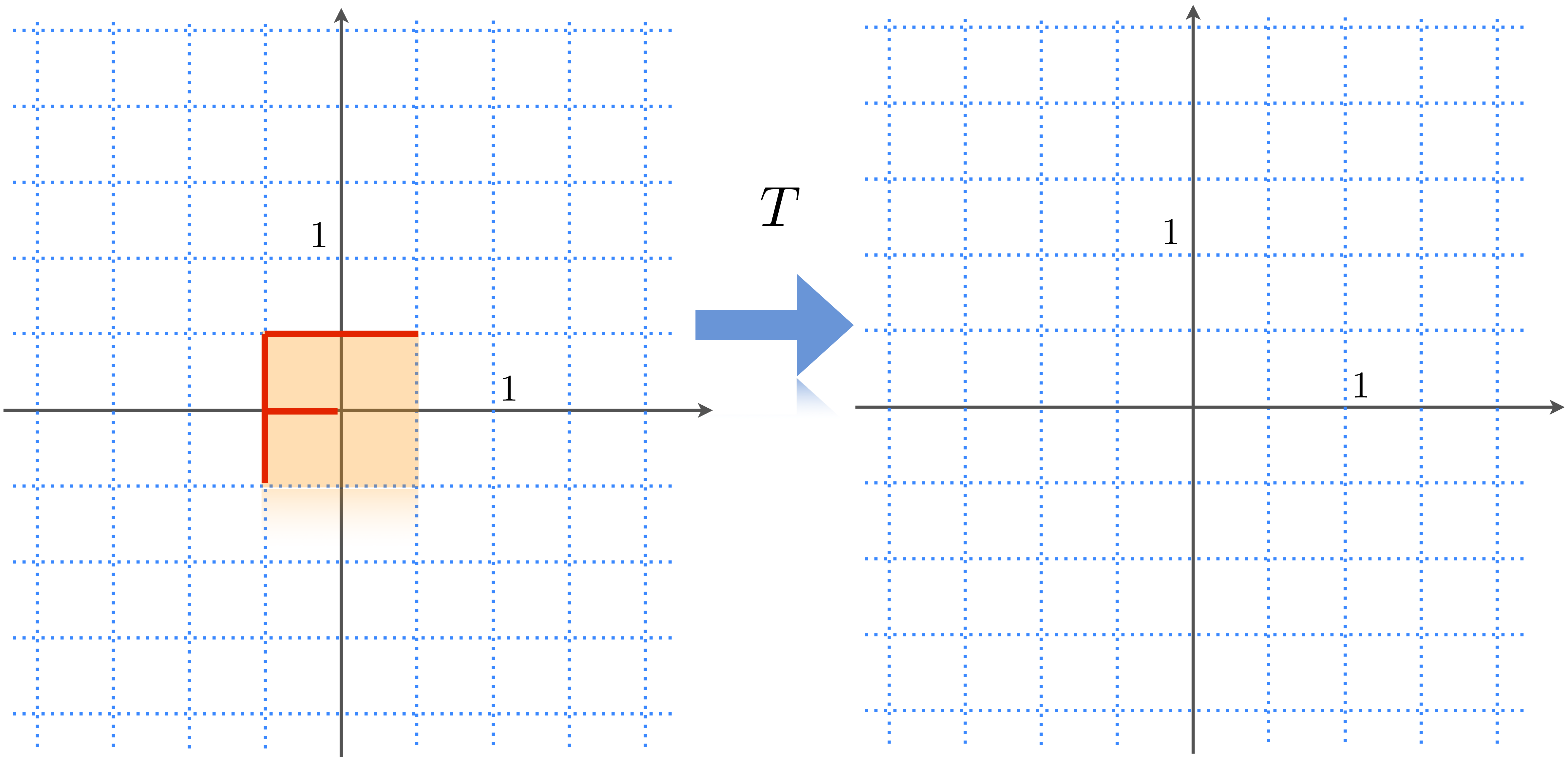




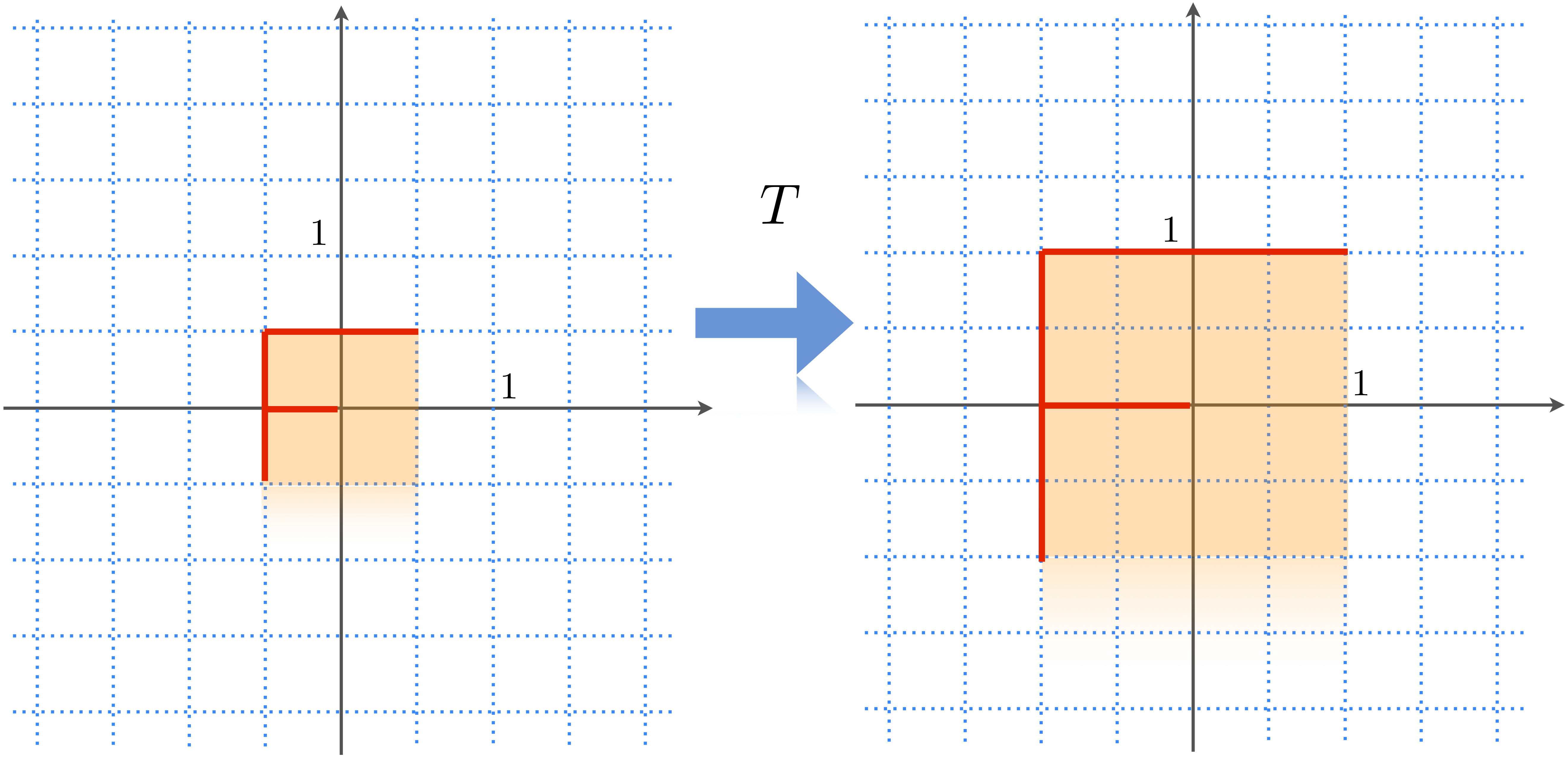
Homothéties



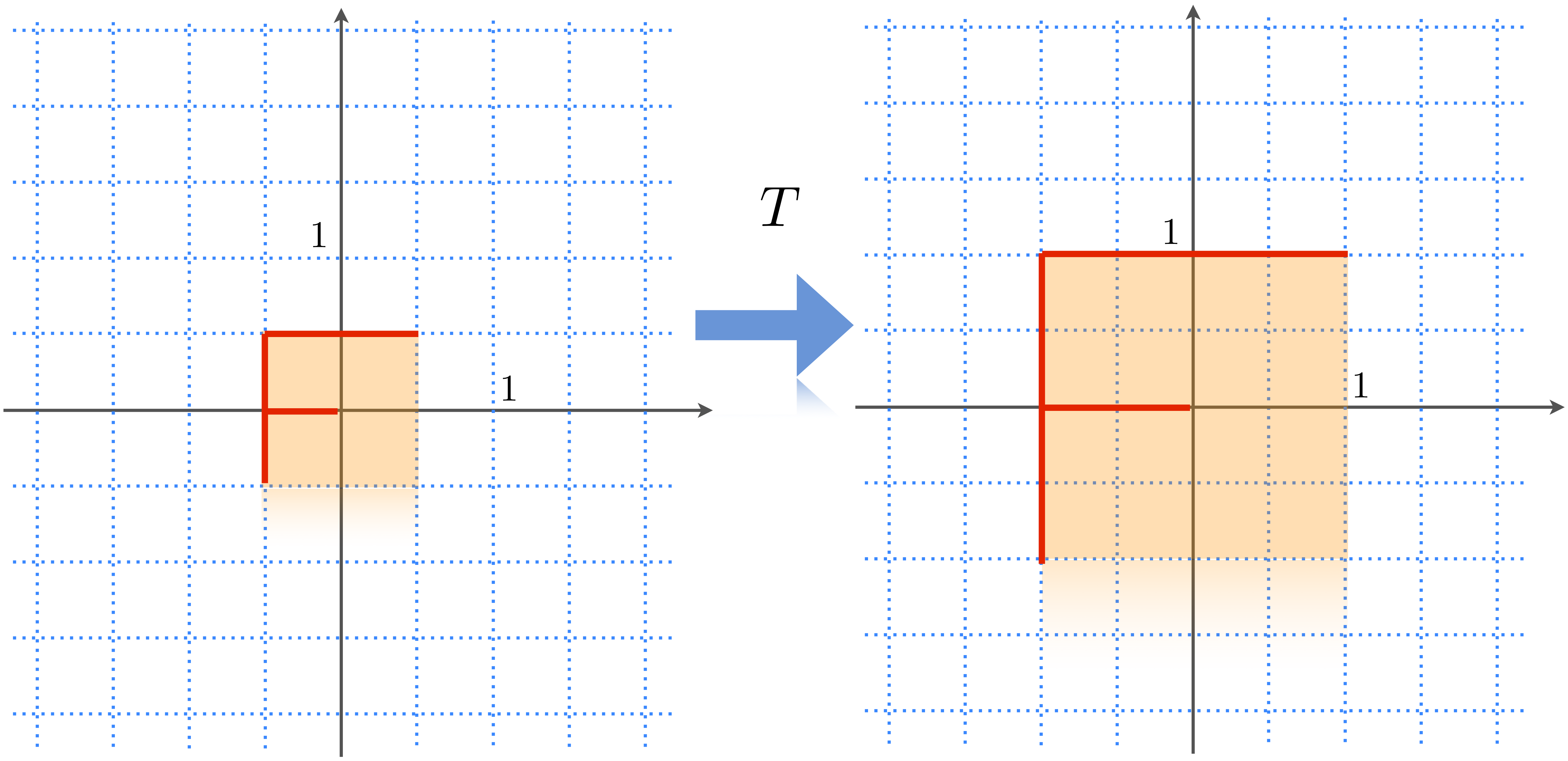
Homothéties



Homothéties

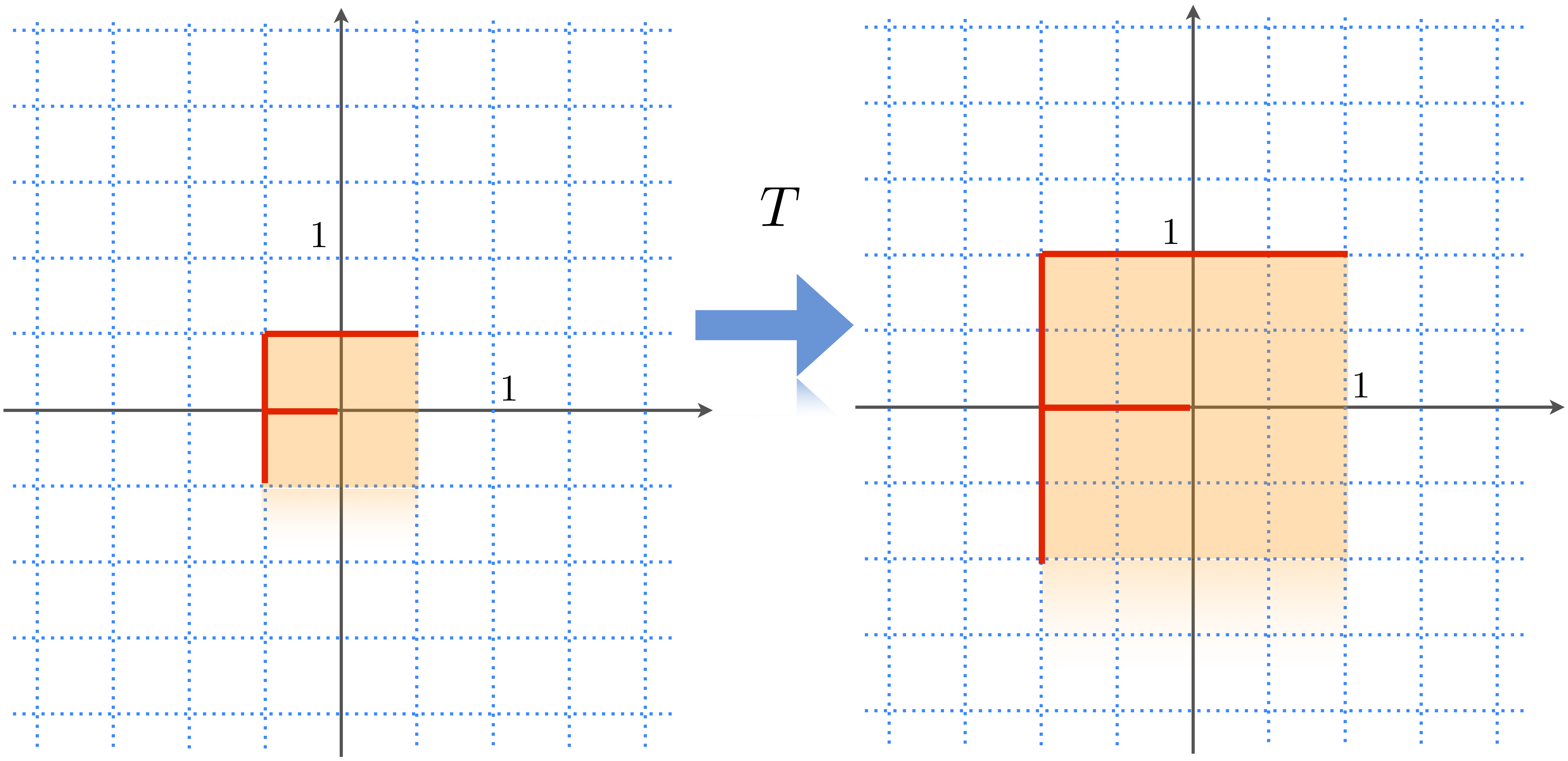


Homothéties



$$T(\vec{\imath}) = (2, 0)$$

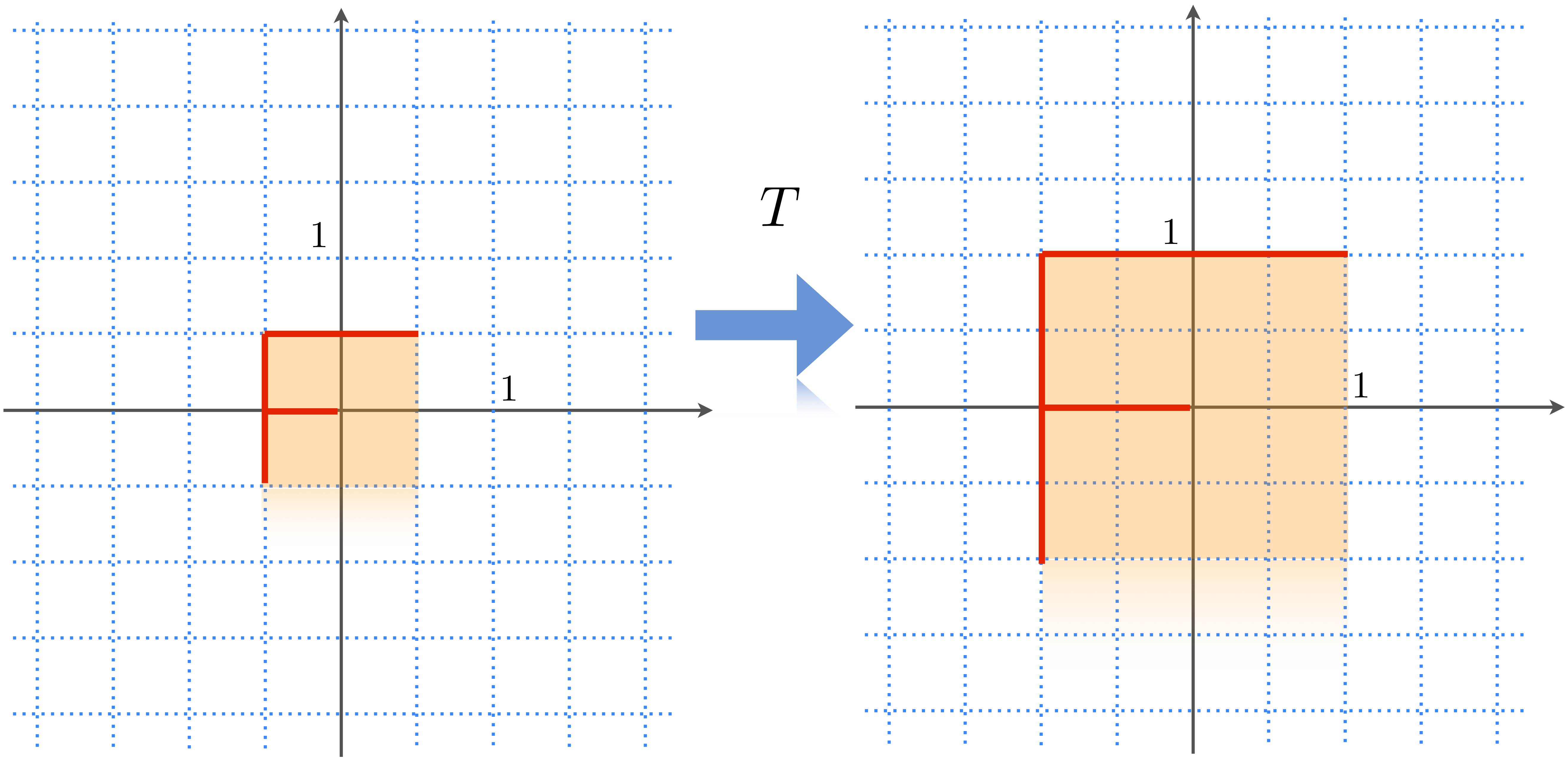
Homothéties



$$T(\vec{\imath}) = (2,0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0,2)$$

Homothéties



$$T(\vec{\imath}) = (2, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition

Une homothétie d'un facteur $k > 0$ est une transformation linéaire qui envoie chaque vecteur sur k fois lui-même.

Définition

Une homothétie d'un facteur $k > 0$ est une transformation linéaire qui envoie chaque vecteur sur k fois lui-même.

$$T(\vec{u}) = k\vec{u}$$

Définition

Une homothétie d'un facteur $k > 0$ est une transformation linéaire qui envoie chaque vecteur sur k fois lui-même.

$$T(\vec{u}) = k\vec{u}$$

La matrice qui modélise une homothétie est de la forme:

Définition

Une homothétie d'un facteur $k > 0$ est une transformation linéaire qui envoie chaque vecteur sur k fois lui-même.

$$T(\vec{u}) = k\vec{u}$$

La matrice qui modélise une homothétie est de la forme:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Définition Une homothétie d'un facteur $k > 0$ est une transformation linéaire qui envoie chaque vecteur sur k fois lui-même.

$$T(\vec{u}) = k\vec{u}$$

La matrice qui modélise une homothétie est de la forme:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Définition

Une homothétie d'un facteur $k > 0$ est une transformation linéaire qui envoie chaque vecteur sur k fois lui-même.

$$T(\vec{u}) = k\vec{u}$$

La matrice qui modélise une homothétie est de la forme:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$$

Définition

Une homothétie d'un facteur $k > 0$ est une transformation linéaire qui envoie chaque vecteur sur k fois lui-même.

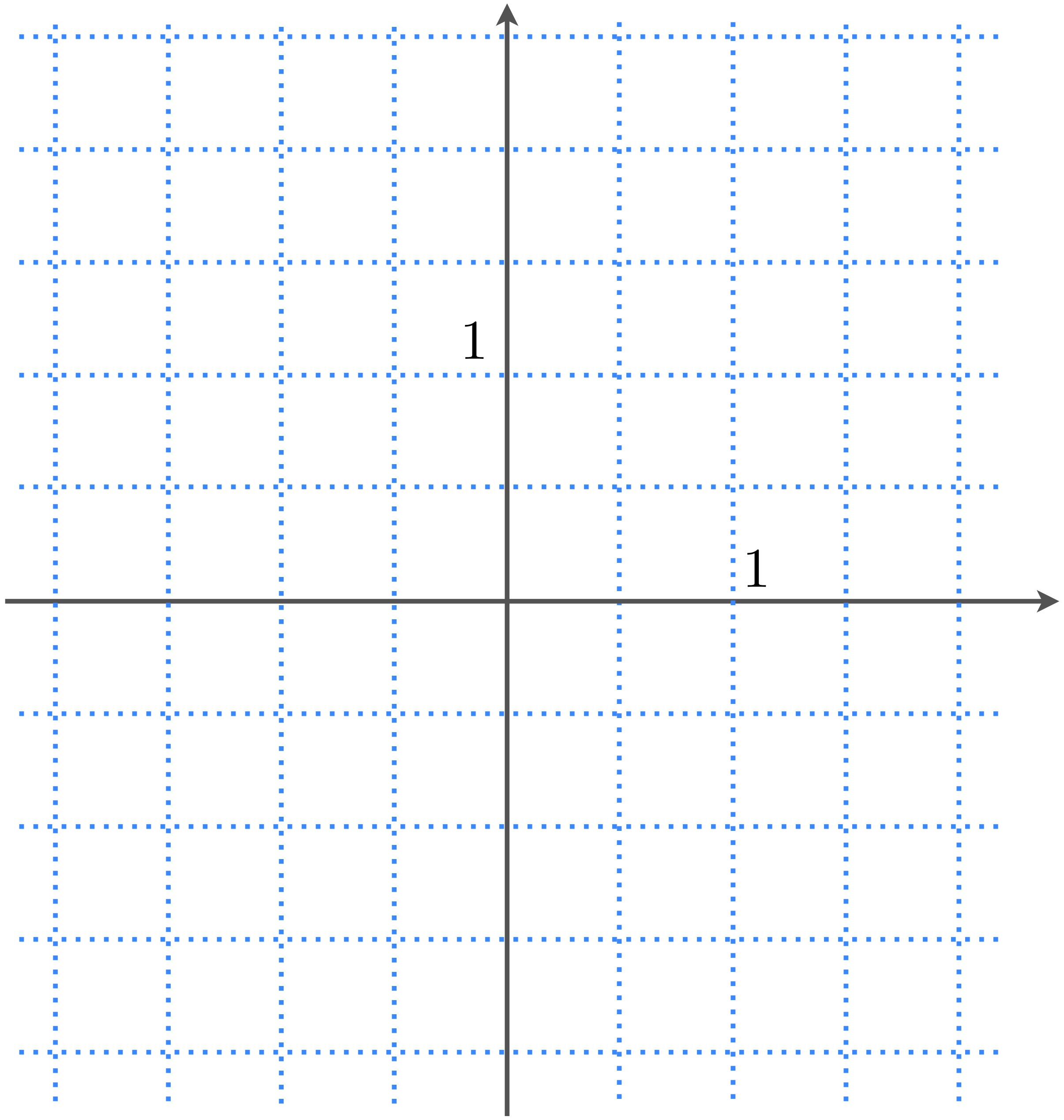
$$T(\vec{u}) = k\vec{u}$$

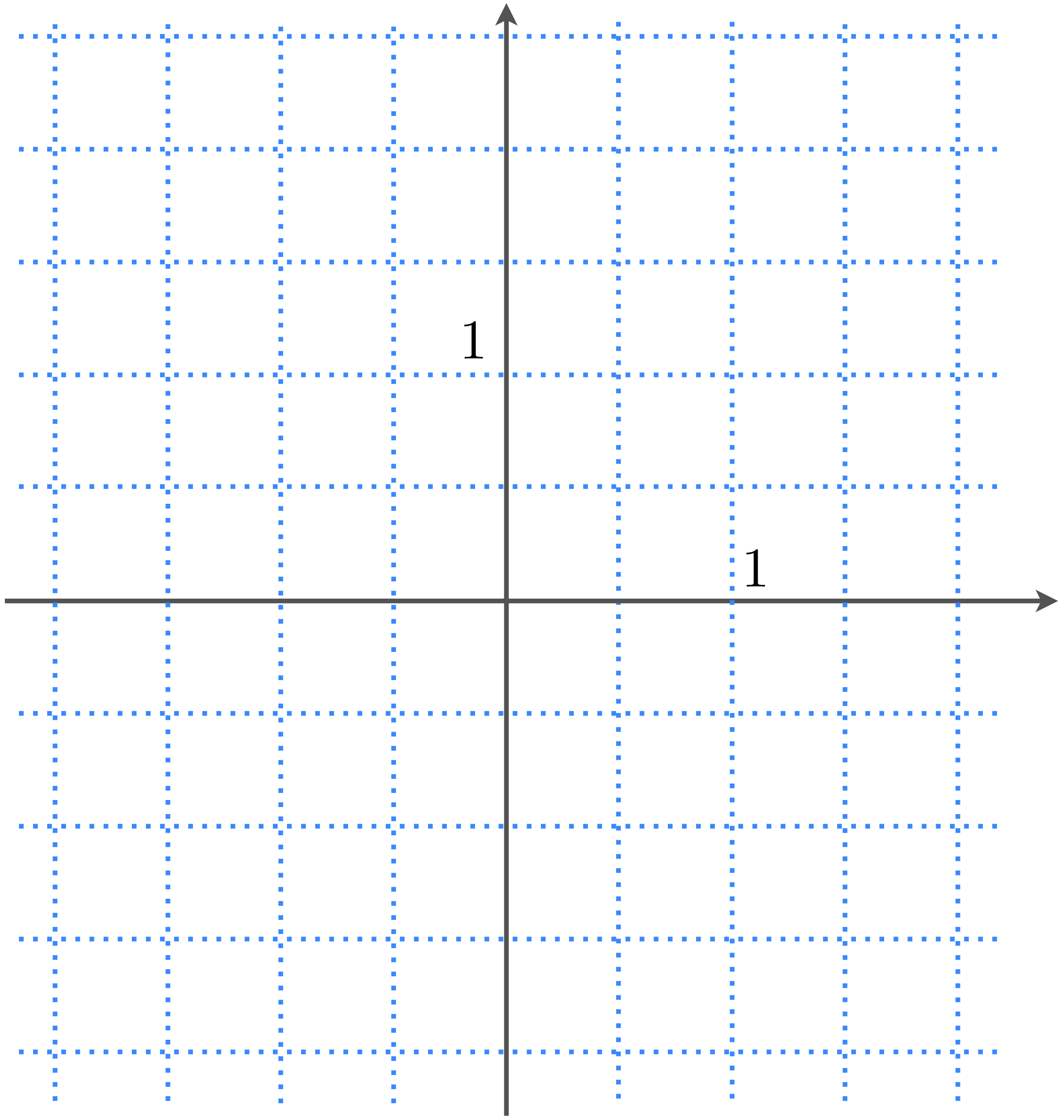
La matrice qui modélise une homothétie est de la forme:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

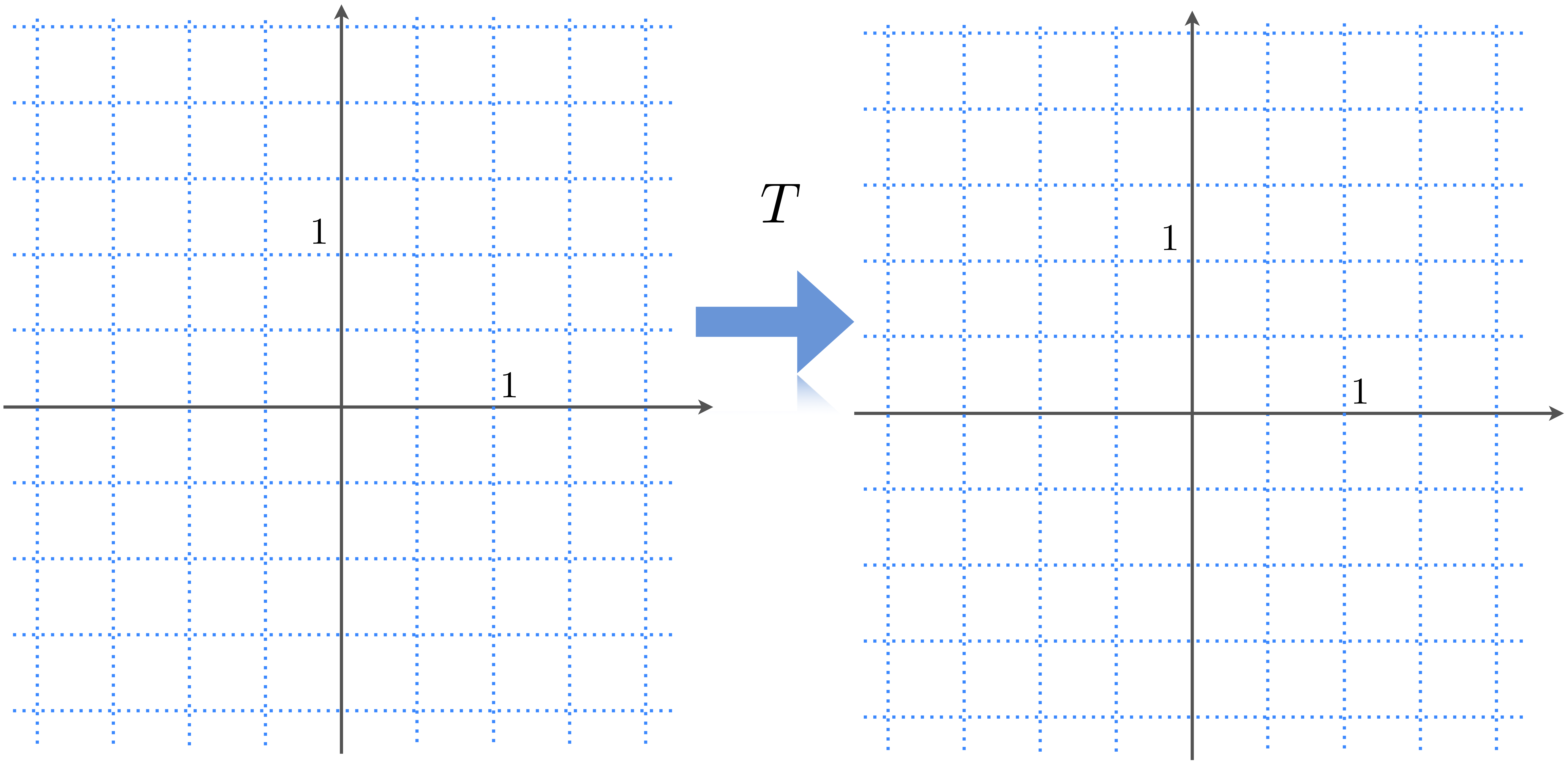
$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On peut faire les choses à moitié...

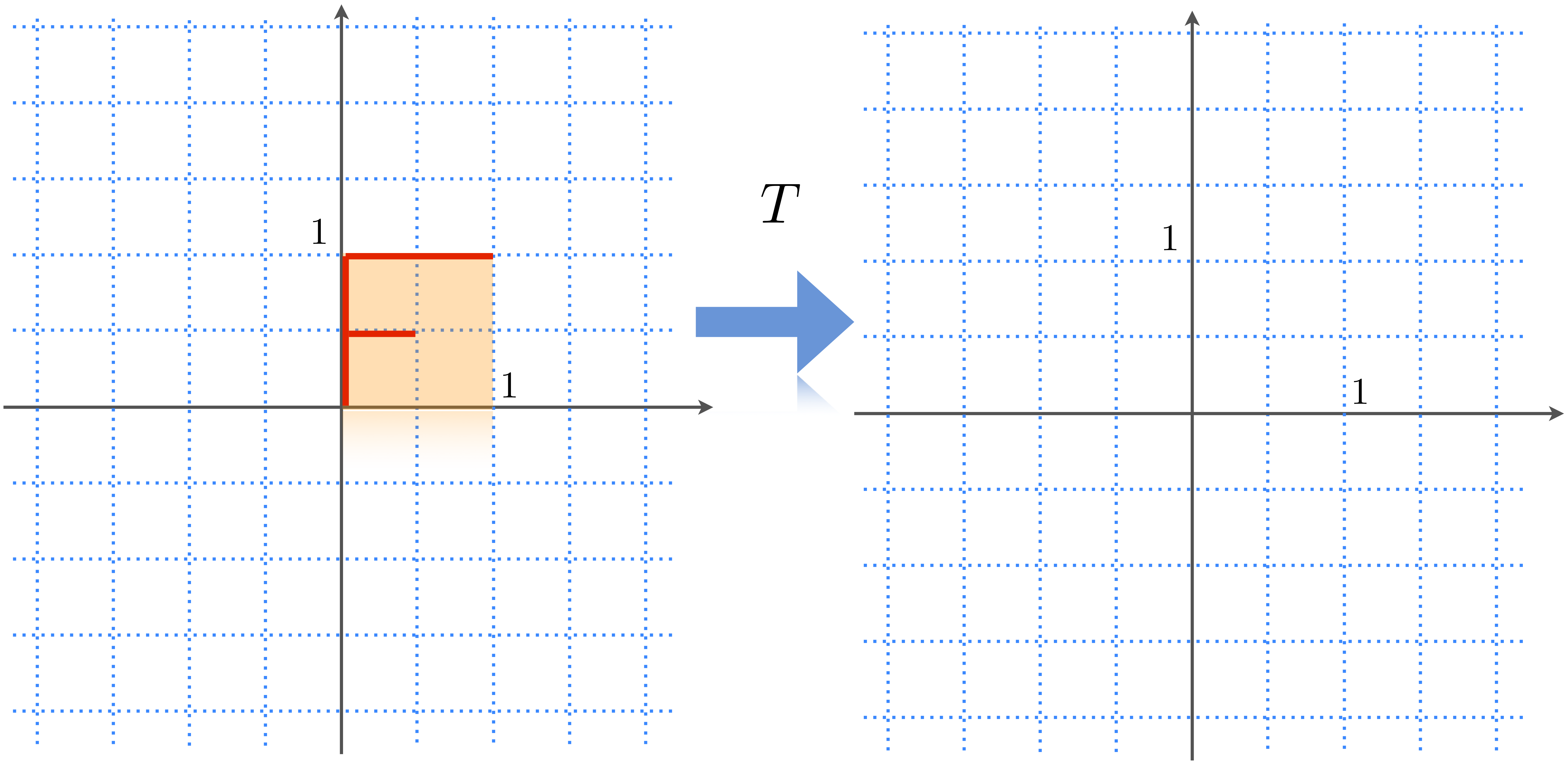




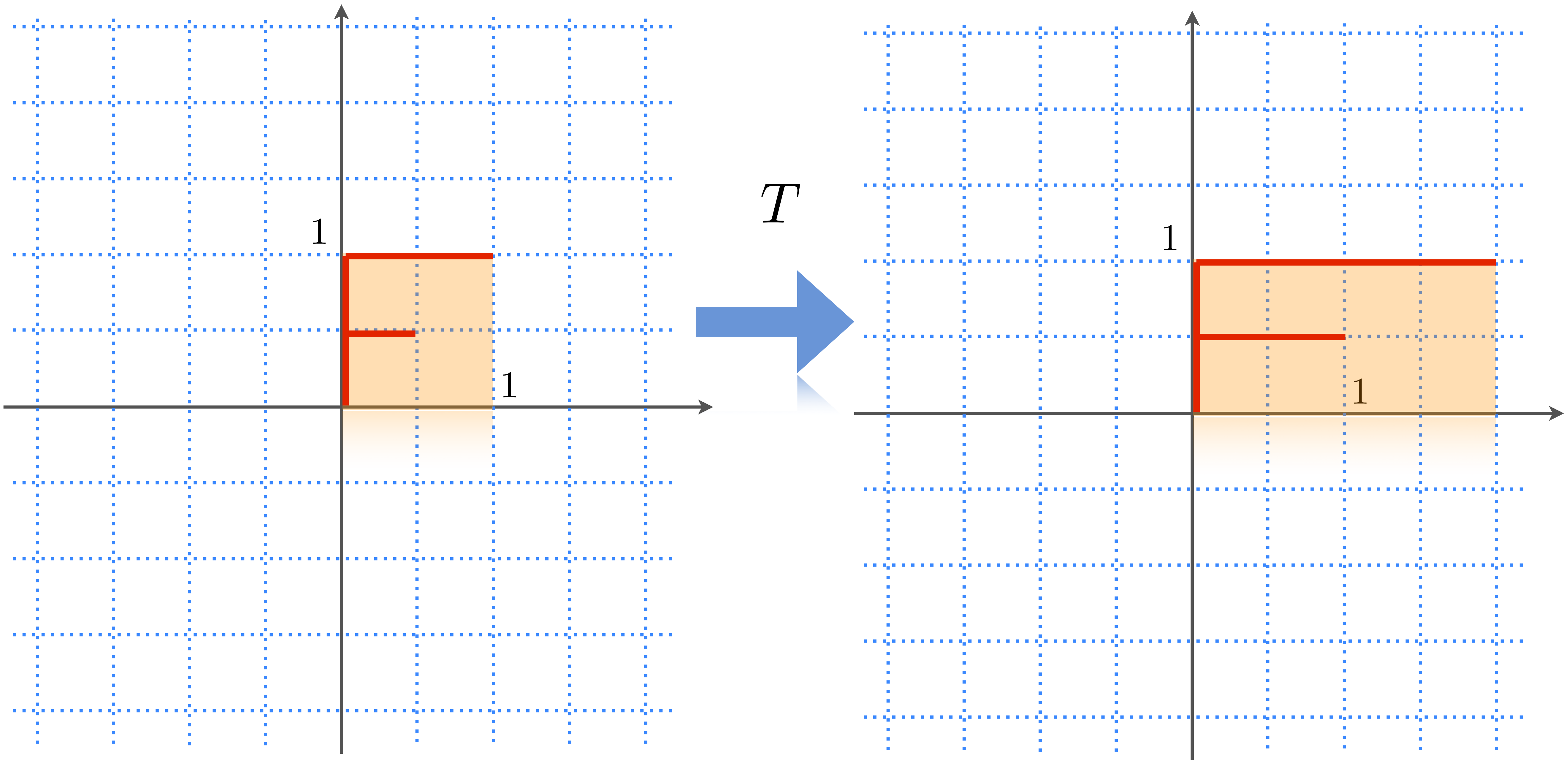
On peut faire les choses à moitié...



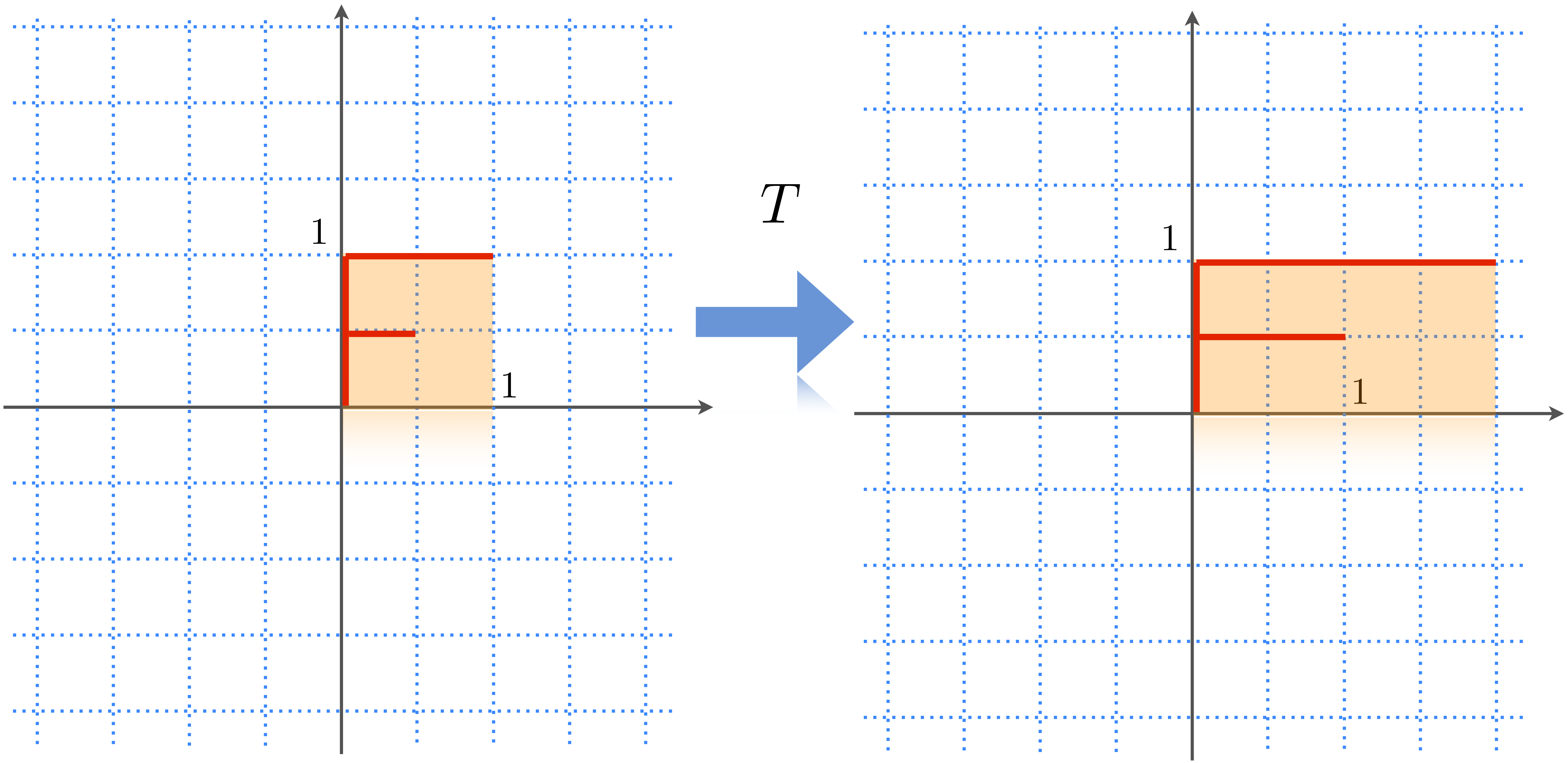
On peut faire les choses à moitié...



On peut faire les choses à moitié...

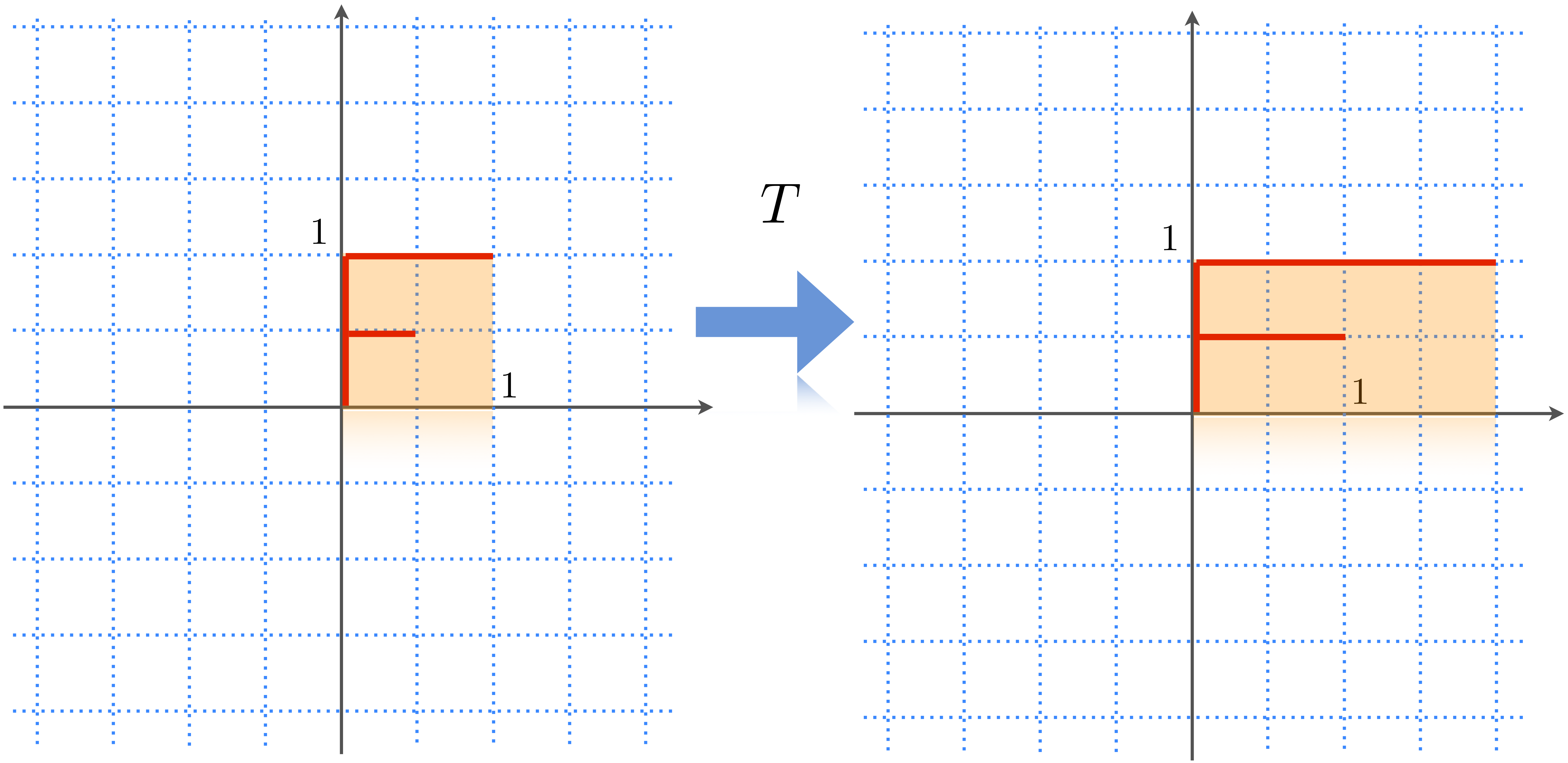


On peut faire les choses à moitié...



$$T(\vec{\imath}) = (2, 0)$$

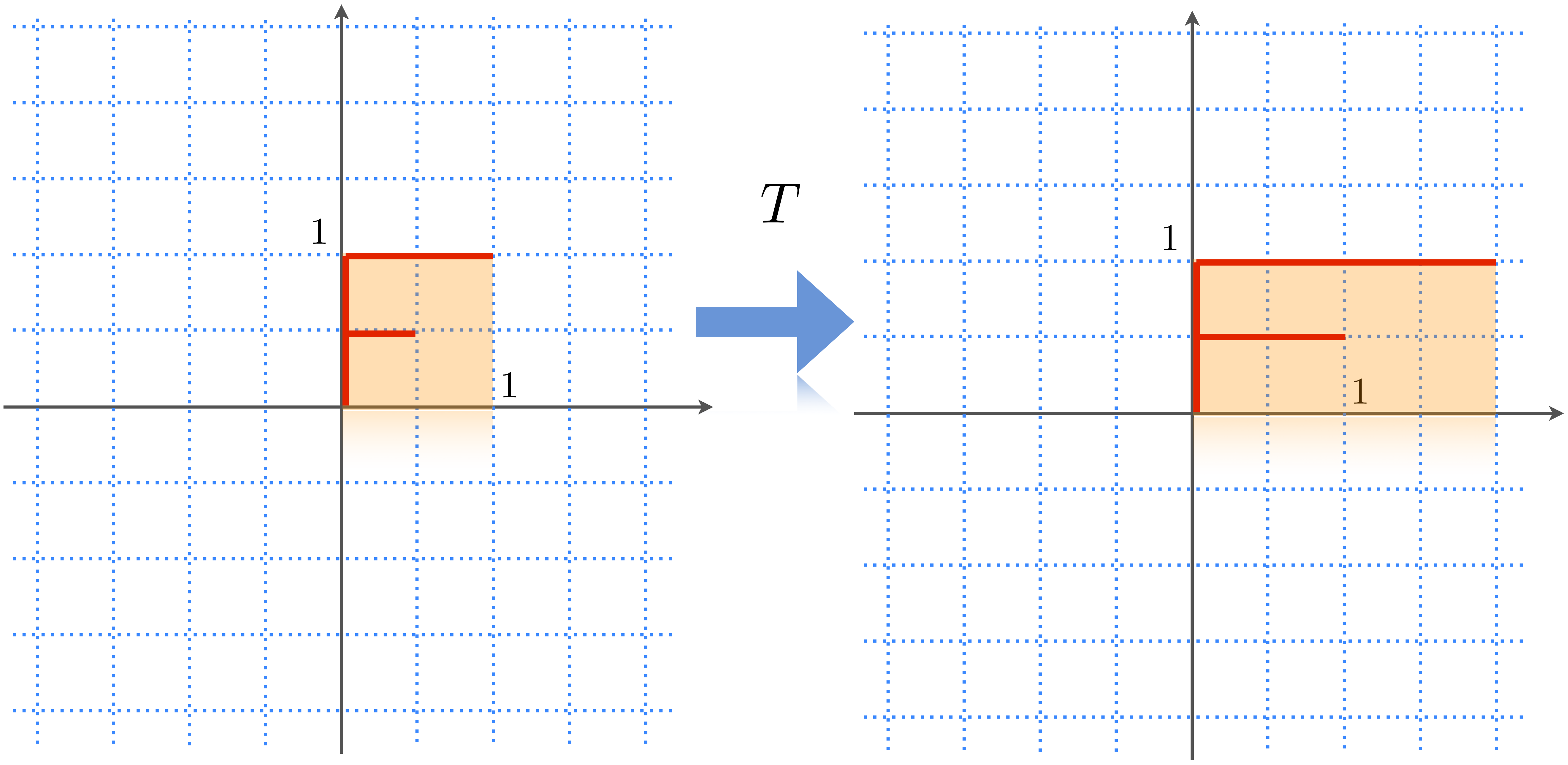
On peut faire les choses à moitié...



$$T(\vec{\imath}) = (2, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 1)$$

On peut faire les choses à moitié...

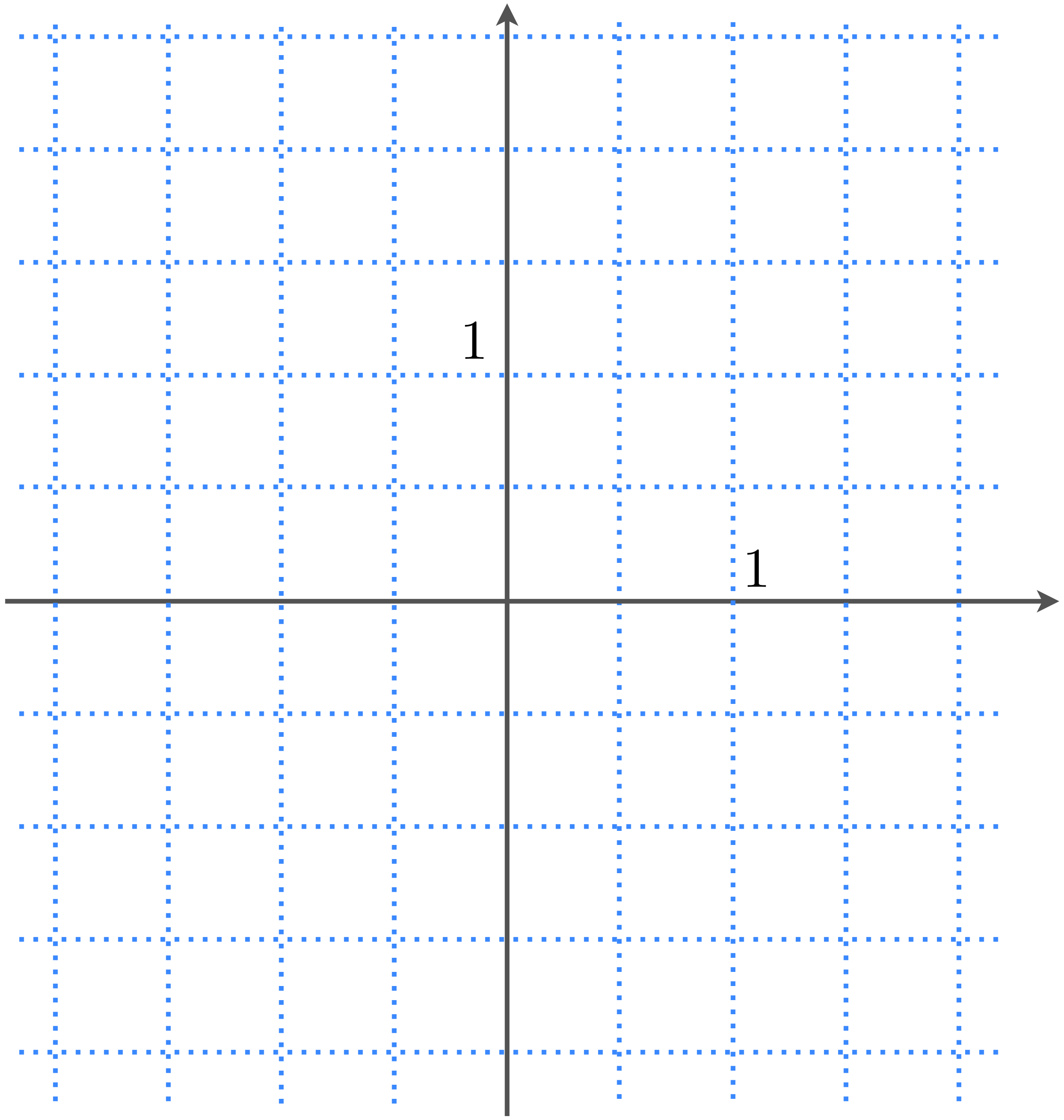


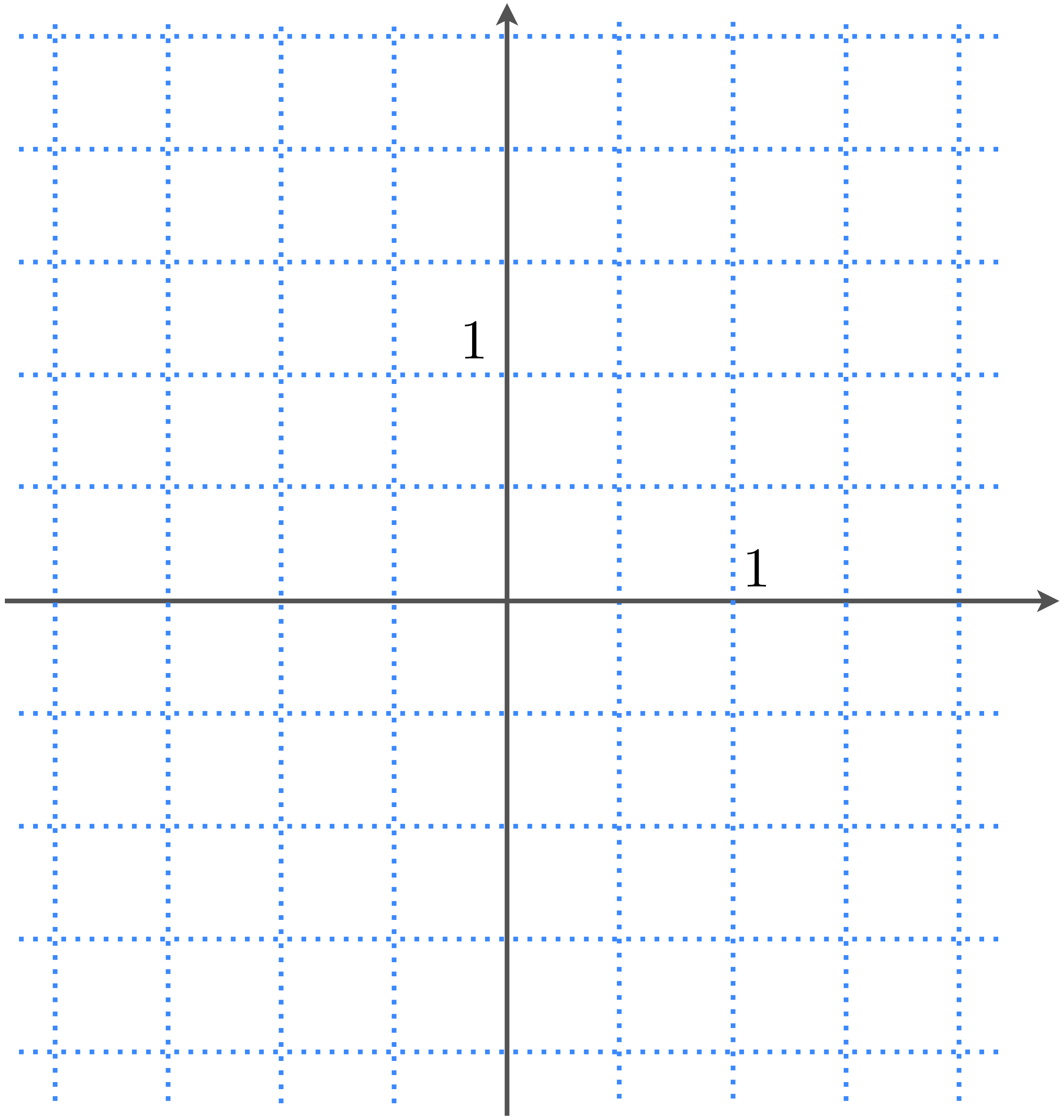
$$T(\vec{\imath}) = (2, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 1)$$

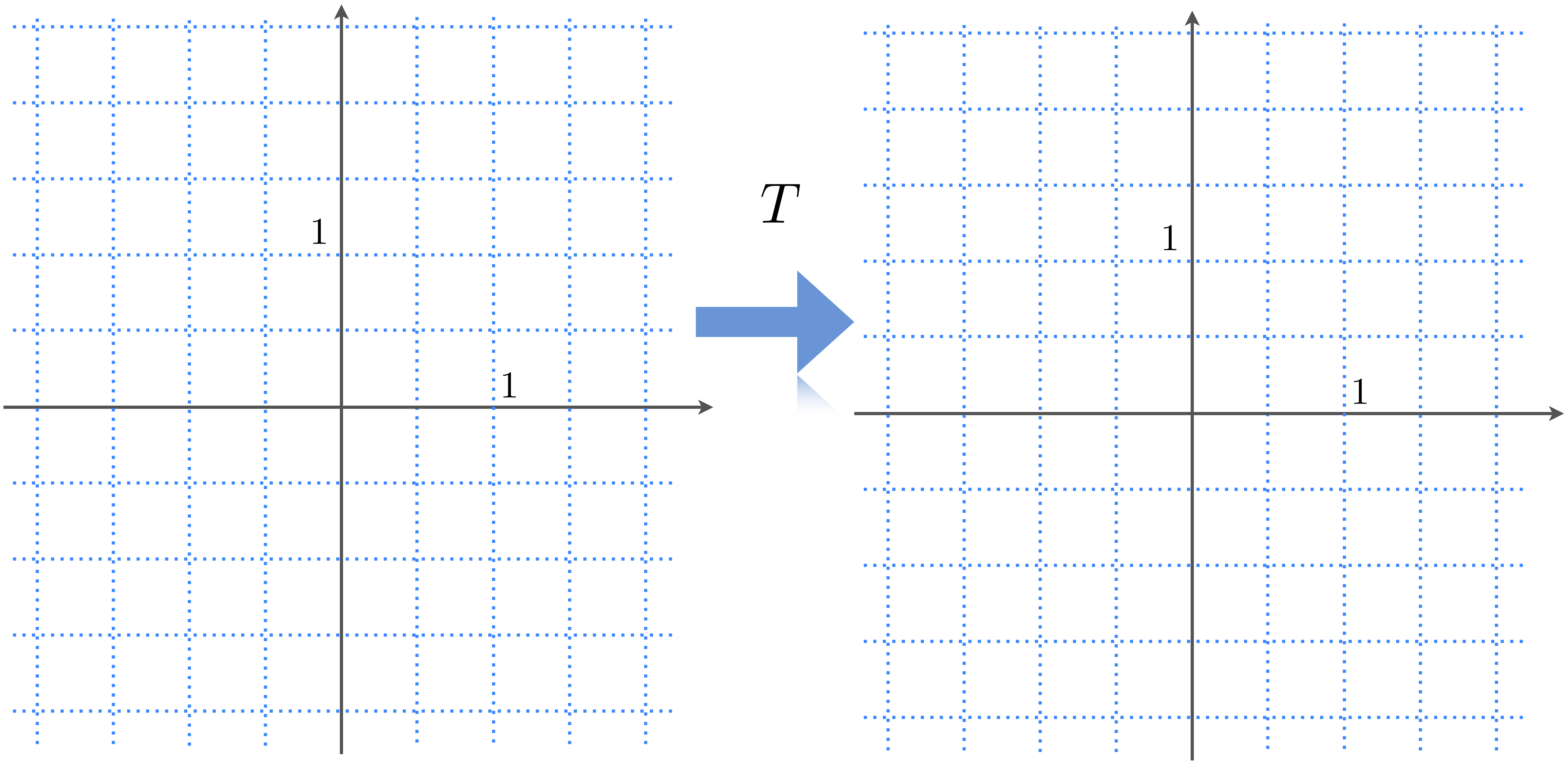
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou bien...

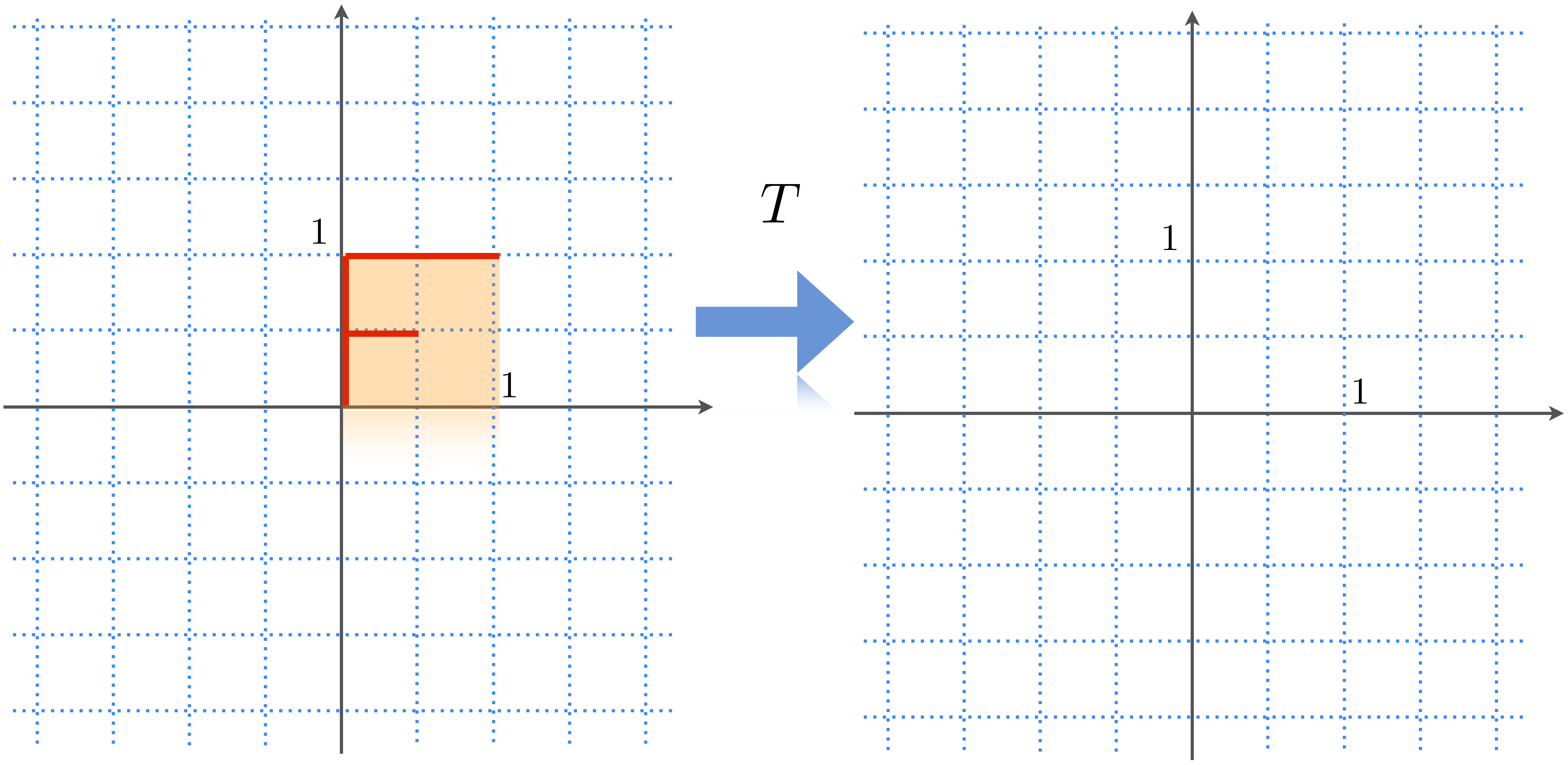




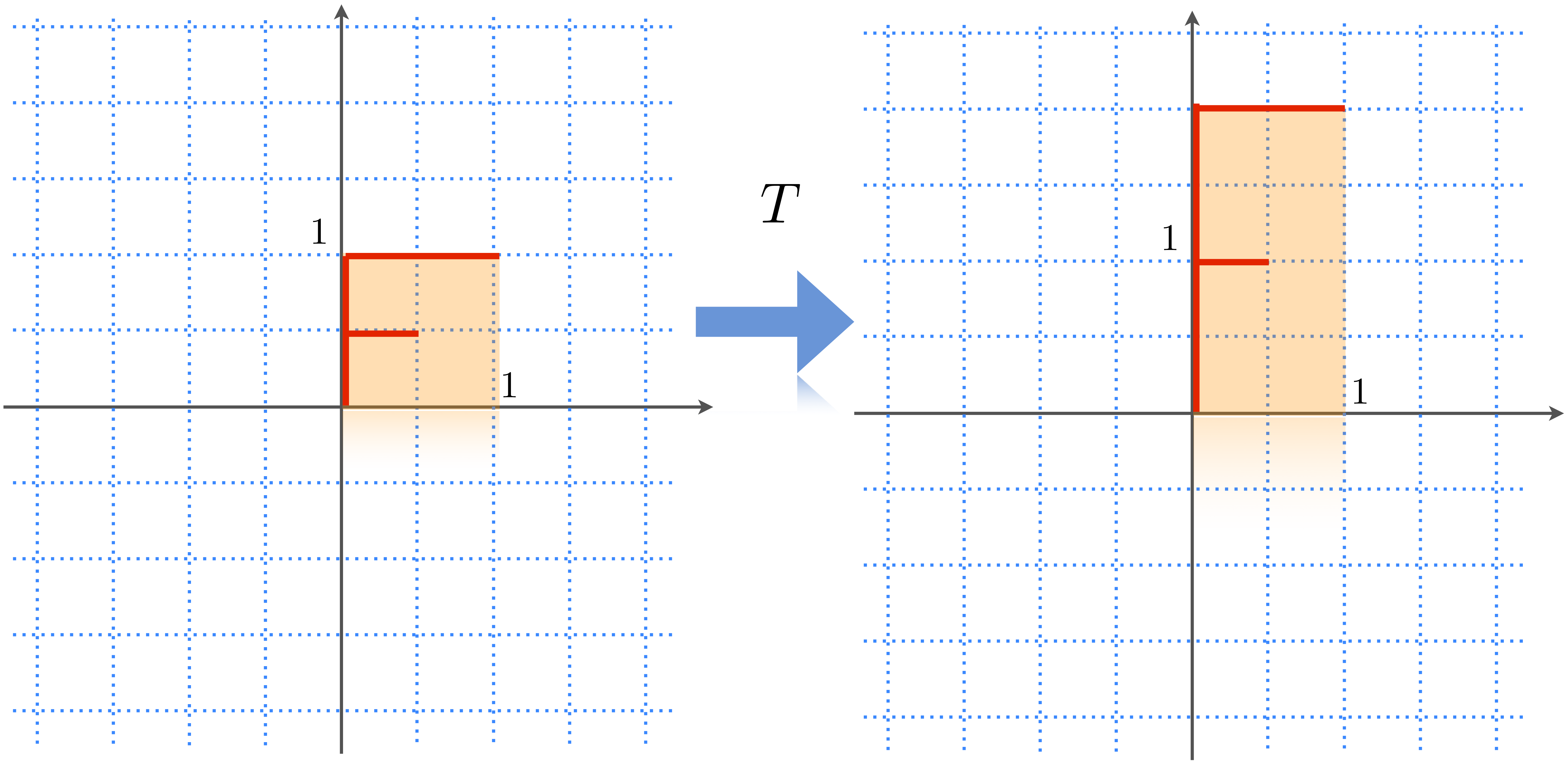
ou bien...



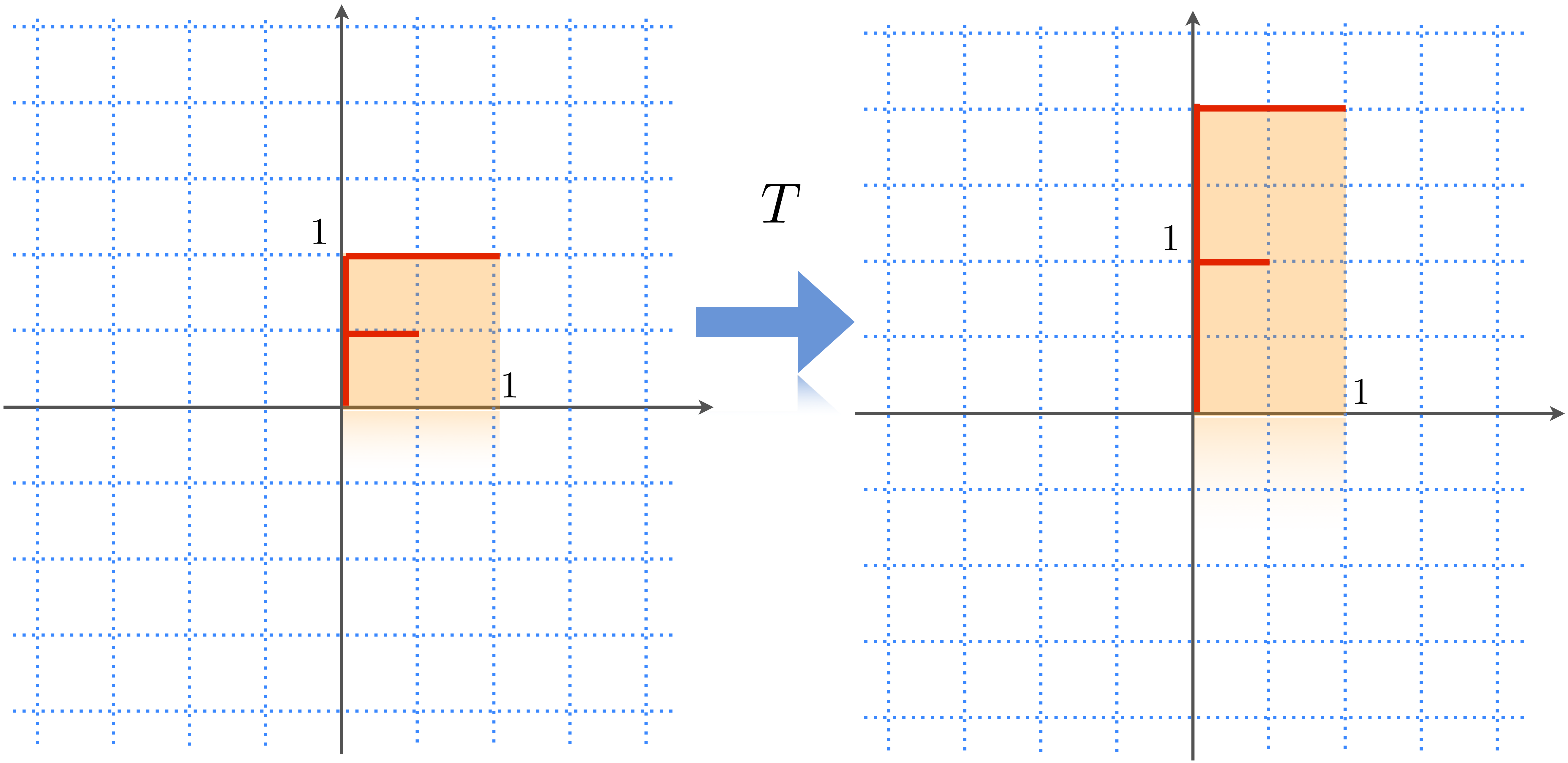
ou bien...



ou bien...

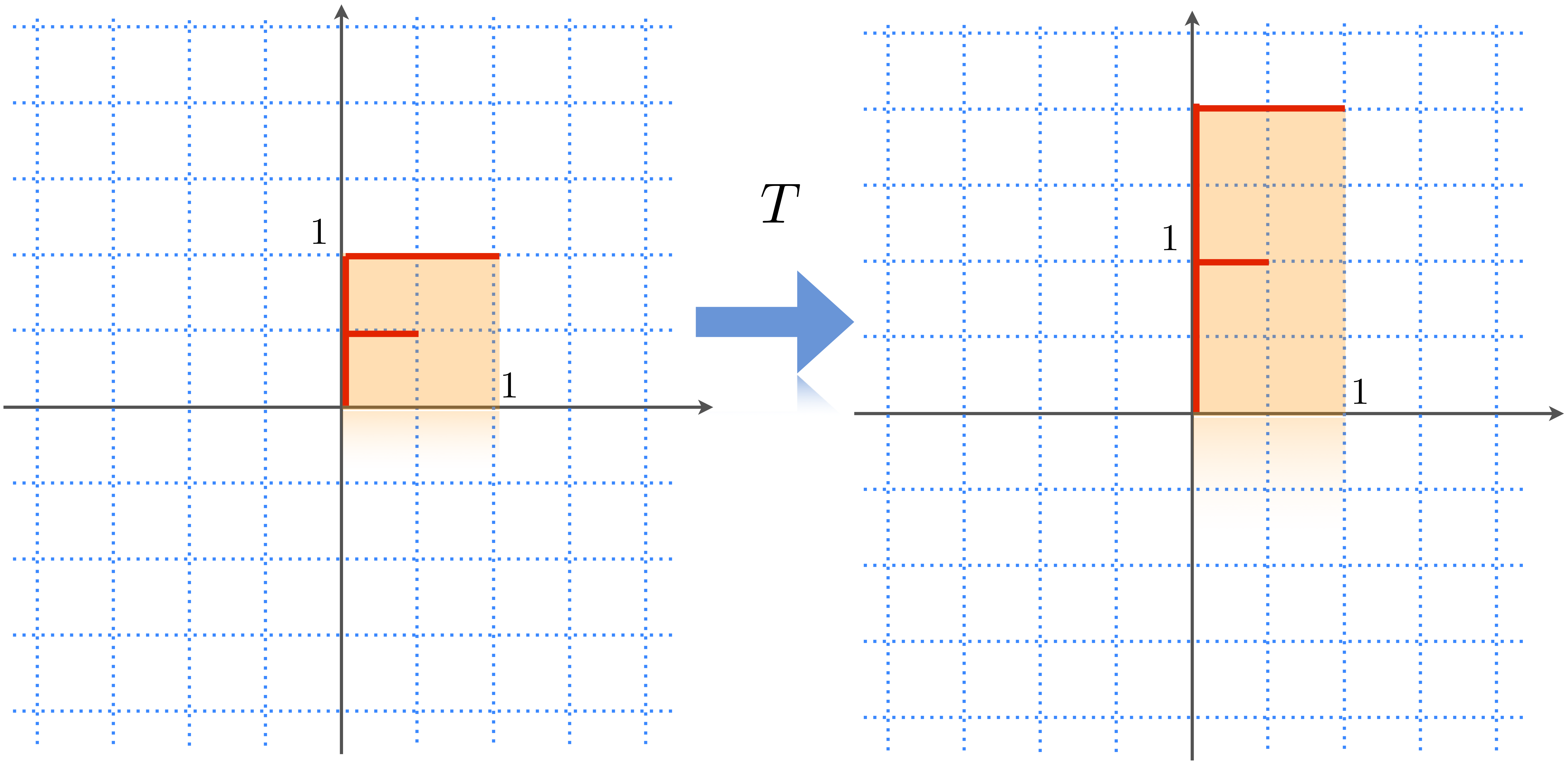


ou bien...



$$T(\vec{\imath}) = (1, 0)$$

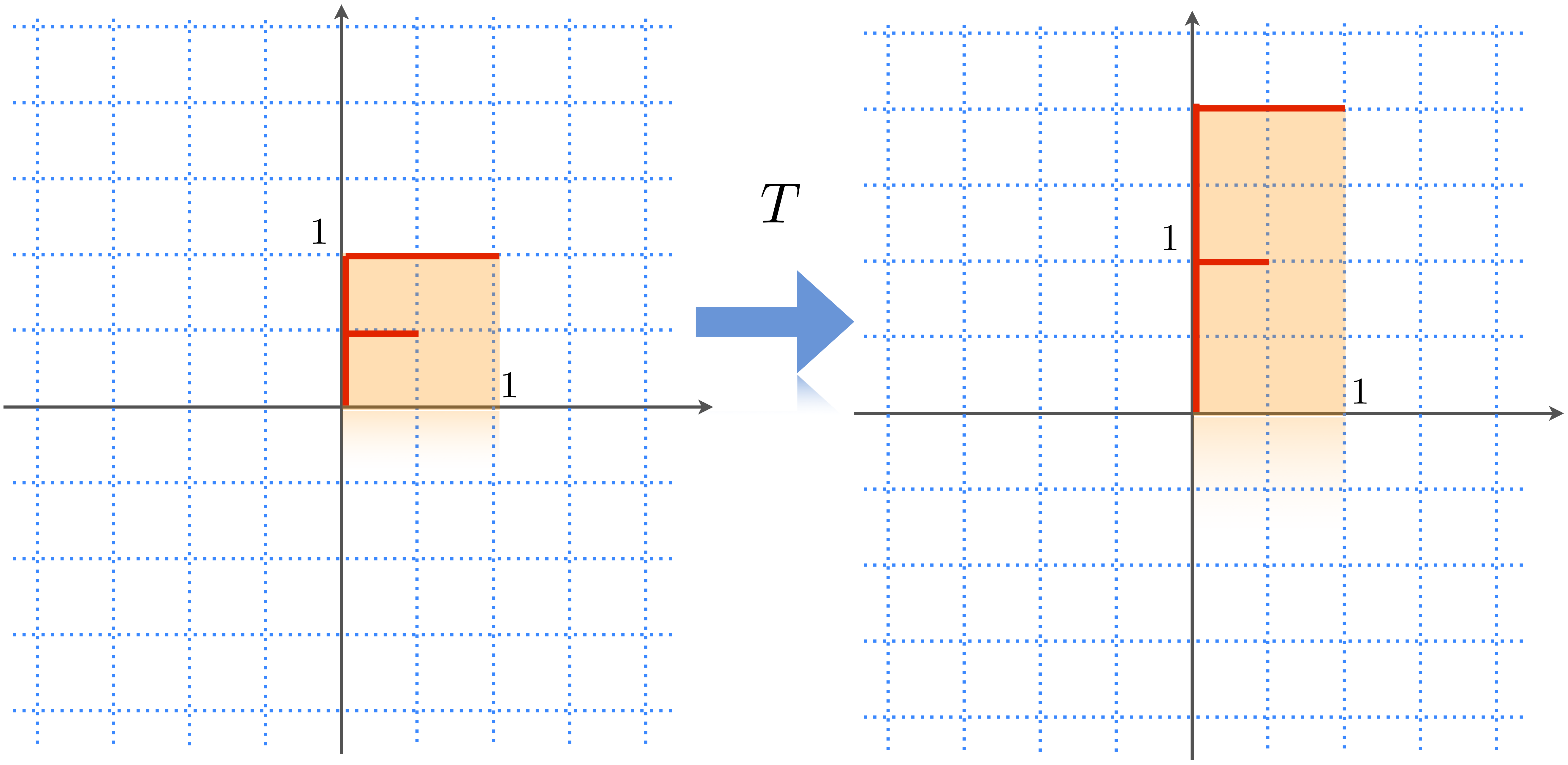
ou bien...



$$T(\vec{\imath}) = (1, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 2)$$

ou bien...



$$T(\vec{\imath}) = (1, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans les deux derniers exemples, on a étiré dans une direction et laissé la direction perpendiculaire inchangée.

Dans les deux derniers exemples, on a étiré dans une direction et laissé la direction perpendiculaire inchangée.

Mais il n'y a aucune raison pour que ces deux directions soient celle de $\vec{\imath}$ et celle de $\vec{\jmath}$!

Définition

L' étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{u}$ est une transformation linéaire qui envoie $\vec{u}$ sur k fois lui-même et $\vec{u}_\perp$ sur lui-même.

Définition

L' étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{u}$ est une transformation linéaire qui envoie $\vec{u}$ sur k fois lui-même et $\vec{u}_\perp$ sur lui-même.

$$T(\vec{u}) = k\vec{u}$$

Définition L' étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{u}$ est une transformation linéaire qui envoie $\vec{u}$ sur k fois lui-même et $\vec{u}_\perp$ sur lui-même.

$$T(\vec{u}) = k\vec{u} \qquad\qquad T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1, 3)$.

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1, 3)$.

$$T(1, 3) = 2(1, 3)$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1,3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) \quad = (2,6)$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1, 3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) \quad = (2,6) \qquad\qquad \vec{u}_\perp = (-3, 1)$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1,3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) \quad = (2,6) \qquad\qquad \vec{u}_\perp = (-3,1)$$

$$T(-3,1) = (-3,1)$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1, 3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) \quad = (2,6) \qquad\qquad \vec{u}_{\perp} = (-3,1)$$

$$T(-3,1) = (-3,1)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1,3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) \quad = (2,6) \qquad\qquad \vec{u}_\perp = (-3,1)$$

$$T(-3,1) = (-3,1)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1, 3)$.

$$T(1, 3) = 2(1, 3) \quad = (2, 6) \qquad\qquad \vec{u}_{\perp} = (-3, 1)$$

$$T(-3, 1) = (-3, 1)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1,3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) = (2,6) \qquad \vec{u}_\perp = (-3,1)$$

$$T(-3,1) = (-3,1)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1, 3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) = (2,6) \qquad \vec{u}_\perp = (-3,1)$$

$$T(-3,1) = (-3,1)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1,3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) = (2,6) \qquad \vec{u}_\perp = (-3,1)$$

$$T(-3,1) = (-3,1)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1,3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) \quad = (2,6) \qquad\qquad \vec{u}_\perp = (-3,1)$$

$$T(-3,1) = (-3,1)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1,3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) = (2,6) \qquad \vec{u}_\perp = (-3,1)$$

$$T(-3,1) = (-3,1)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1,3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) \quad = (2,6) \qquad\qquad \vec{u}_{\perp} = (-3,1)$$

$$T(-3,1) = (-3,1)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{10}\right) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1,3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) = (2,6) \qquad \vec{u}_{\perp} = (-3,1)$$

$$T(-3,1) = (-3,1)$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{10}\right) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple Trouver la matrice qui modélise un étirement d'un facteur 2 dans la direction $\vec{u} = (1,3)$.

$$T(1,3) = 2(1,3) \quad = (2,6) \qquad\qquad \vec{u}_\perp = (-3,1)$$

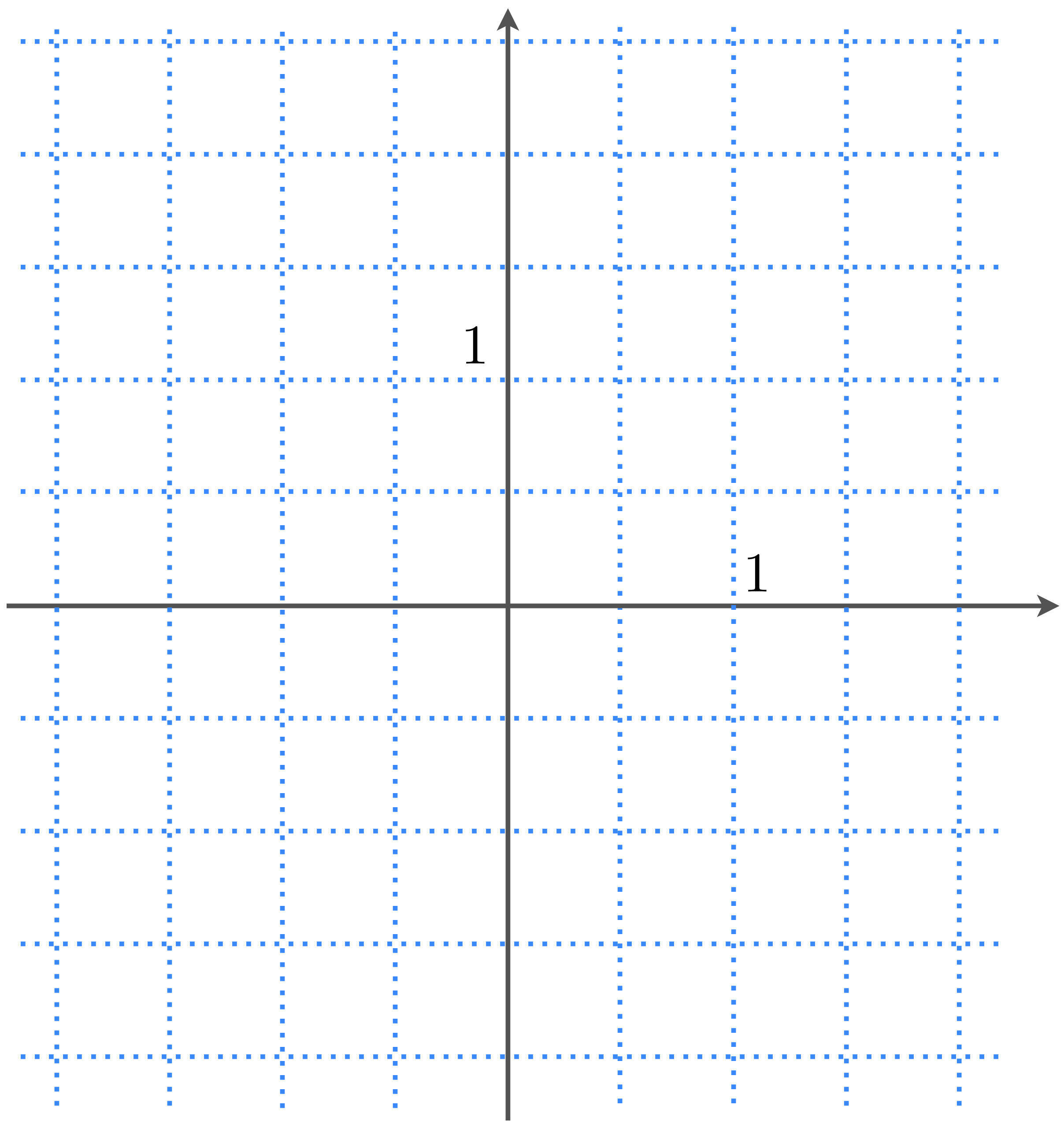
$$T(-3,1) = (-3,1)$$

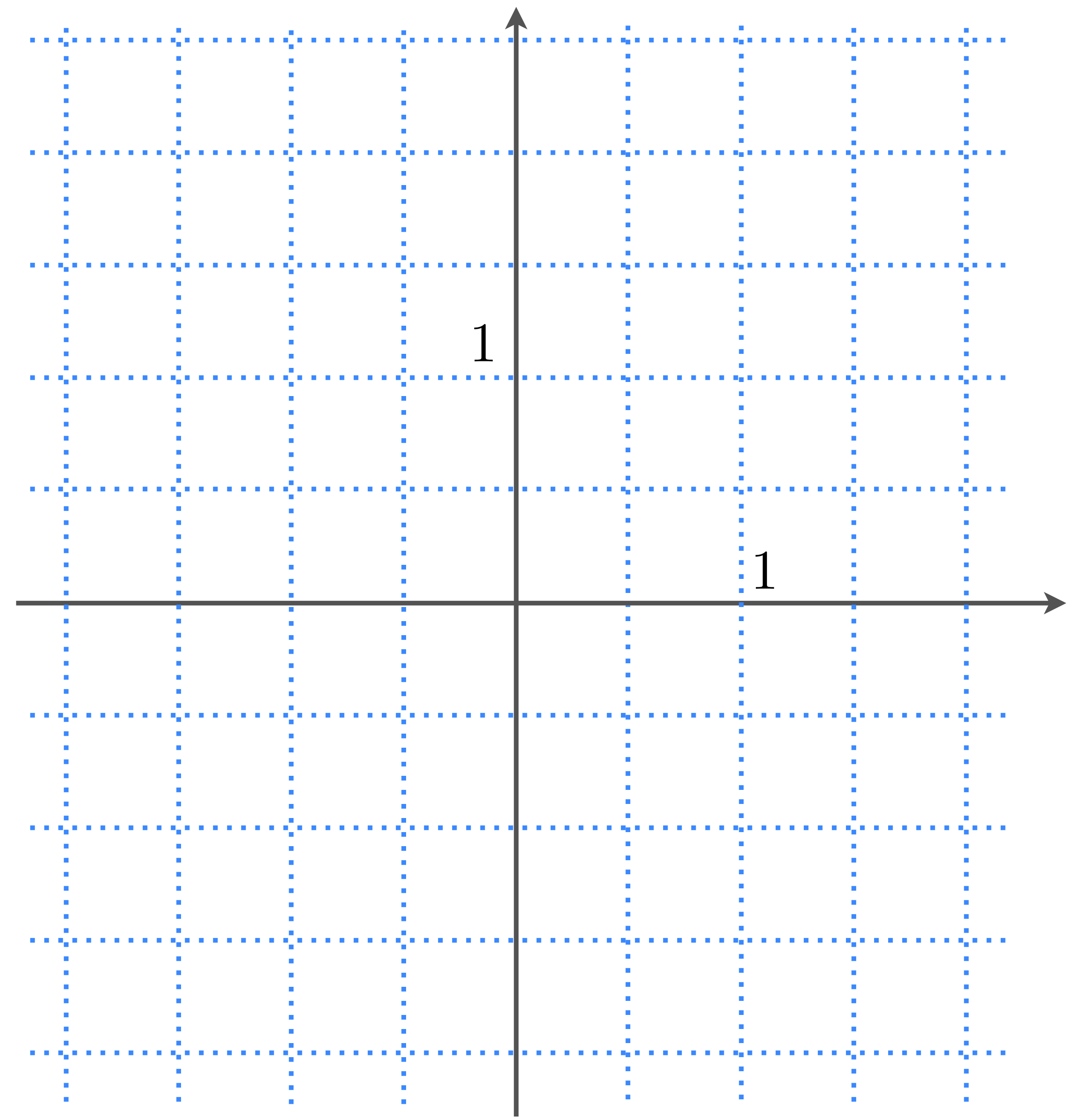
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

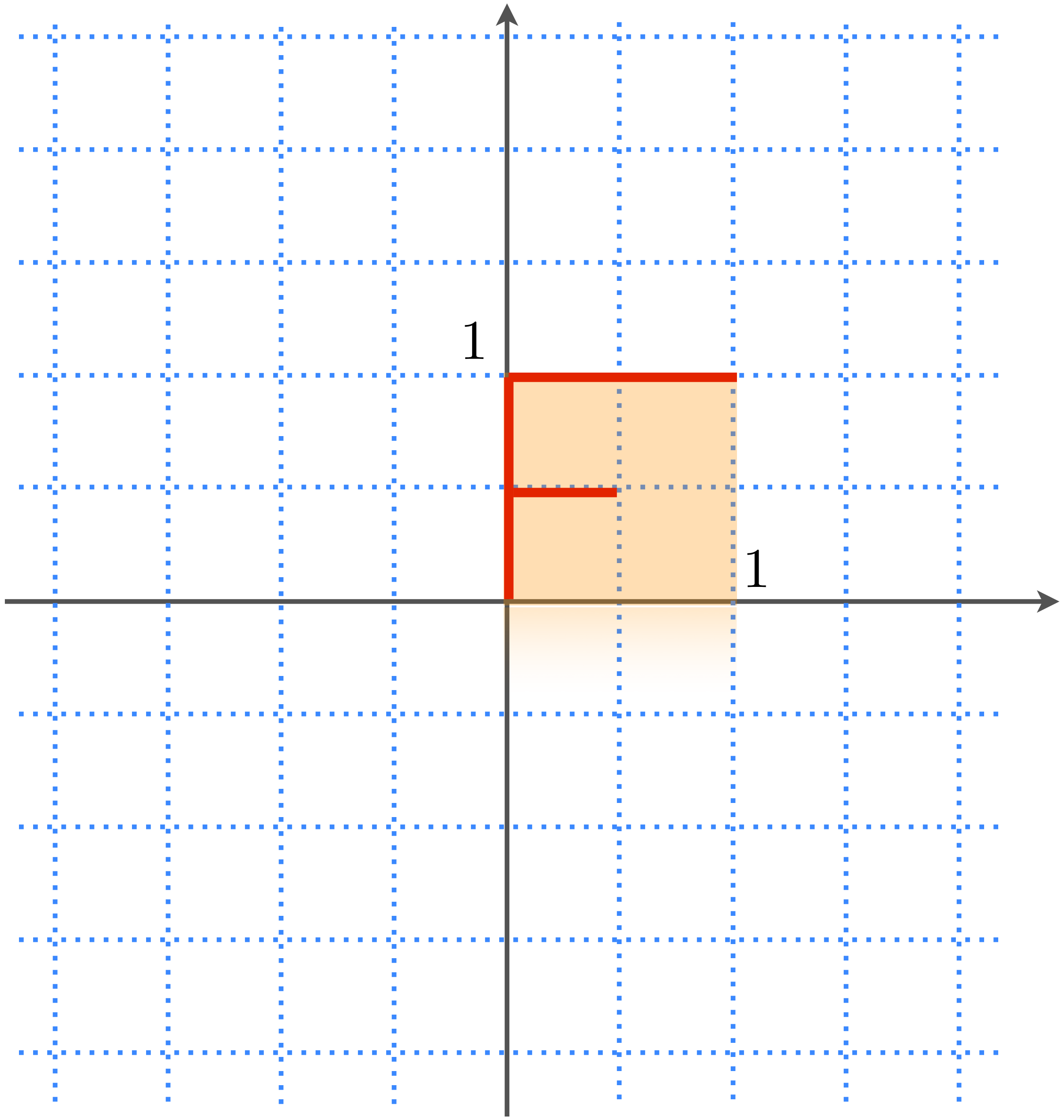
$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{10}\right)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

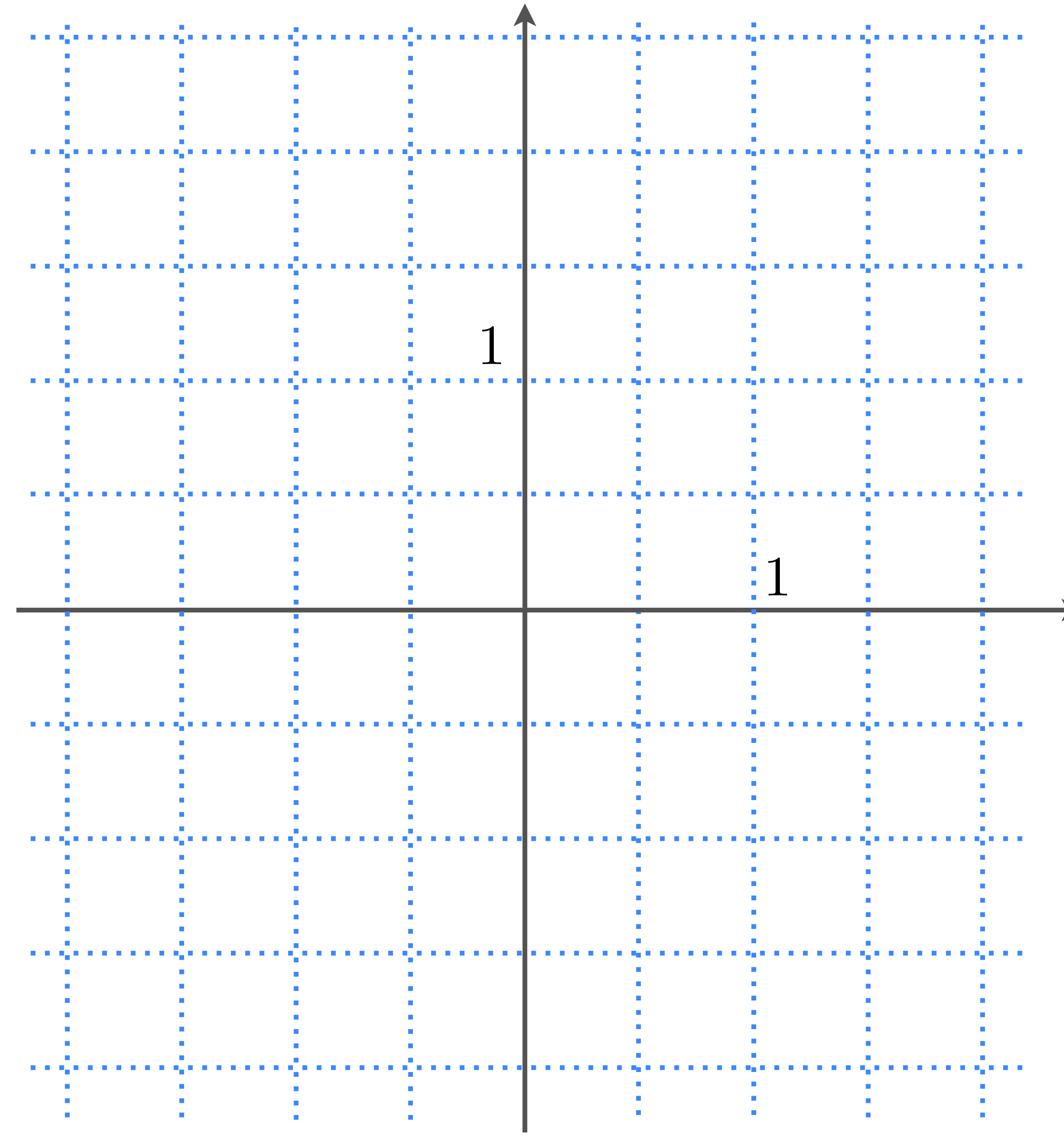
$$= \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$



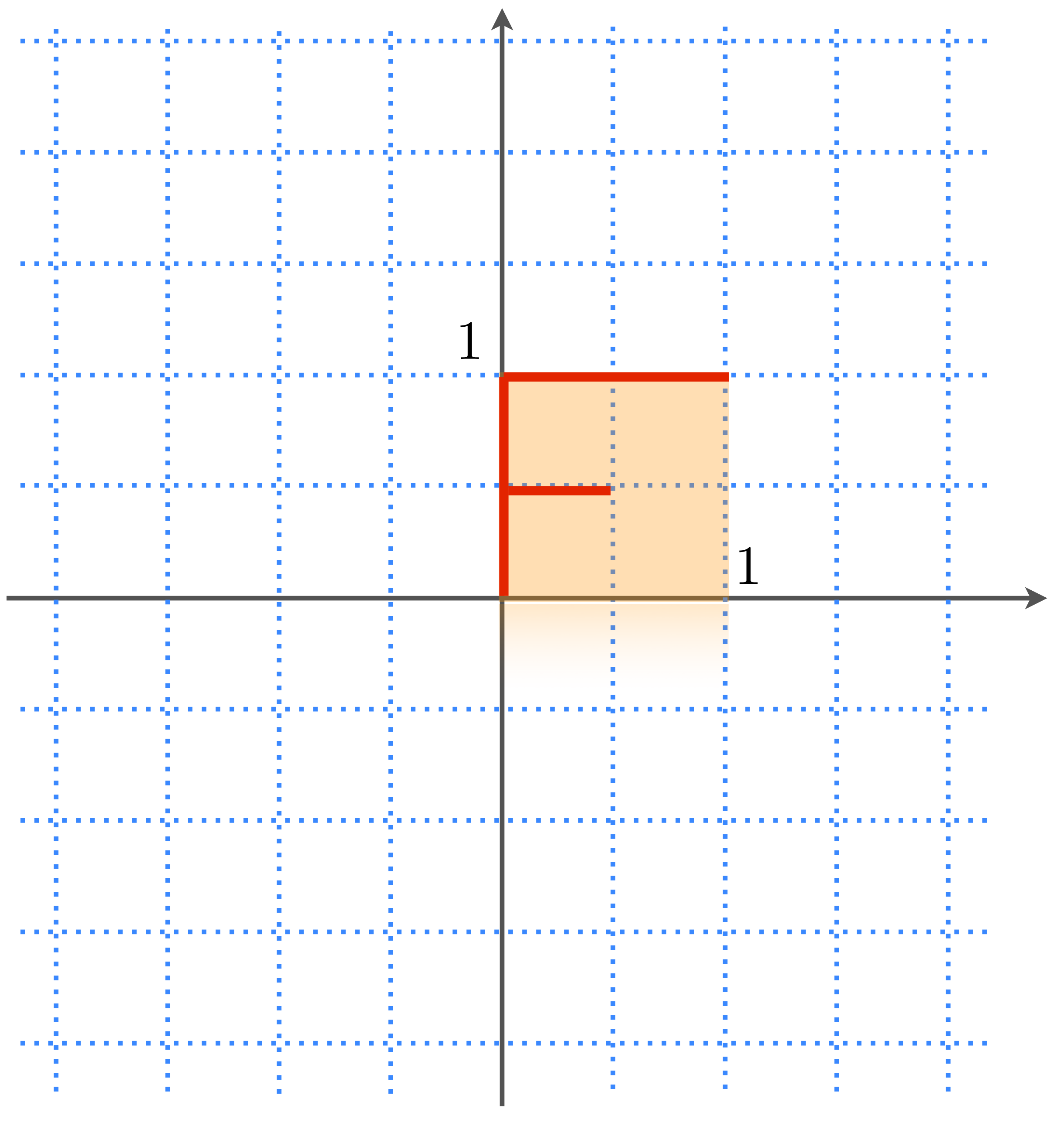


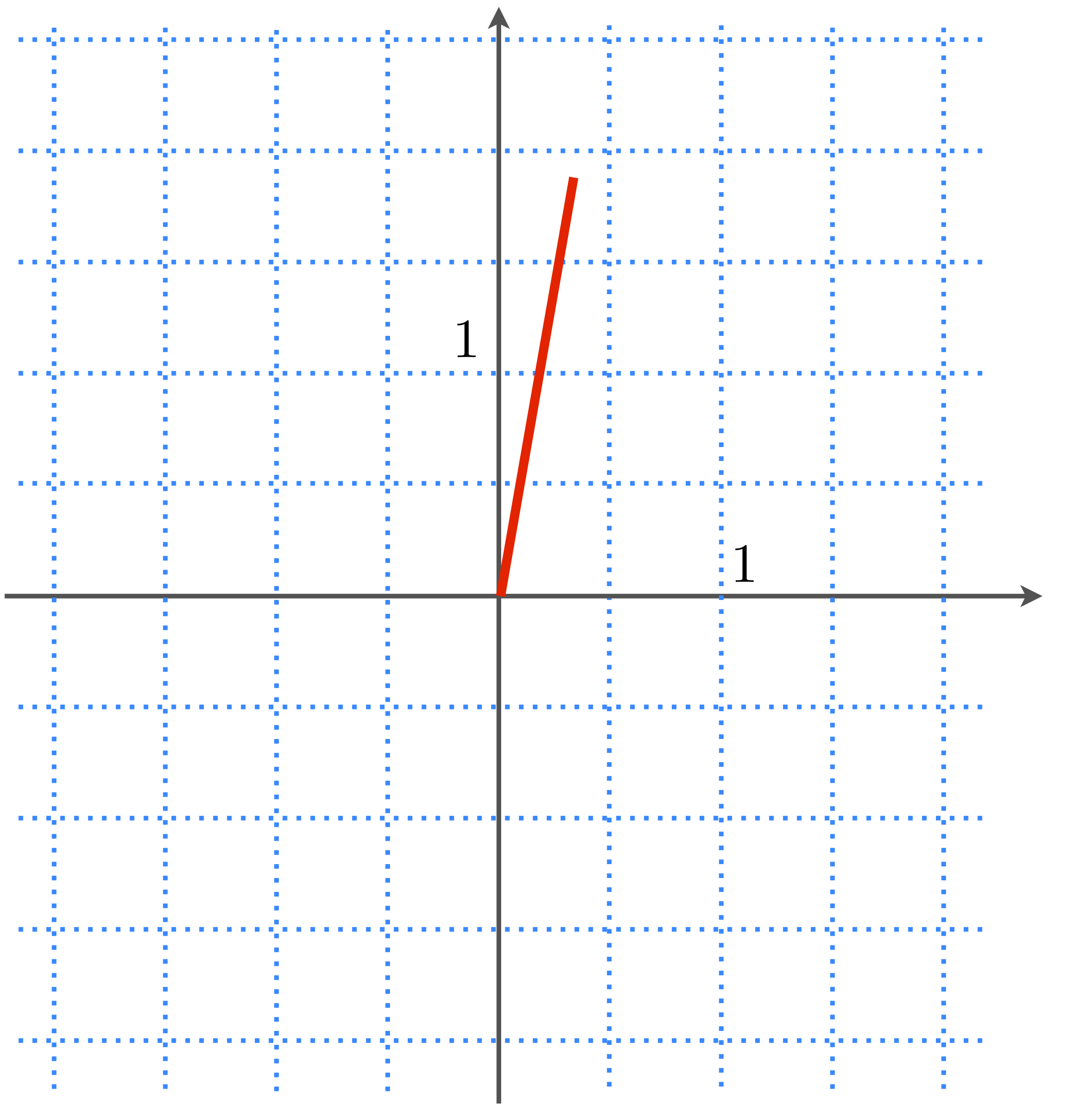
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$



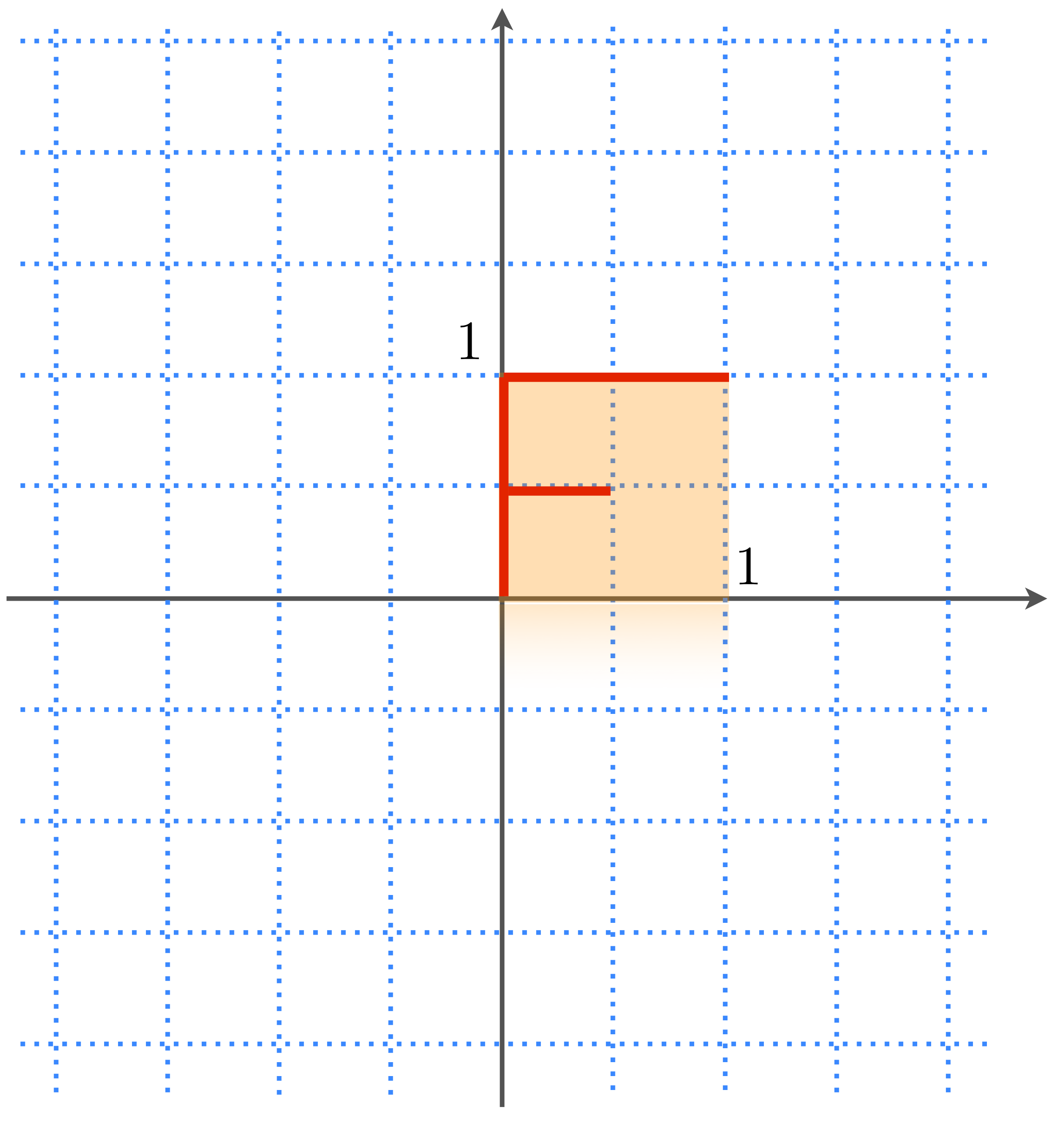


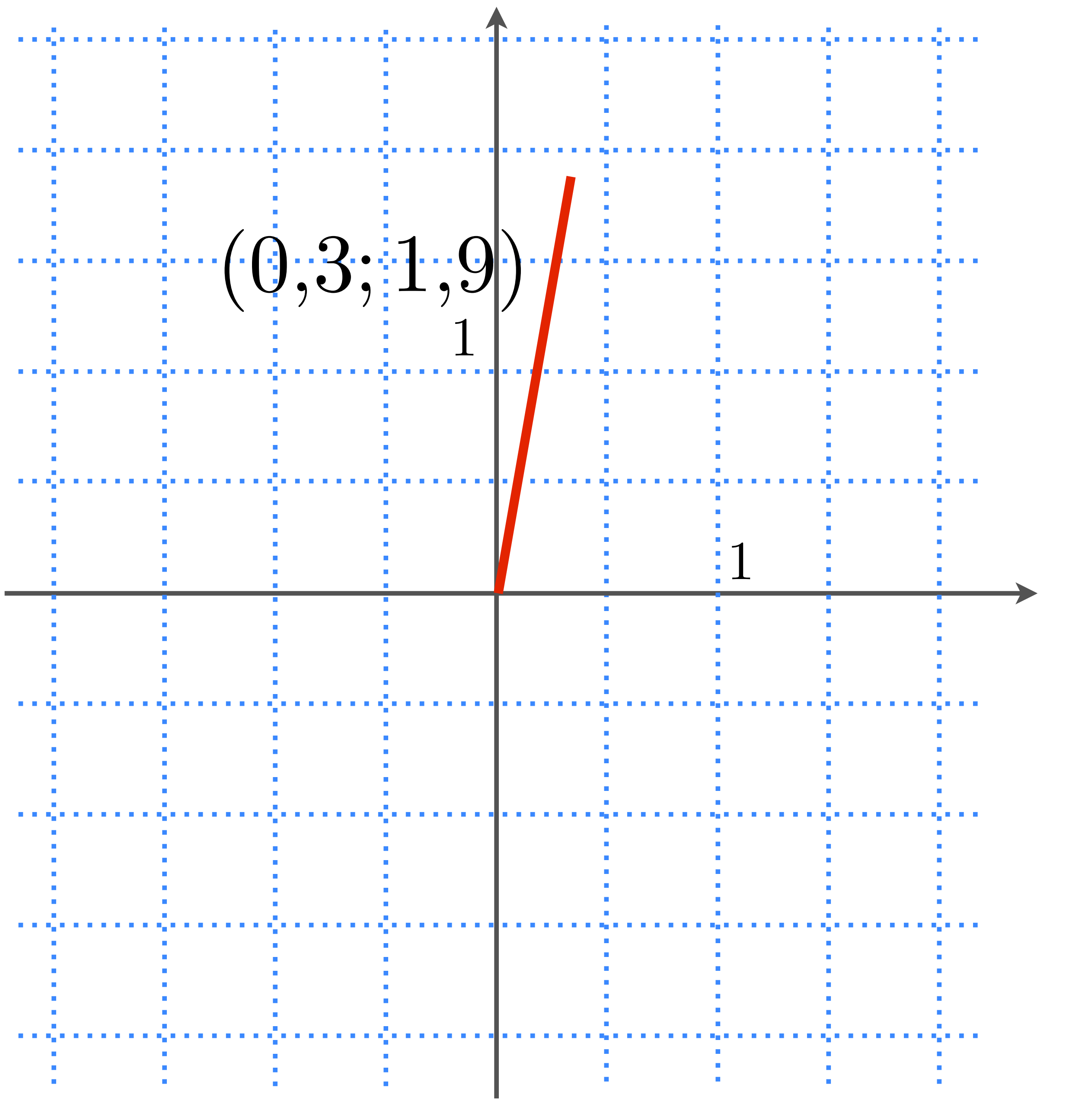
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1{,}9 \end{pmatrix}$$



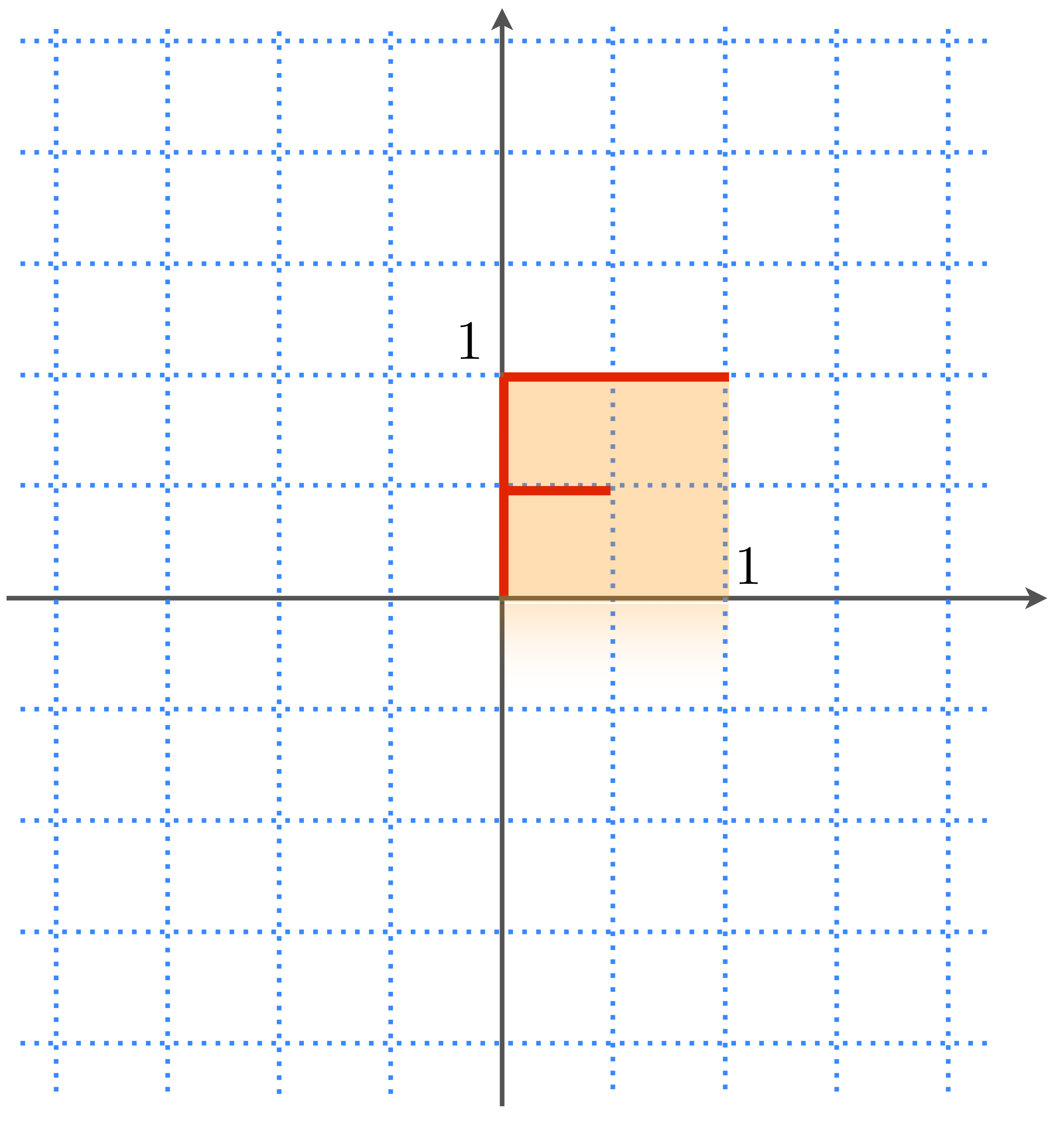


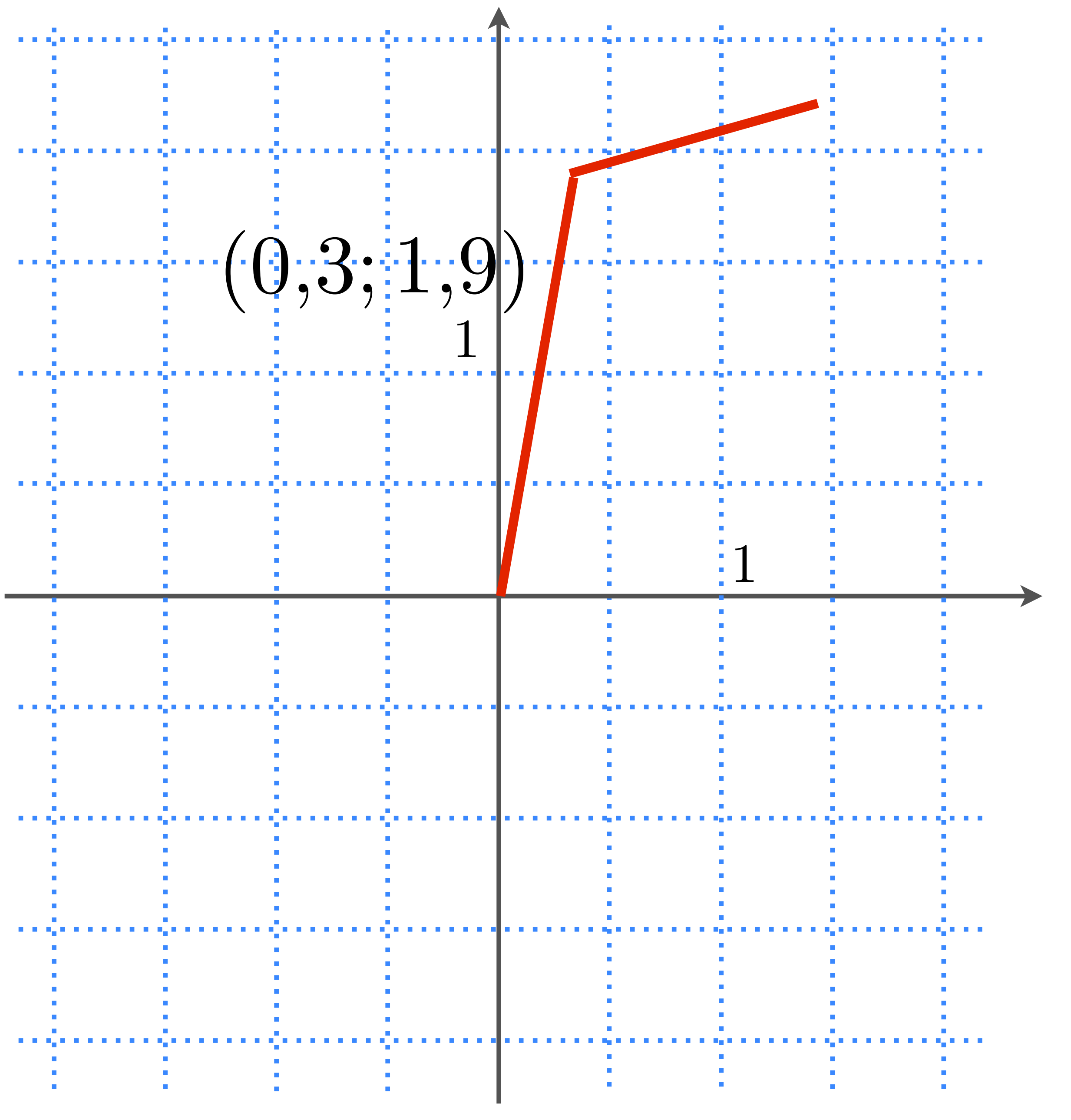
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1{,}9 \end{pmatrix}$$



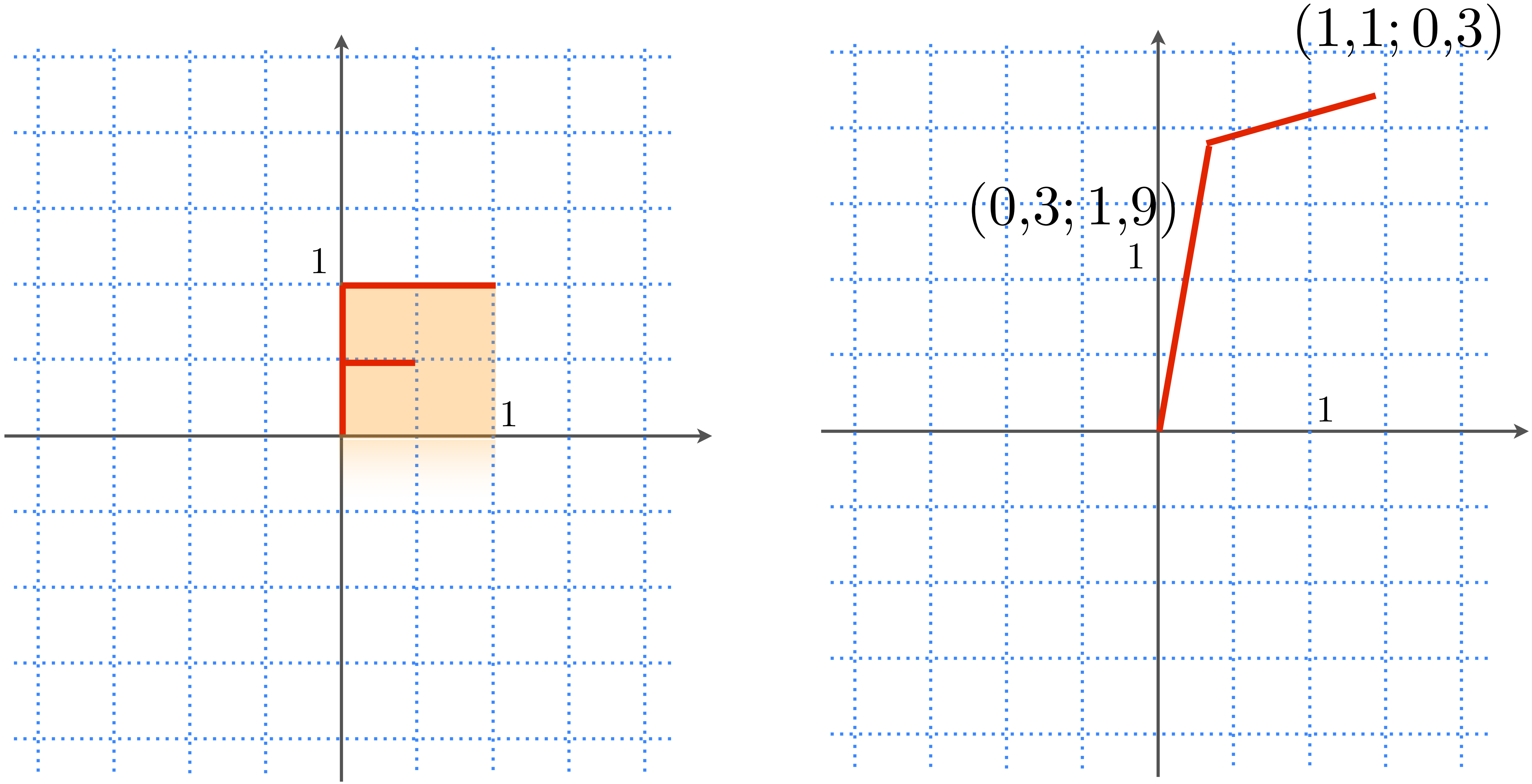


$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

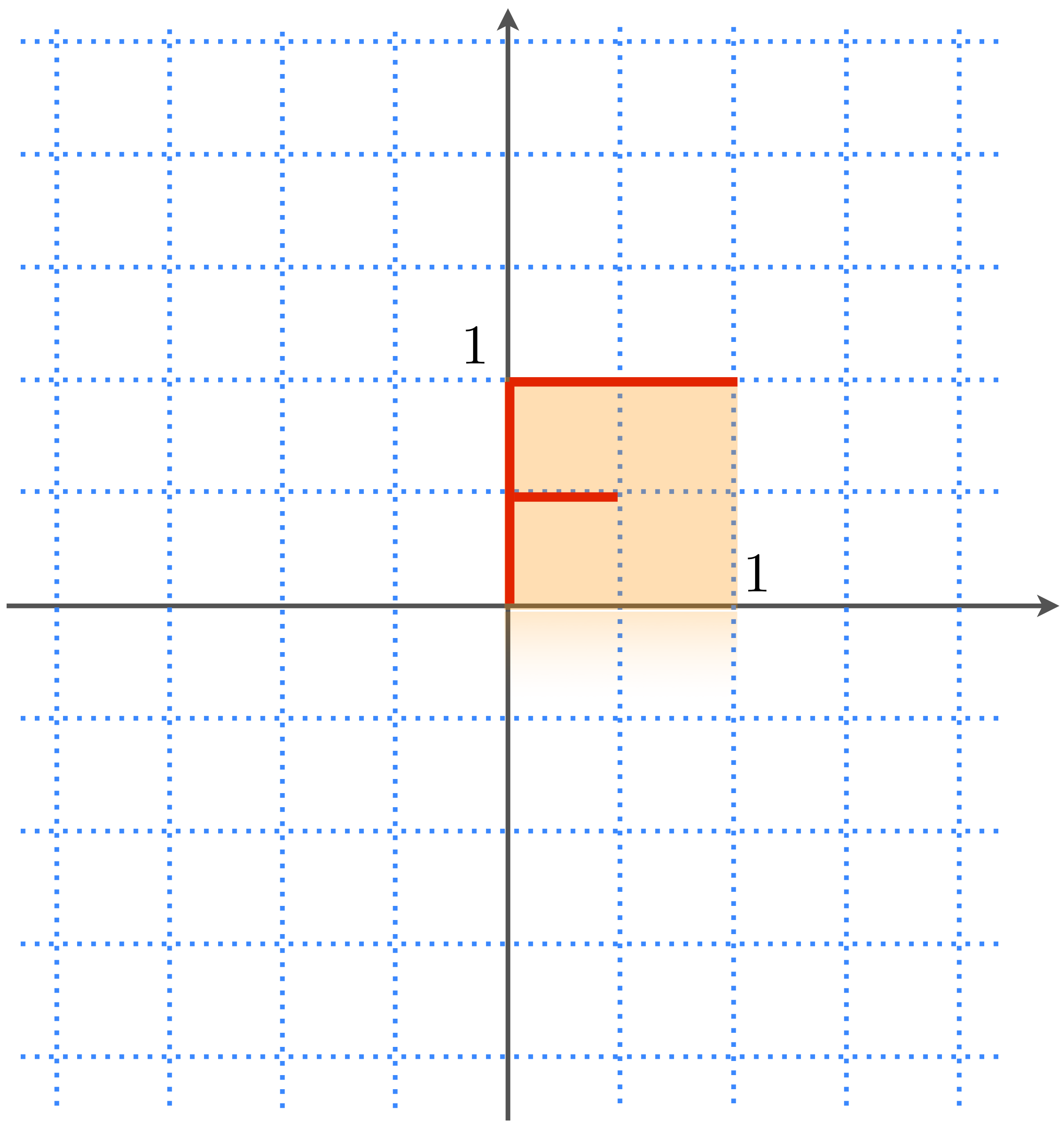


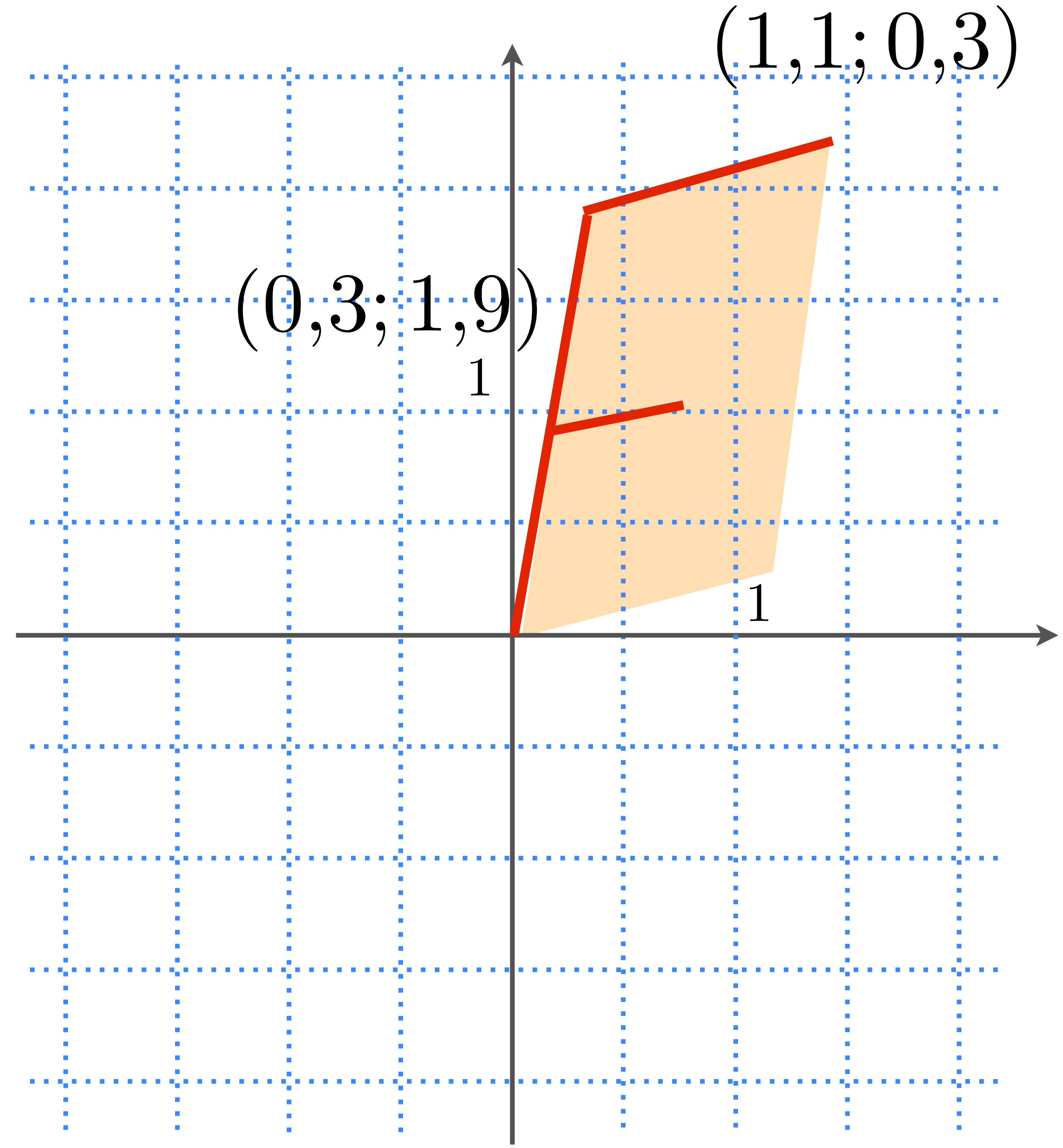


$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

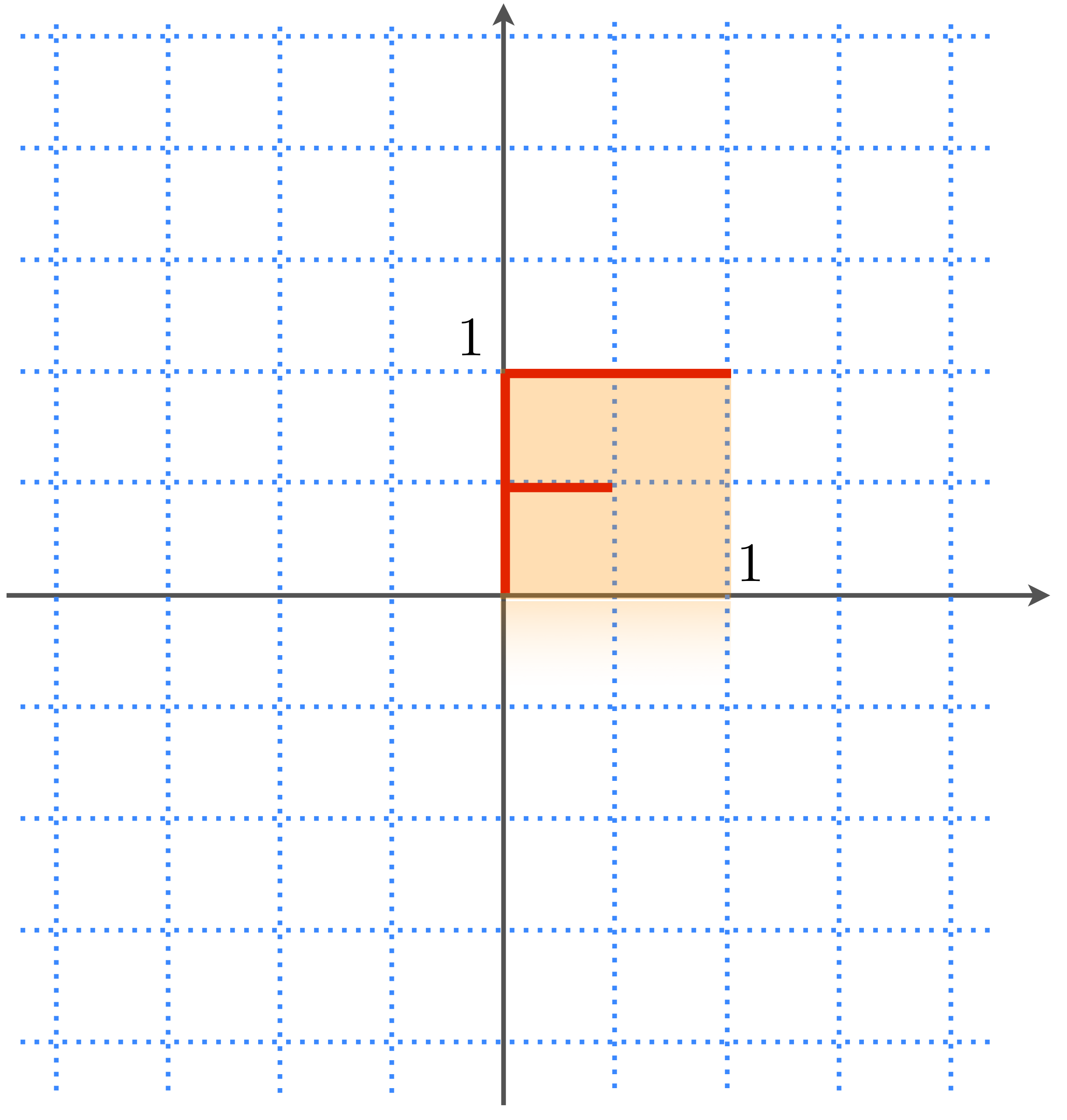


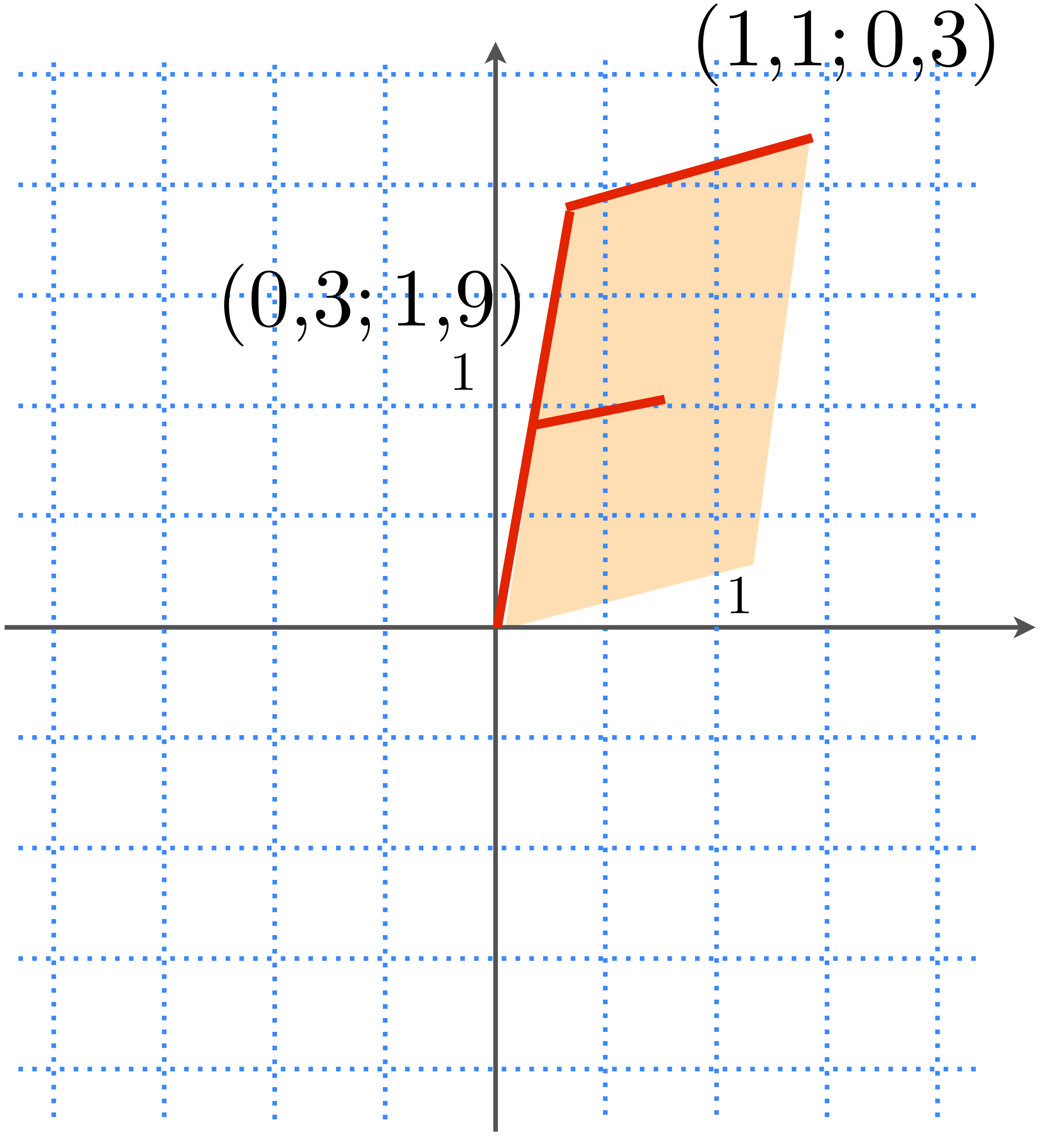
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$





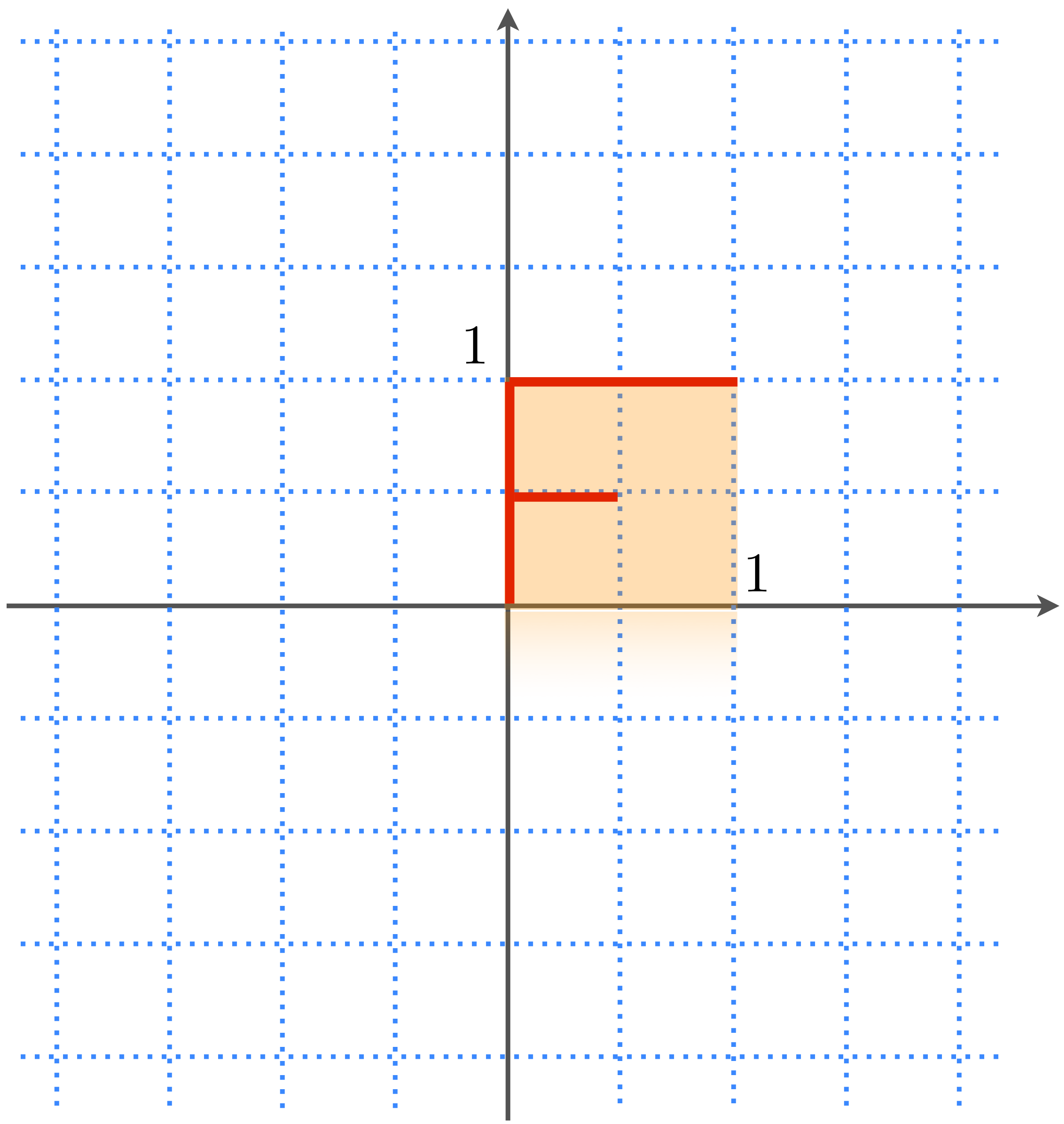
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

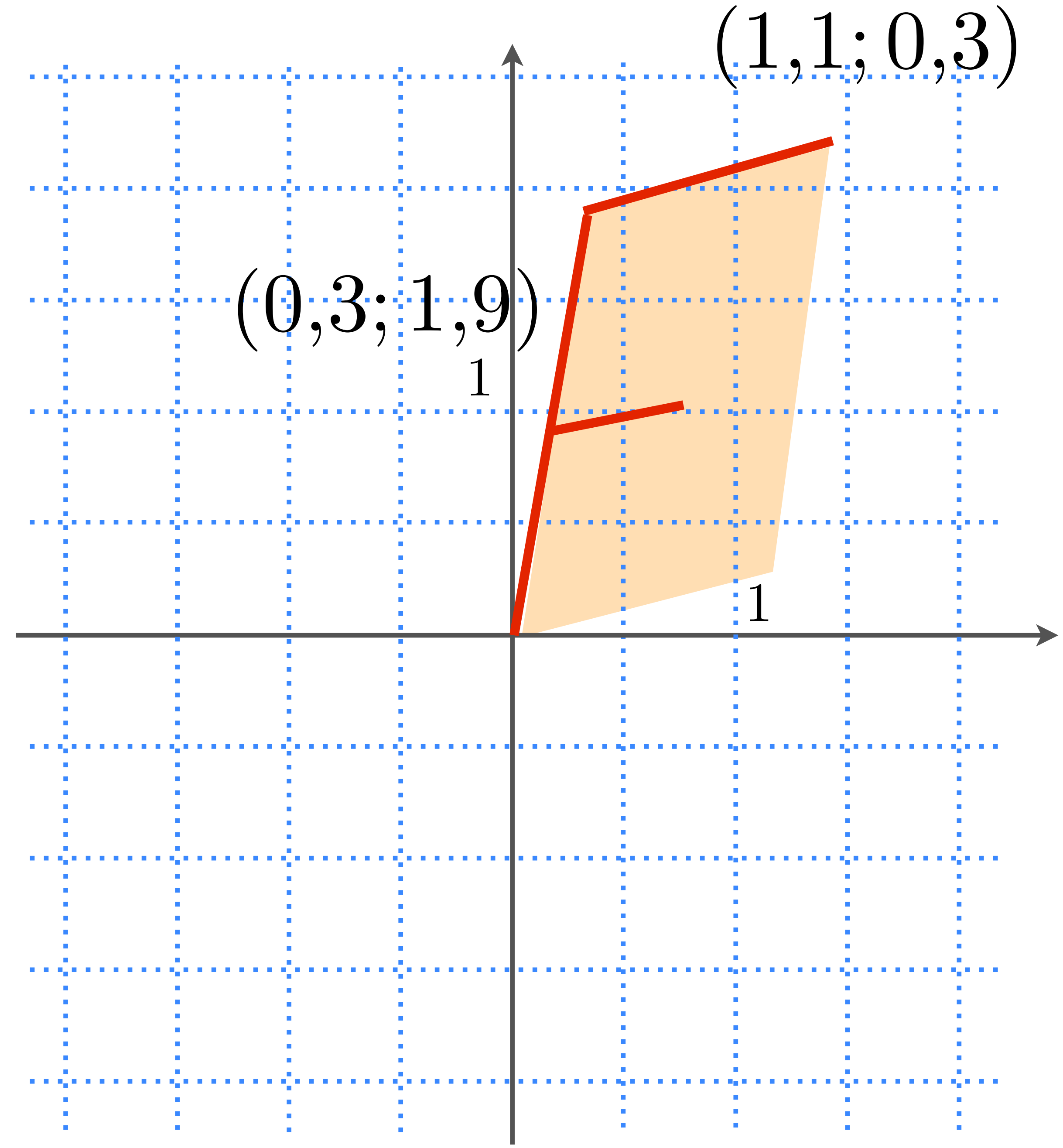




$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!

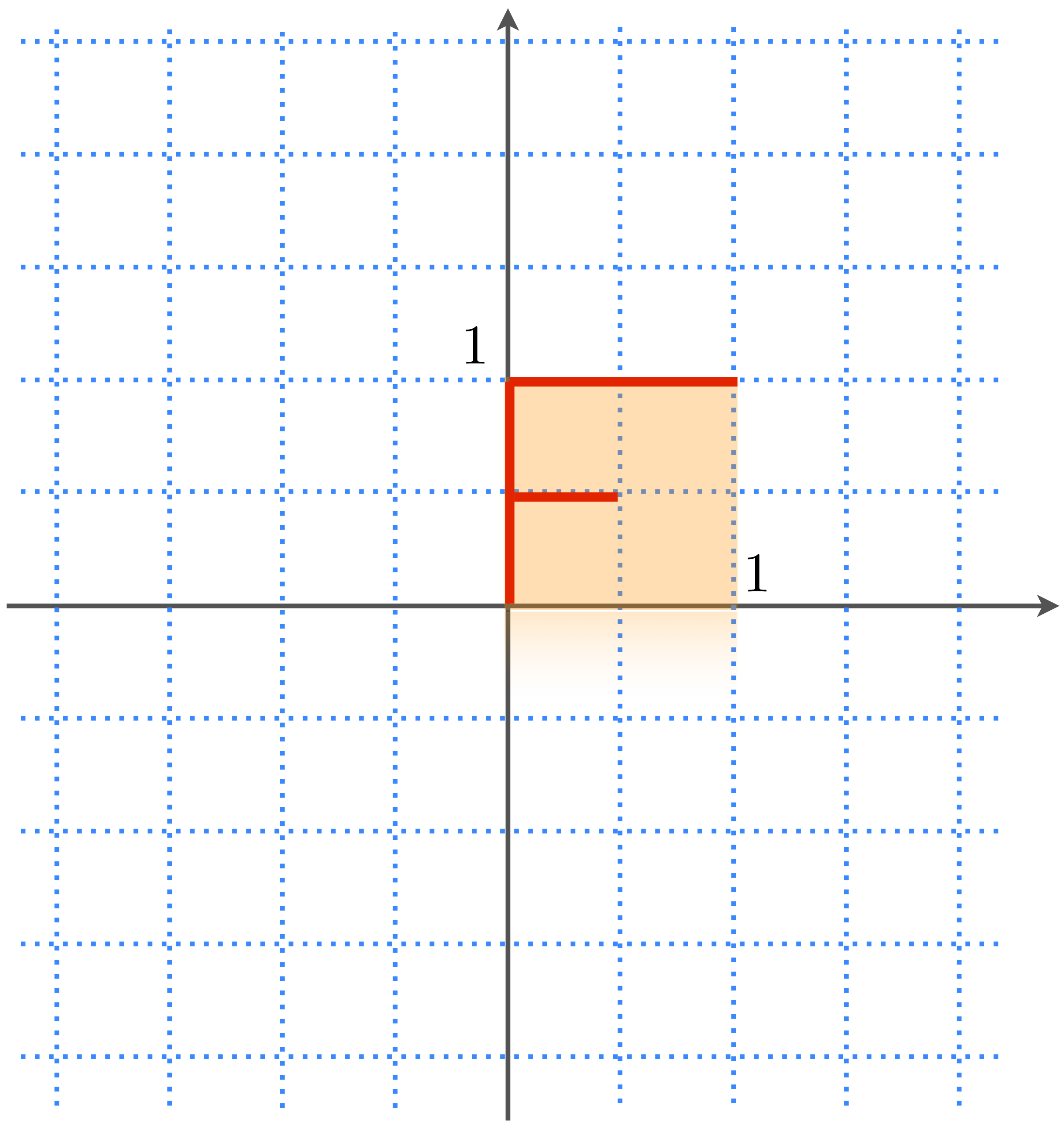


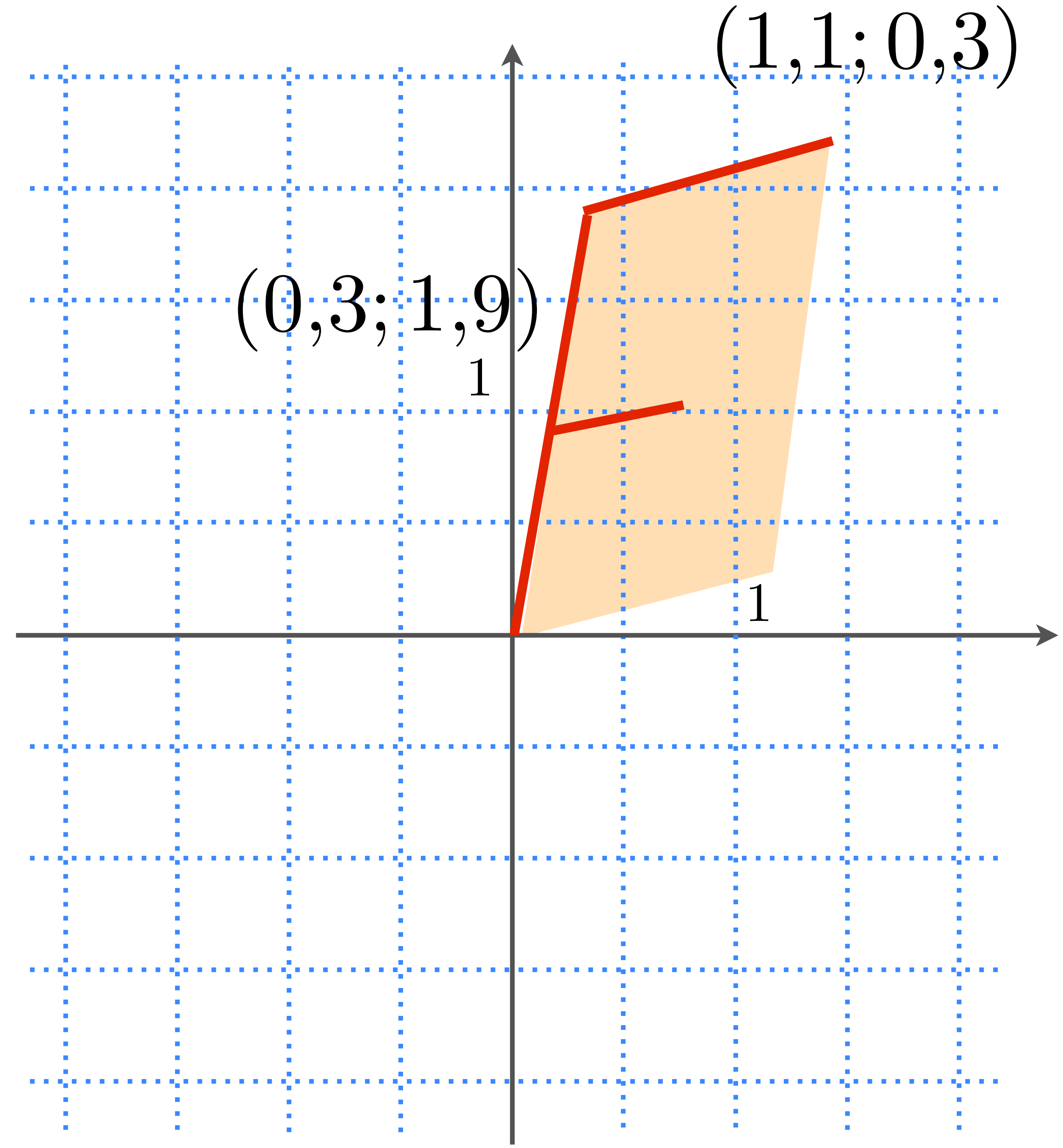


$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!



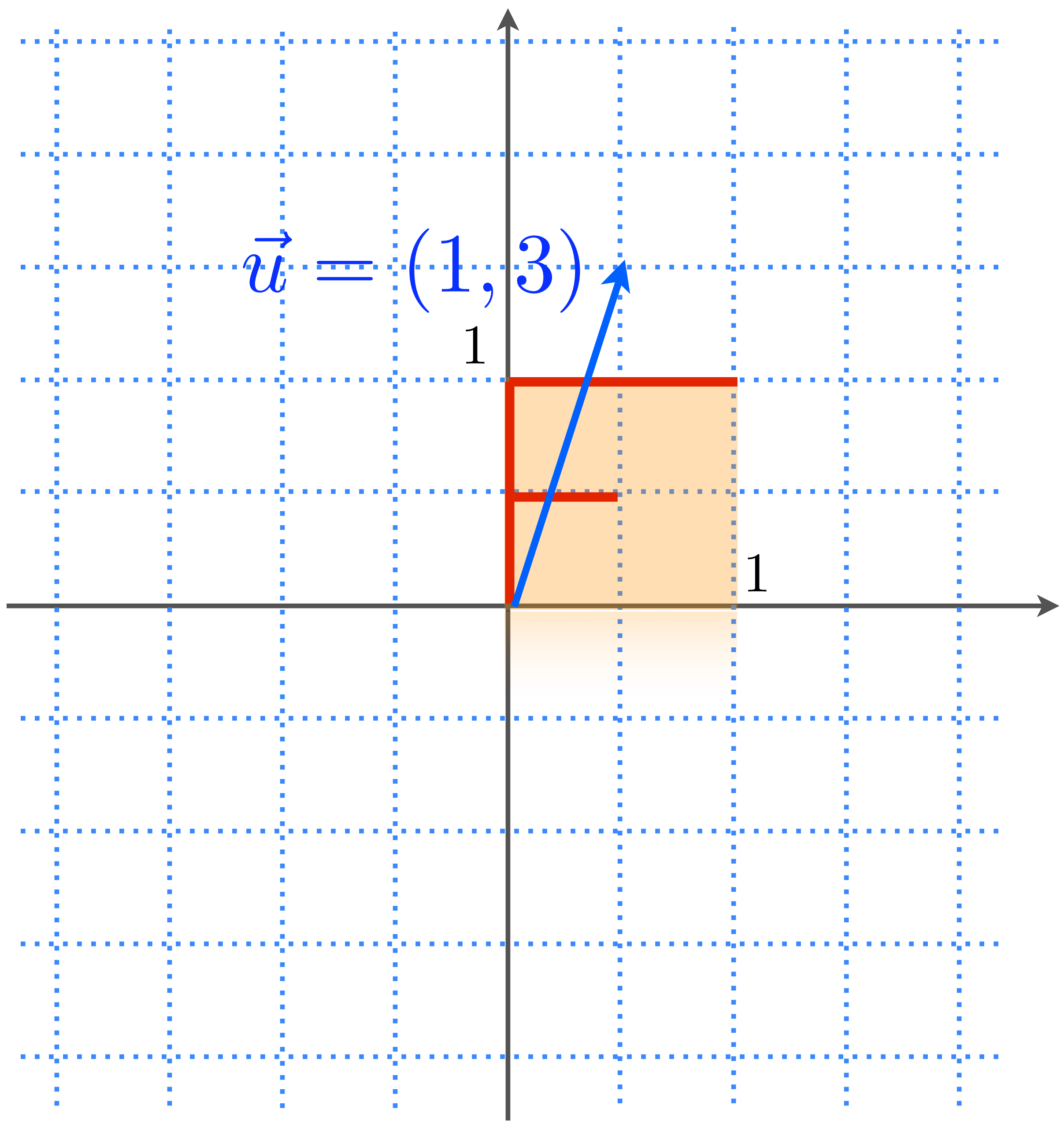


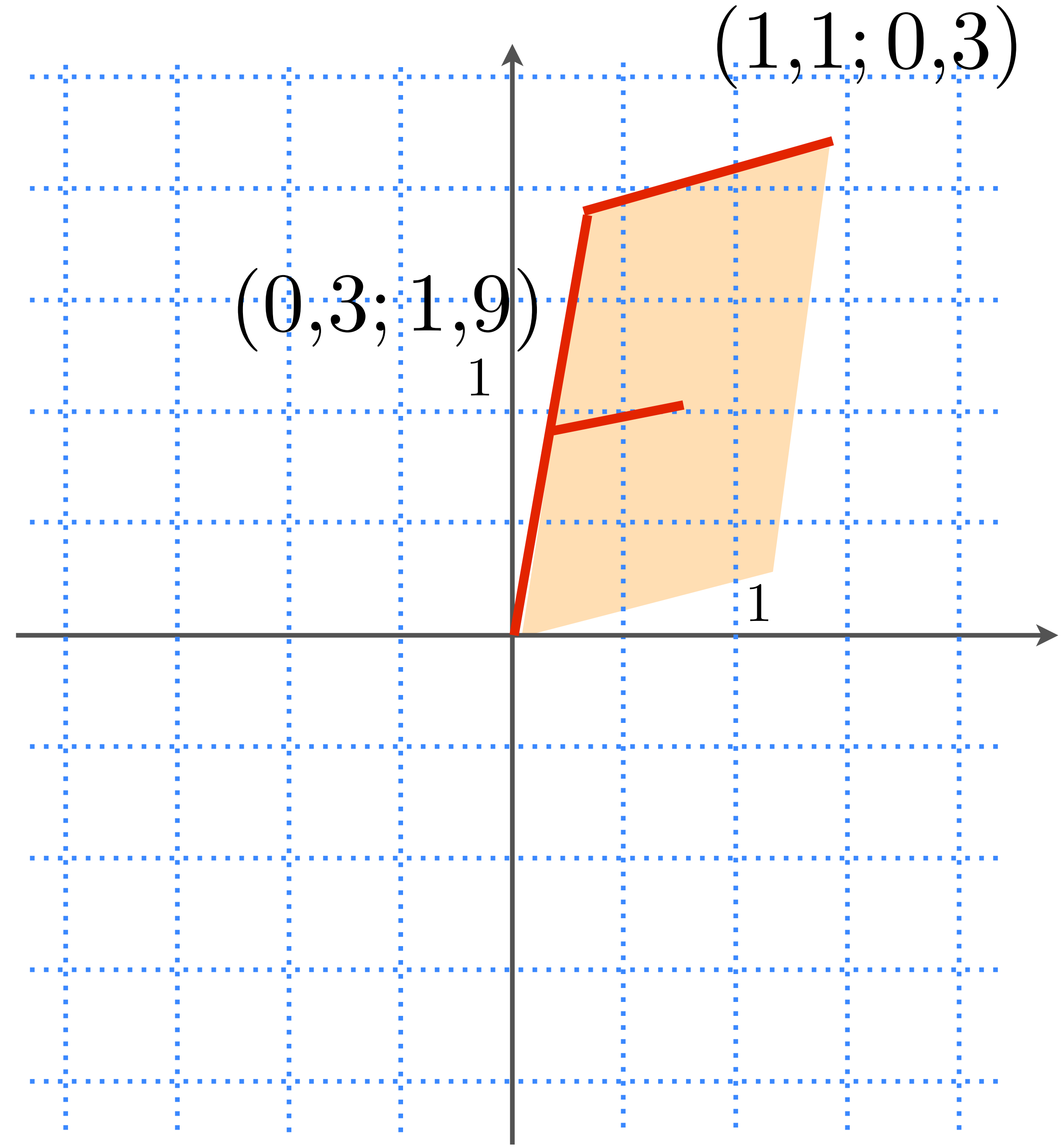
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1, 3)$$

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!



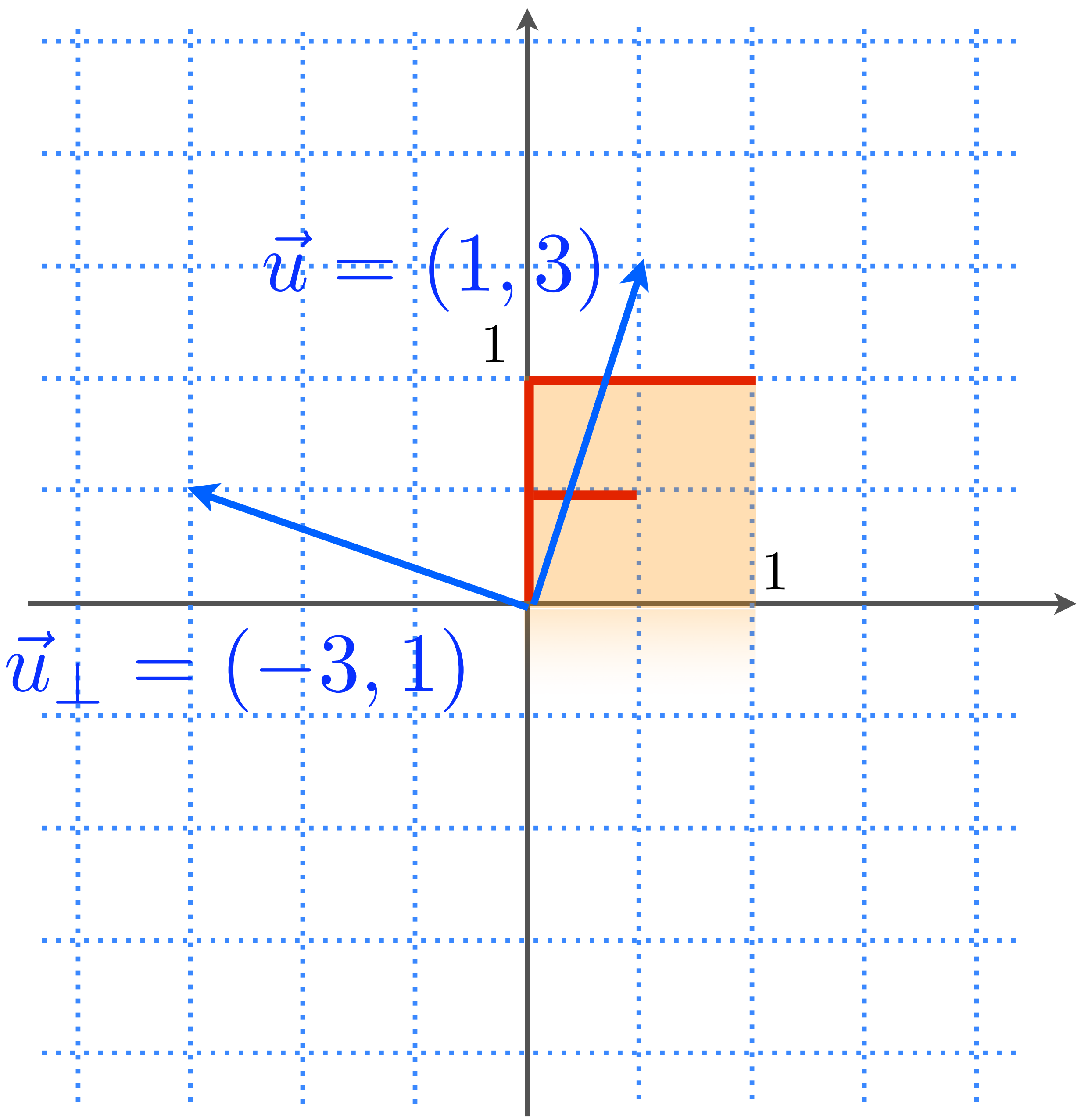


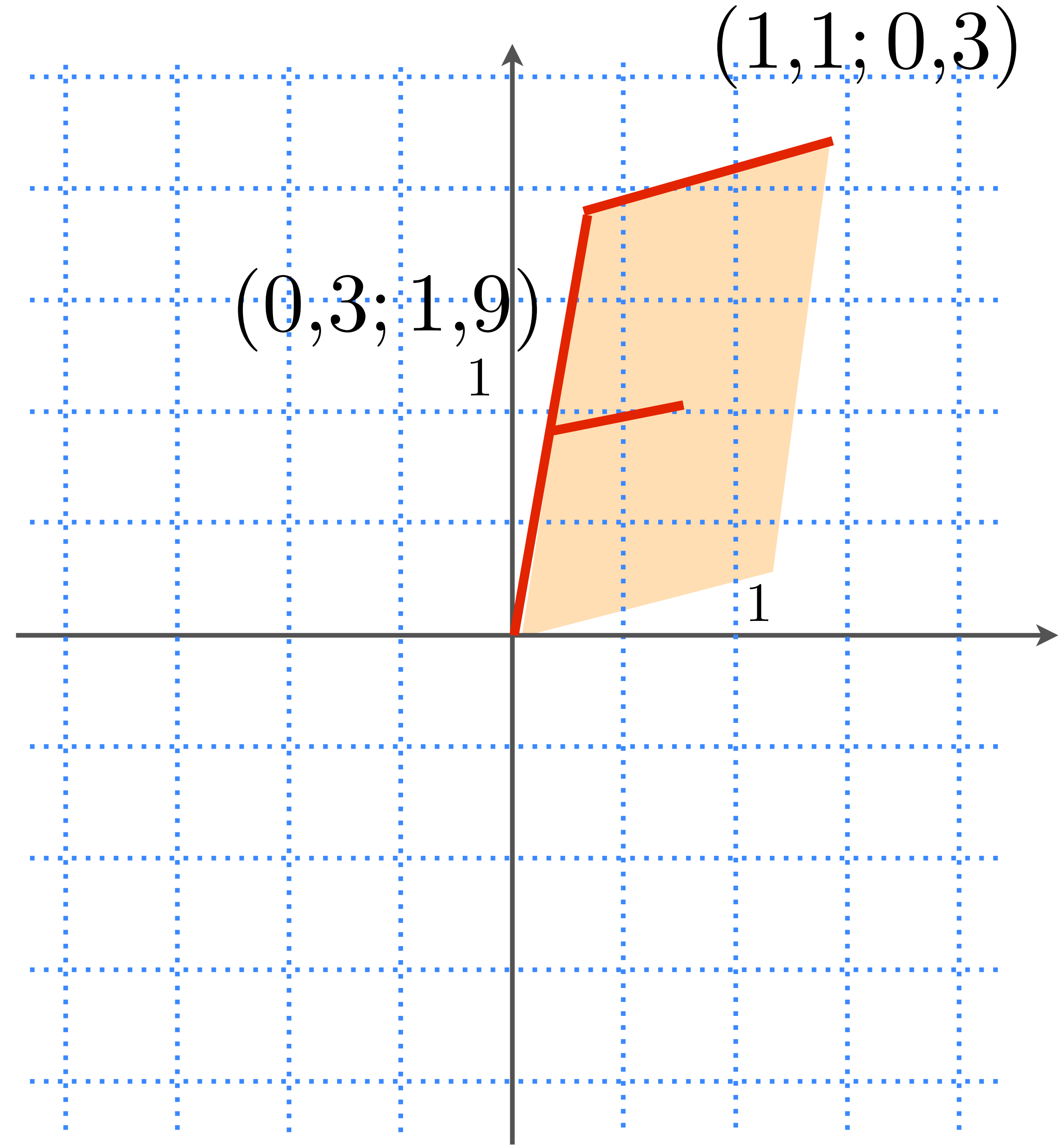
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!

On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1, 3)$$



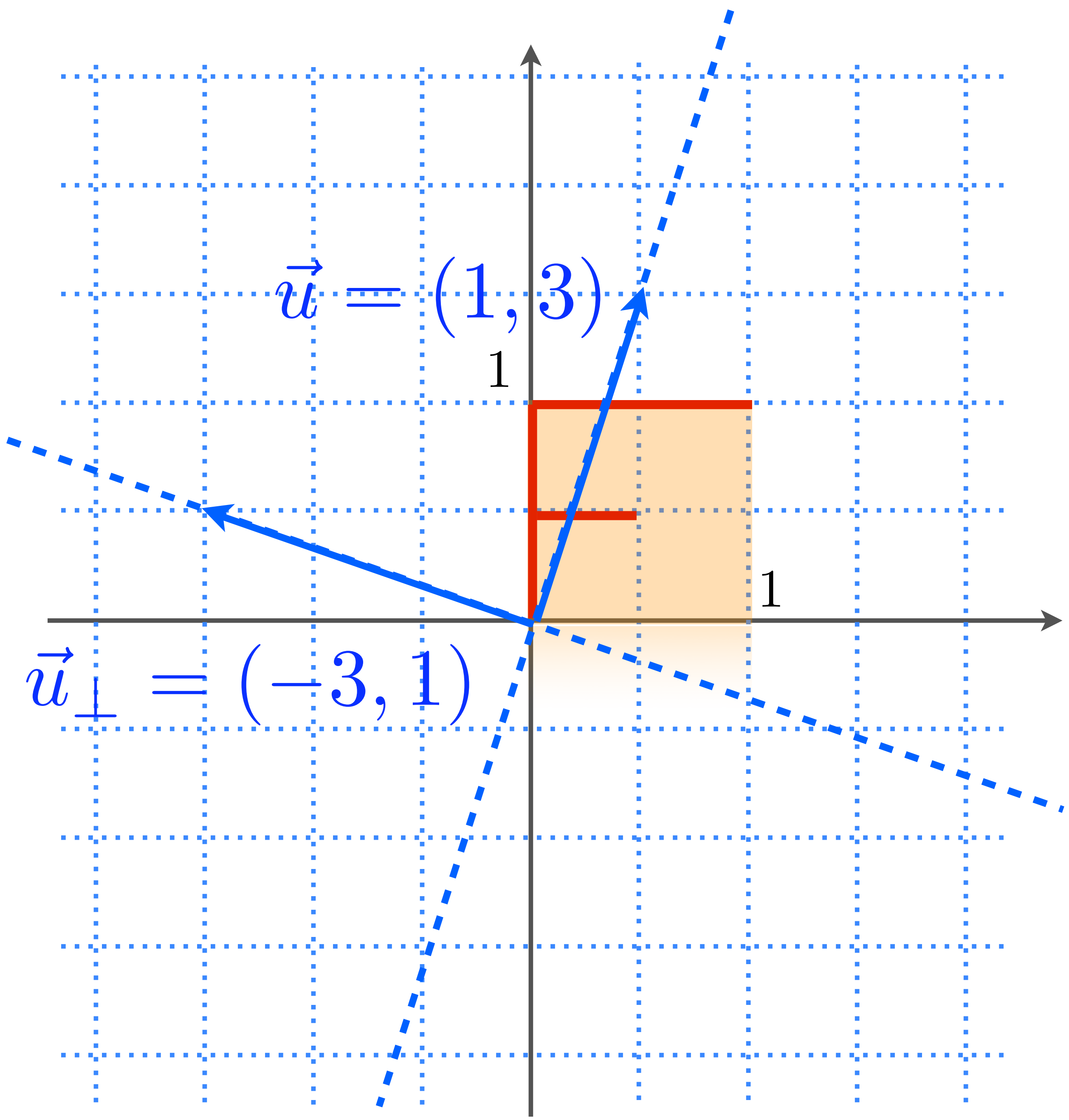


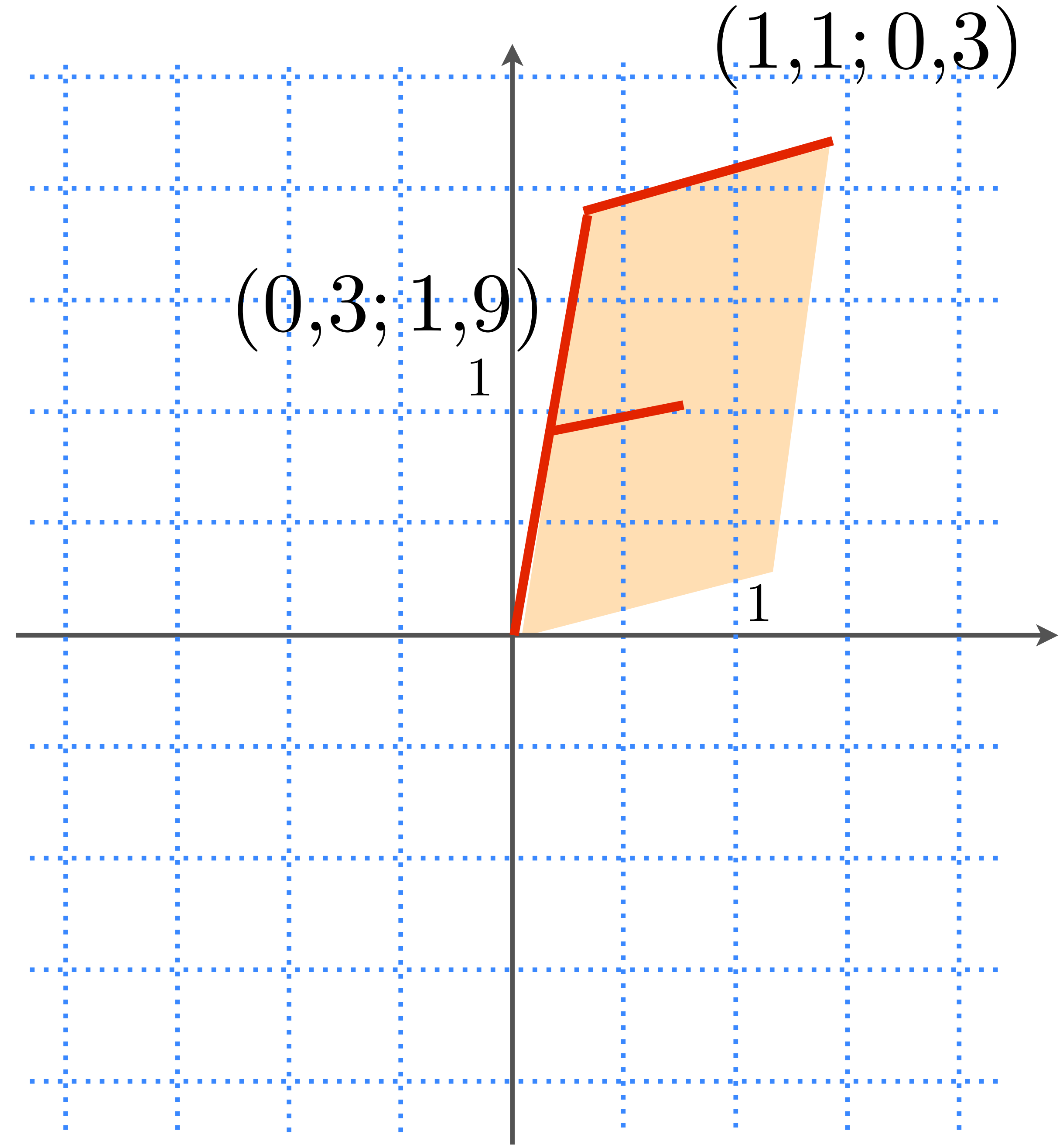
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!

On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1, 3)$$



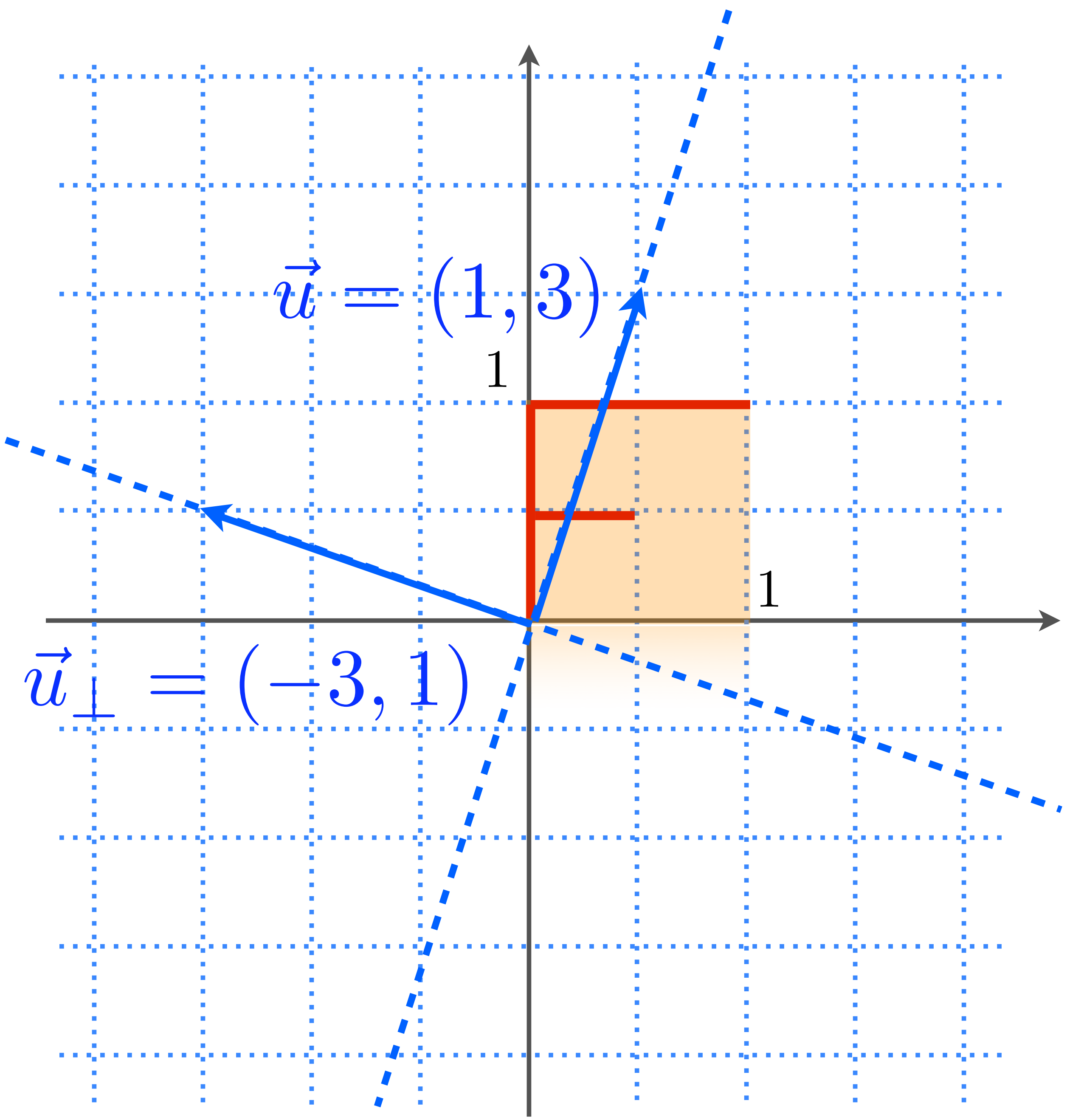


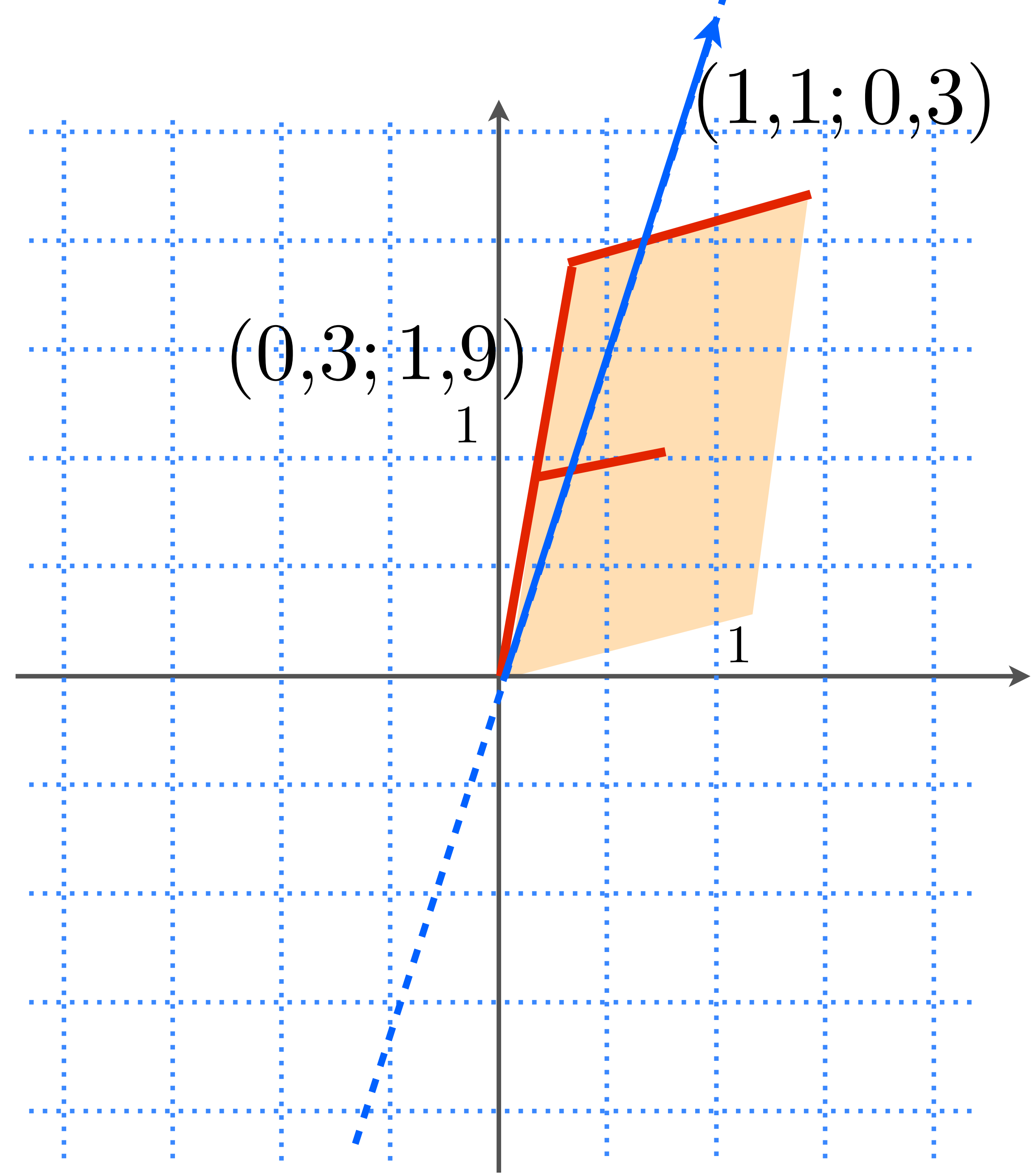
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1,3)$$

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!



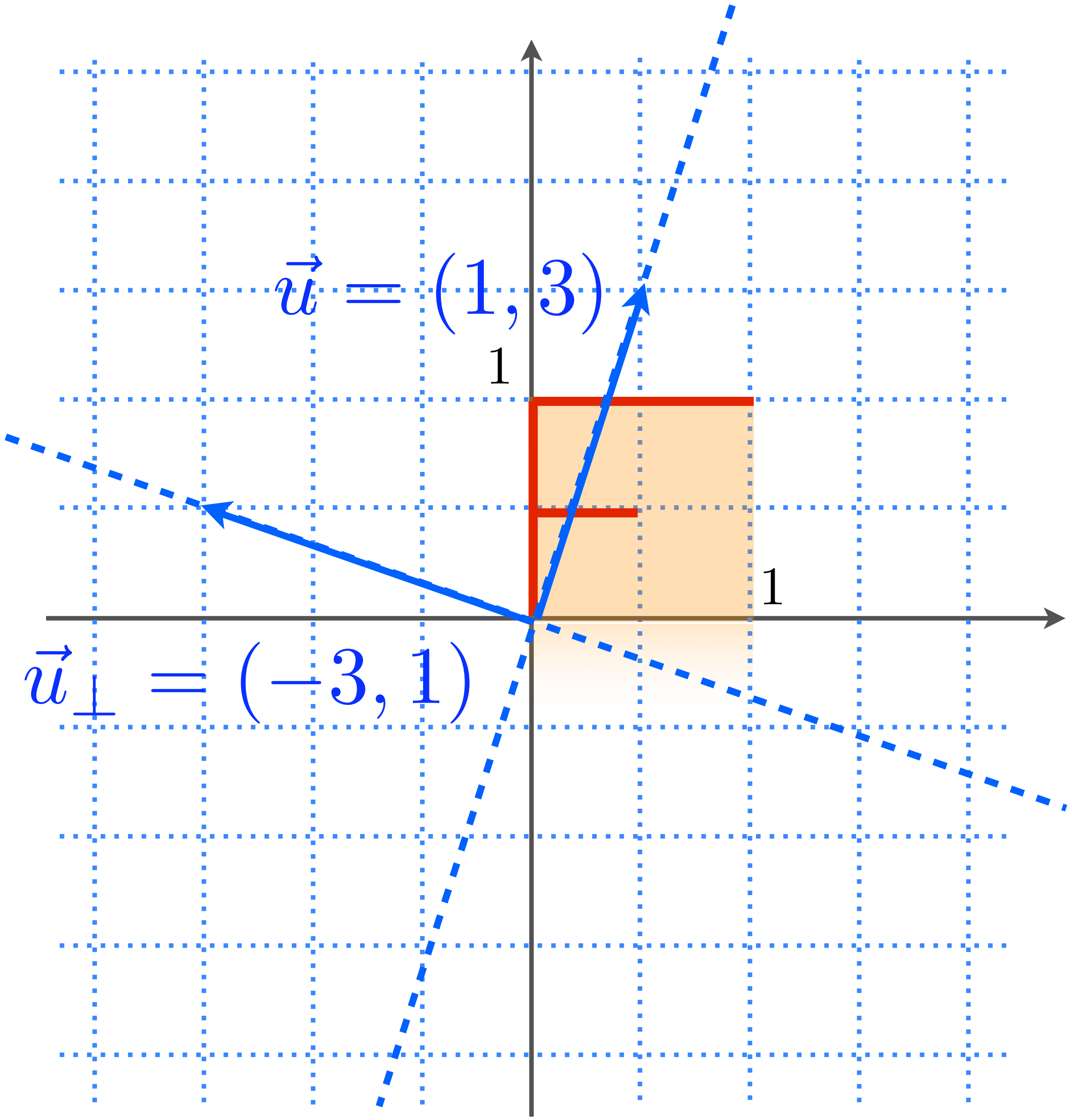


$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!

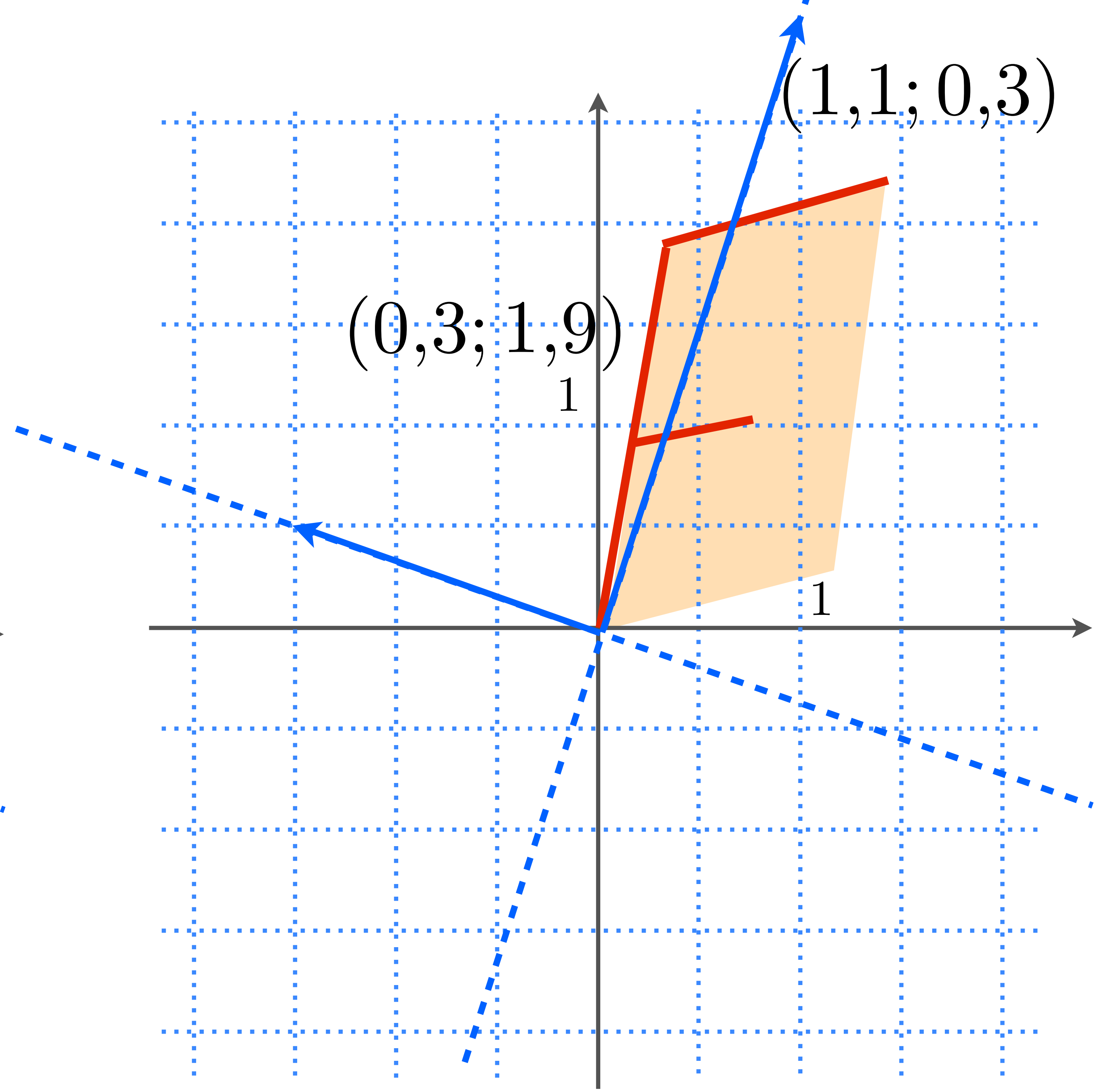
On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1, 3)$$



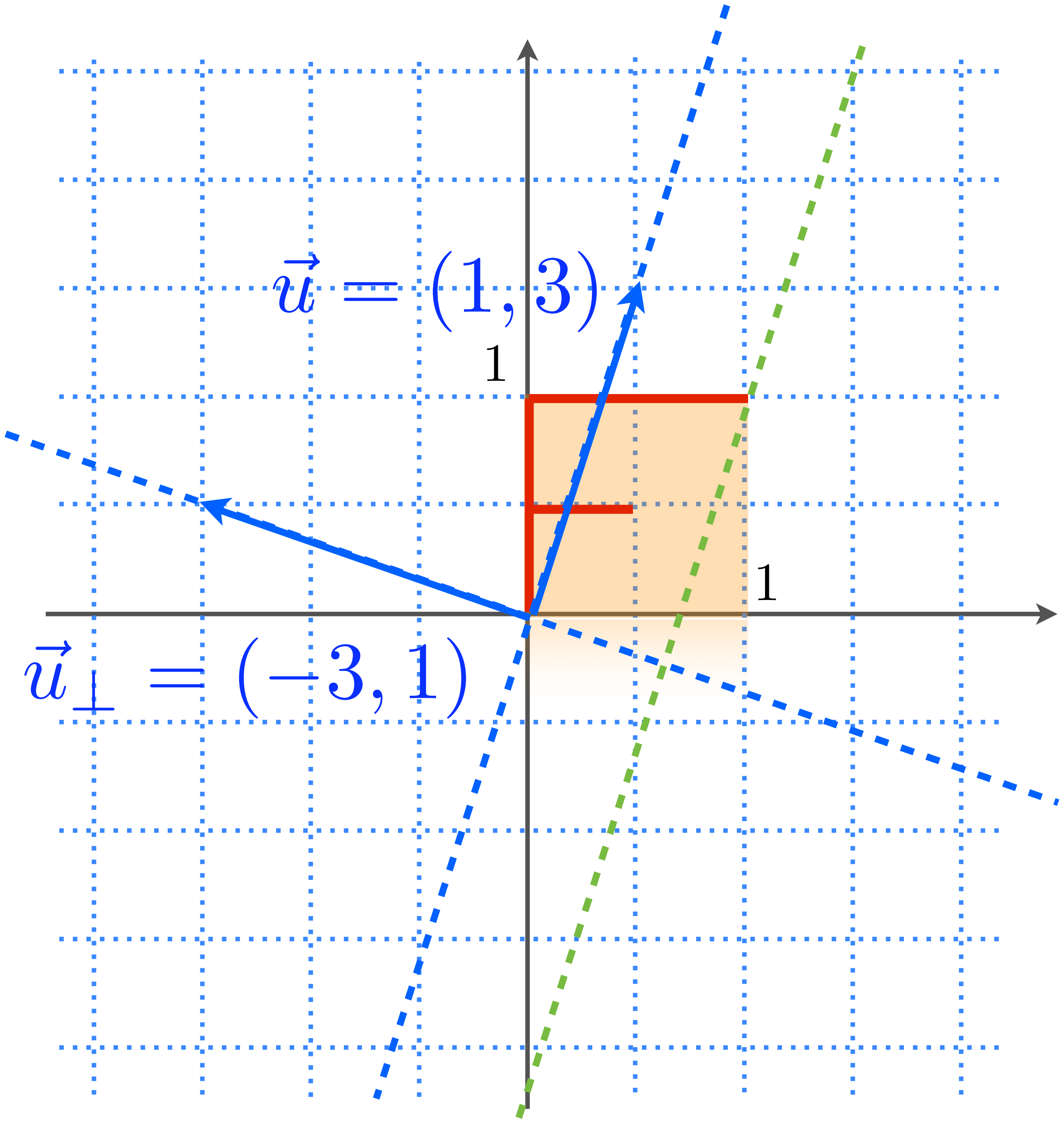
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

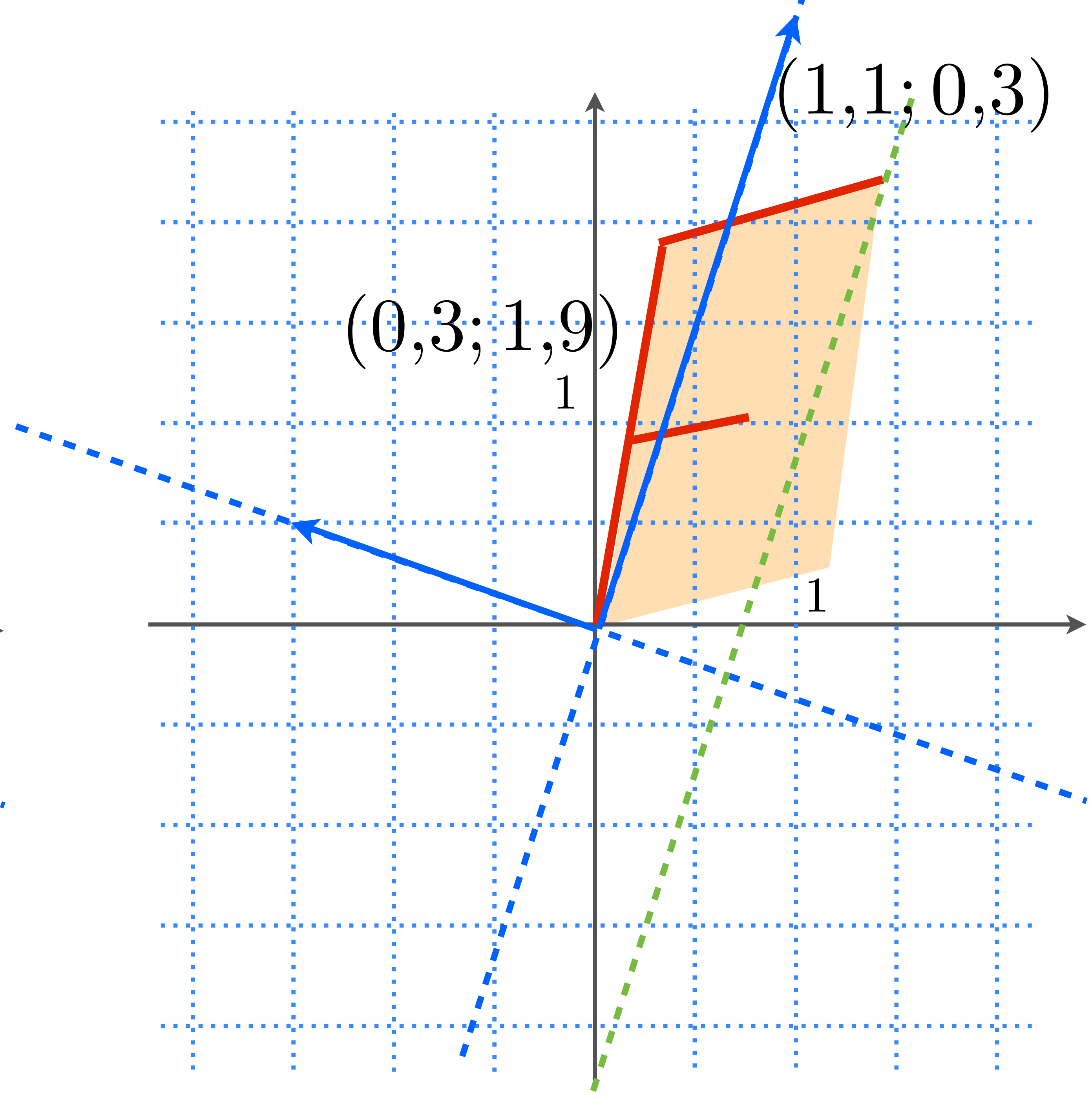
Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!



On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1,3)$$



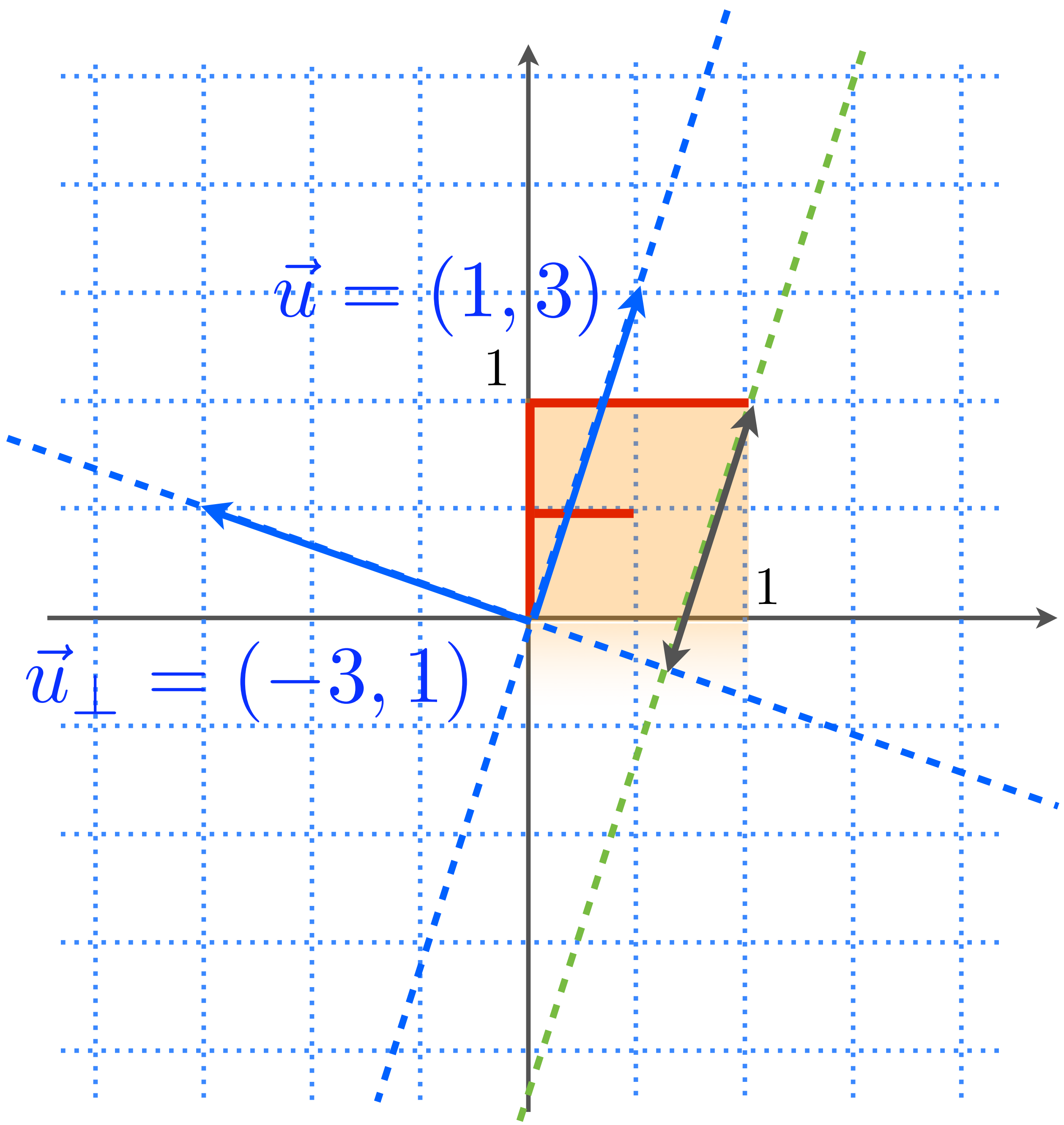


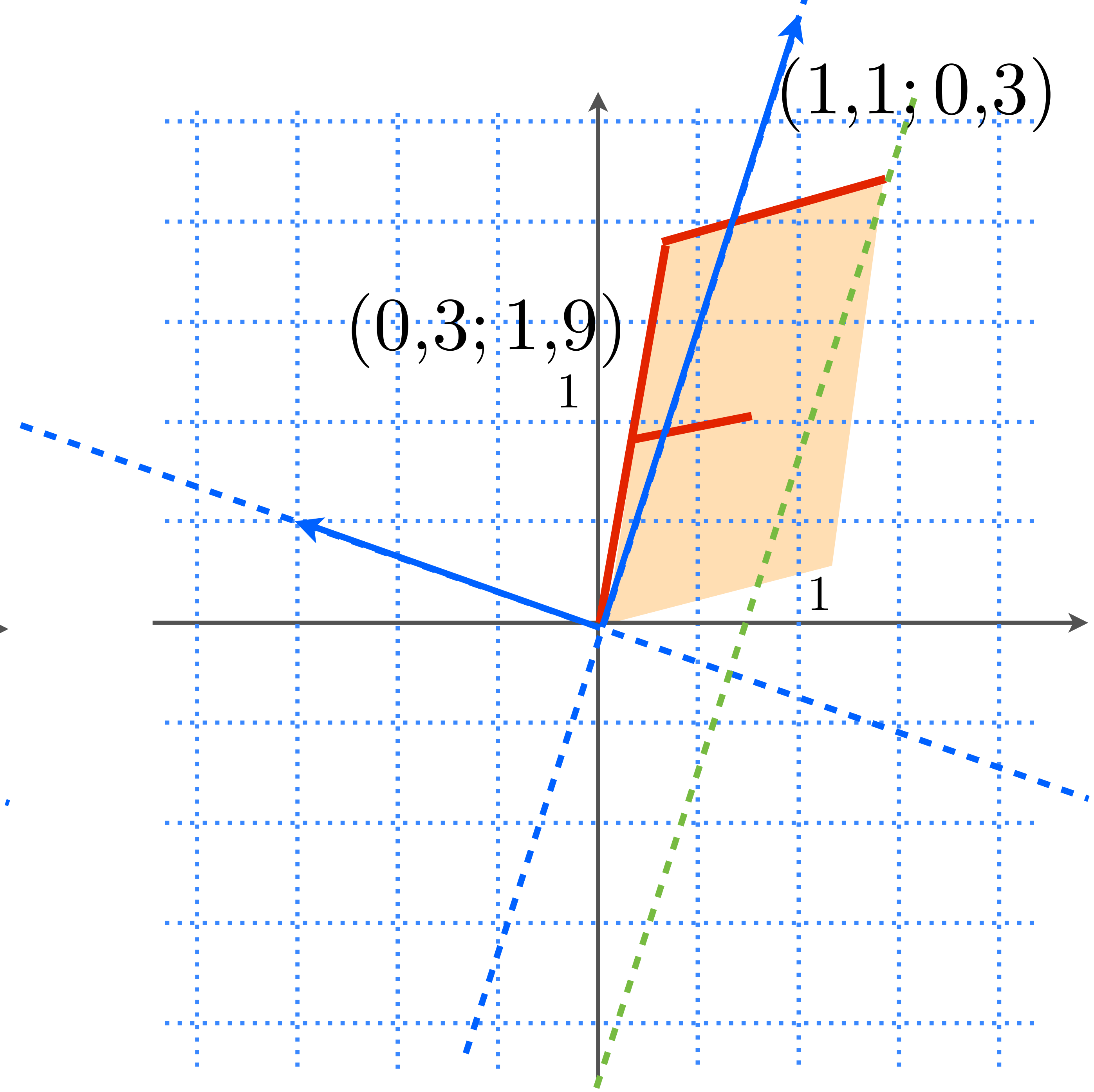
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1, 3)$$

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!



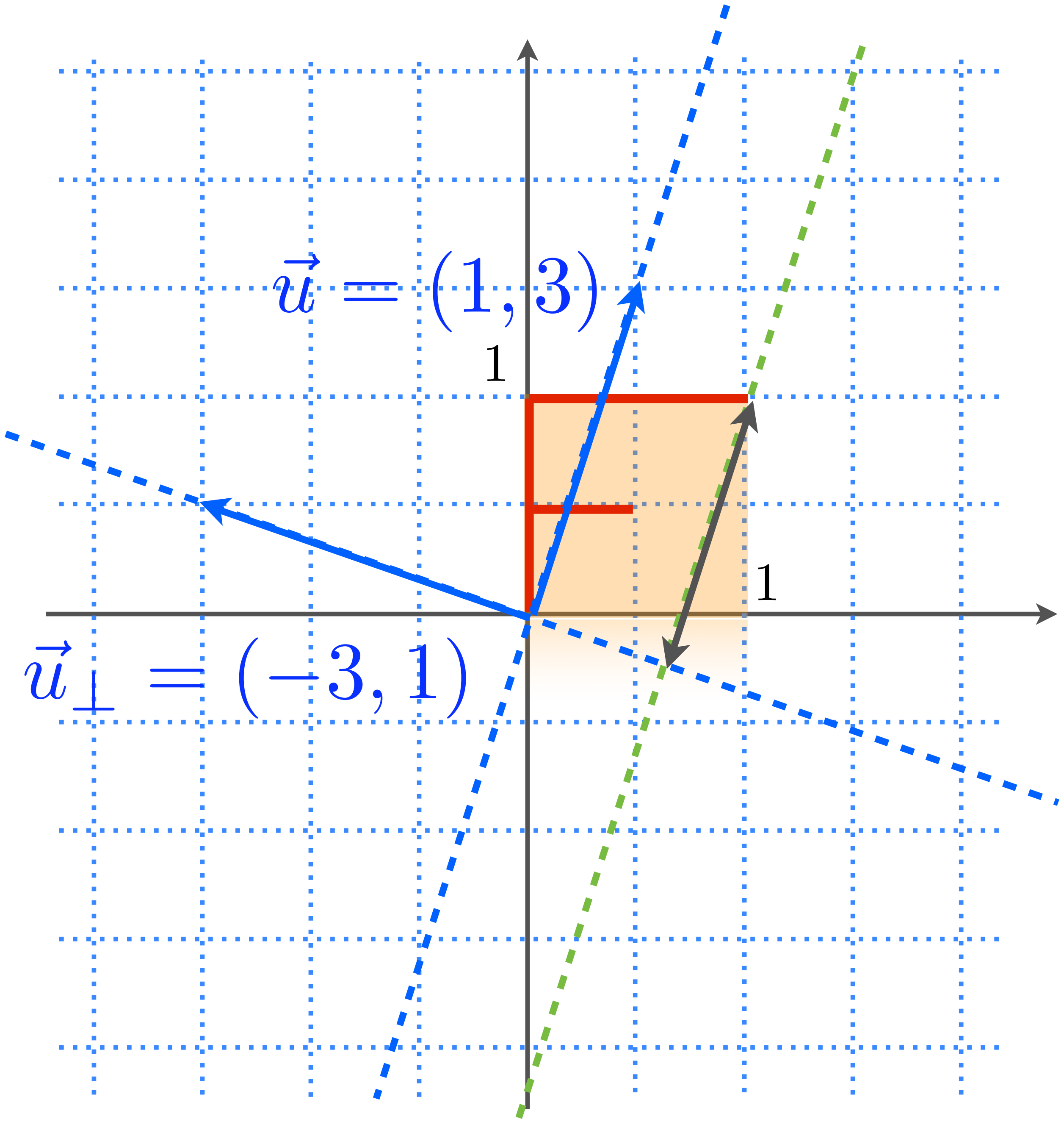


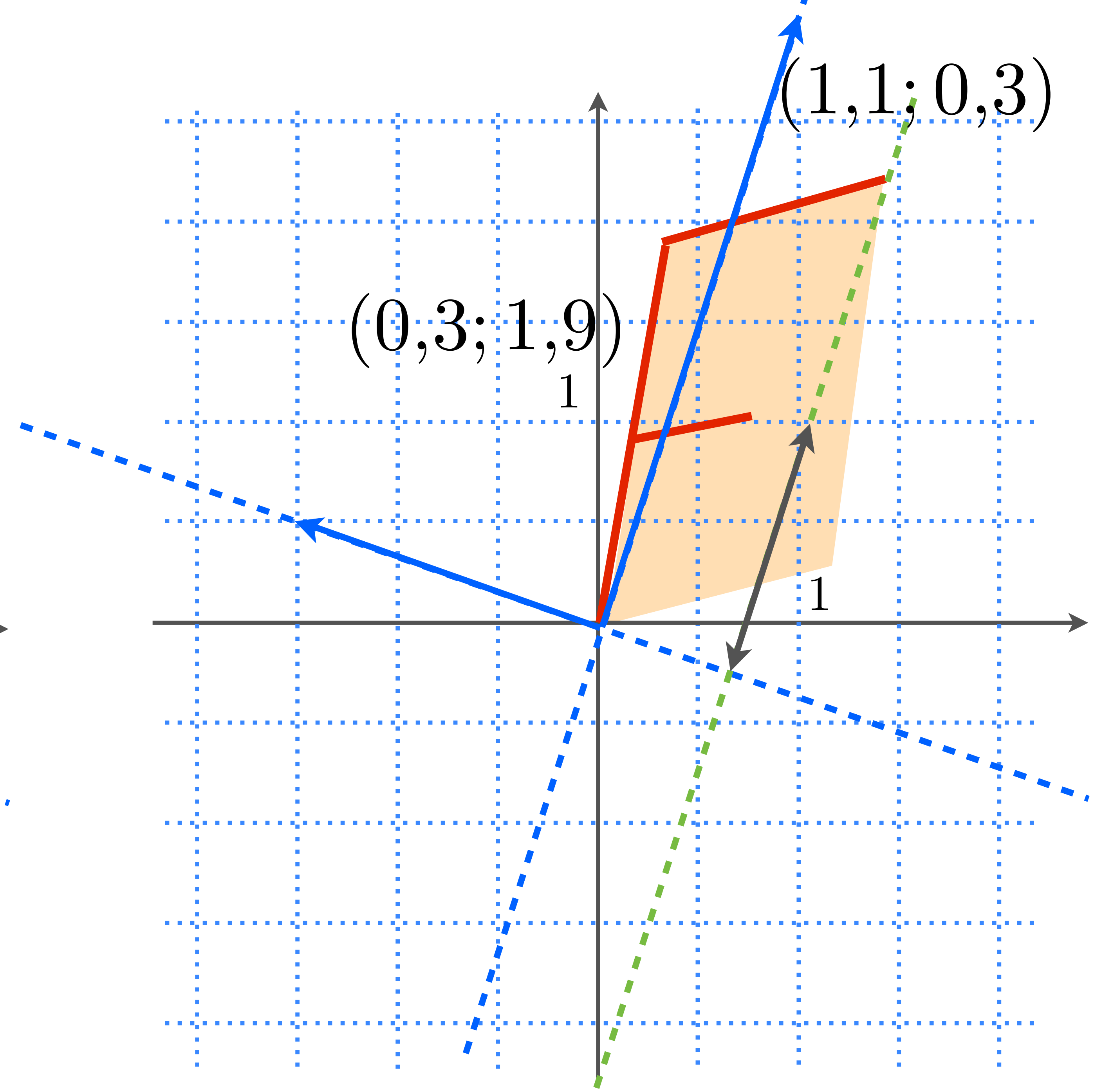
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!

On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1, 3)$$



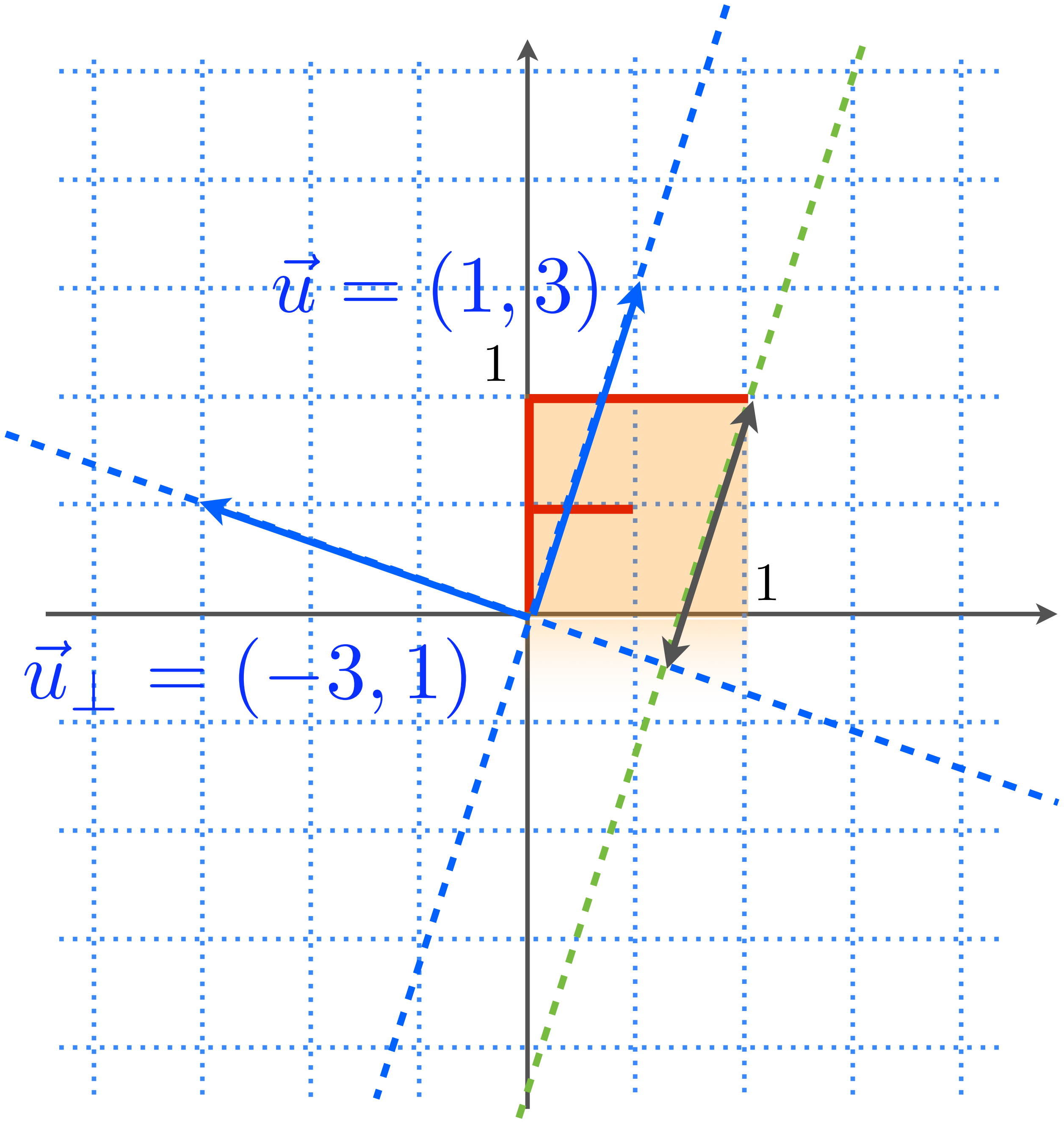


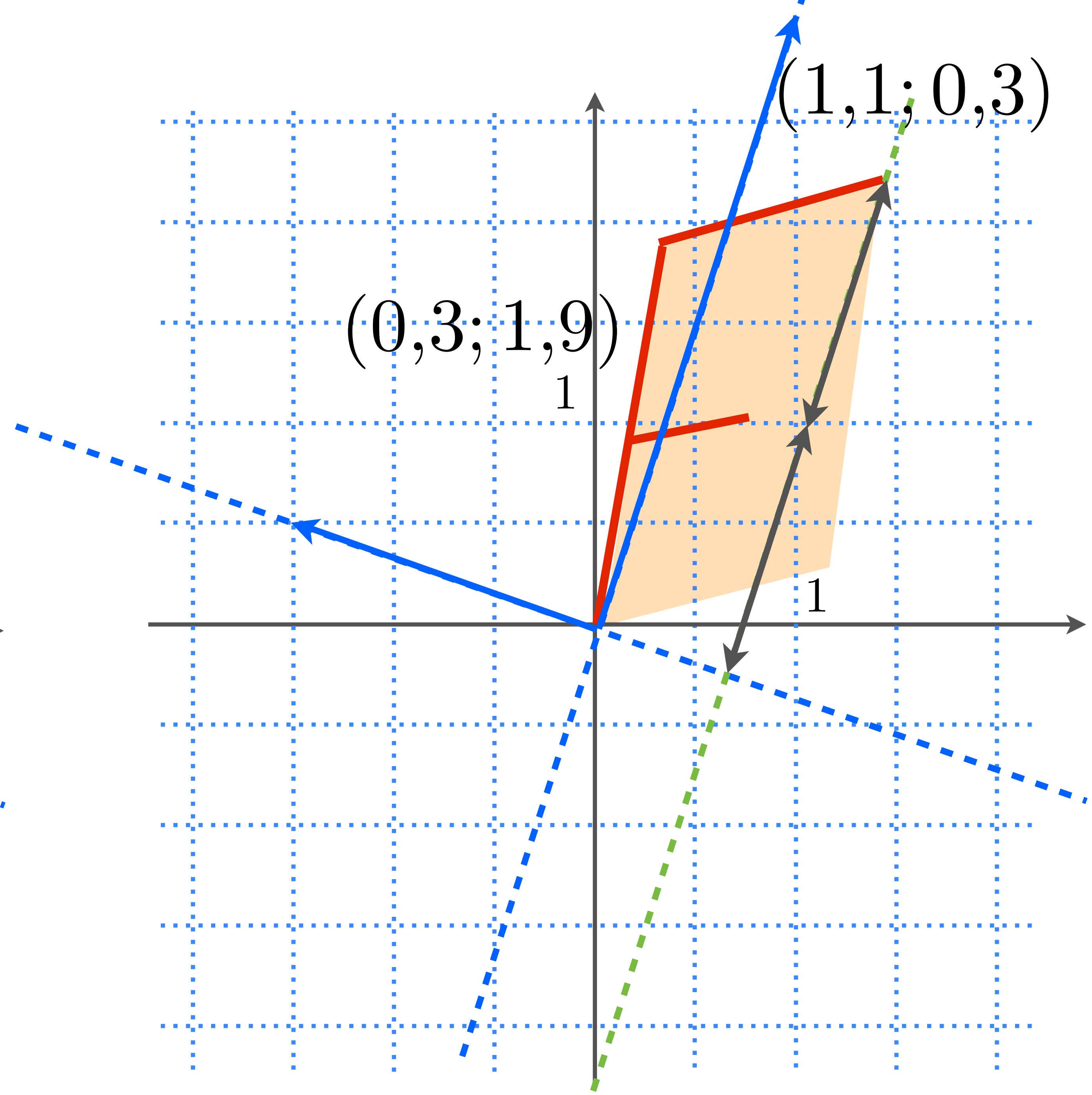
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

Oui, mais on ne voit pas trop
l'étirement dans UNE direction!

On cherchait un étirement
d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1, 3)$$



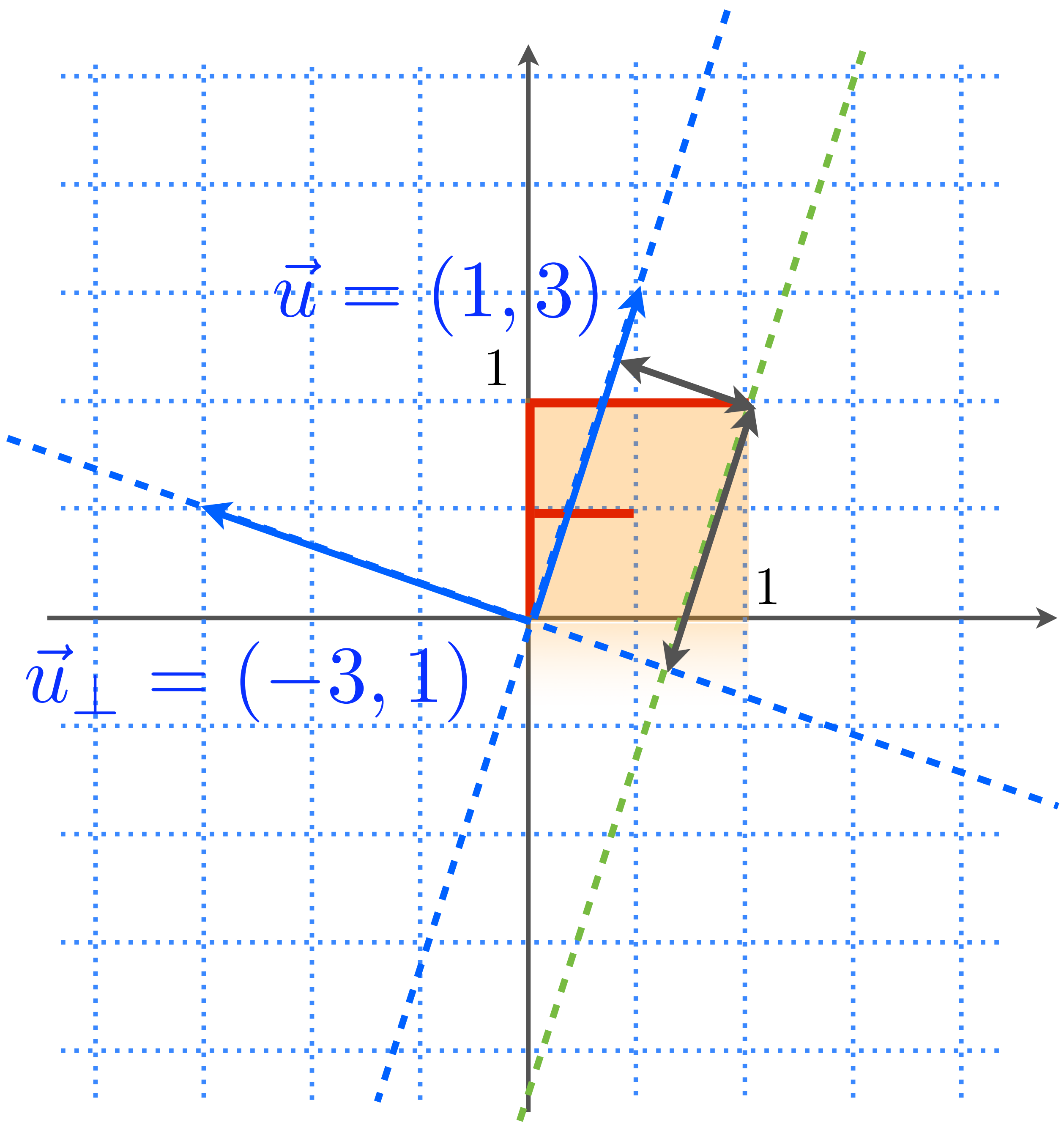


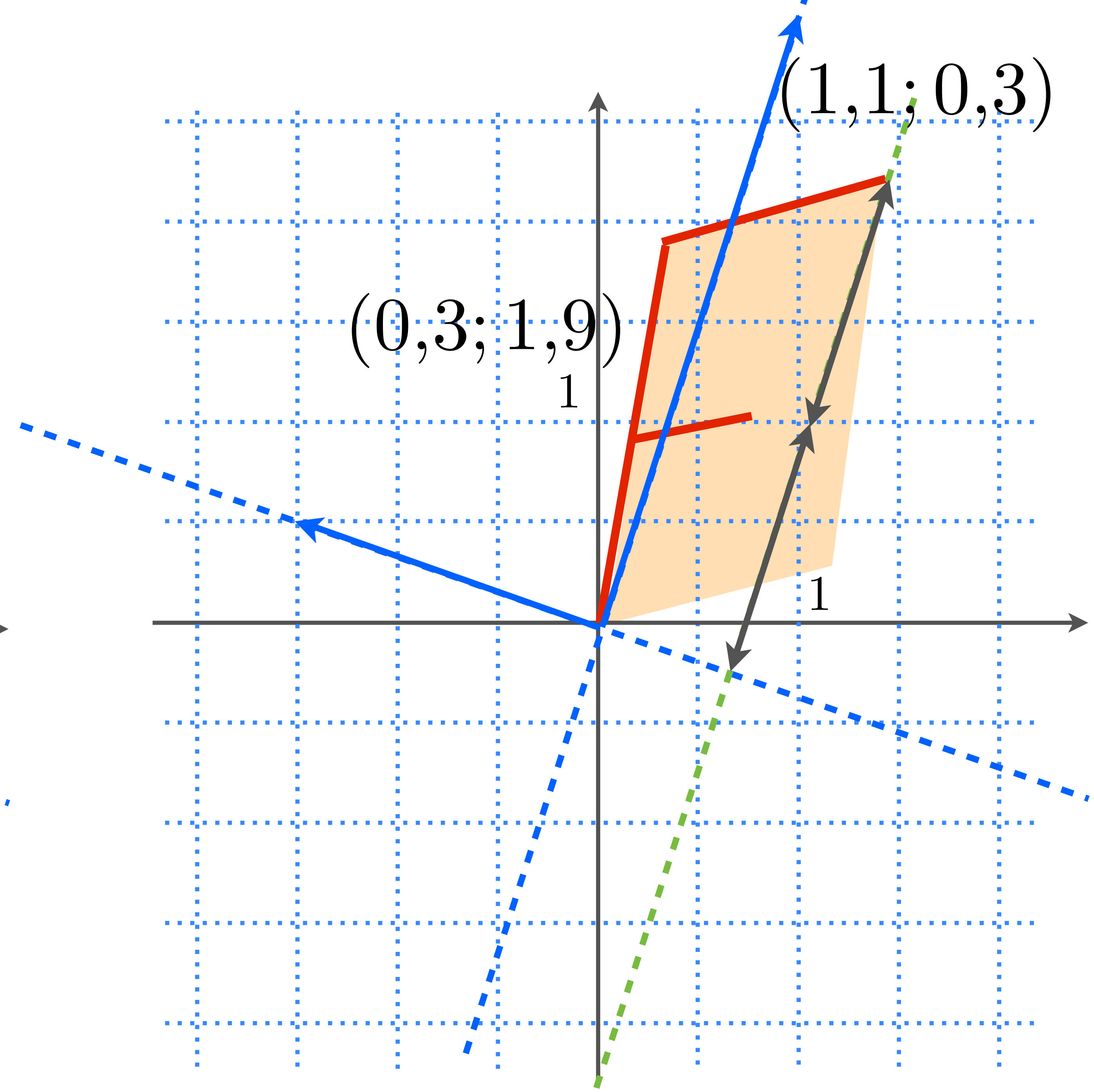
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!

On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1, 3)$$



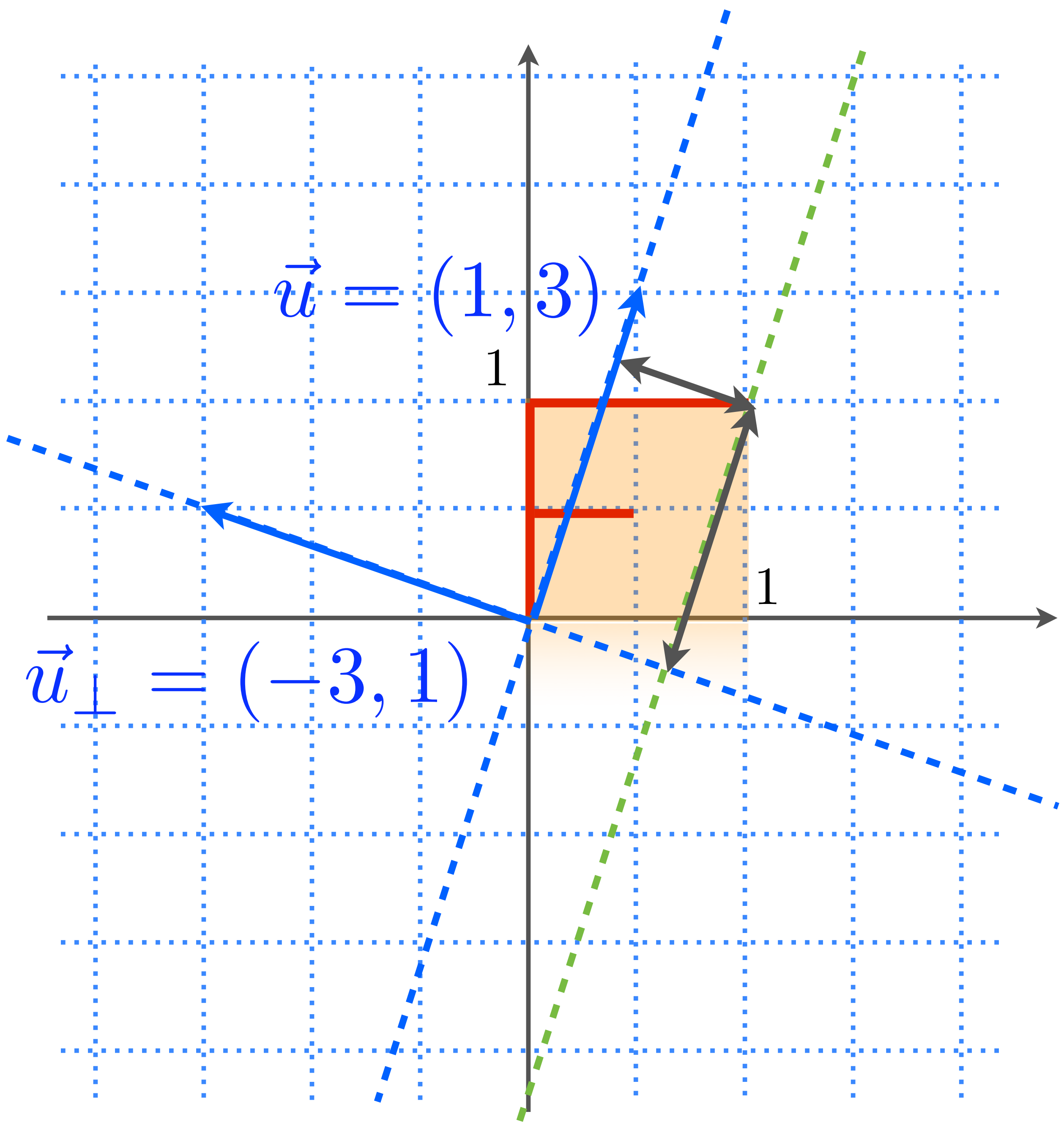


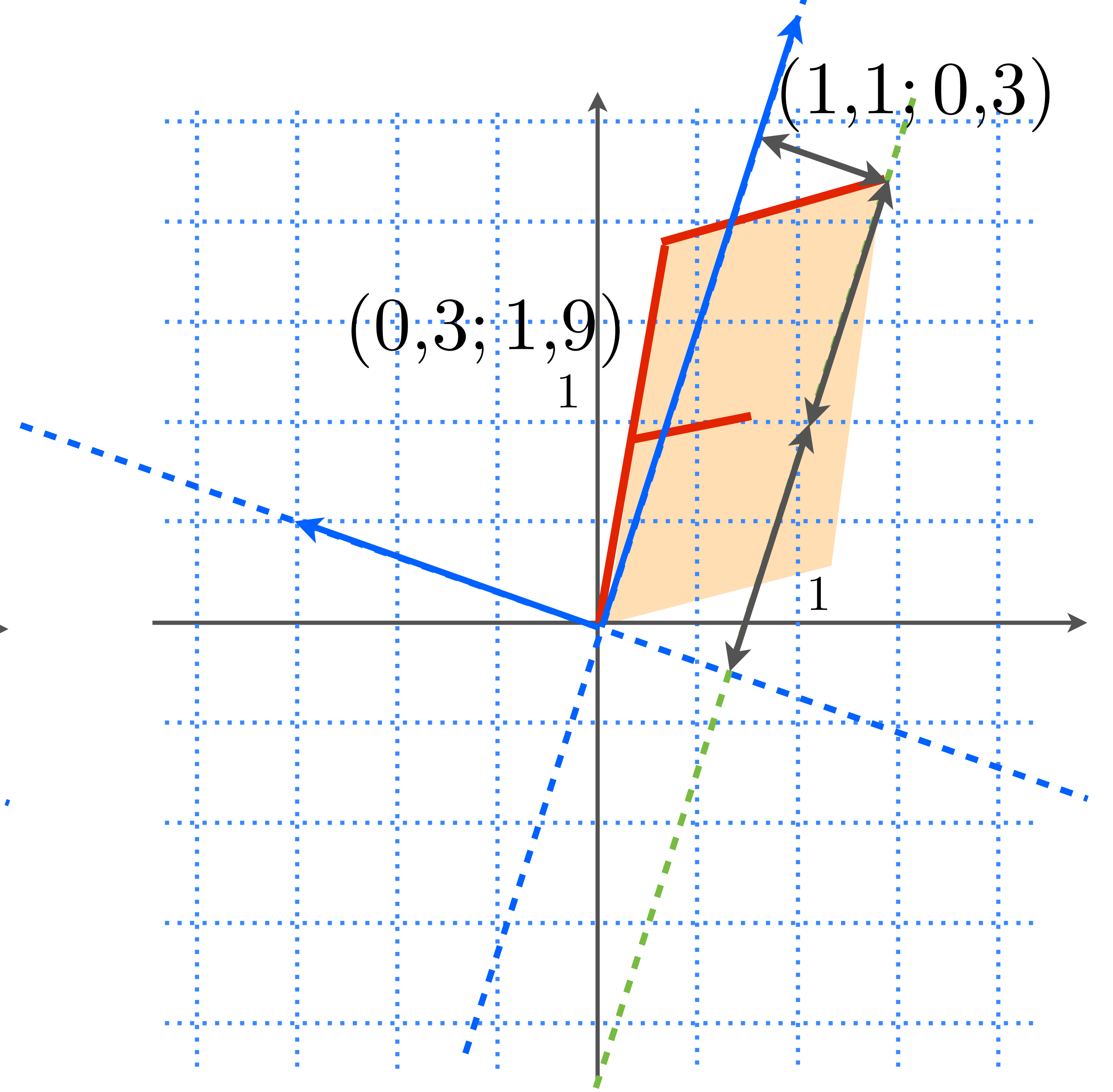
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!

On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1, 3)$$





$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,3 & 1,9 \end{pmatrix}$$

On cherchait un étirement d'un facteur 2 dans la direction

$$\vec{u} = (1, 3)$$

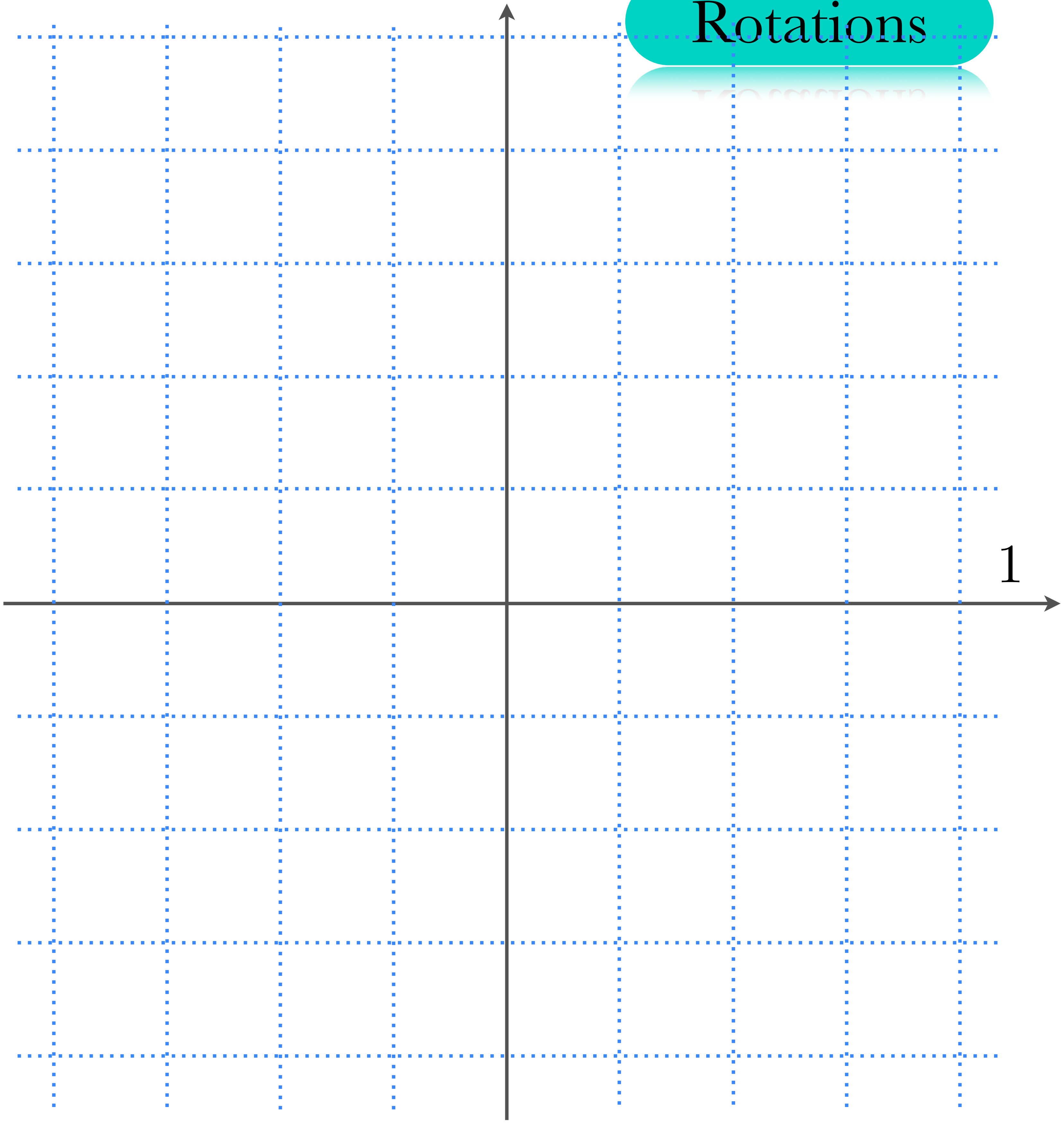
Oui, mais on ne voit pas trop l'étirement dans UNE direction!

Faites les exercices suivants

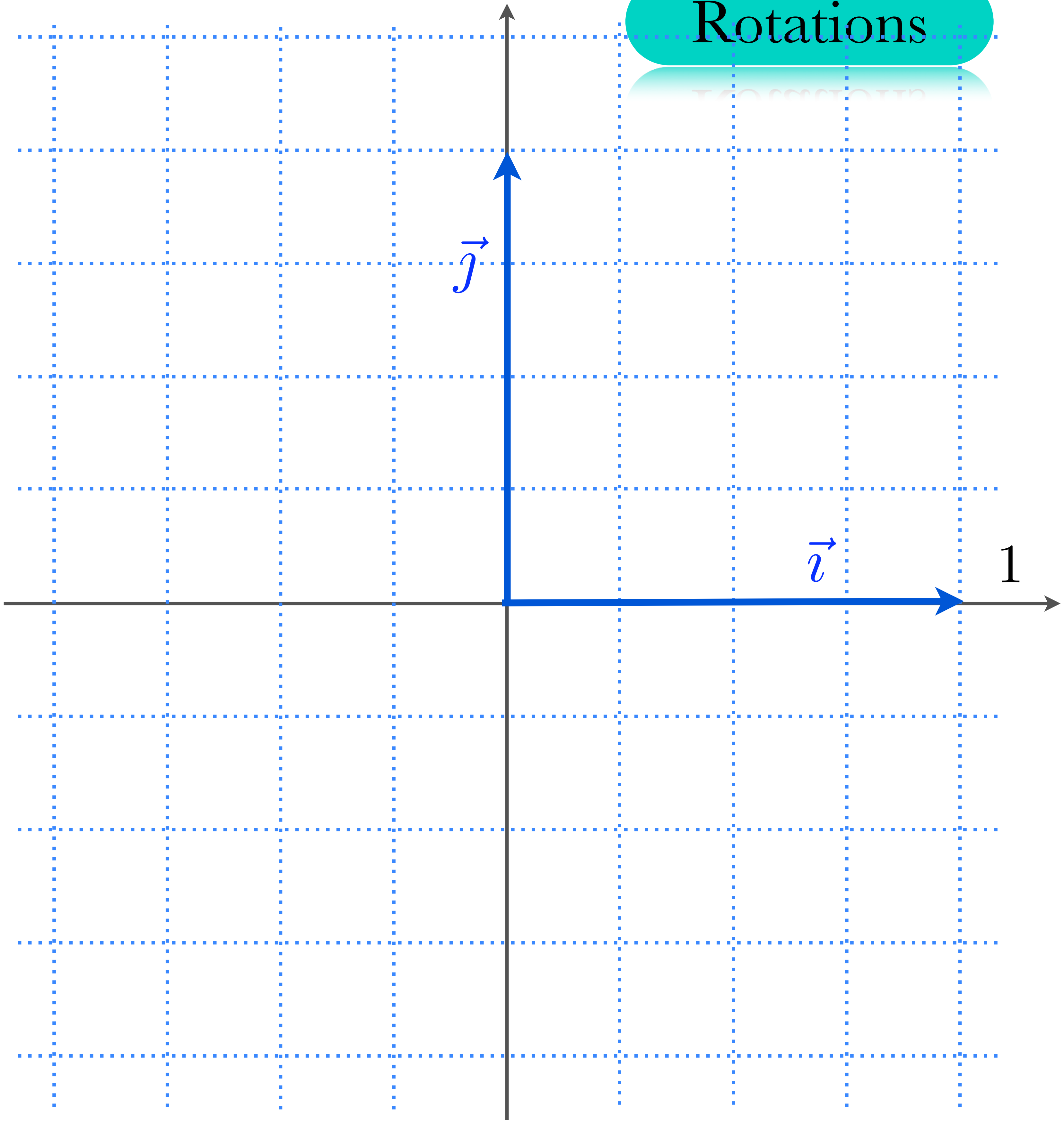
p. 265, # 1 à 3.

Rotations

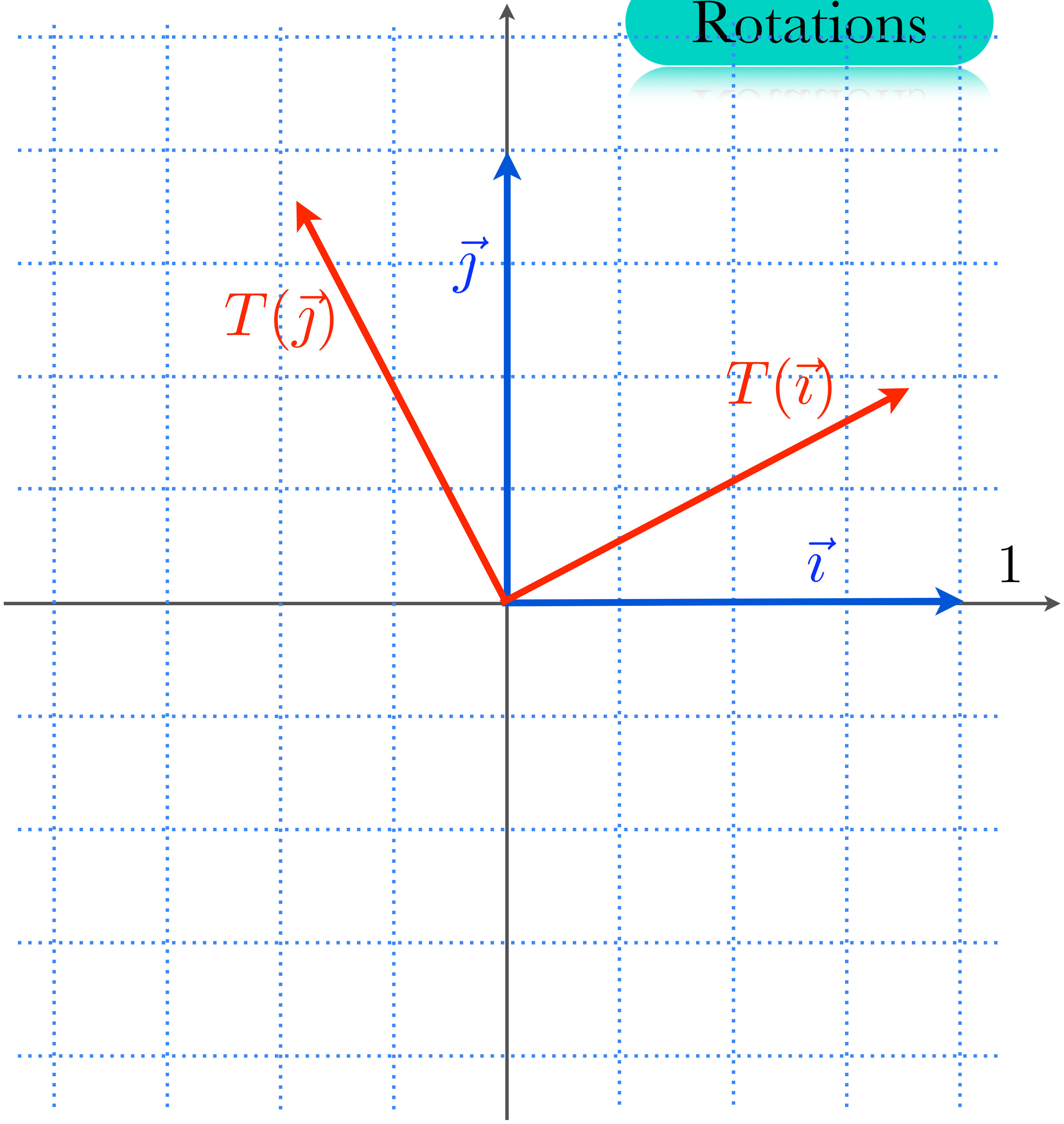
Rotations



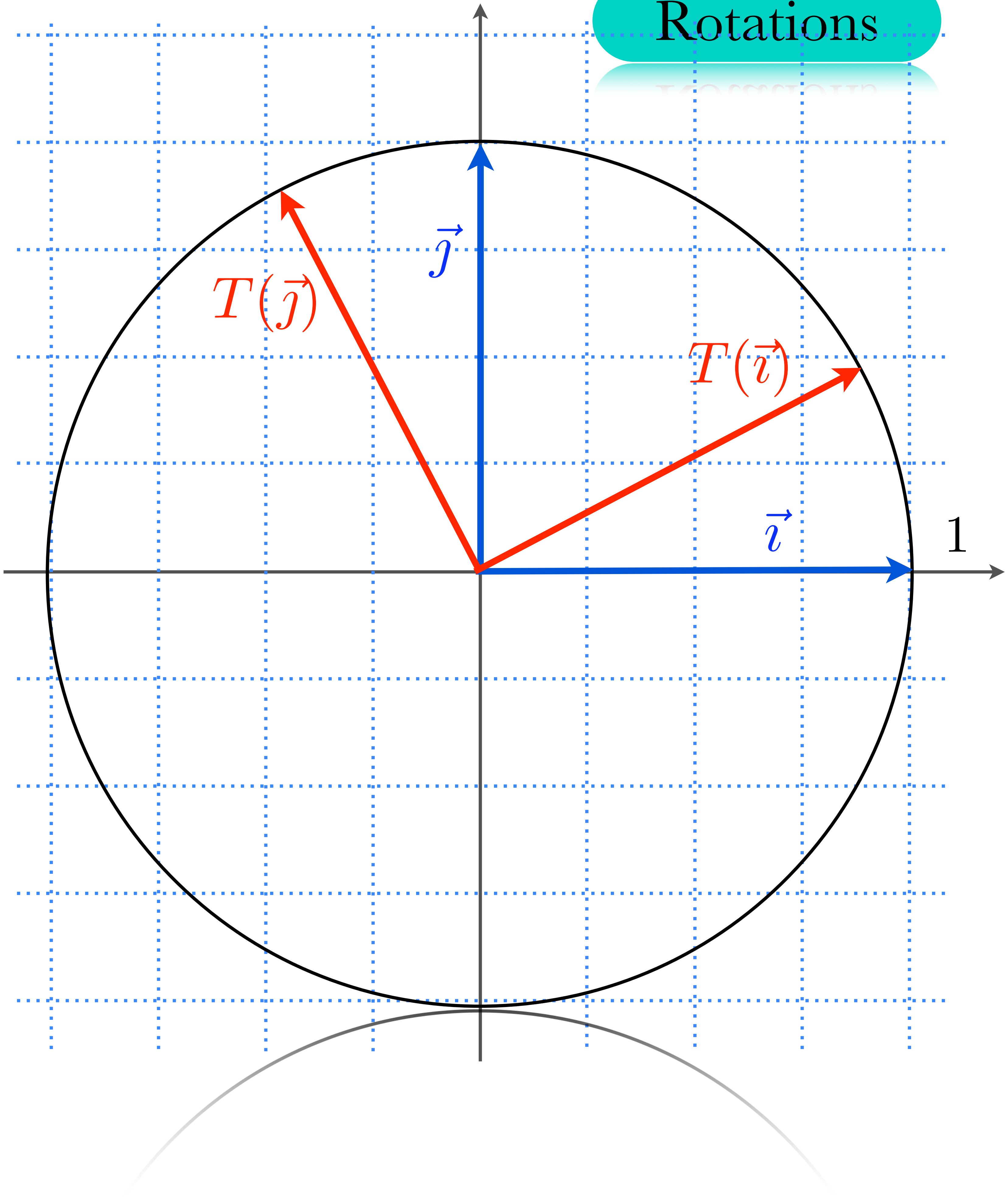
Rotations



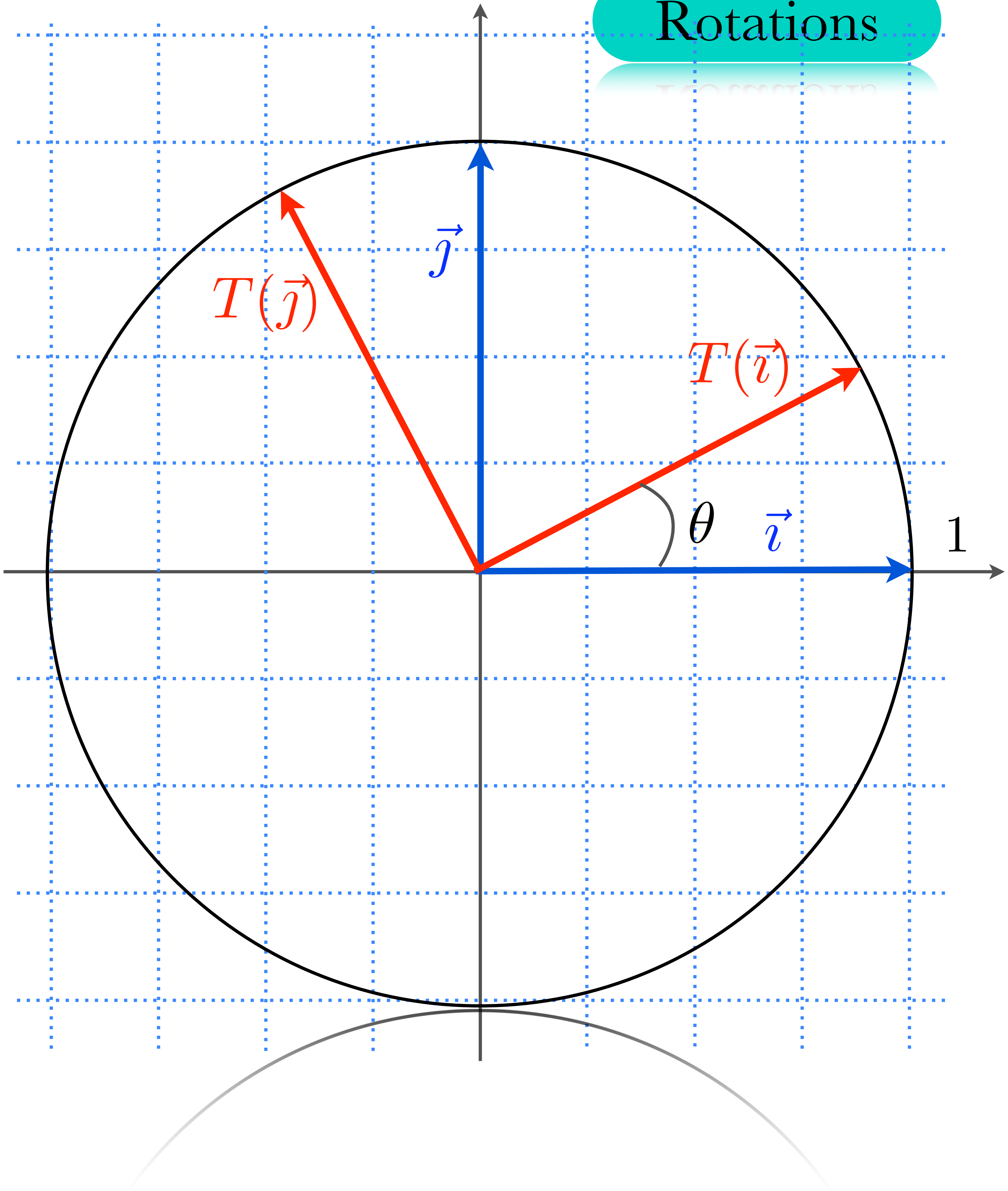
Rotations



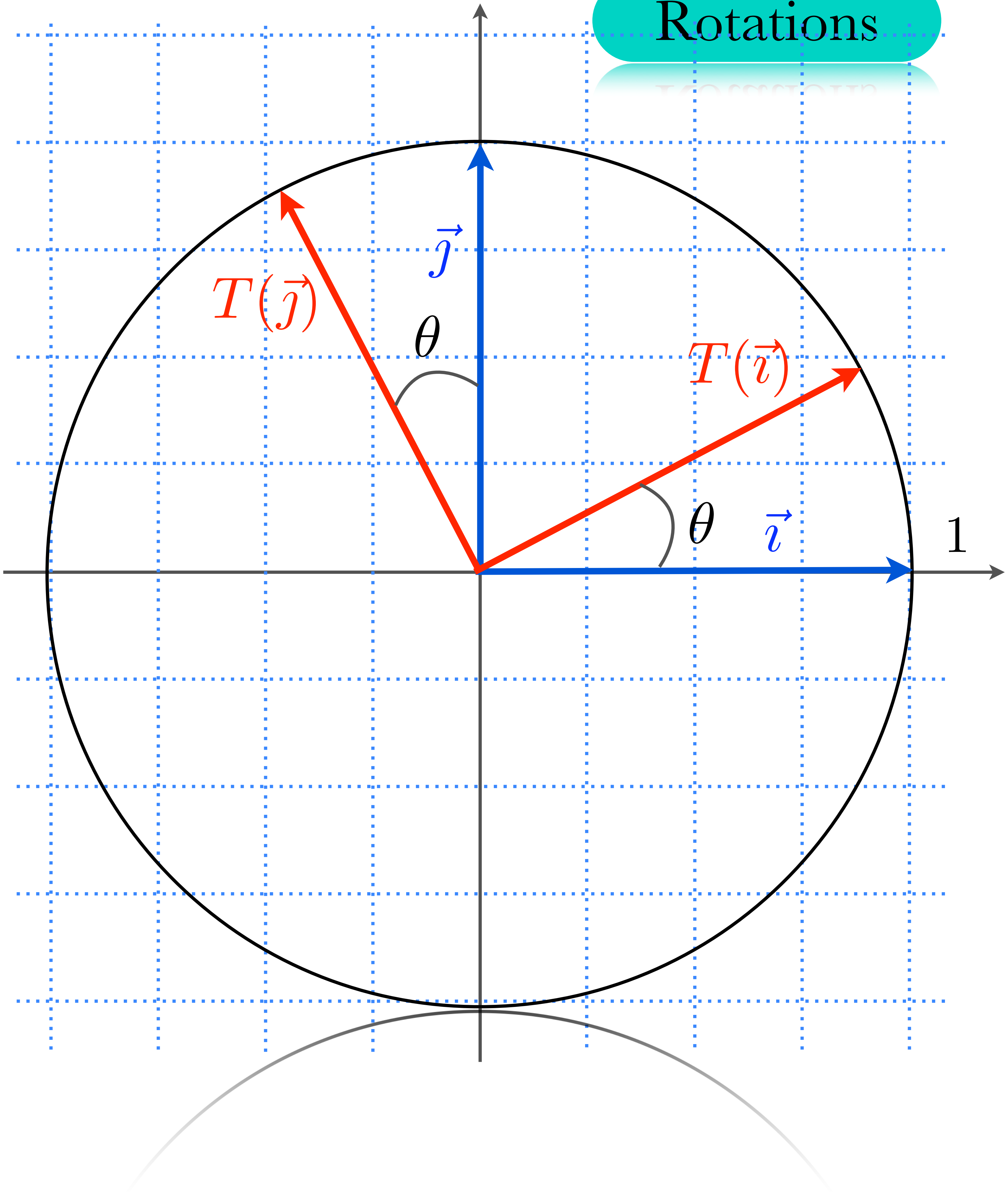
Rotations



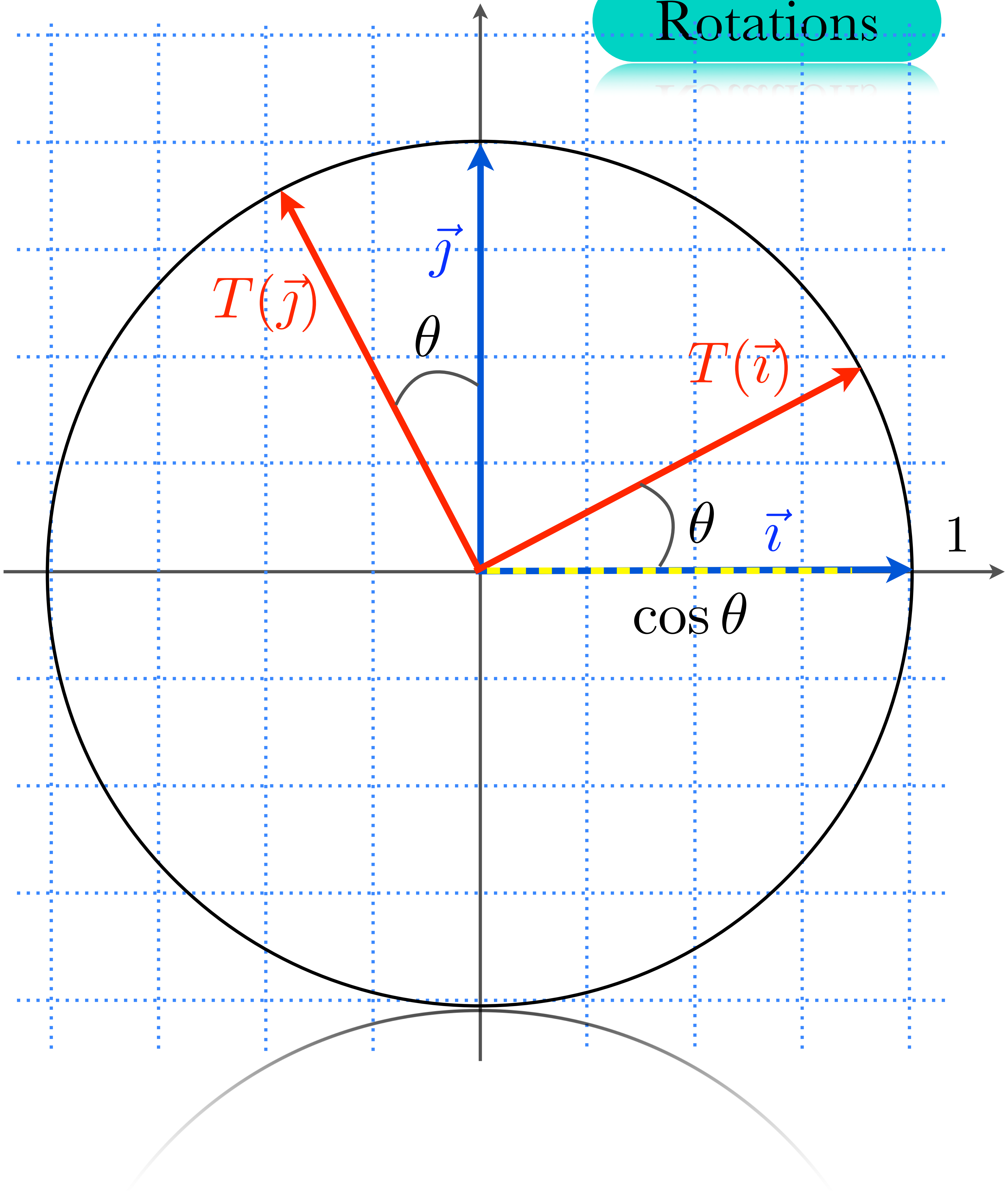
Rotations



Rotations

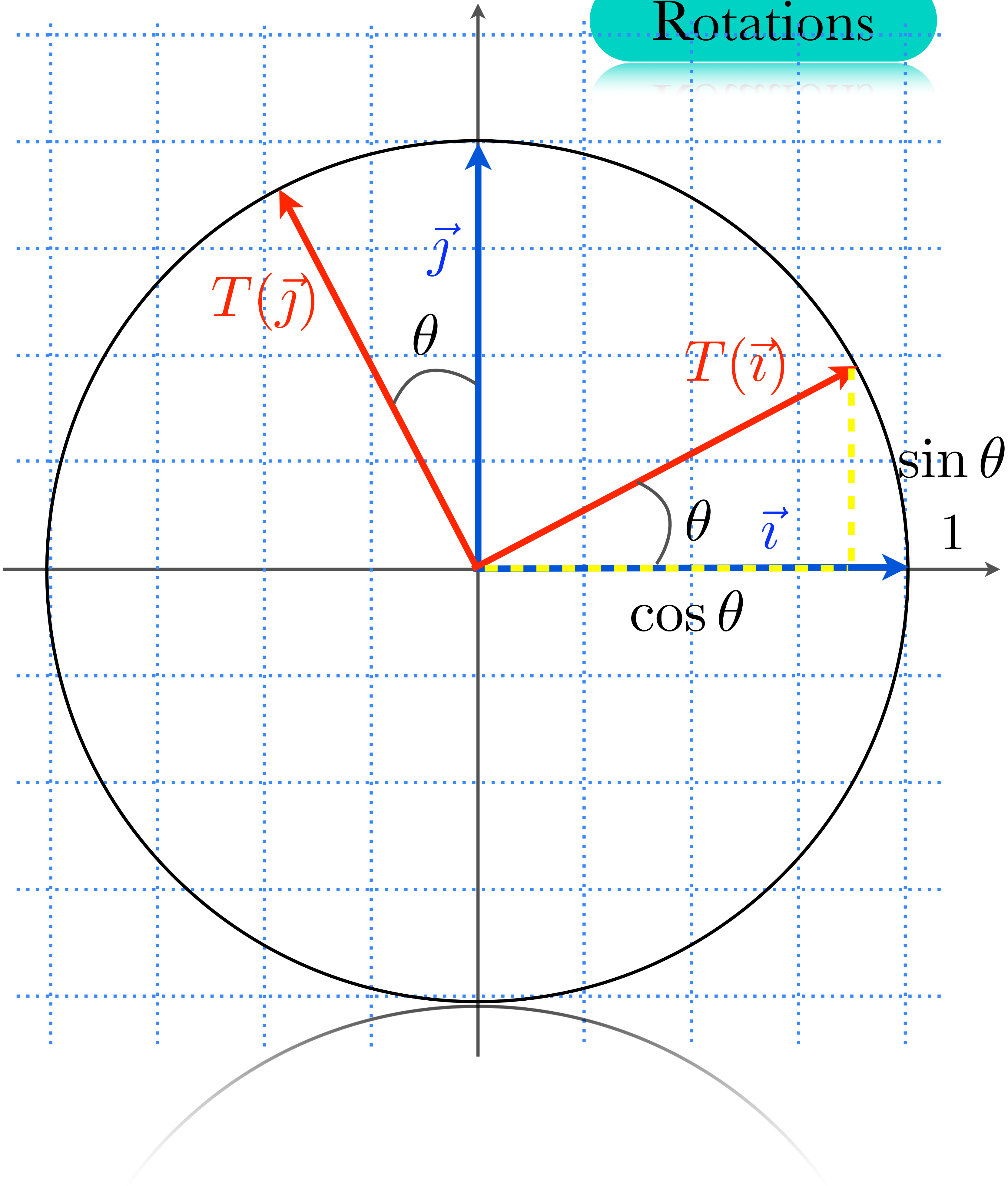


Rotations

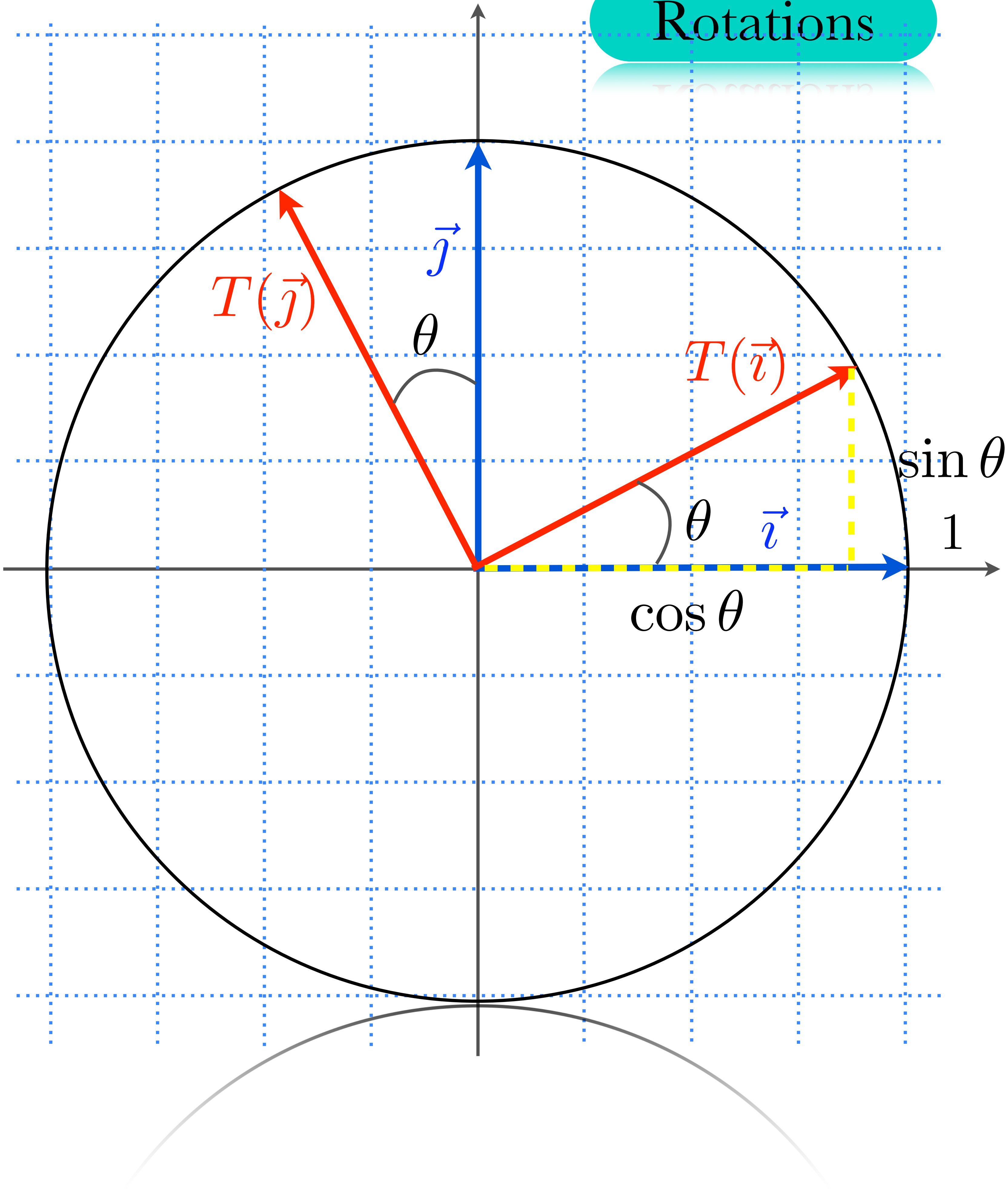


$T(\vec{\jmath})$
$\vec{\jmath}$
θ
$T(\vec{\imath})$
θ
$\vec{\imath}$
1
$\cos\theta$

Rotations

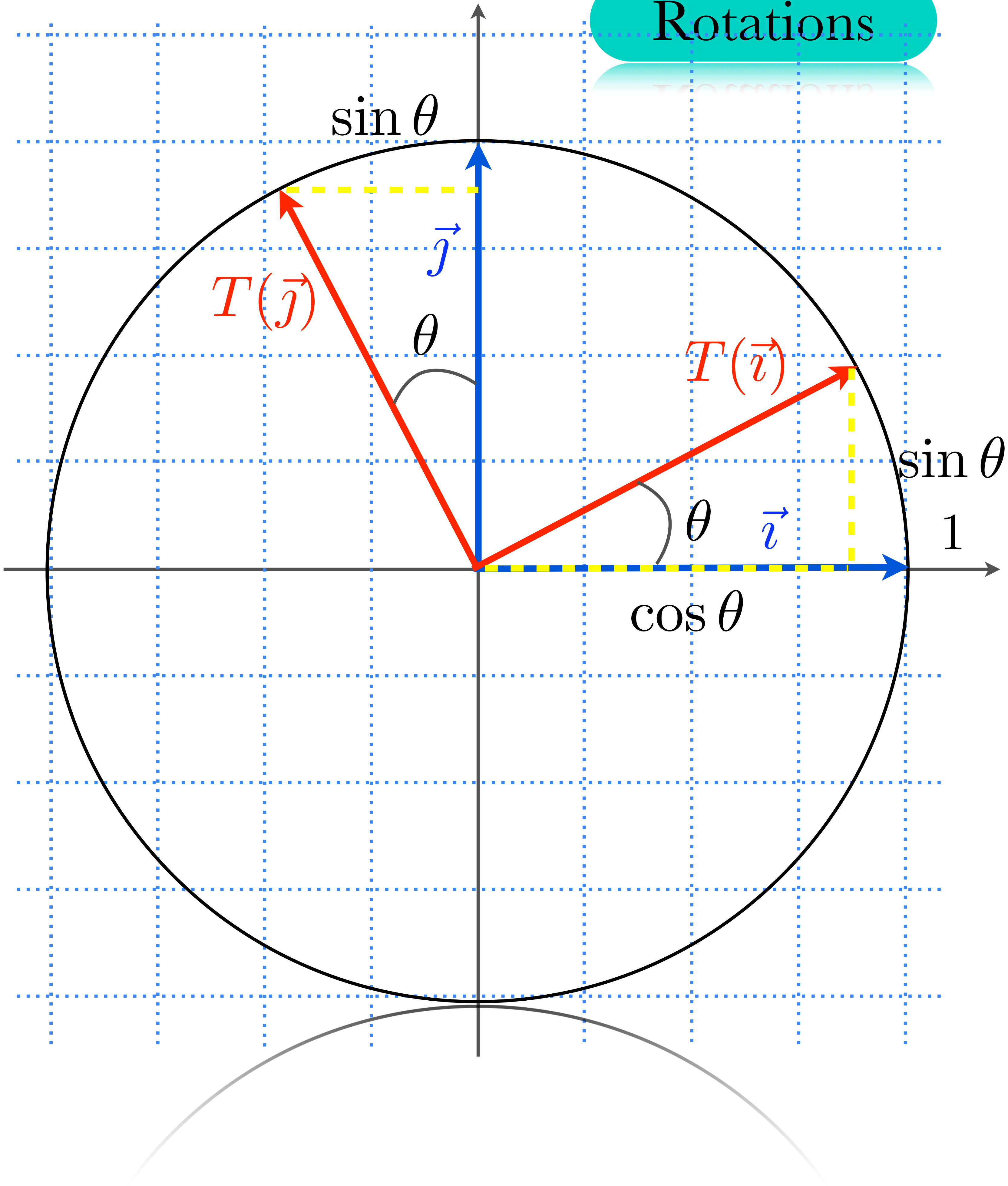


Rotations



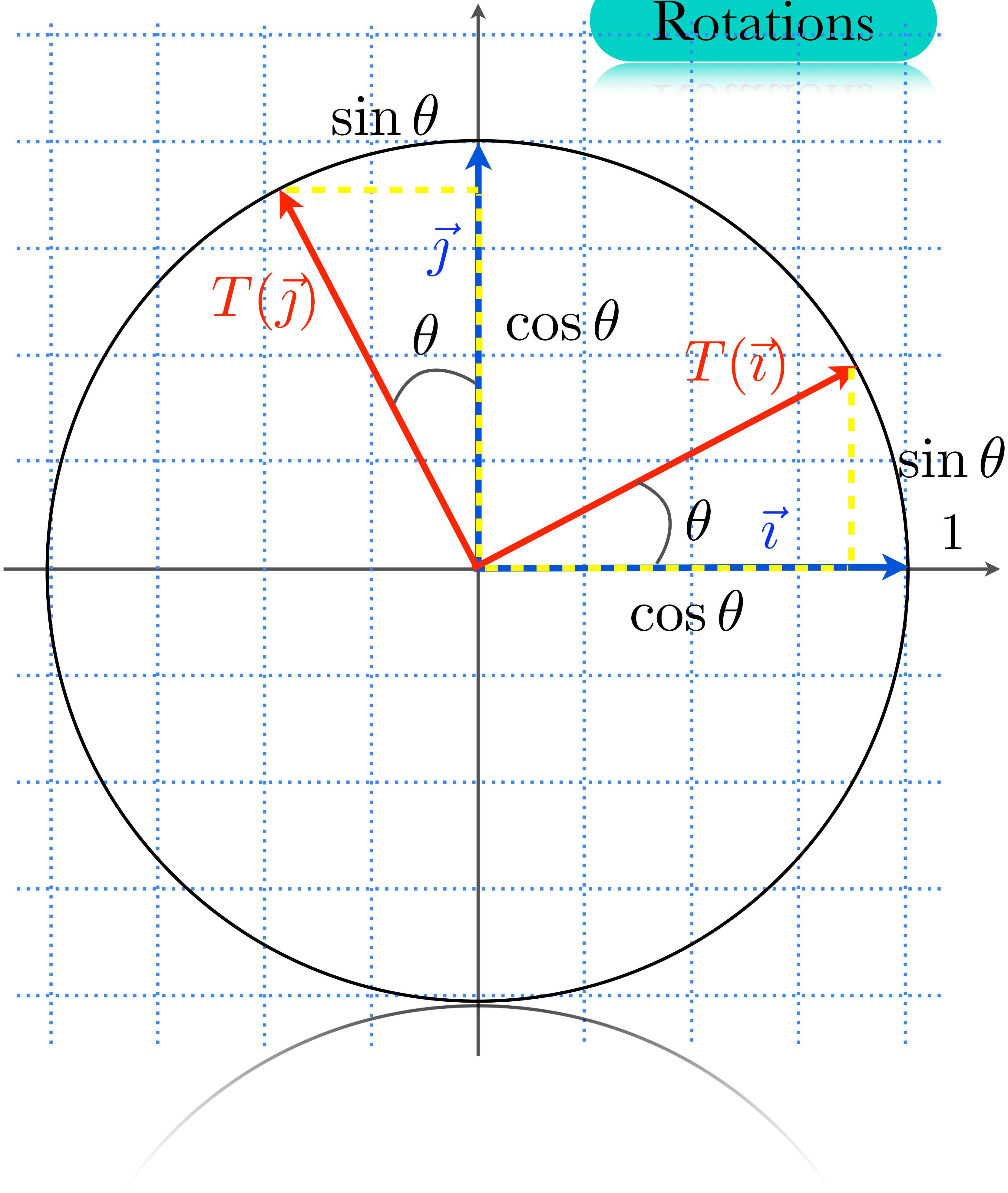
$$T(\vec{i}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Rotations



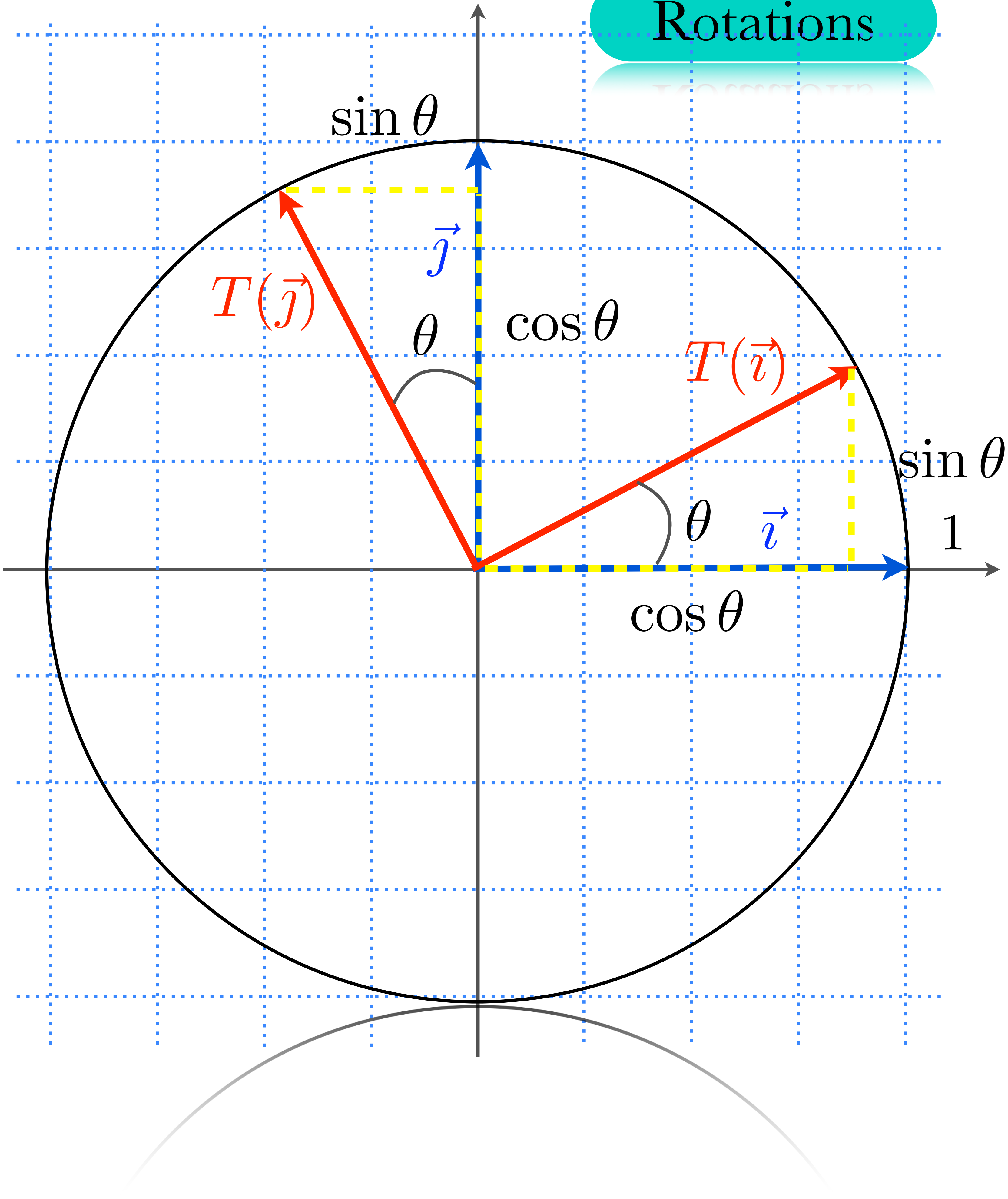
$$T(\vec{i}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Rotations



$$T(\vec{i}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

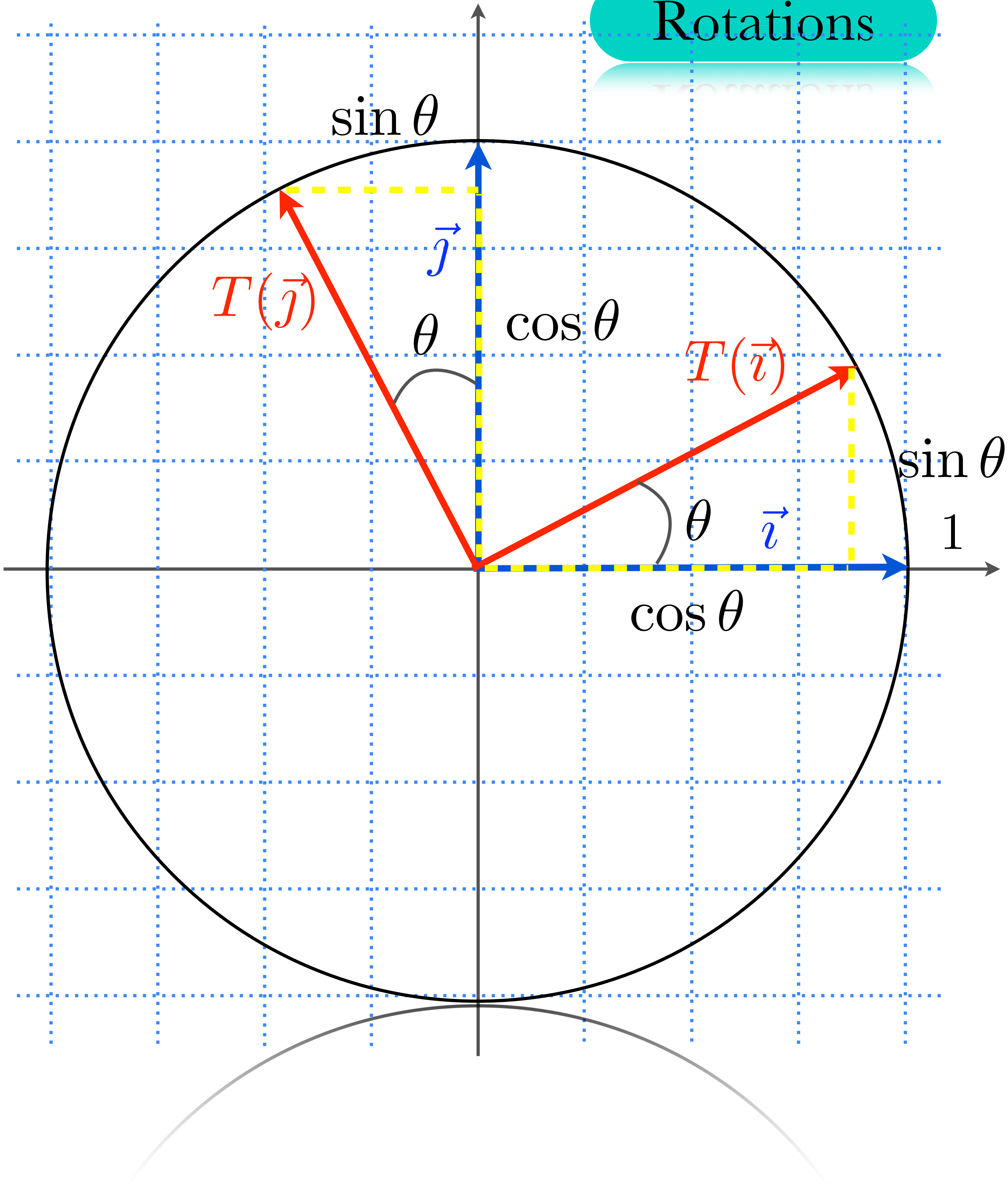
Rotations



$$T(\vec{i}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$T(\vec{j}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

Rotations

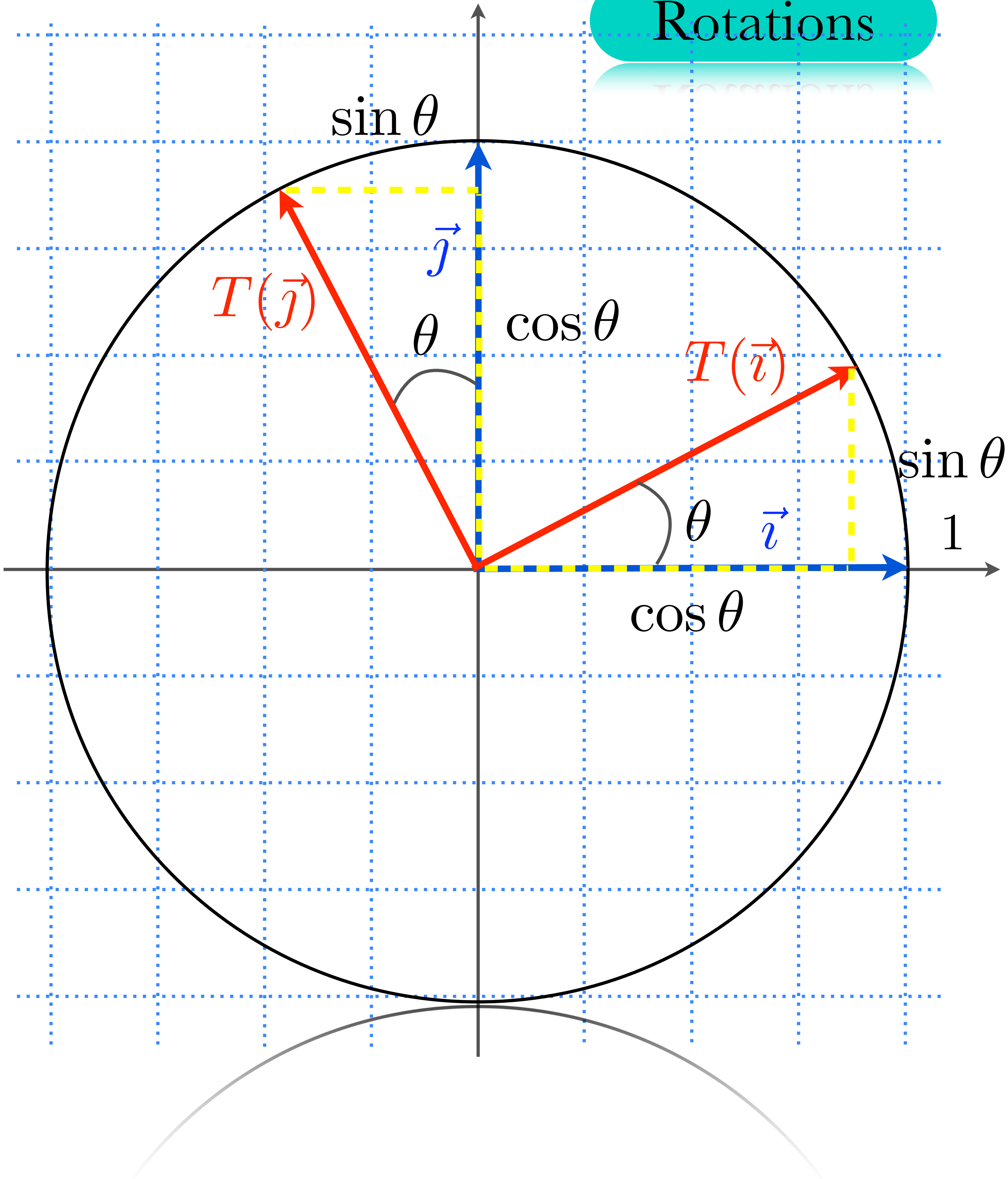


$$T(\vec{i}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$T(\vec{j}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$= T(\vec{i})_{\perp}$$

Rotations



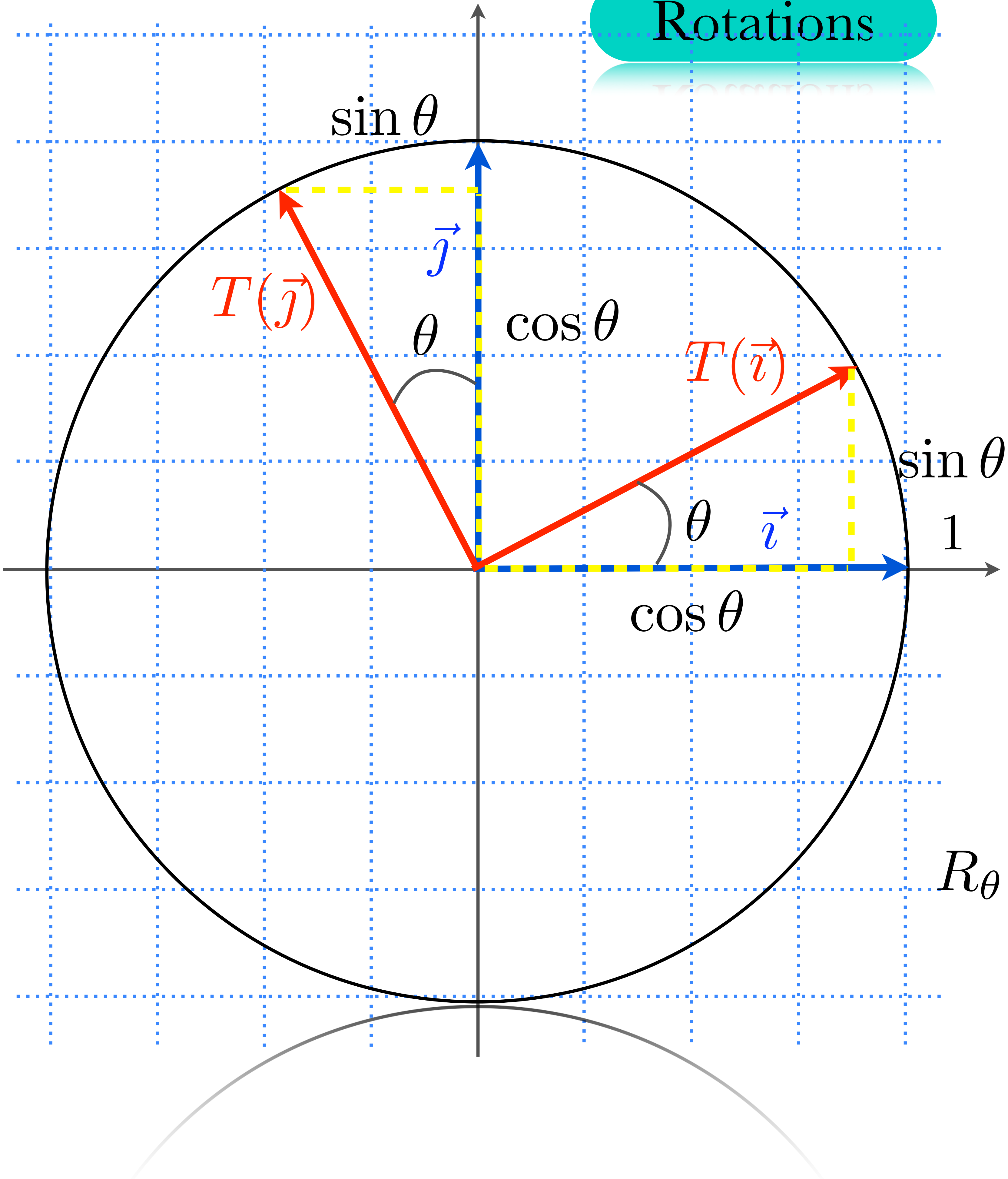
$$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$T(\vec{j}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$= T(\vec{\imath})_{\perp}$$

Donc, la matrice de rotation d'un angle θ est:

Rotations



$$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

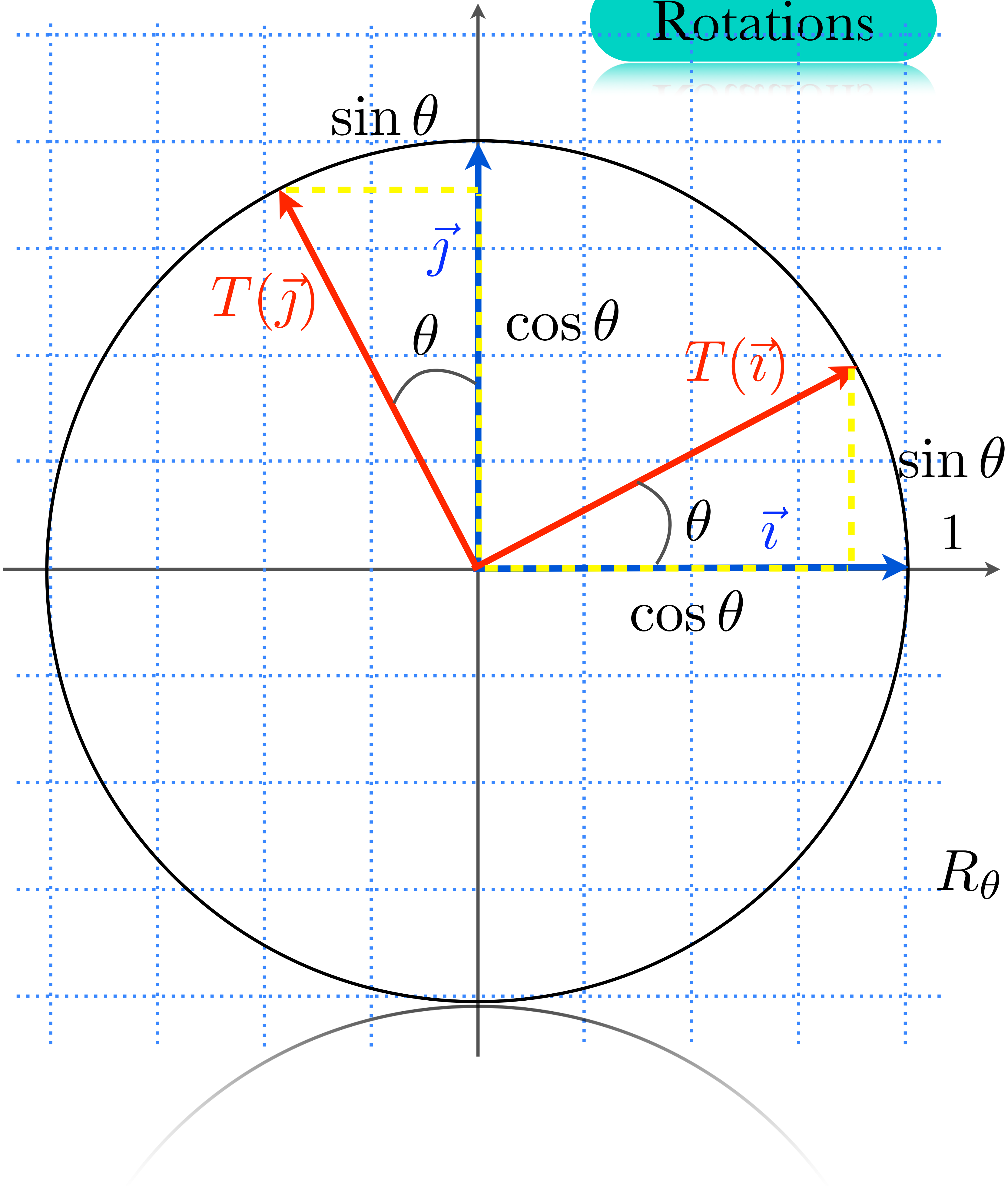
$$T(\vec{\jmath}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$= T(\vec{\imath})_{\perp}$$

Donc, la matrice de rotation d'un angle θ est:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotations



$$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

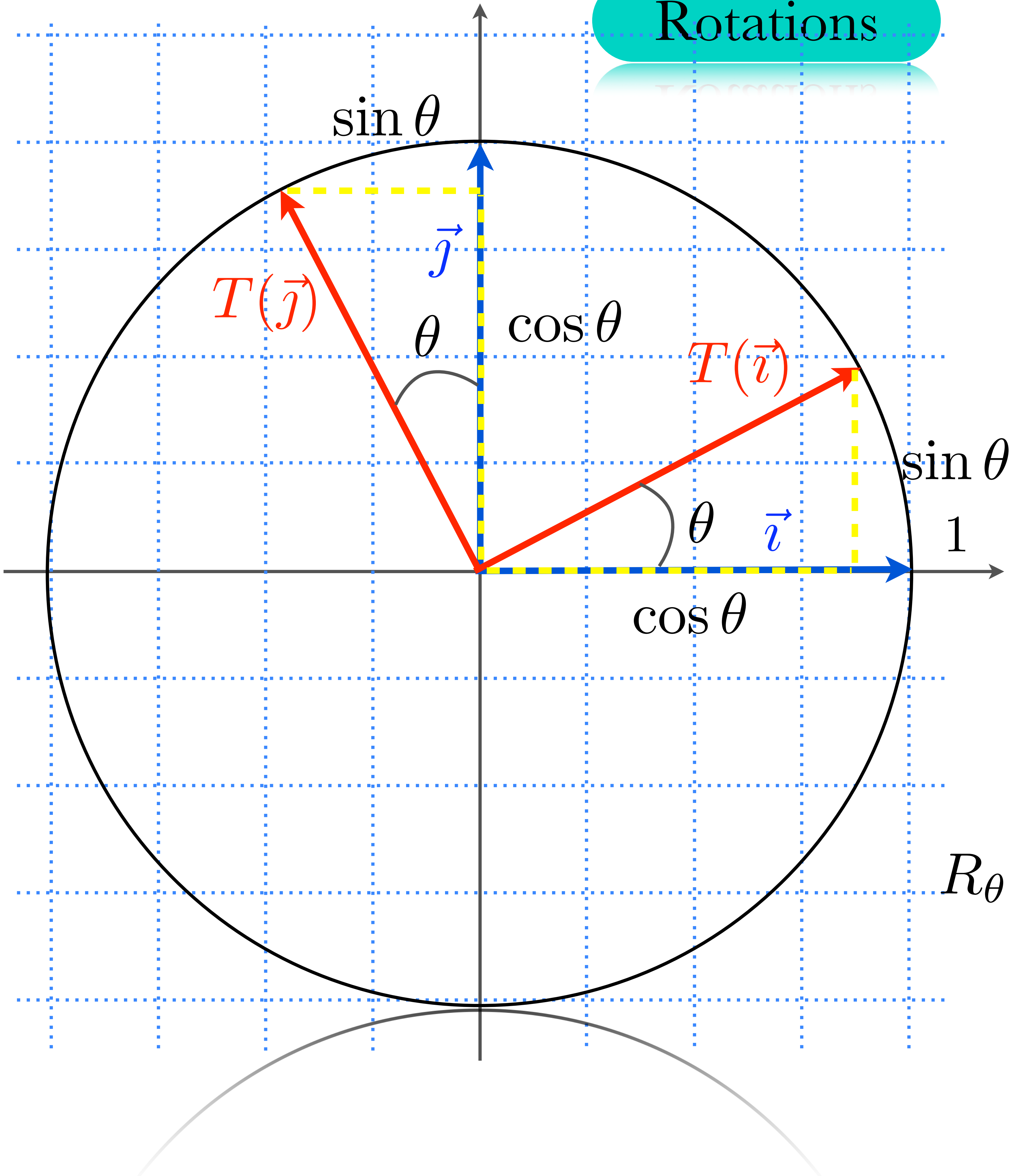
$$T(\vec{j}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$= T(\vec{\imath})_\perp$$

Donc, la matrice de rotation d'un angle θ est:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotations



$$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$= T(\vec{\imath})_{\perp}$$

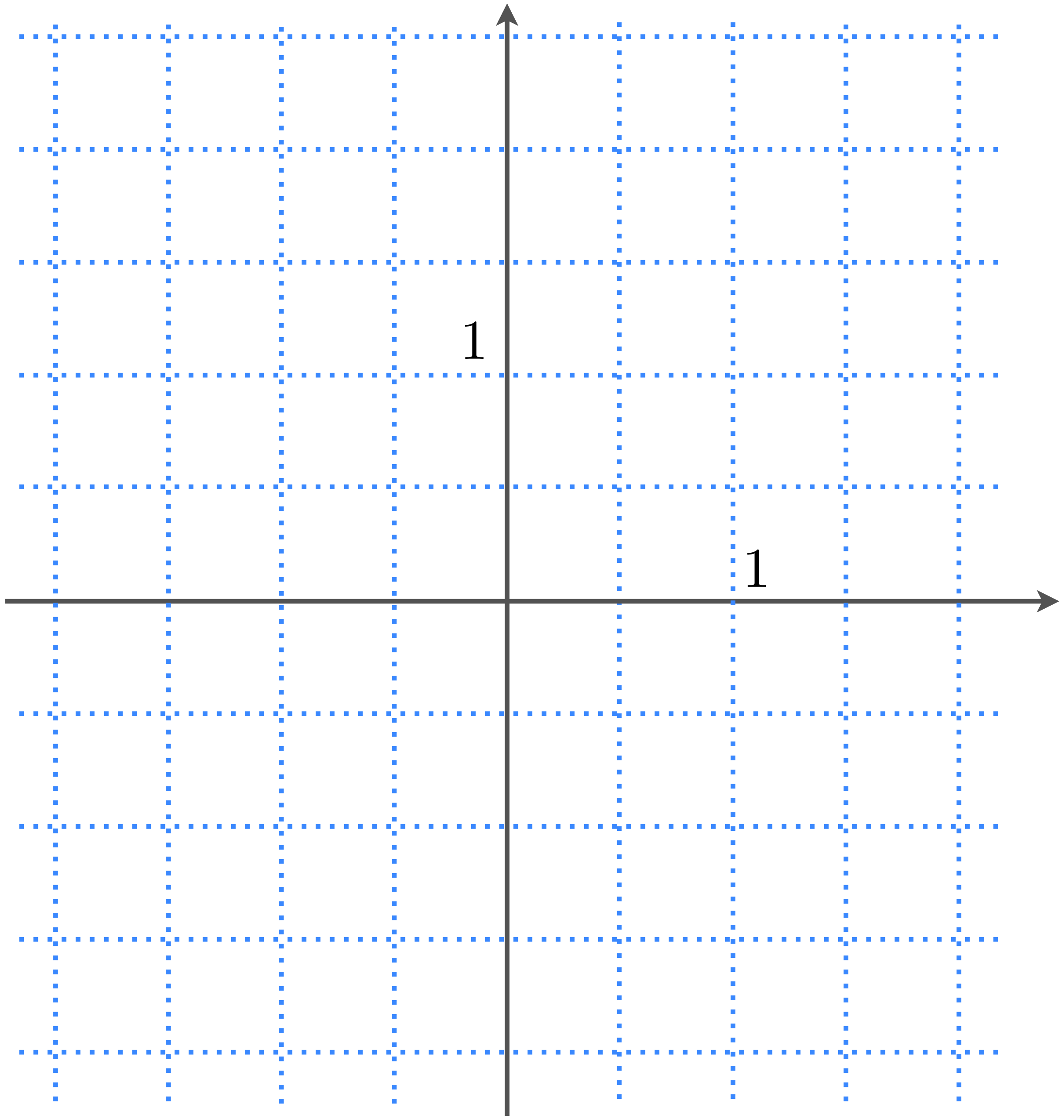
Donc, la matrice de rotation d'un angle θ est:

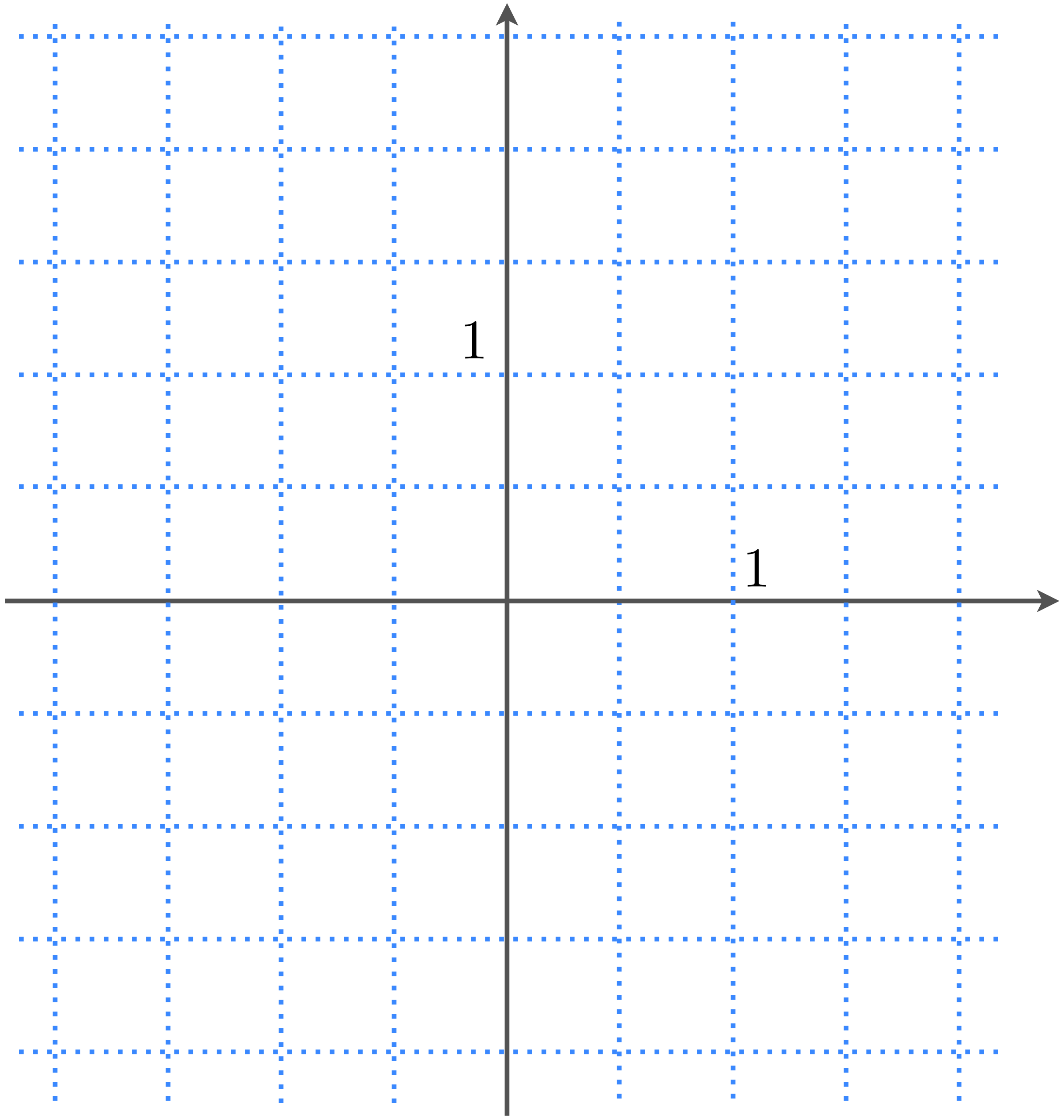
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Faites les exercices suivants

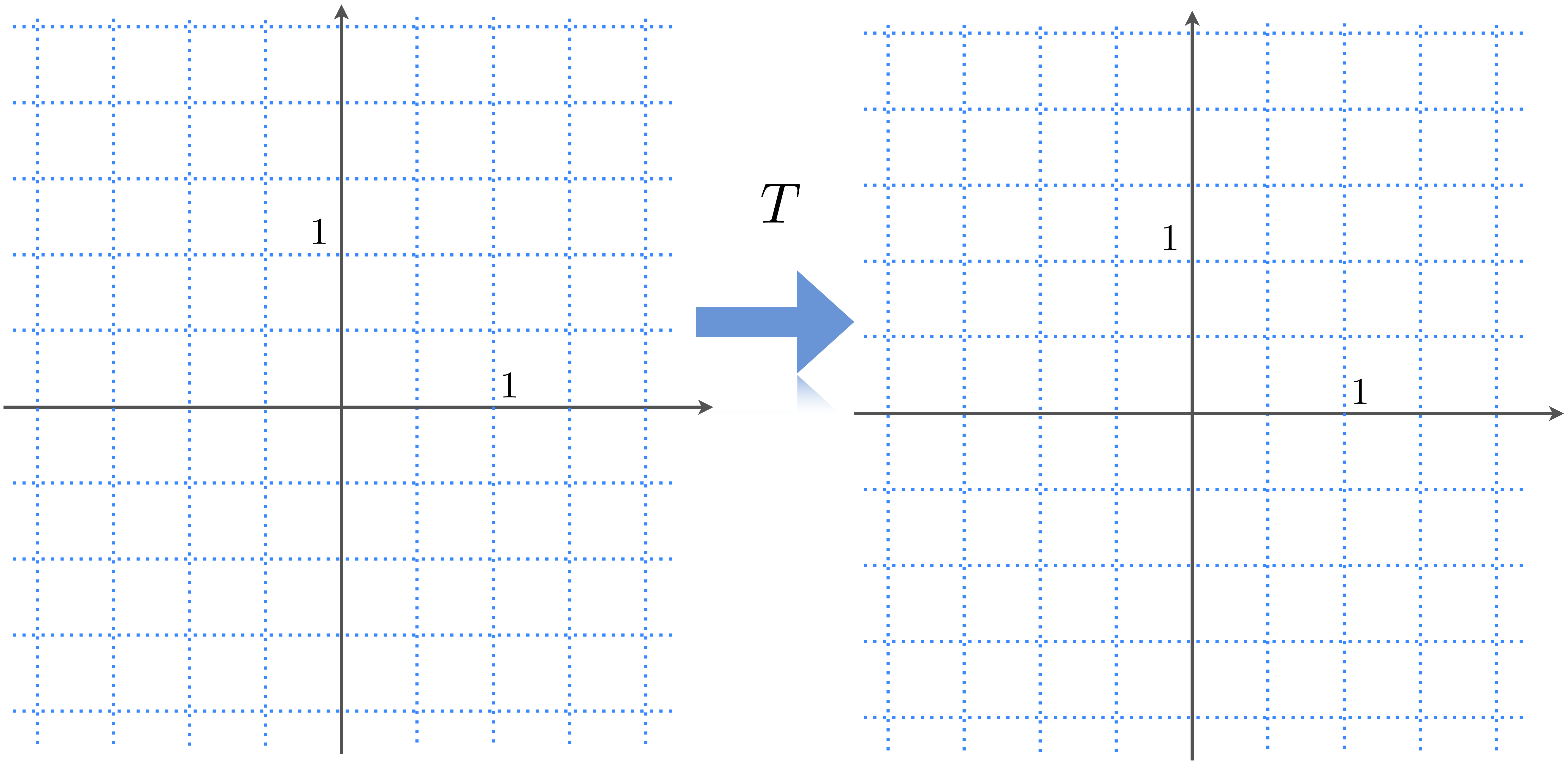
p. 266, # 7.

Réflexion par rapport à l'axe des x

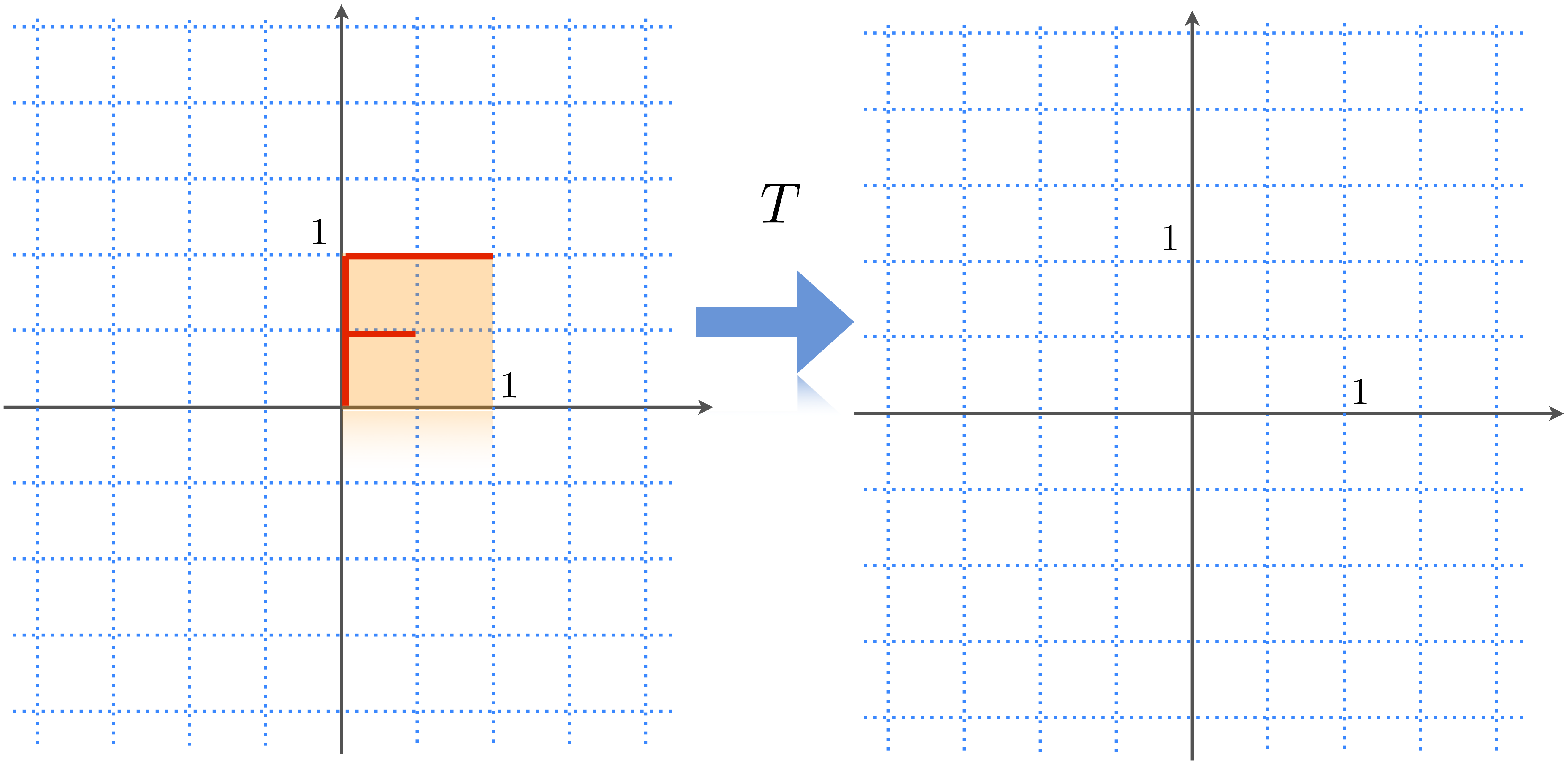




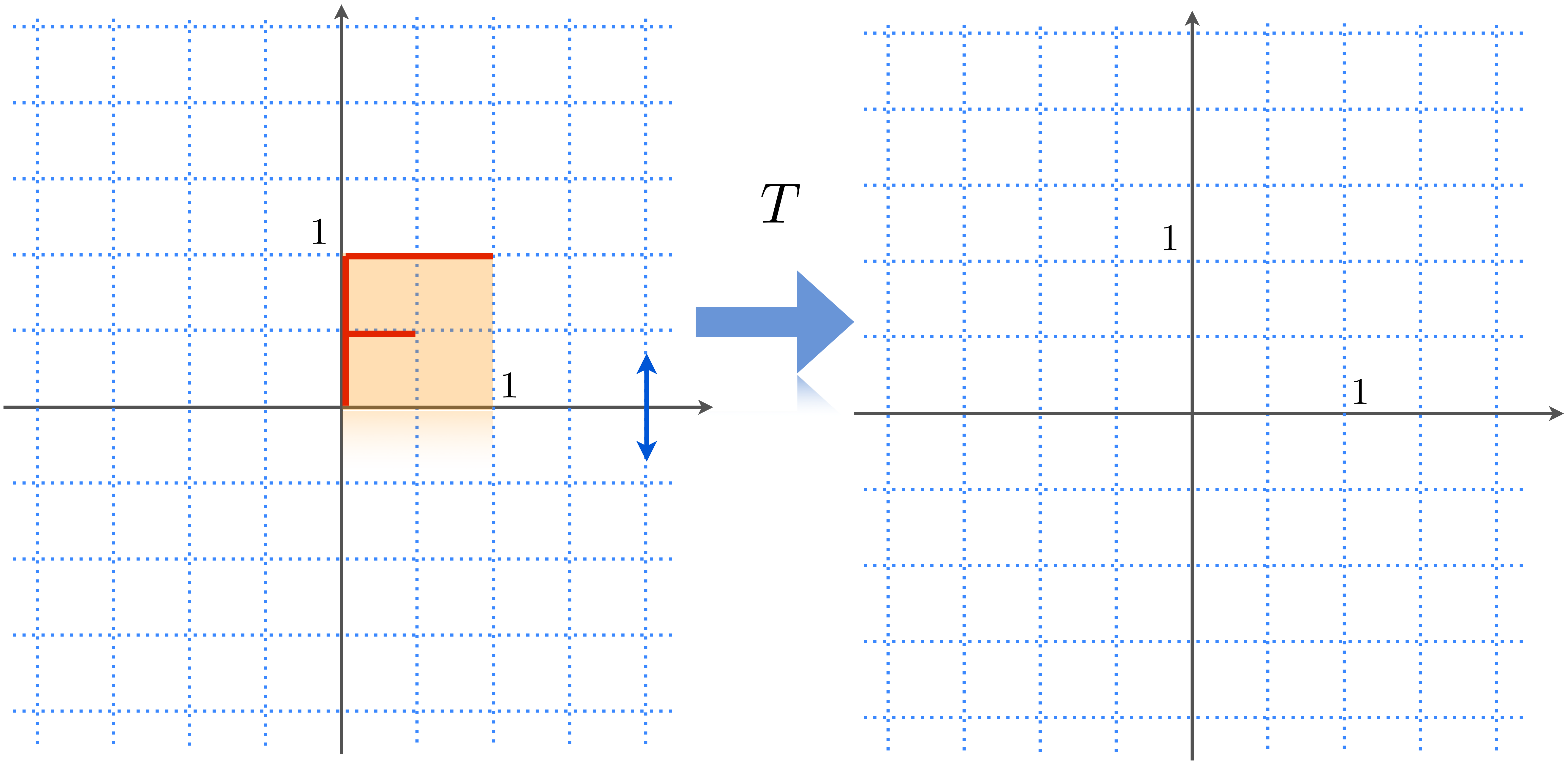
Réflexion par rapport à l'axe des x



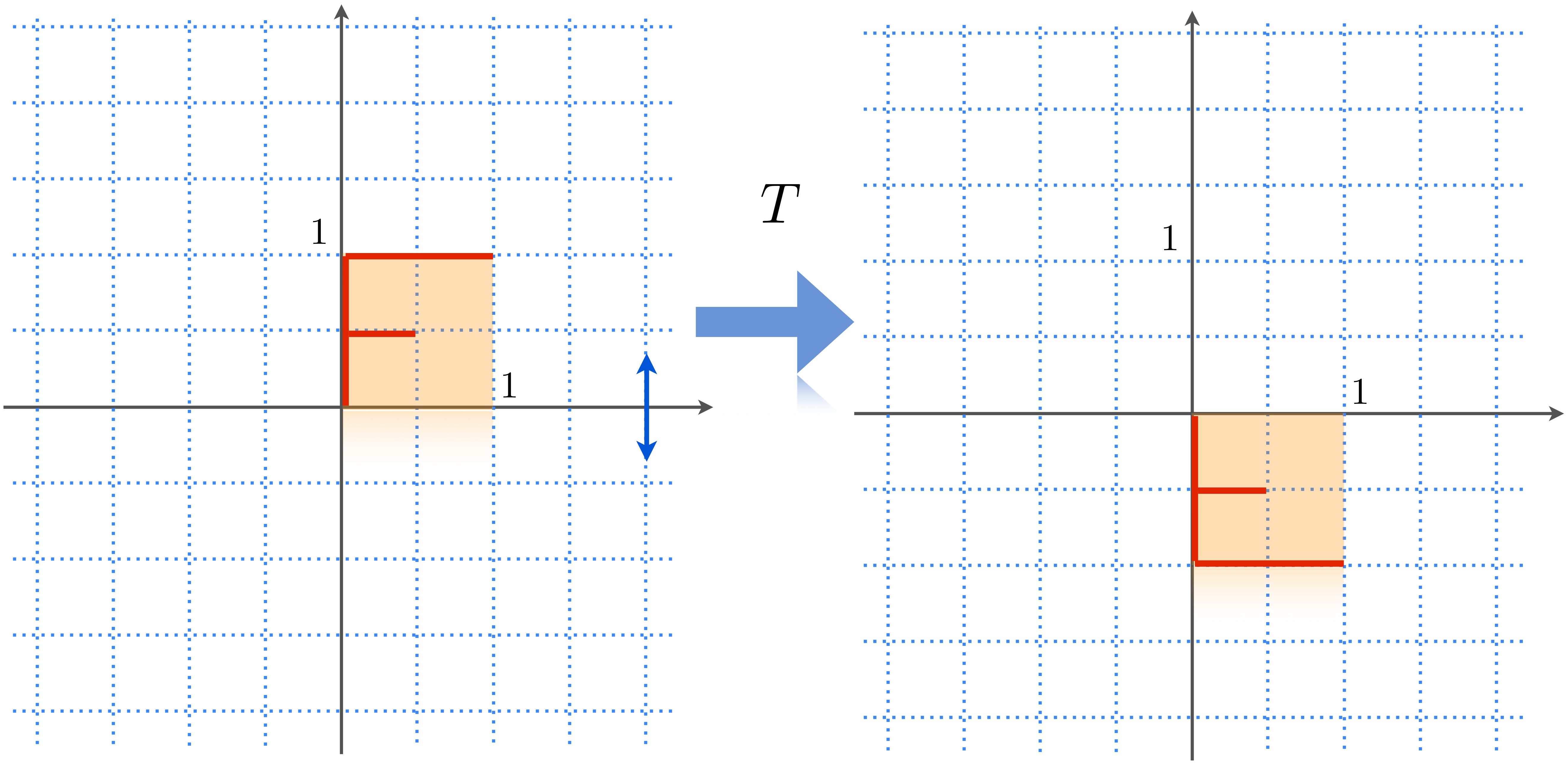
Réflexion par rapport à l'axe des x



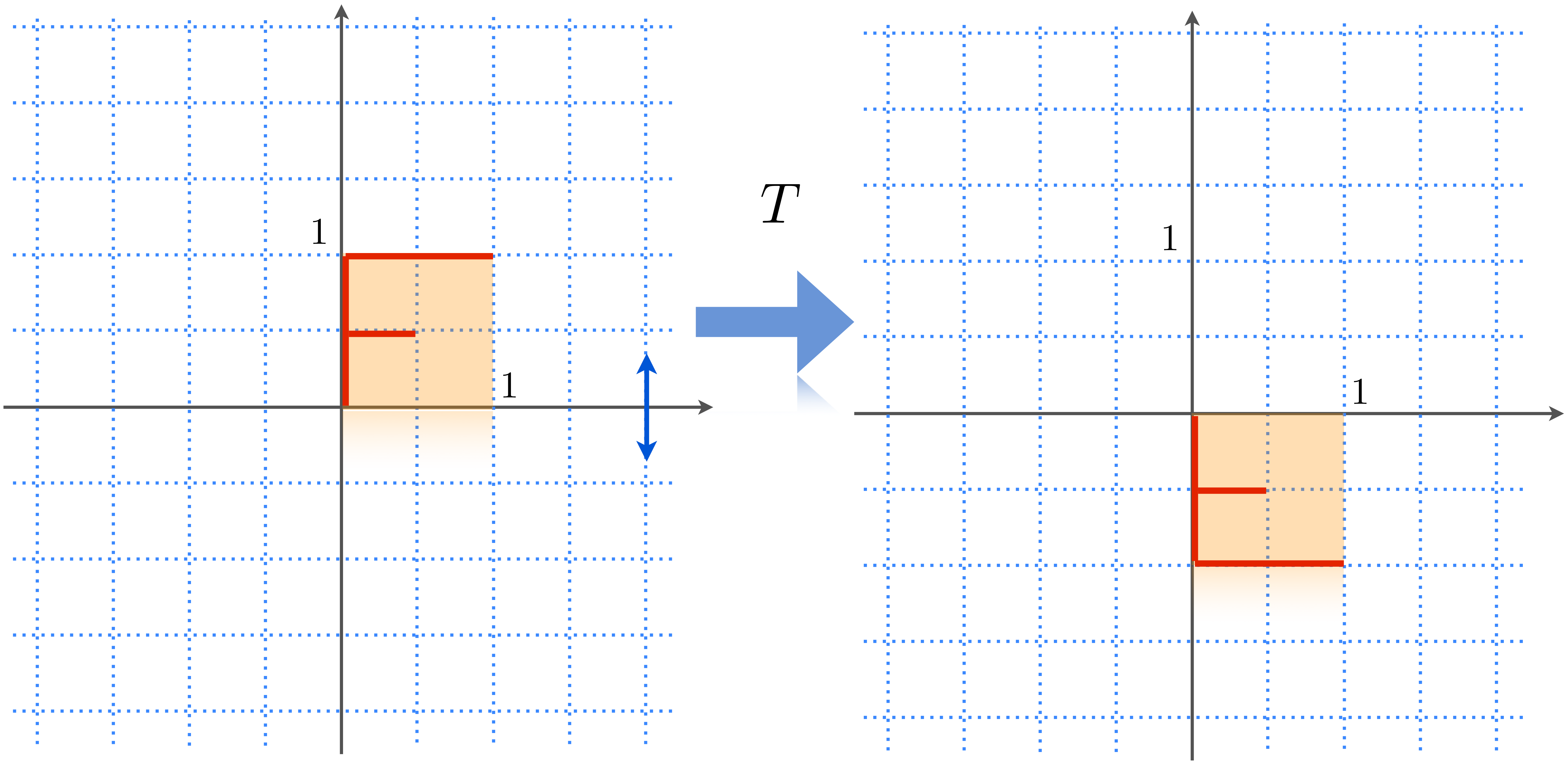
Réflexion par rapport à l'axe des x



Réflexion par rapport à l'axe des x

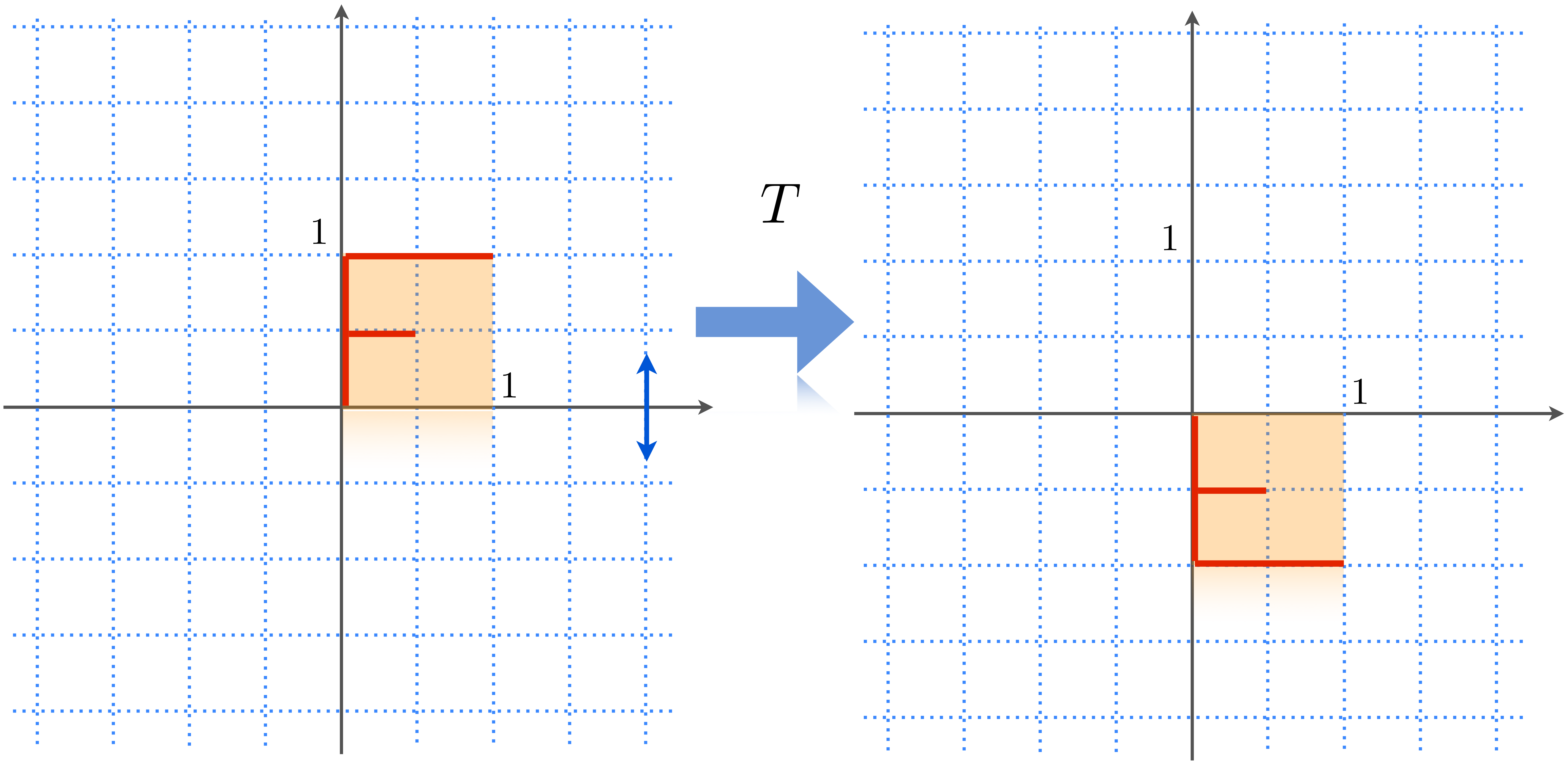


Réflexion par rapport à l'axe des *x*



$$T(\vec{\imath}) = (1, 0)$$

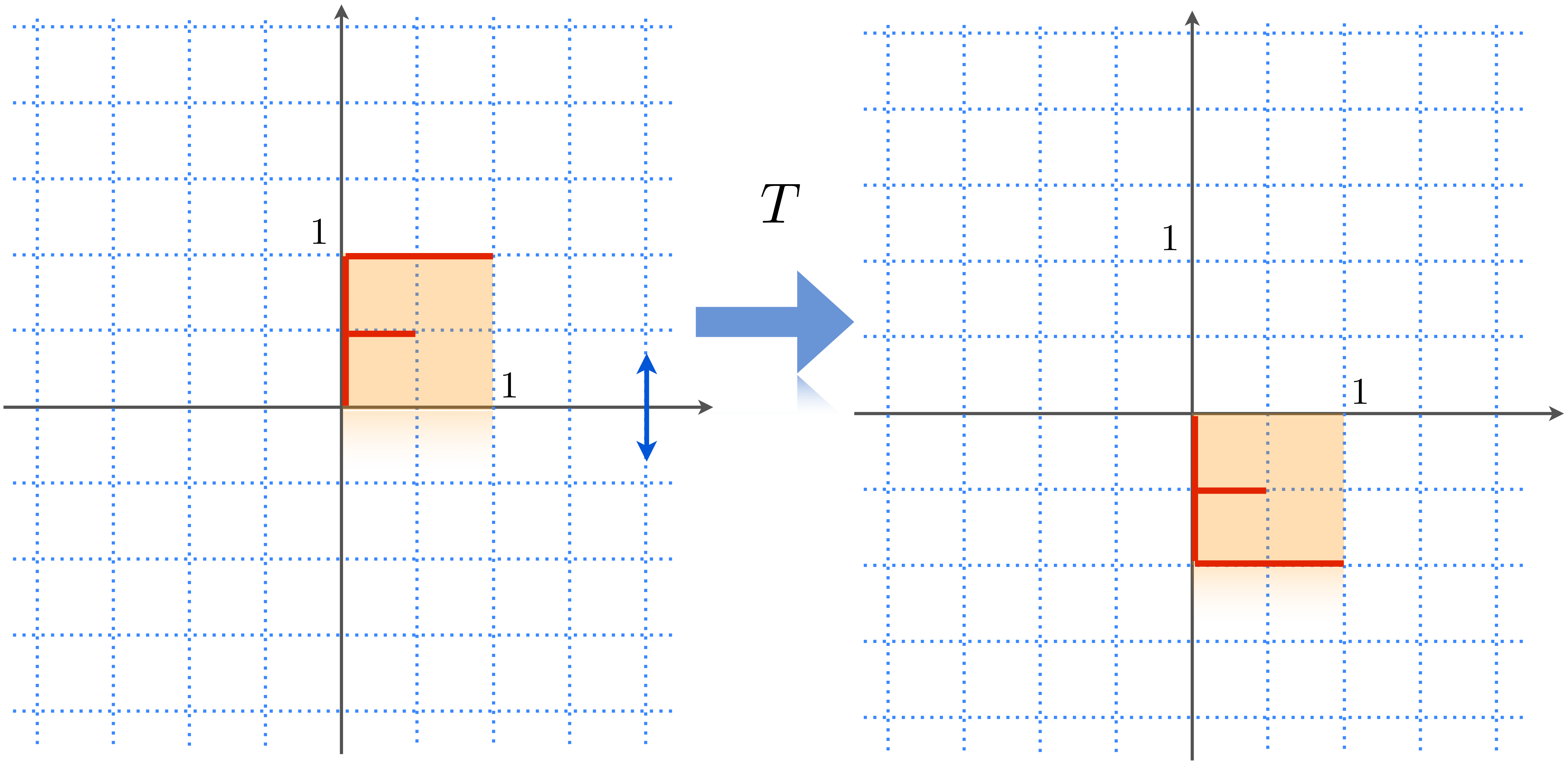
Réflexion par rapport à l'axe des *x*



$$T(\vec{\imath}) = (1,0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0,-1)$$

Réflexion par rapport à l'axe des *x*

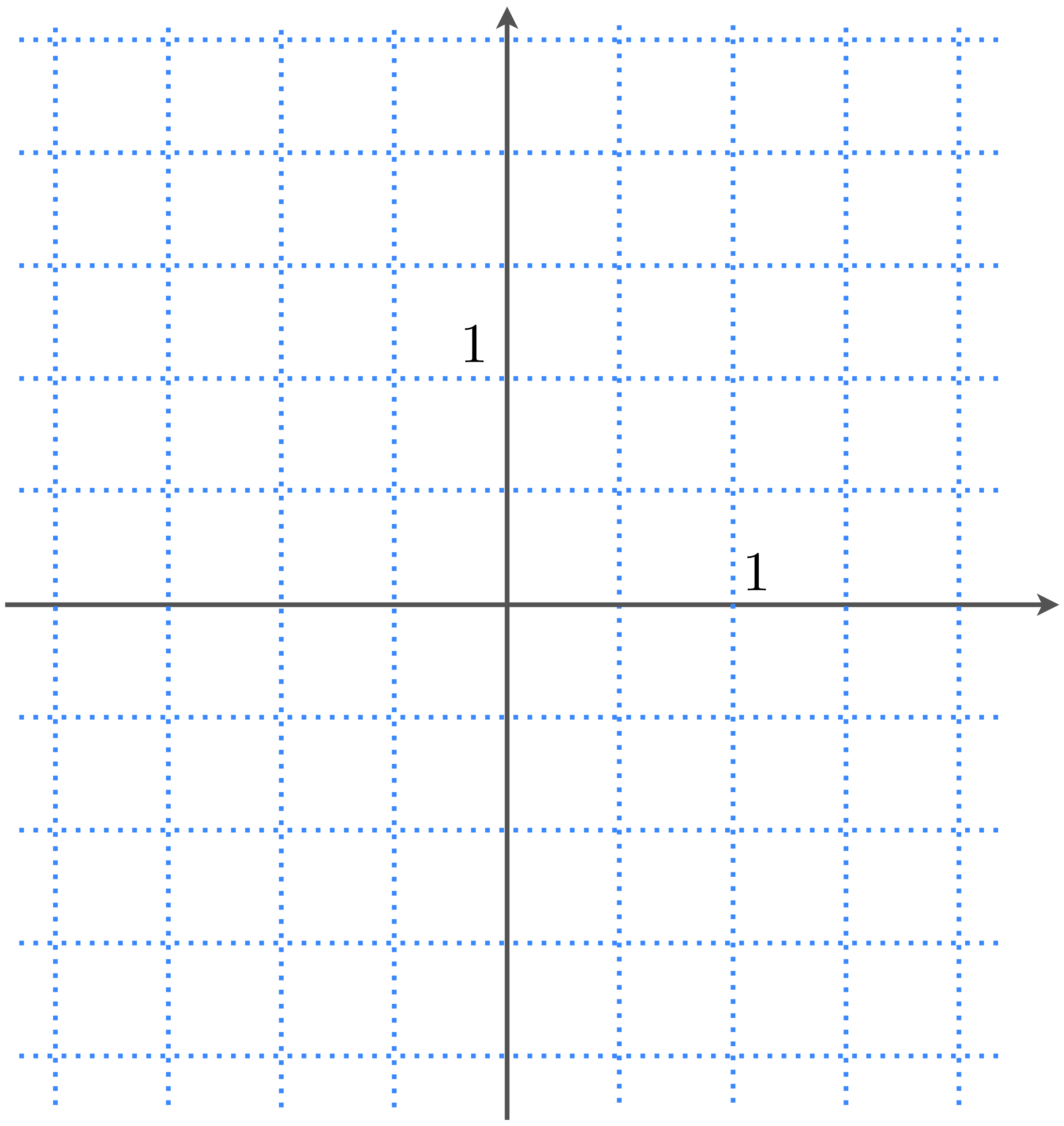


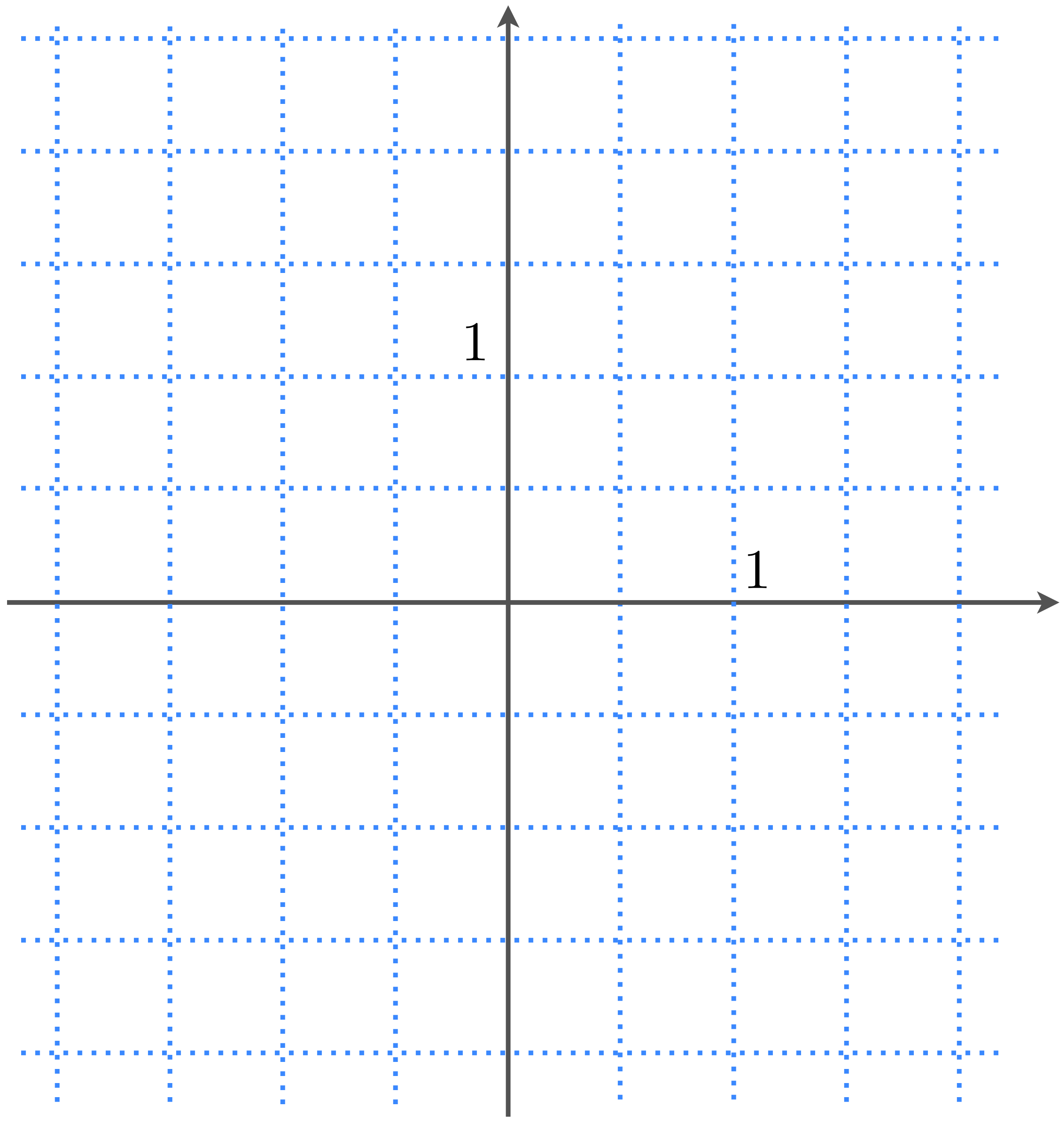
$$T(\vec{\imath}) = (1, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, -1)$$

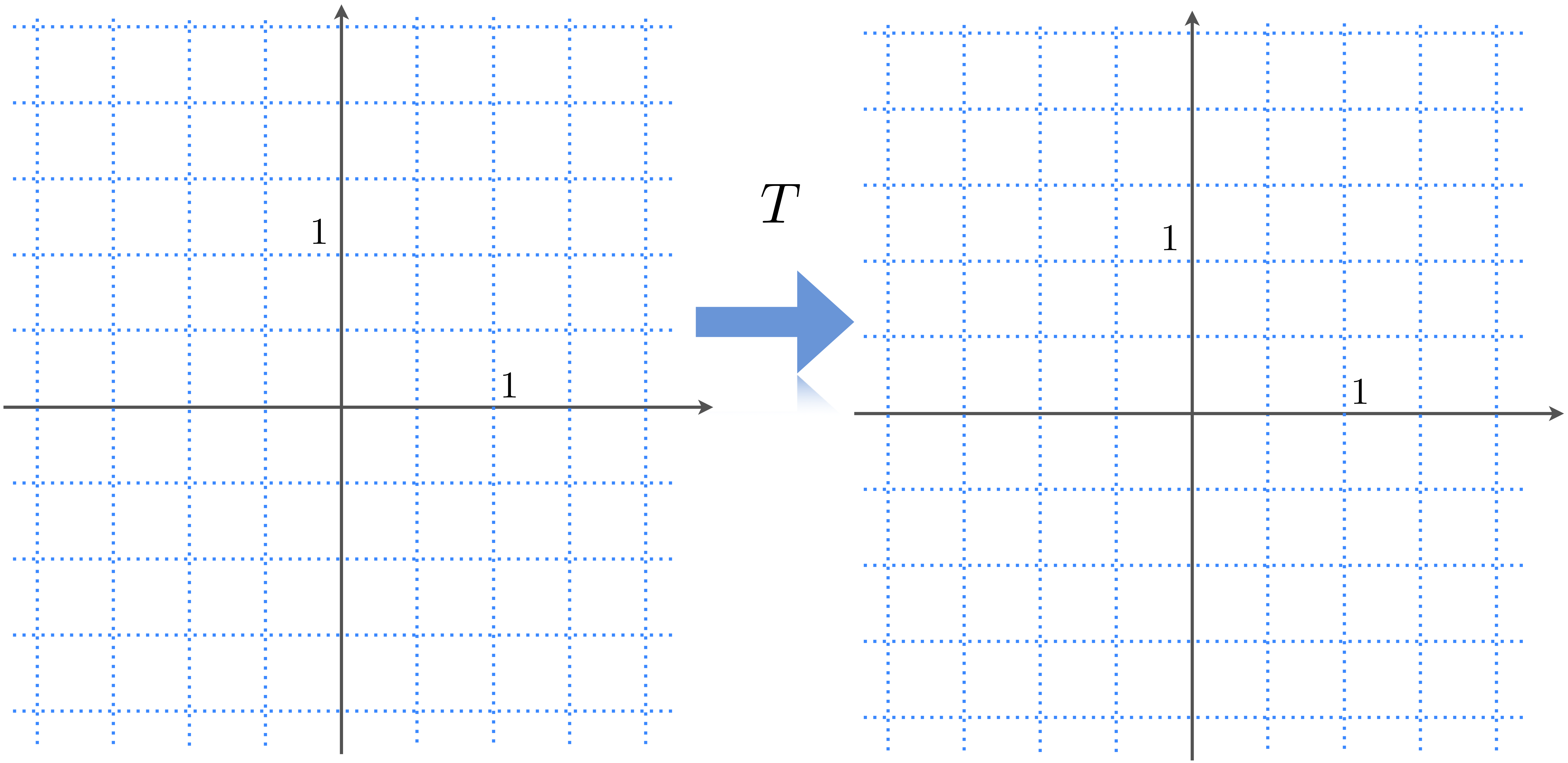
$$\mathbf{S}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Réflexion par rapport à l'axe des y

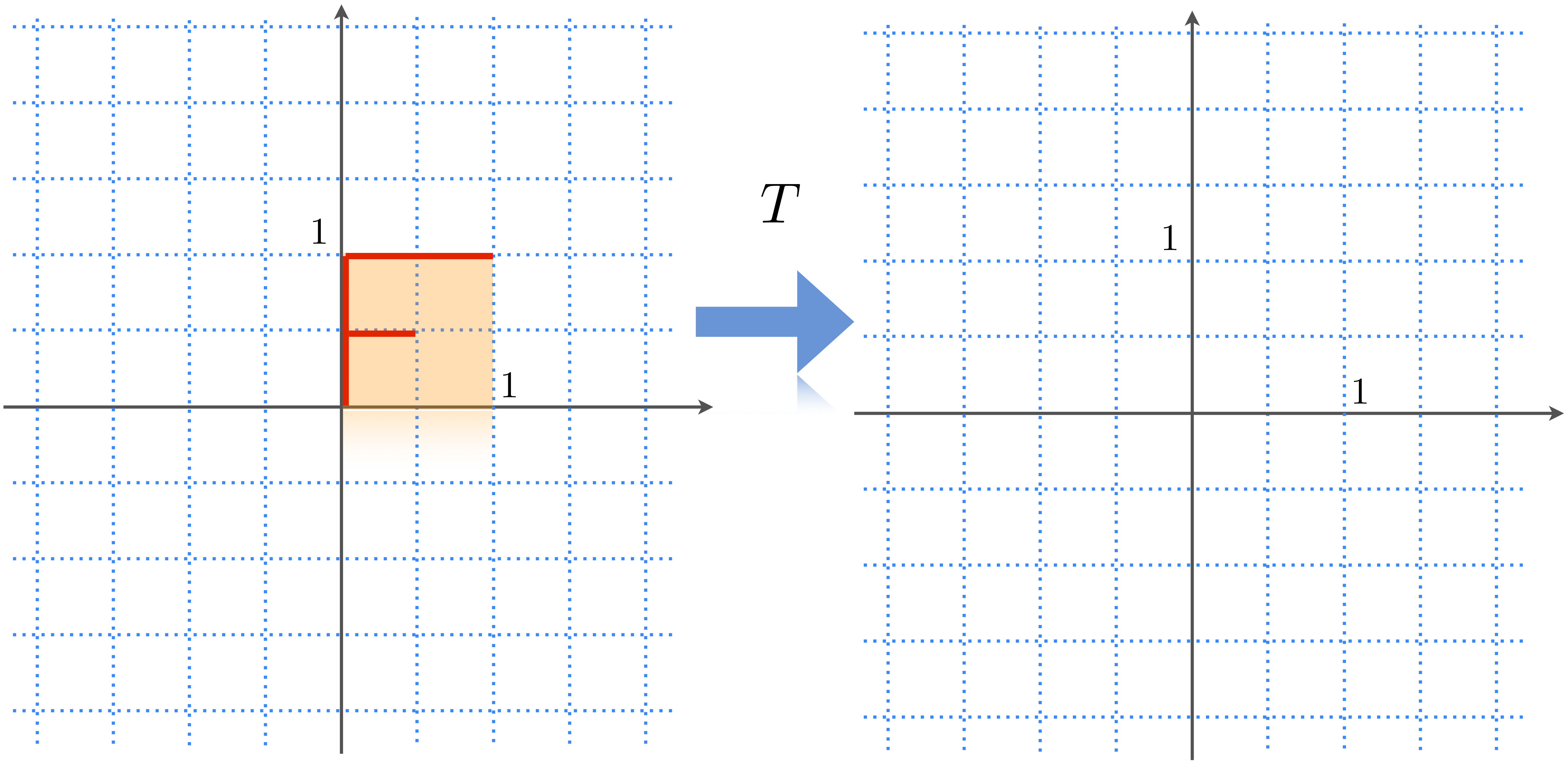




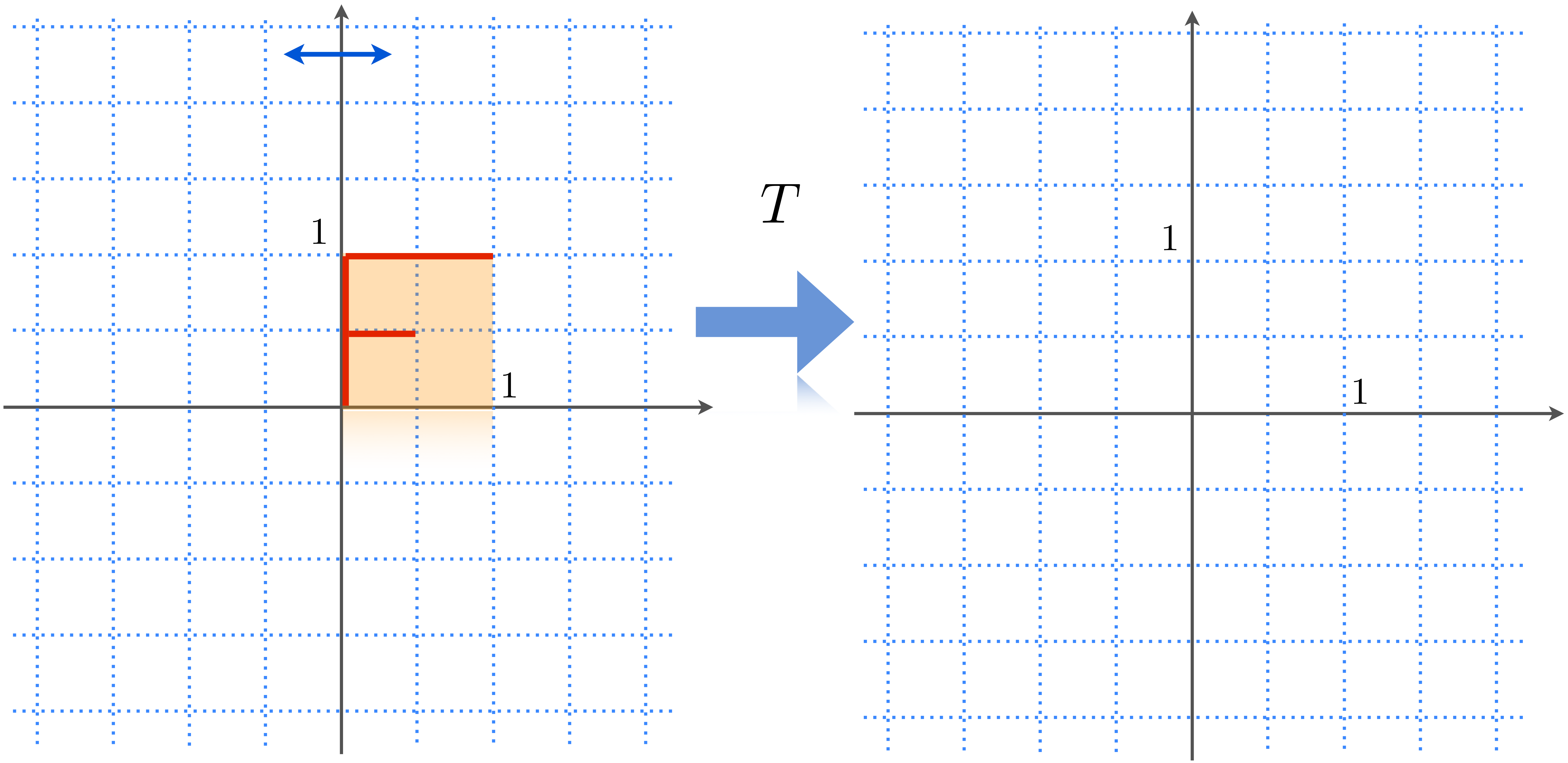
Réflexion par rapport à l'axe des y



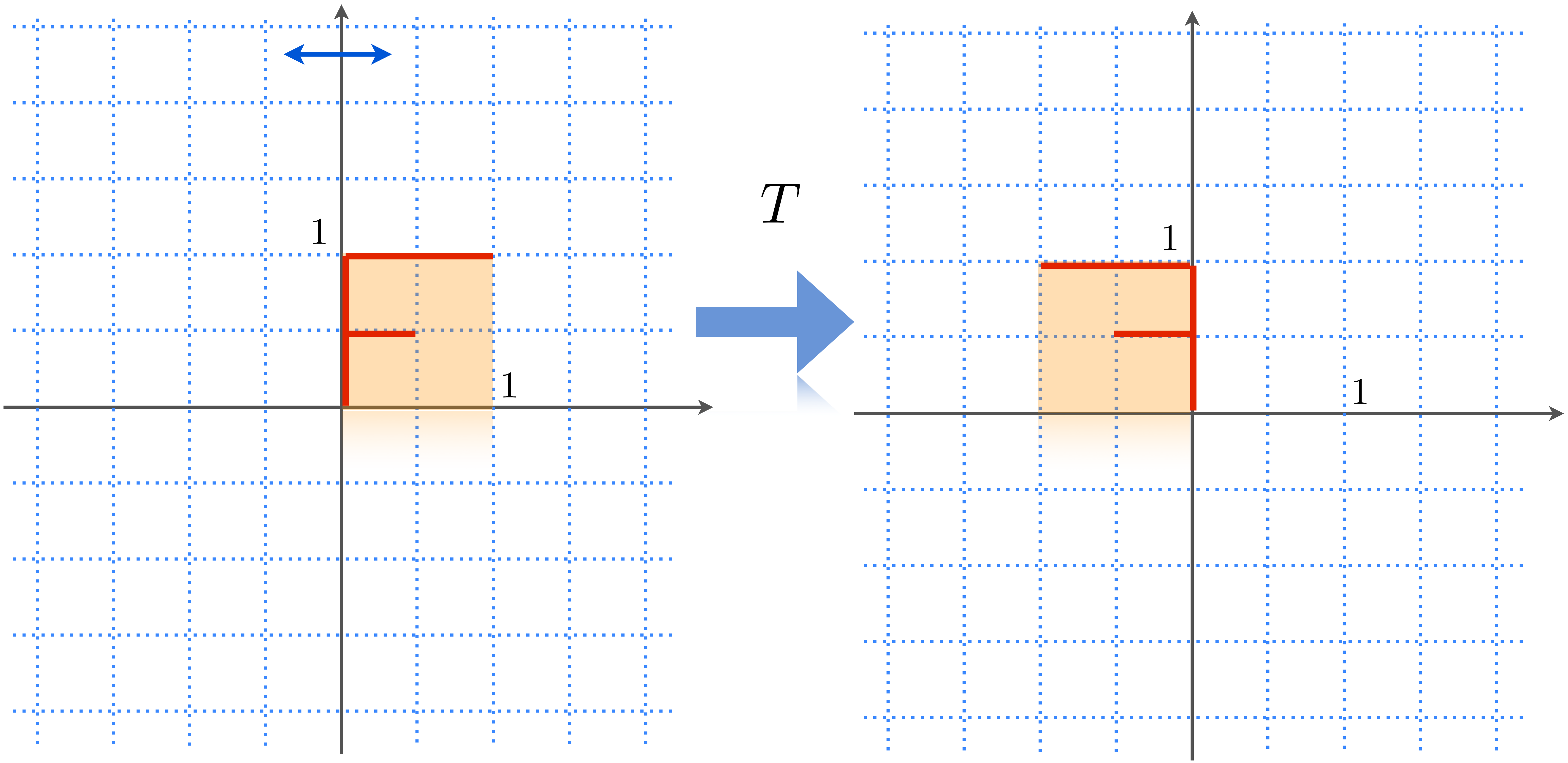
Réflexion par rapport à l'axe des y



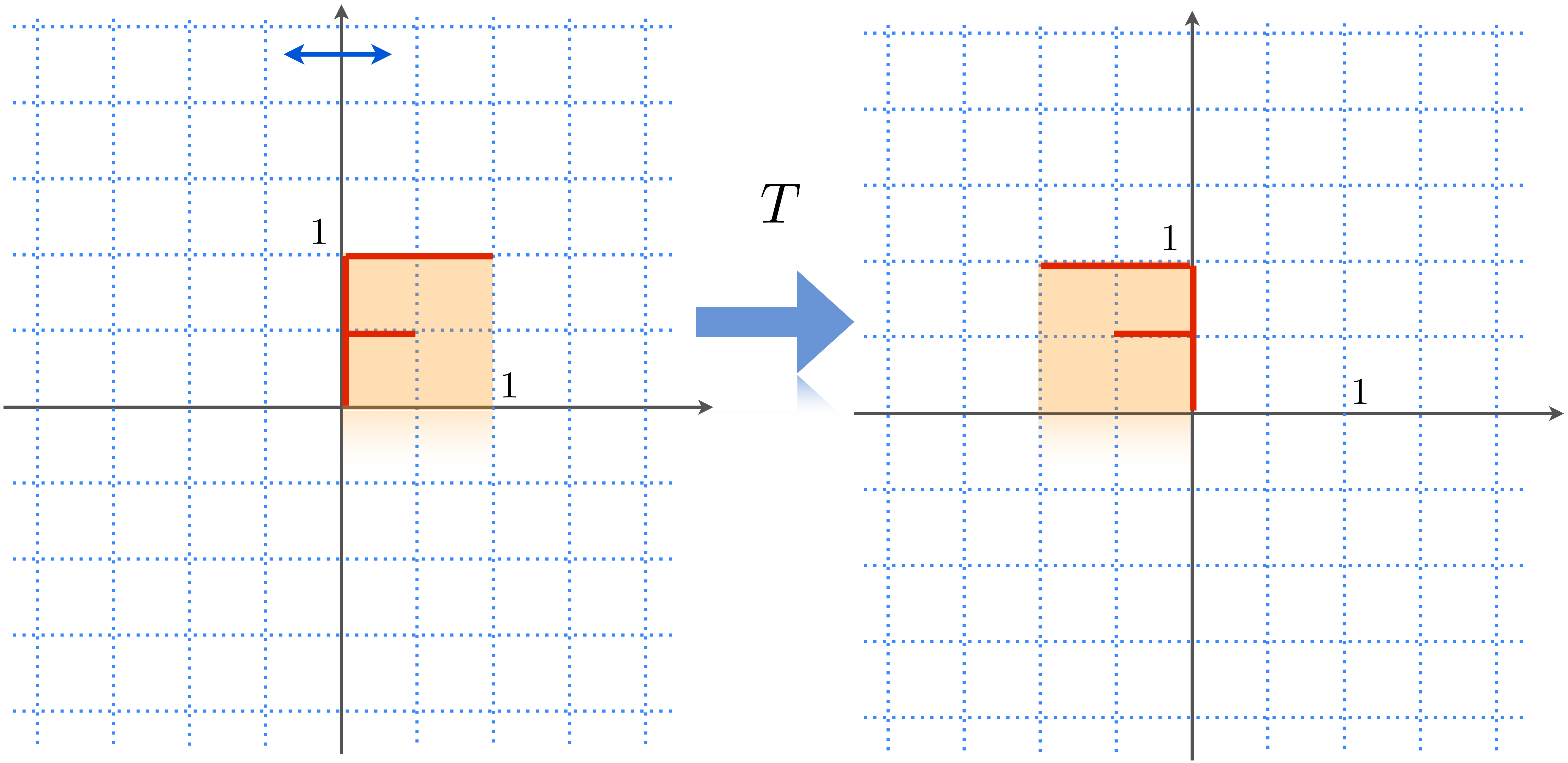
Réflexion par rapport à l'axe des y



Réflexion par rapport à l'axe des y

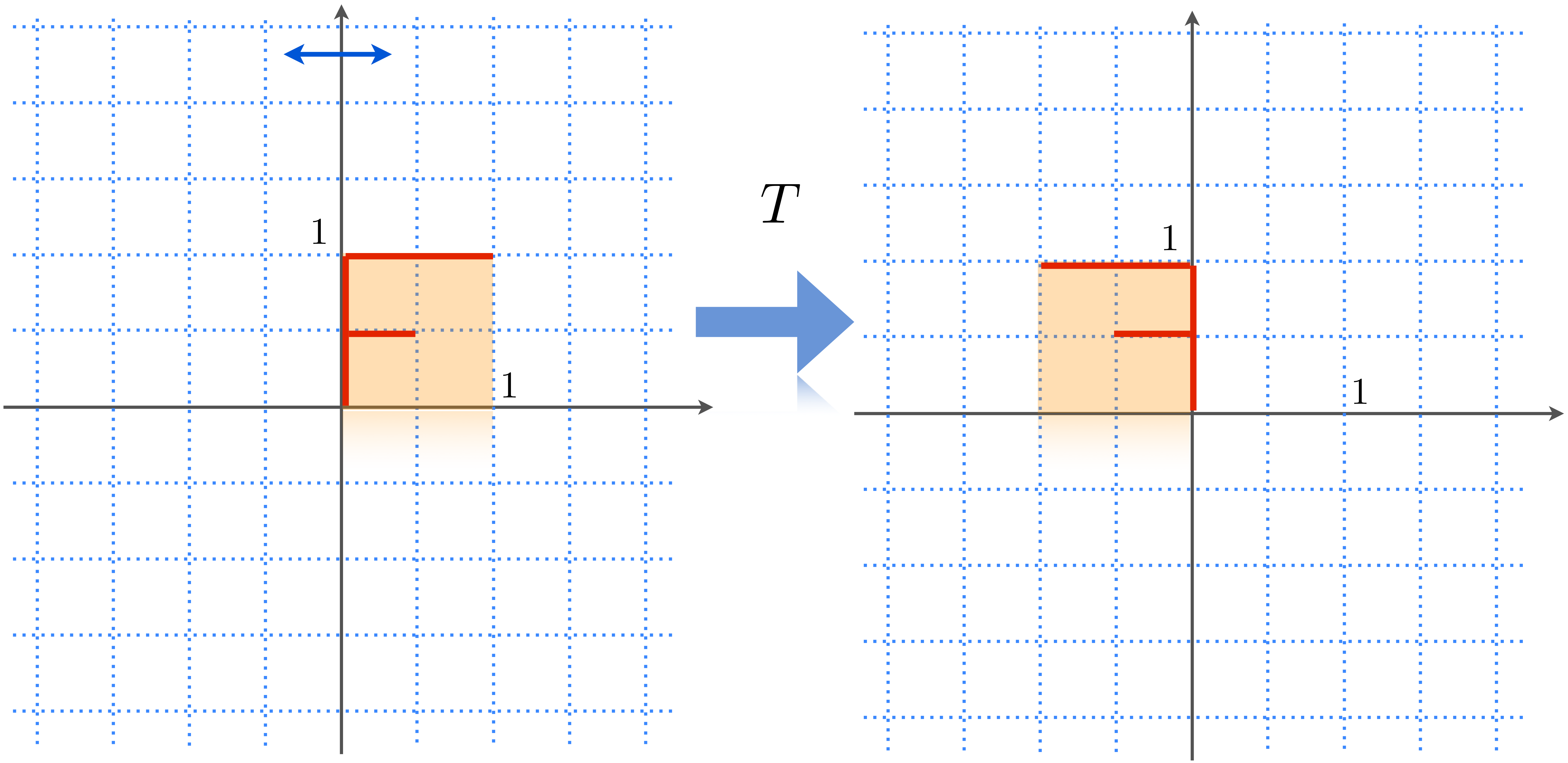


Réflexion par rapport à l'axe des y



$$T(\vec{\imath}) = (-1, 0)$$

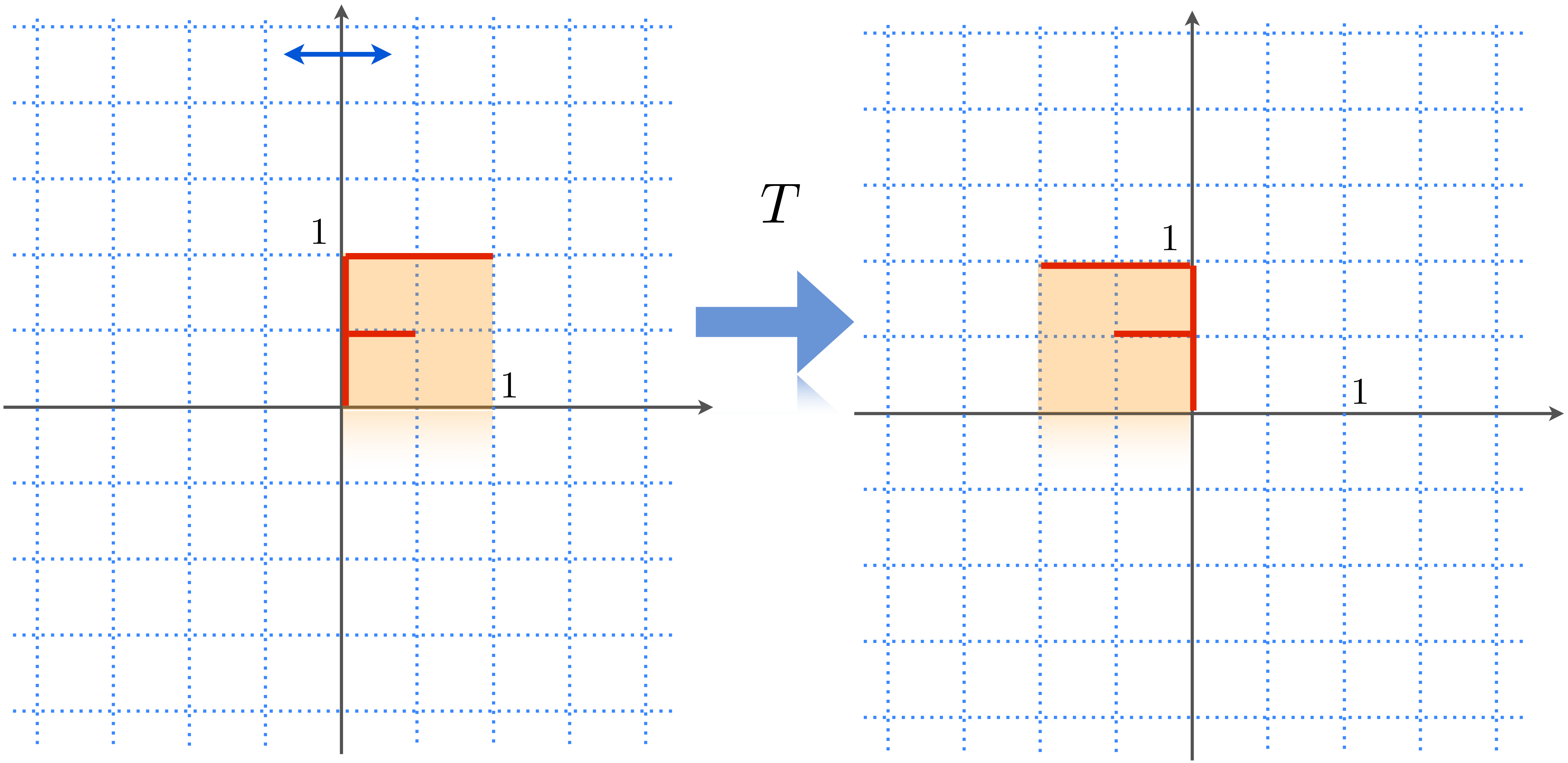
Réflexion par rapport à l'axe des y



$$T(\vec{\imath}) = (-1, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 1)$$

Réflexion par rapport à l'axe des y



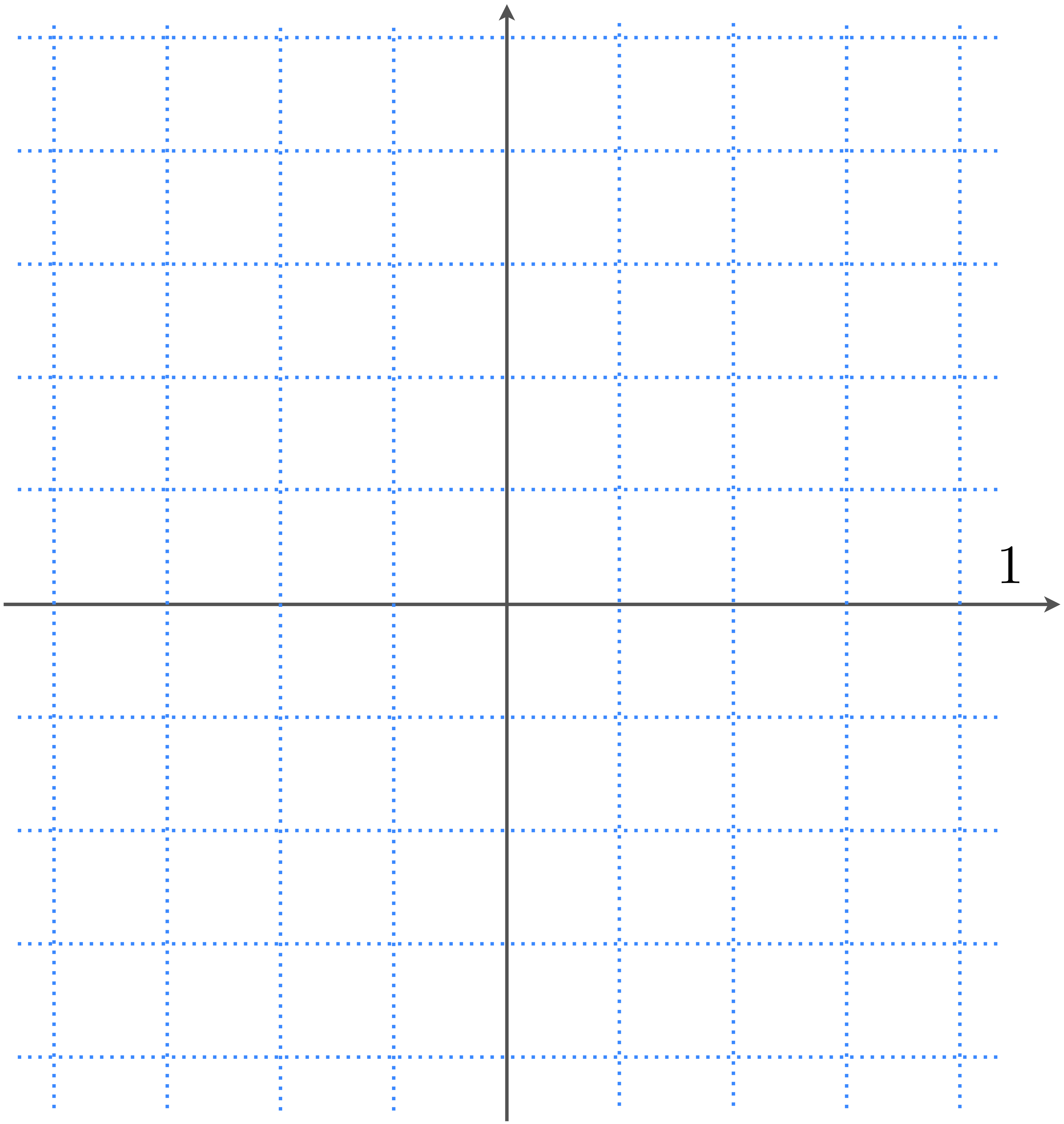
$$T(\vec{\imath}) = (-1, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 1)$$

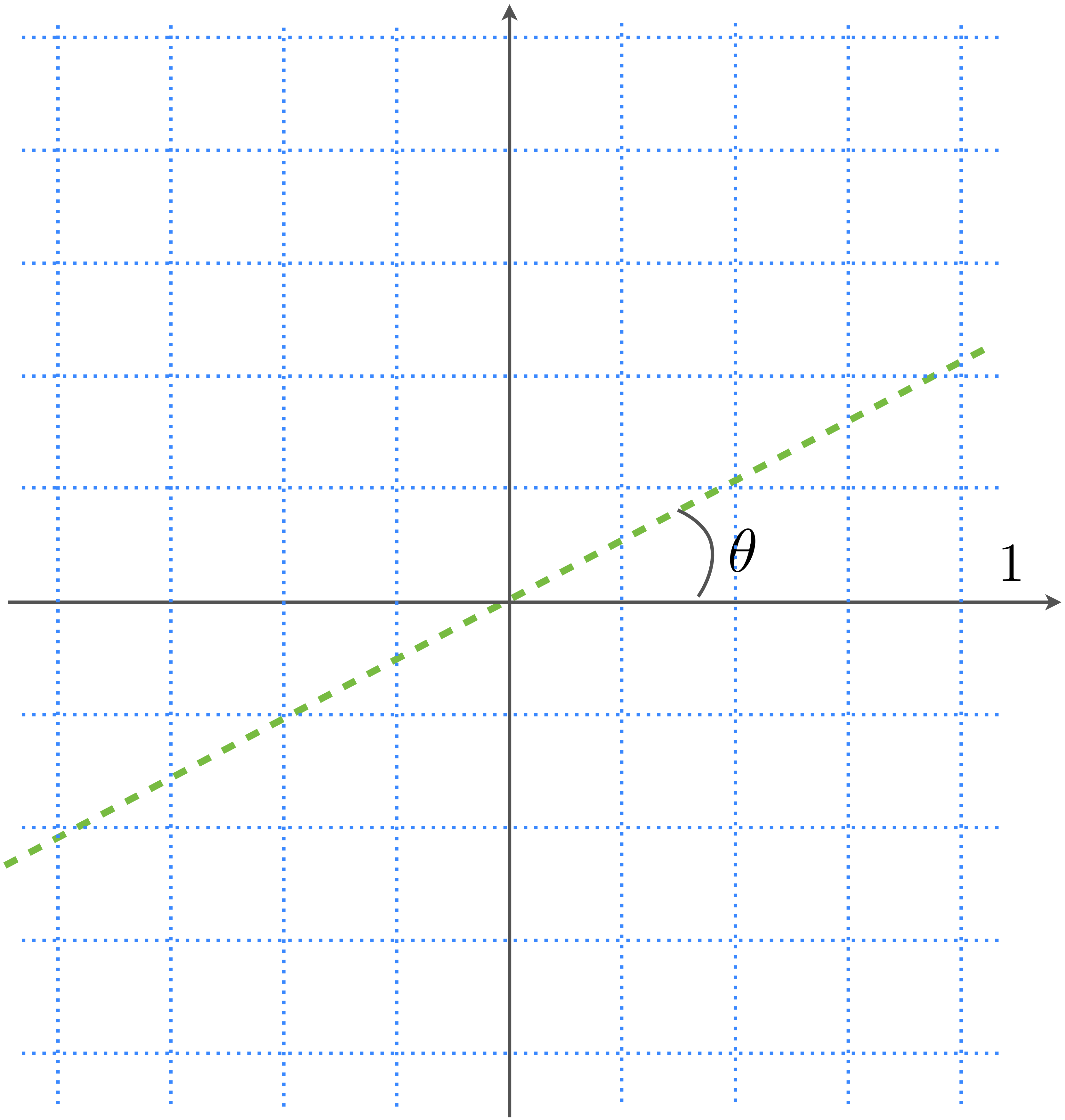
$$\mathbf{S}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réflexion par rapport à un axe quelconque

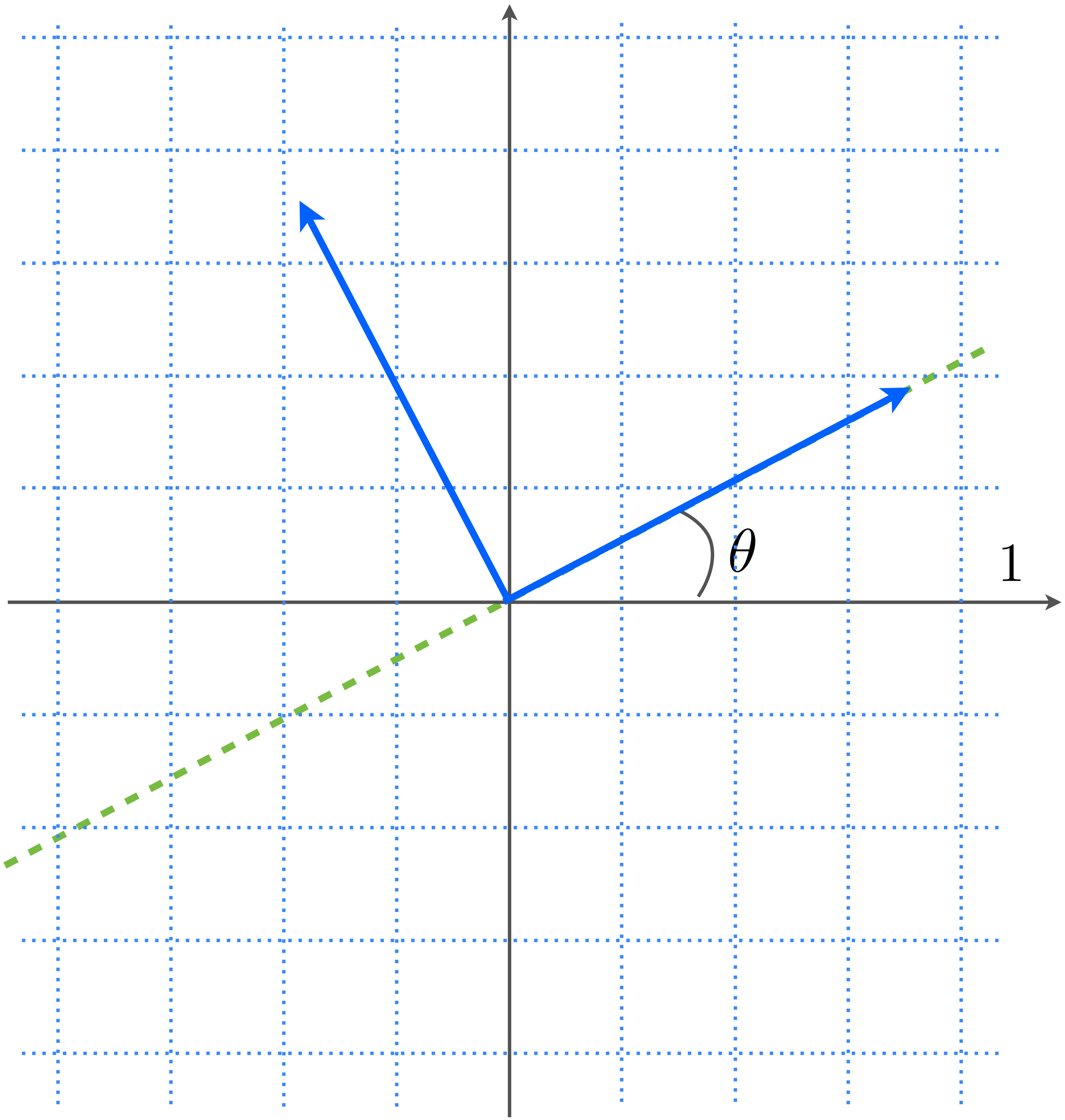
Réflexion par rapport à un axe quelconque



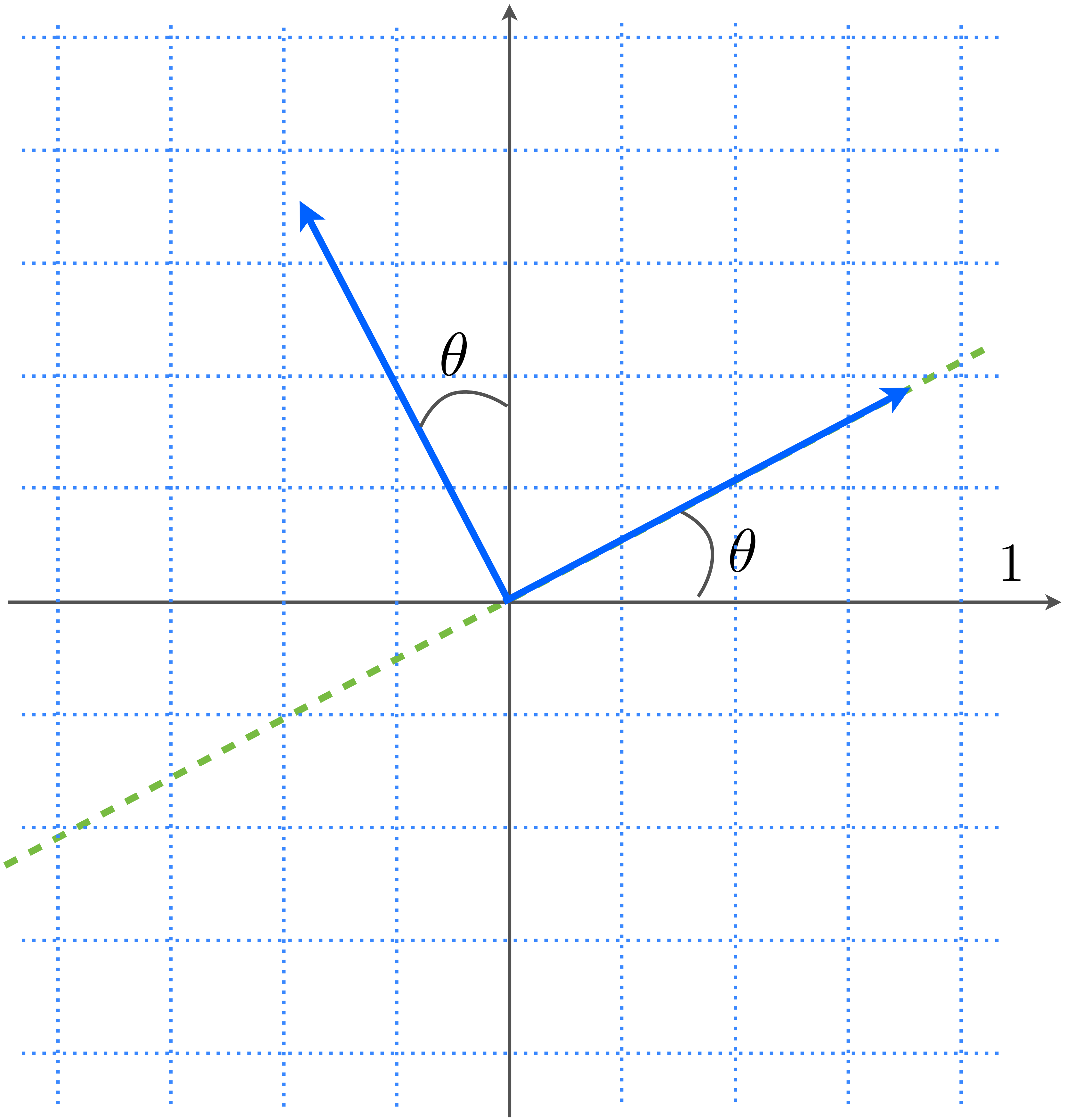
Réflexion par rapport à un axe quelconque



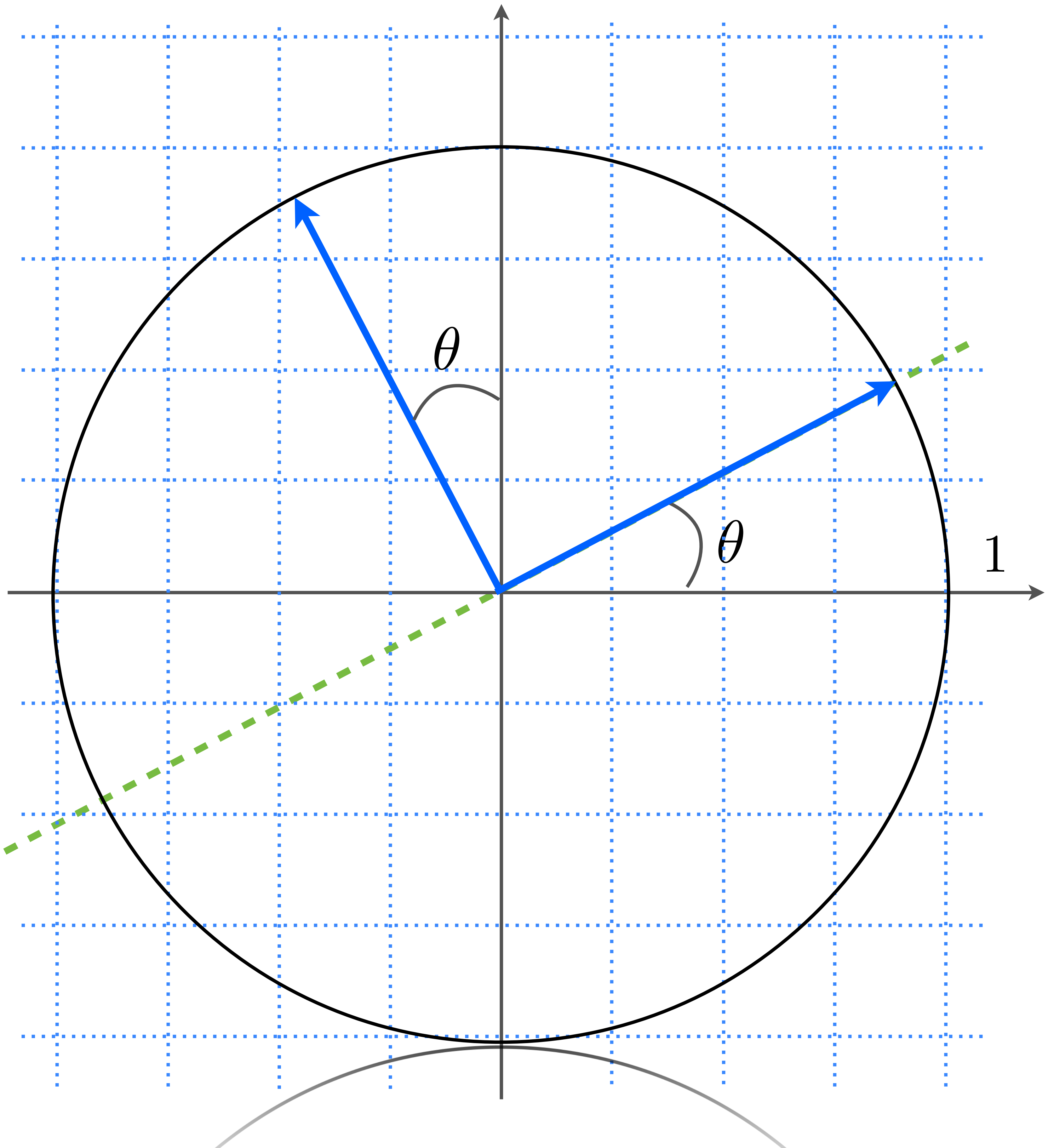
Réflexion par rapport à un axe quelconque



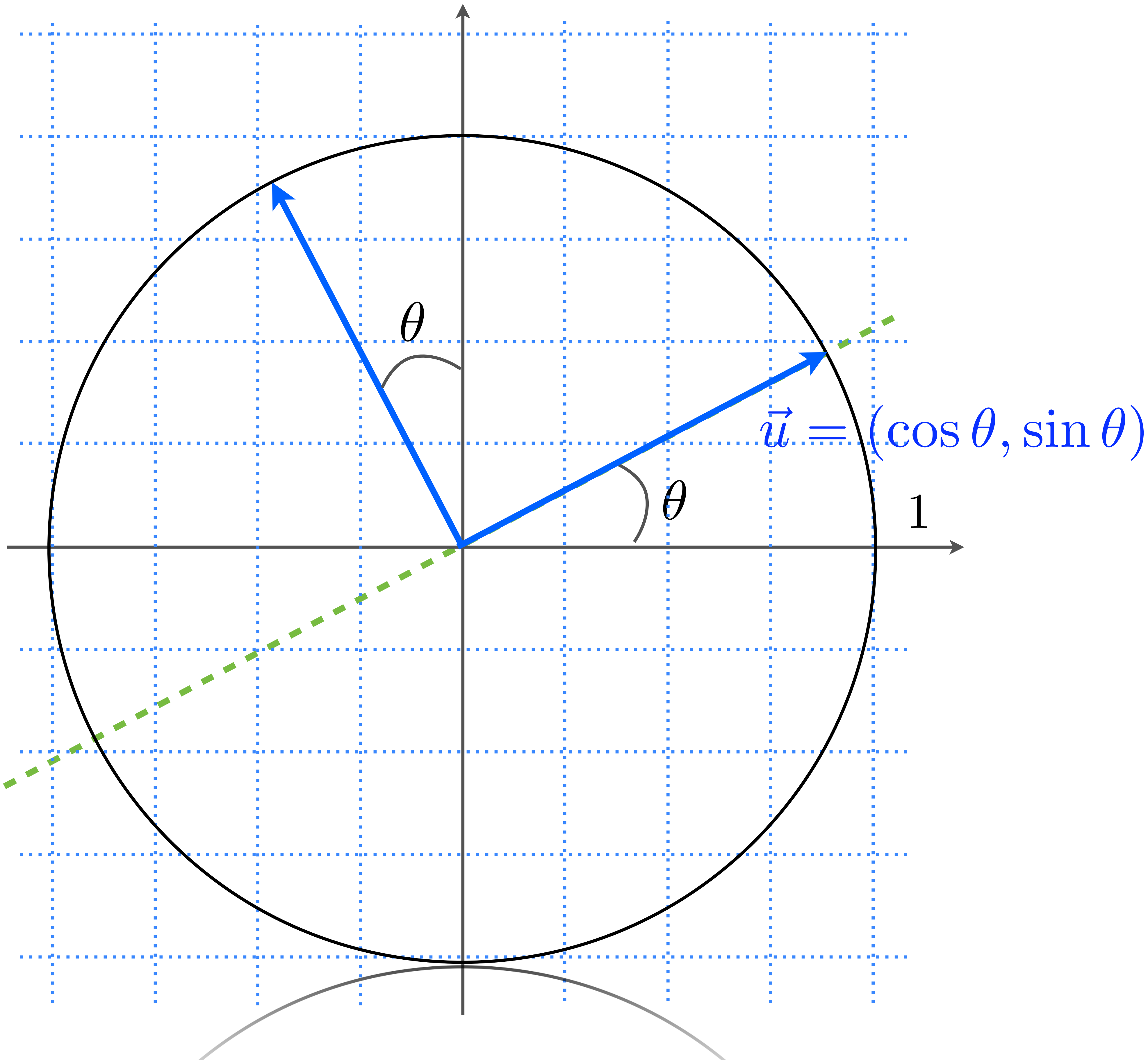
Réflexion par rapport à un axe quelconque



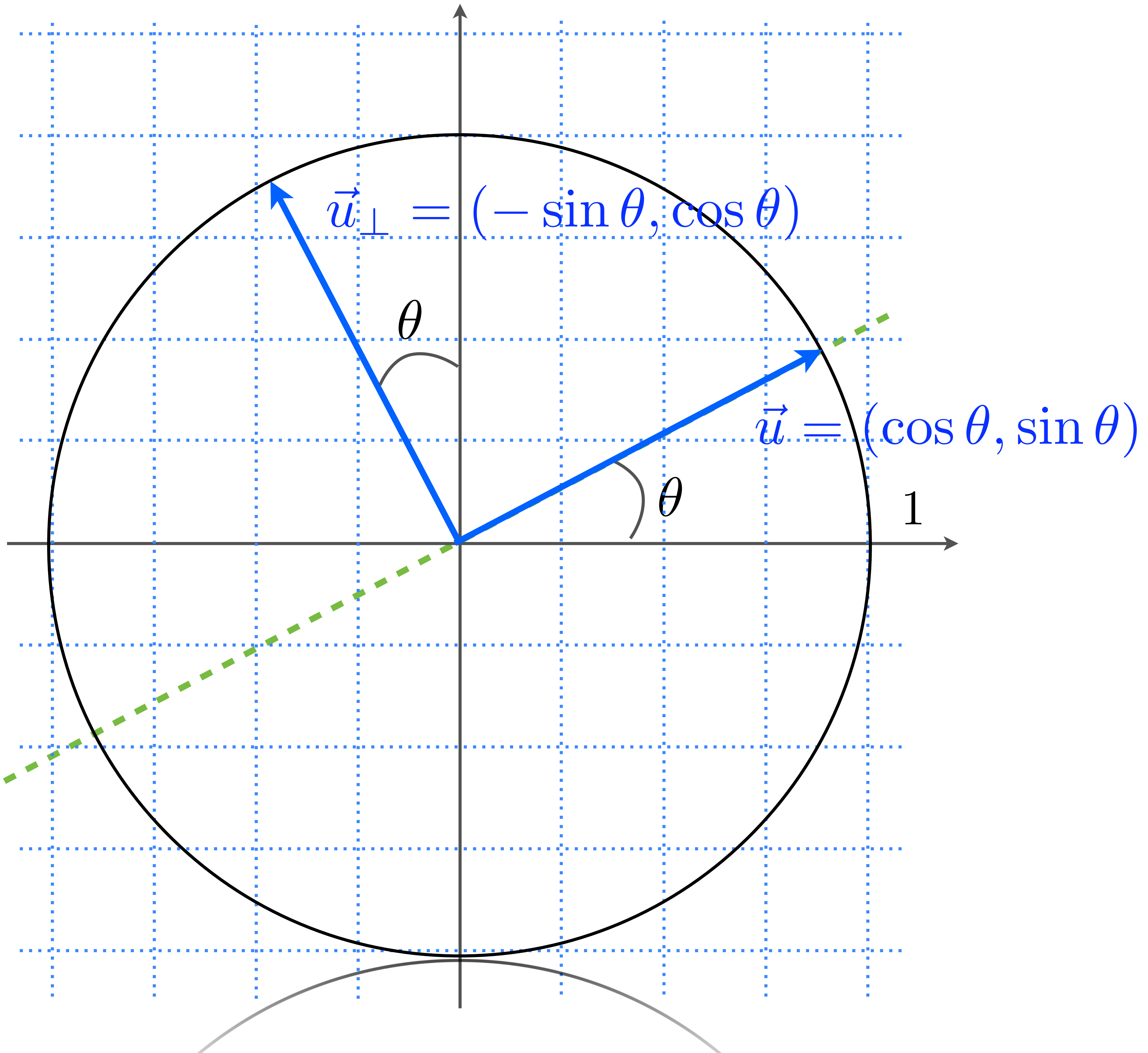
Réflexion par rapport à un axe quelconque



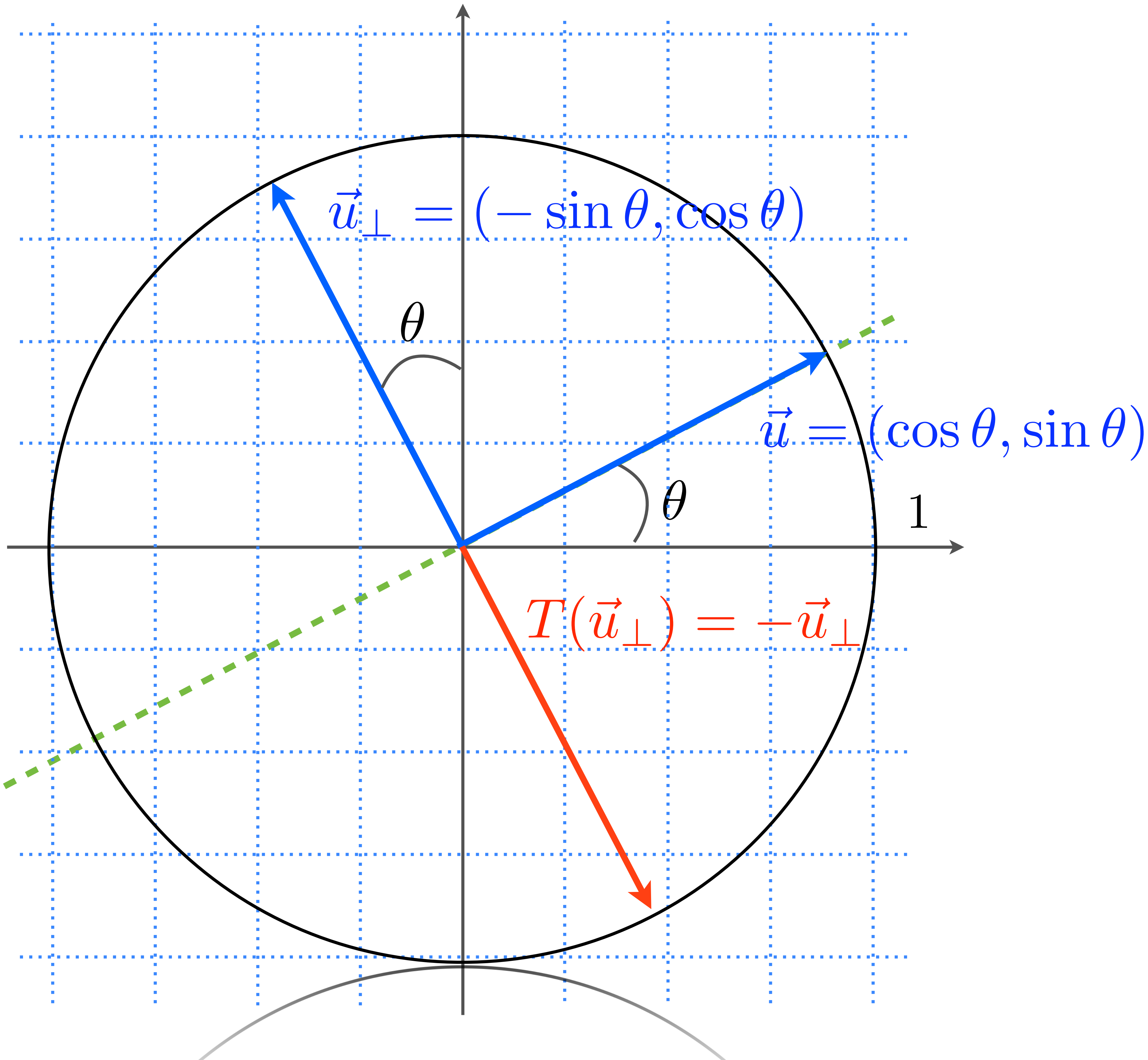
Réflexion par rapport à un axe quelconque



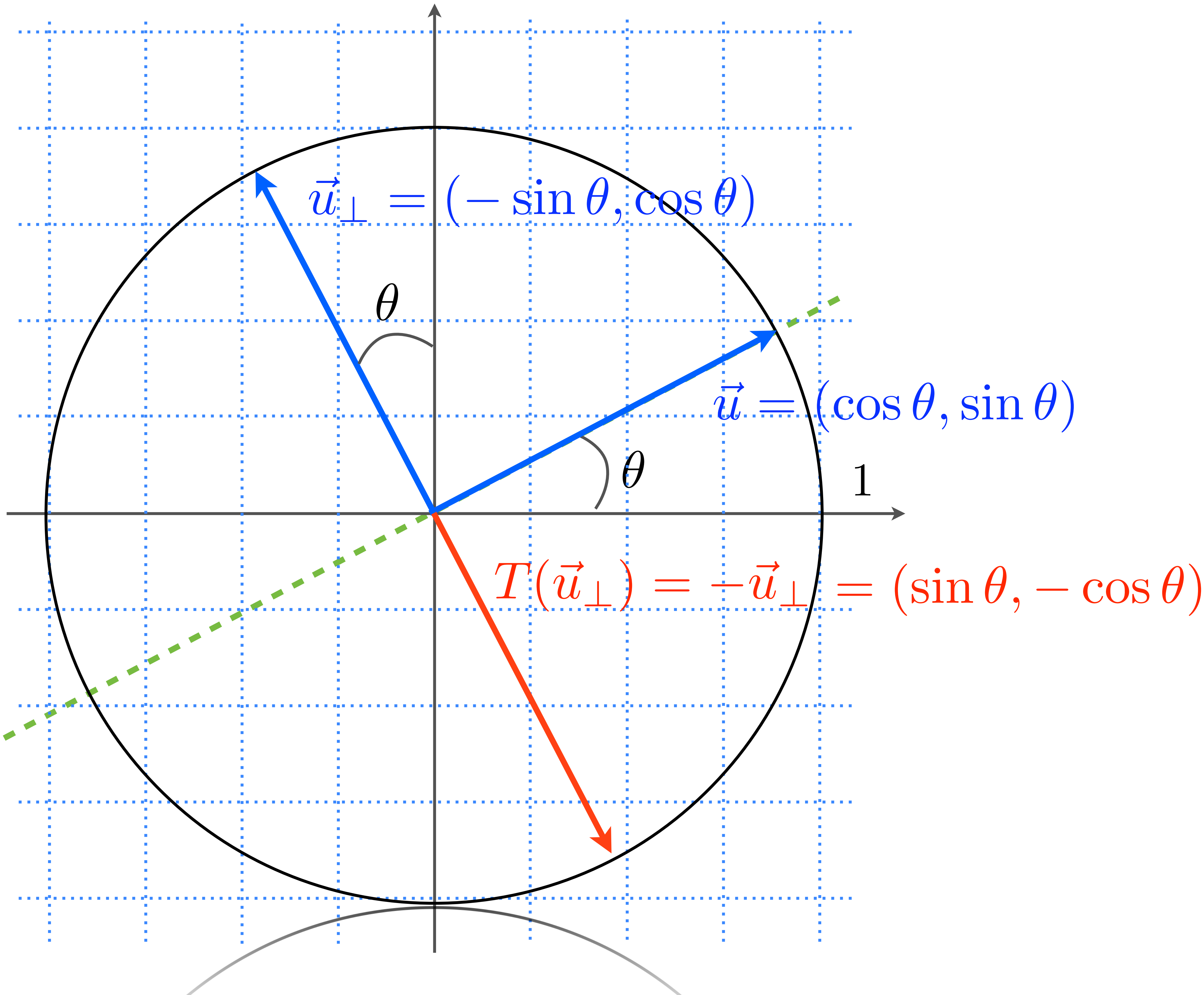
Réflexion par rapport à un axe quelconque



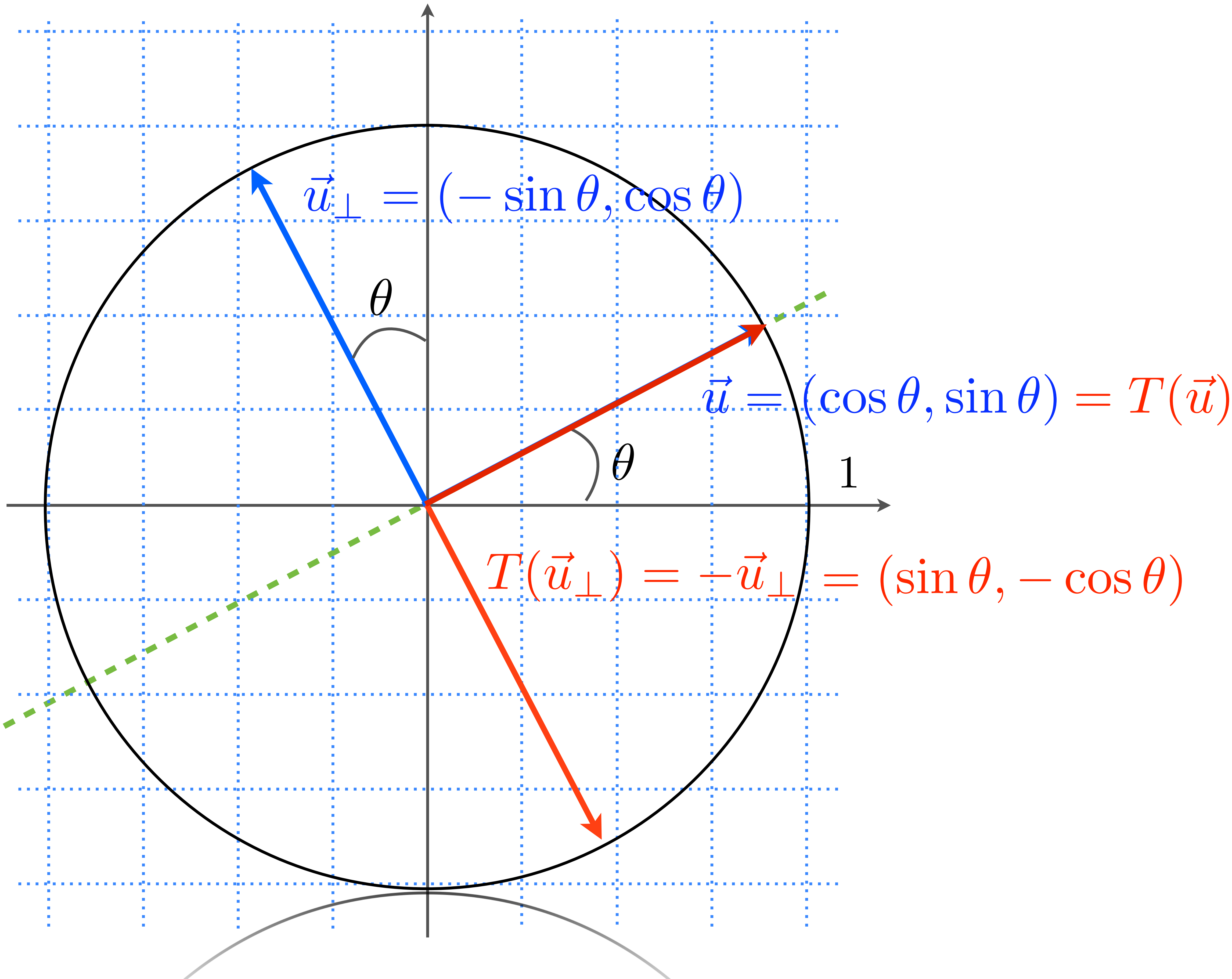
Réflexion par rapport à un axe quelconque



Réflexion par rapport à un axe quelconque



Réflexion par rapport à un axe quelconque



$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \vec{u} & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \end{array} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{u} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T(\vec{u}) & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{u}_{\perp} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \end{array} = \begin{array}{cc} T(\vec{u}) & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$
\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{u}_\perp \end{array} \\
\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} T(\vec{u}) & T(\vec{u}_\perp) \end{array} \\
\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{u}_\perp \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \end{array} = \begin{array}{cc} T(\vec{u}) & T(\vec{u}_\perp) = -\vec{u}_\perp \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{u}_\perp \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T(\vec{u}) & T(\vec{u}_\perp) = -\vec{u}_\perp \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{S}_\theta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{u}_{\perp} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T(\vec{u}) & T(\vec{u}_{\perp}) = -\vec{u}_{\perp} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{S}_{\theta} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{u}_\perp \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T(\vec{u}) & T(\vec{u}_\perp) = -\vec{u}_\perp \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{S}_\theta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{u}_\perp \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T(\vec{u}) & T(\vec{u}_\perp) = -\vec{u}_\perp \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{S}_\theta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_\theta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_\theta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_\theta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Faites les exercices suivants

p.266, # 8 et 11

Définition

Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si

. $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$

Définition Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Définition

Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si . $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Définition

Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si . $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

Définition Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si . $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

Définition Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si . $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

$$ac + bd = 0$$

Définition Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si . $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2+b^2=1 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$c^2+d^2=1$$

$$ac+bd=0$$

Définition

Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \iff \|(a,b)\| = 1$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

$$ac + bd = 0$$

Définition

Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \|(a,b)\| = 1$$

$$c^2 + d^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$ac + bd = 0$$

Définition Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2+b^2 = 1 \iff \|(a,b)\| = 1$$

$$c^2+d^2 = 1 \iff \|(c,d)\| = 1$$

$$ac+bd = 0$$

Définition Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2+b^2=1 \iff \|(a,b)\|=1$$

$$c^2+d^2=1 \iff \|(c,d)\|=1$$

$$ac+bd=0 \iff$$

Définition Une matrice $\mathbf{M}$ est dite une **matrice orthogonale** si . $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2+b^2=1 \iff \|(a,b)\| = 1$$

$$c^2+d^2=1 \iff \|(c,d)\| = 1$$

$$ac+bd=0 \iff (a,b) \perp (c,d)$$

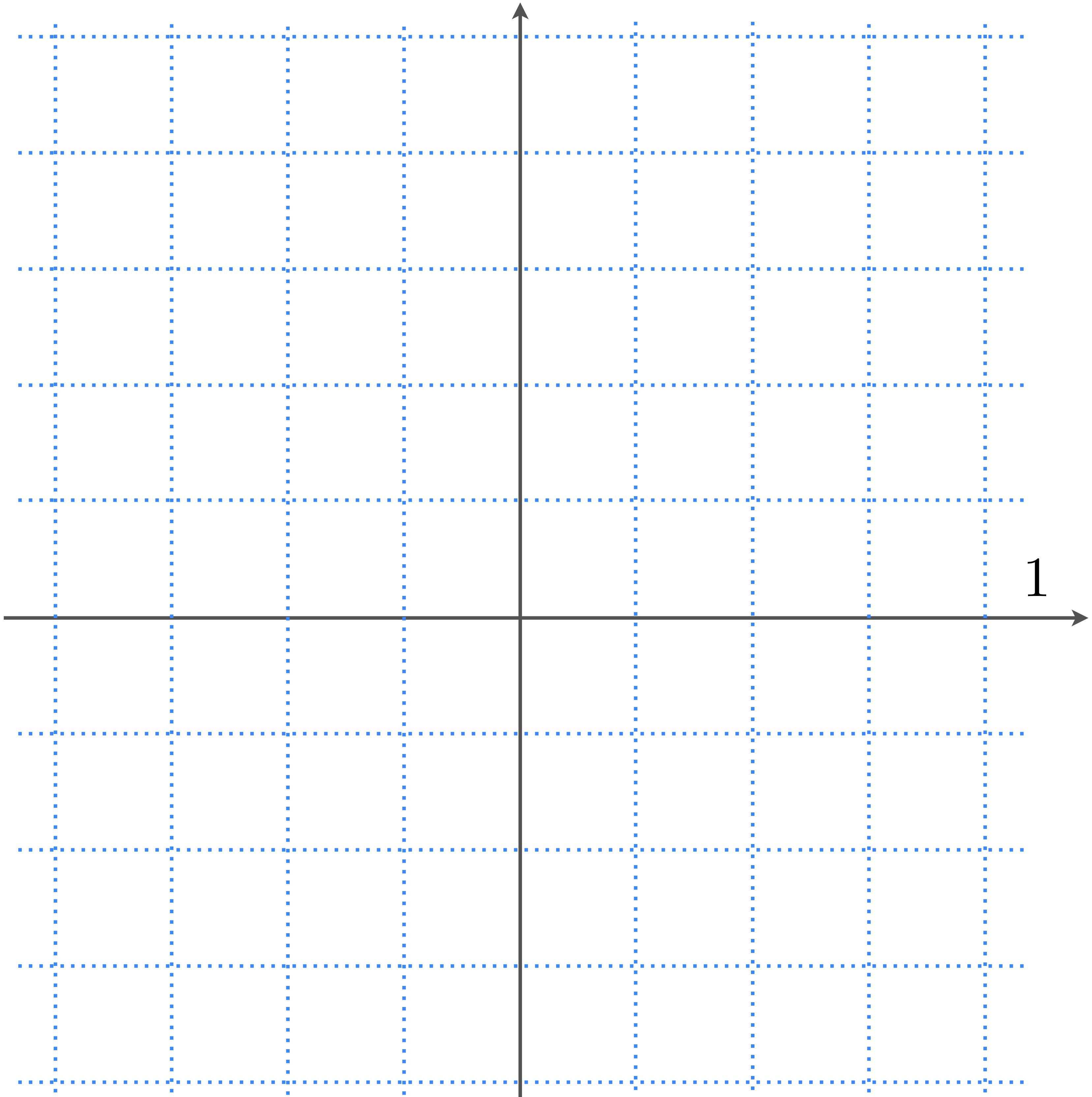
Donc si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale, alors

Donc si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale, alors

$T(\vec{\imath}) = (a, b)$ et $T(\vec{\jmath}) = (c, d)$ forment une base orthonormale.

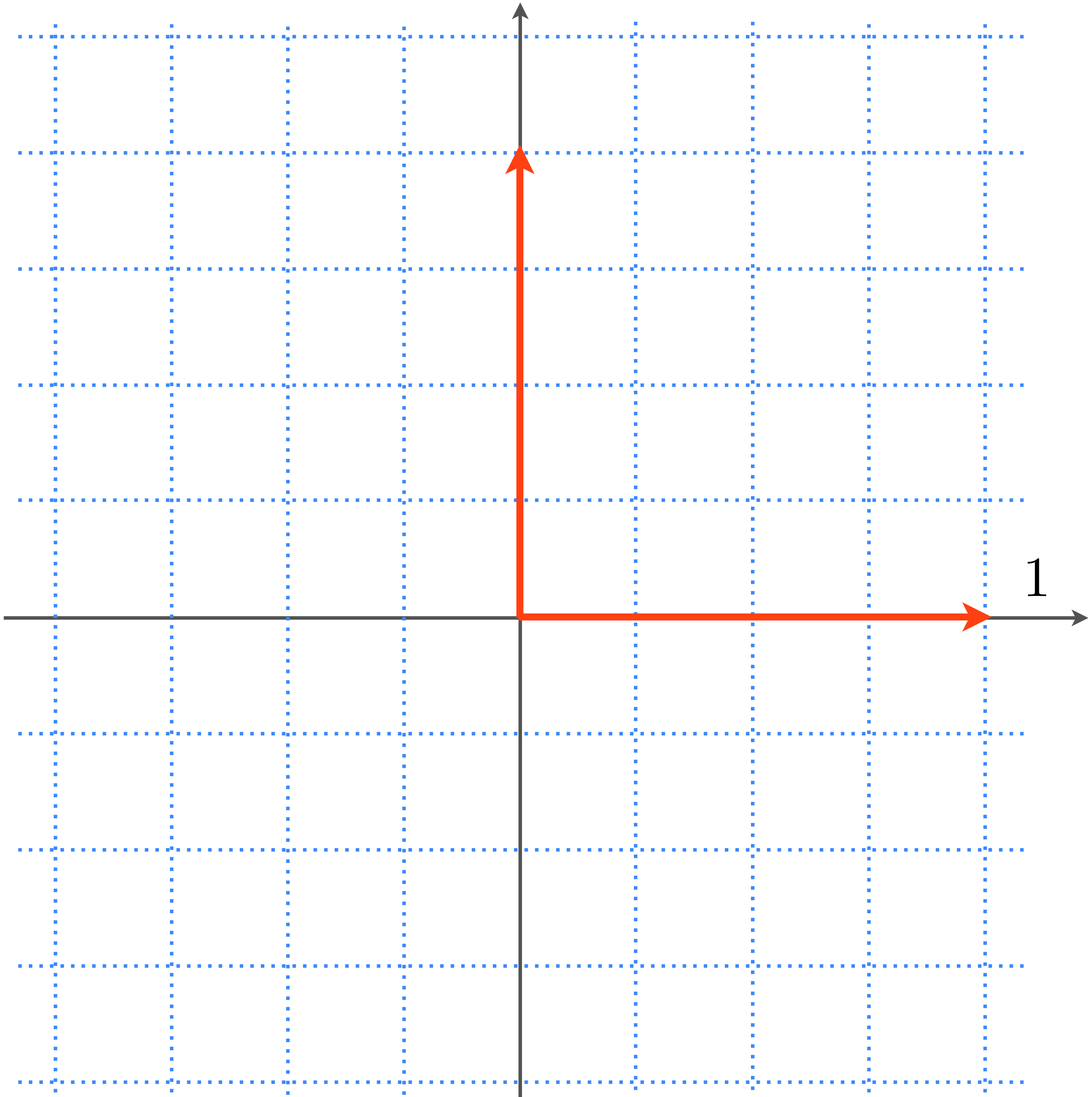
$$\text{Donc si } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ est orthogonale, alors}$$

$$T(\vec{\imath}) = (a, b) \text{ et } T(\vec{\jmath}) = (c, d) \text{ forment une base orthonormale.}$$



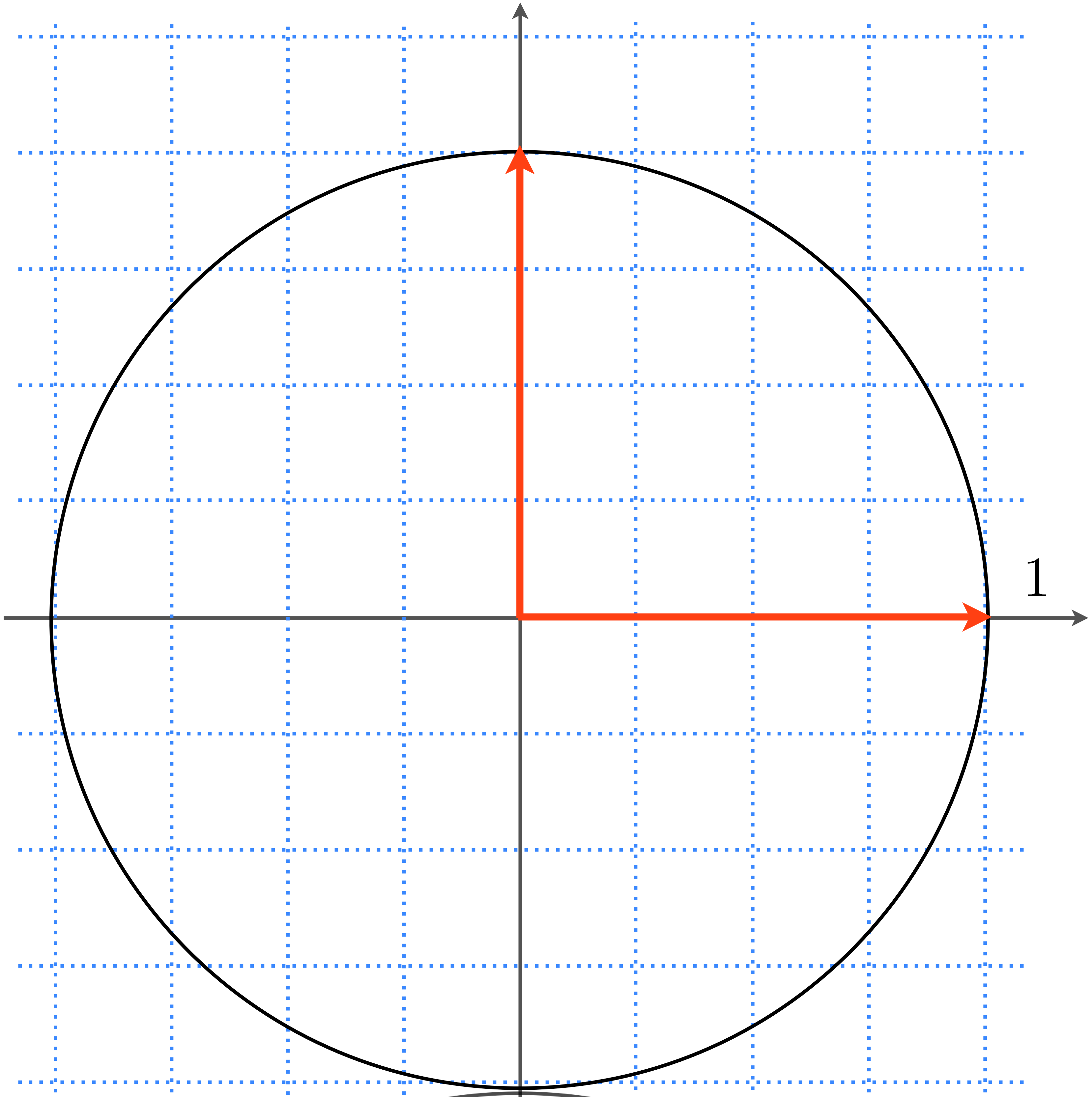
$$\text{Donc si } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ est orthogonale, alors}$$

$T(\vec{\imath}) = (a, b)$ et $T(\vec{\jmath}) = (c, d)$ forment une base orthonormale.



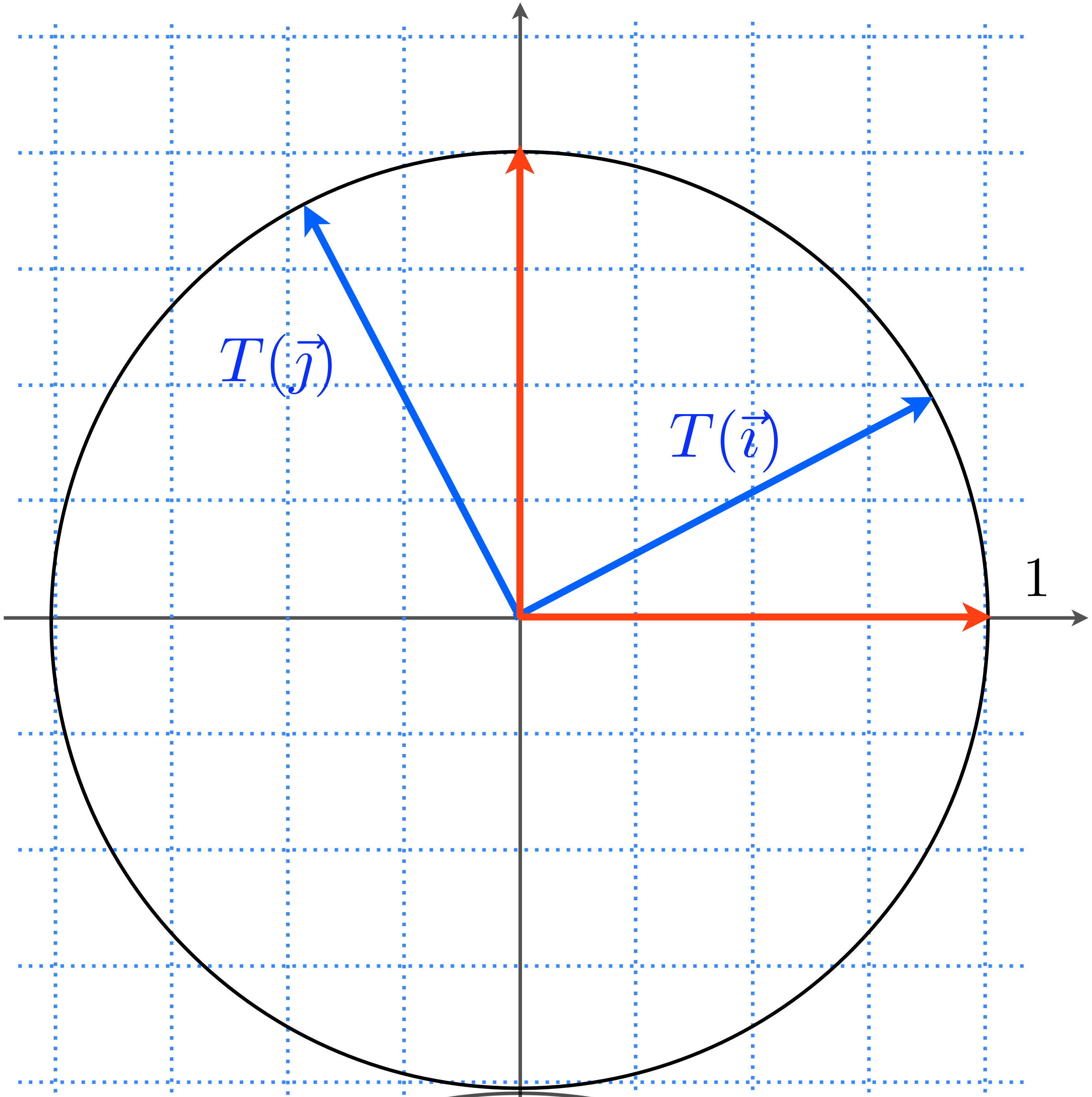
Donc si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale, alors

$T(\vec{\imath}) = (a, b)$ et $T(\vec{\jmath}) = (c, d)$ forment une base orthonormale.



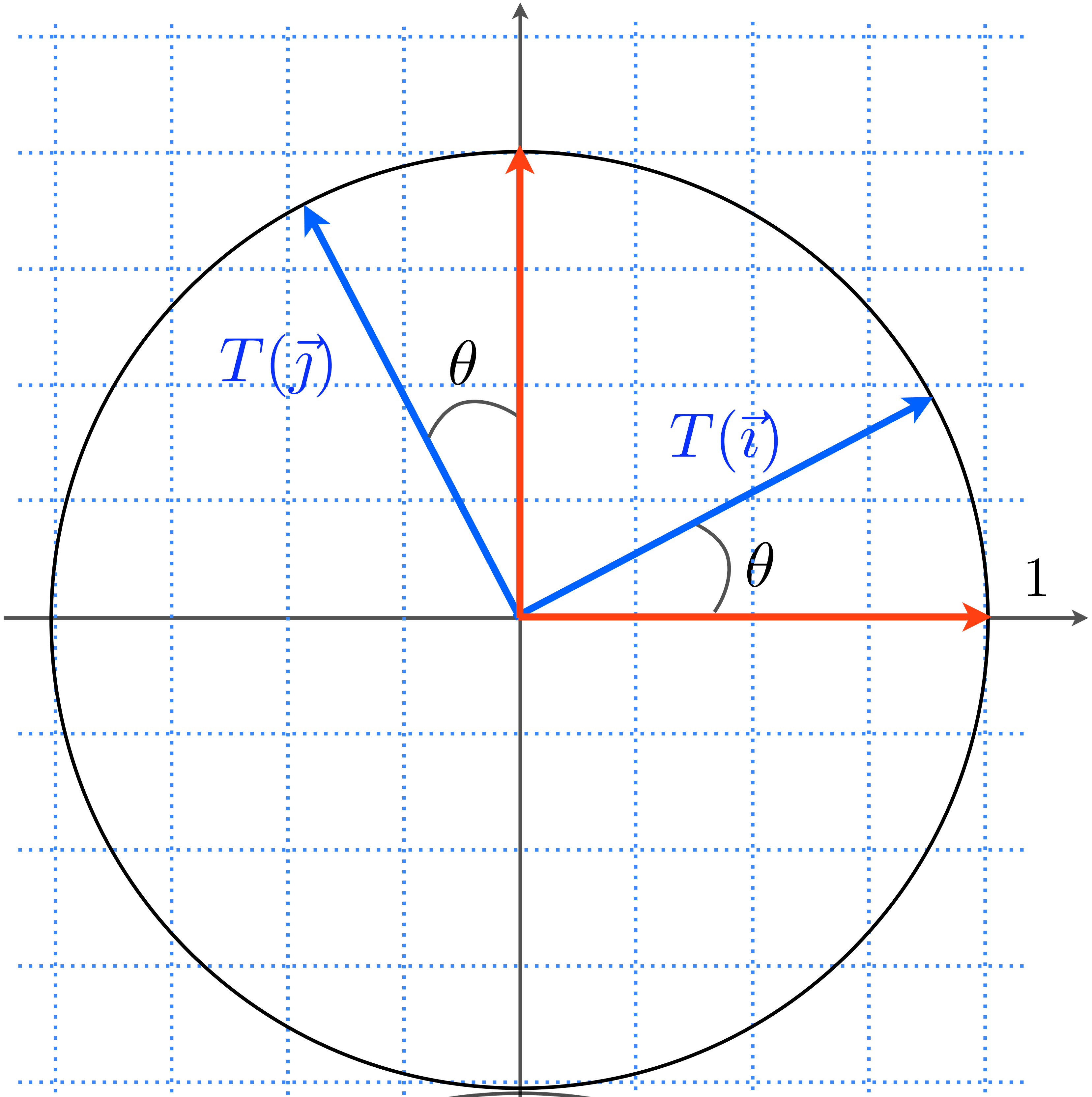
Donc si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale, alors

$T(\vec{\imath}) = (a, b)$ et $T(\vec{\jmath}) = (c, d)$ forment une base orthonormale.



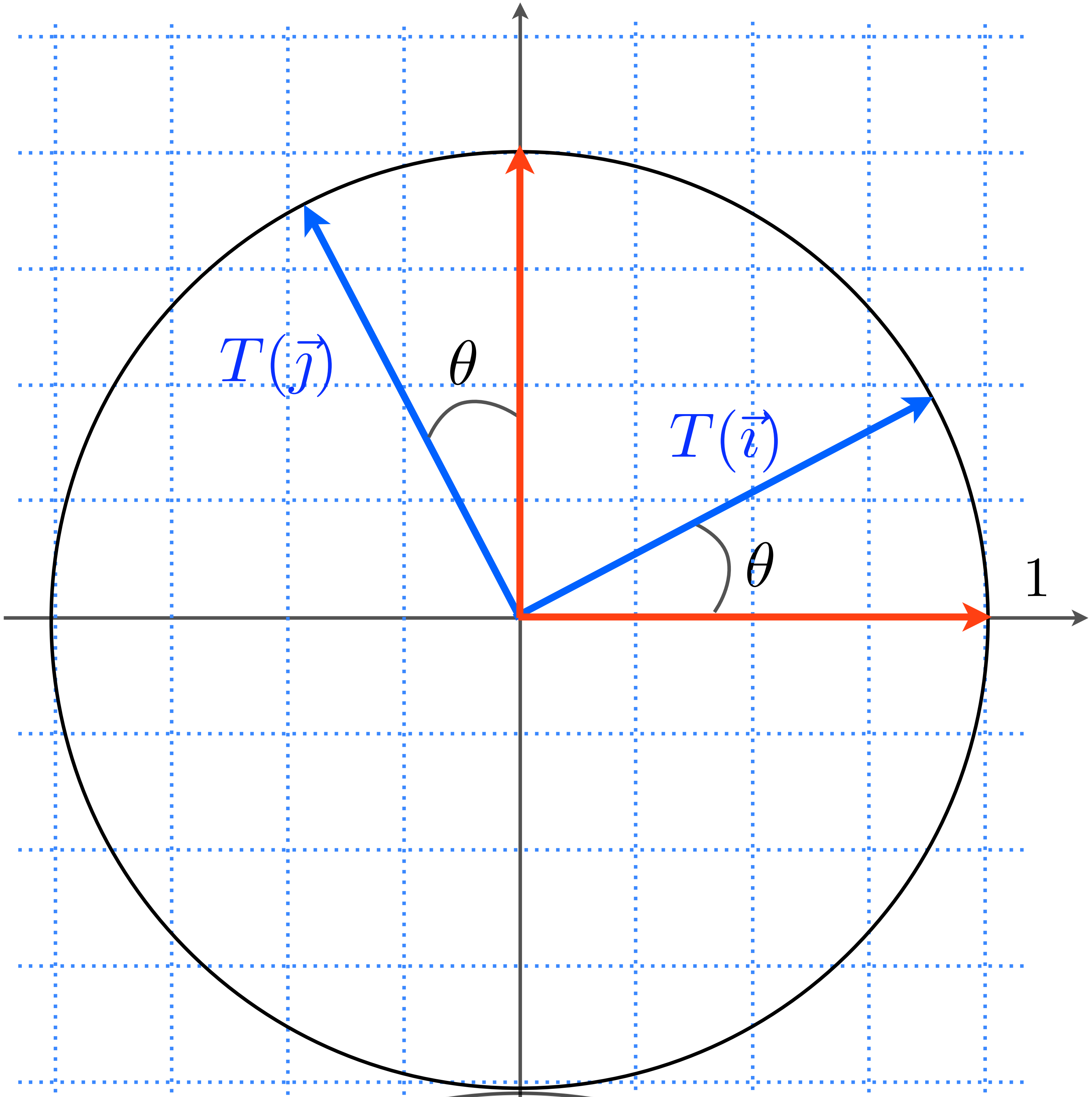
Donc si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale, alors

$T(\vec{\imath}) = (a, b)$ et $T(\vec{\jmath}) = (c, d)$ forment une base orthonormale.



Donc si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale, alors

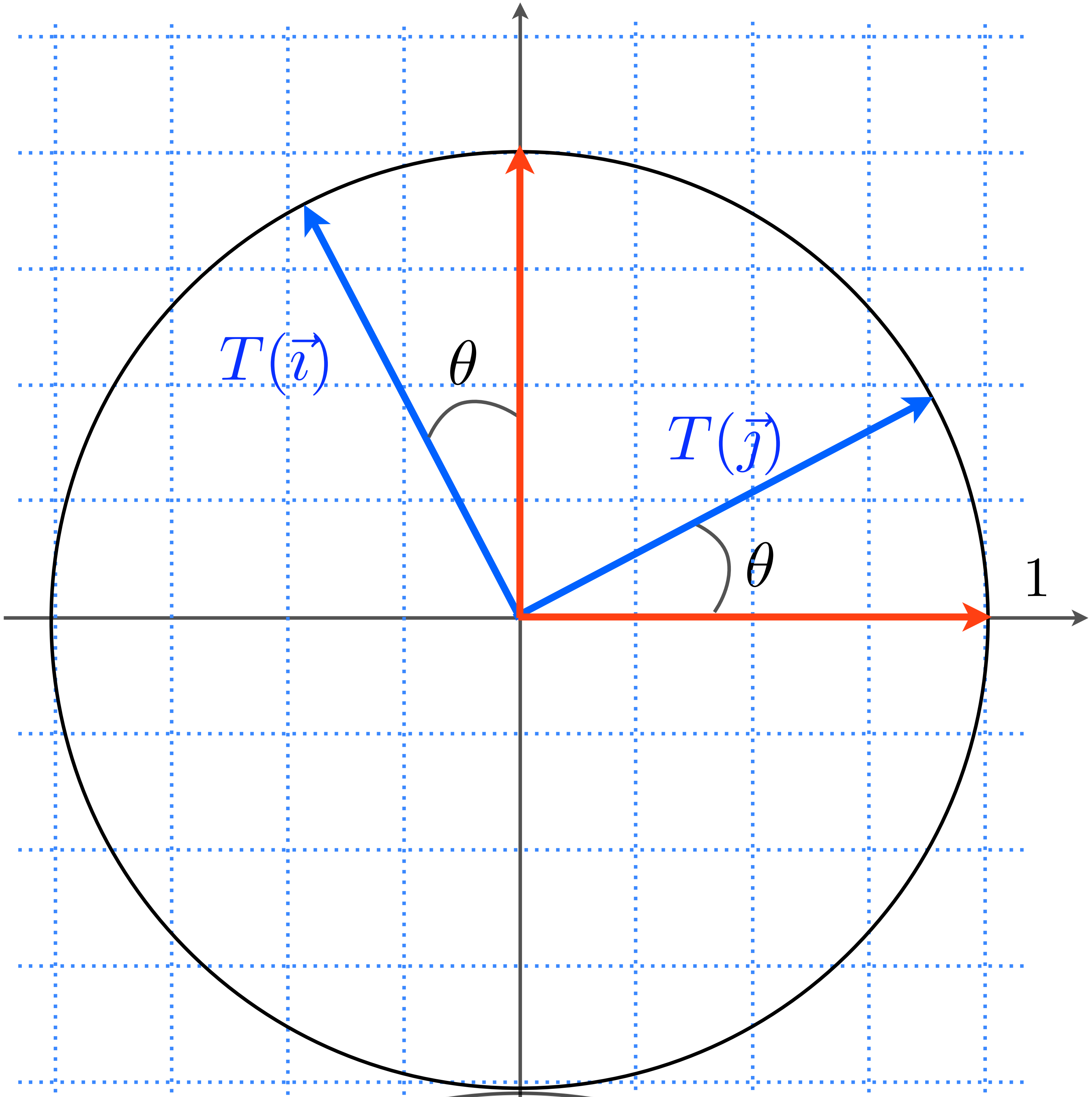
$T(\vec{\imath}) = (a, b)$ et $T(\vec{\jmath}) = (c, d)$ forment une base orthonormale.



Une rotation

Donc si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale, alors

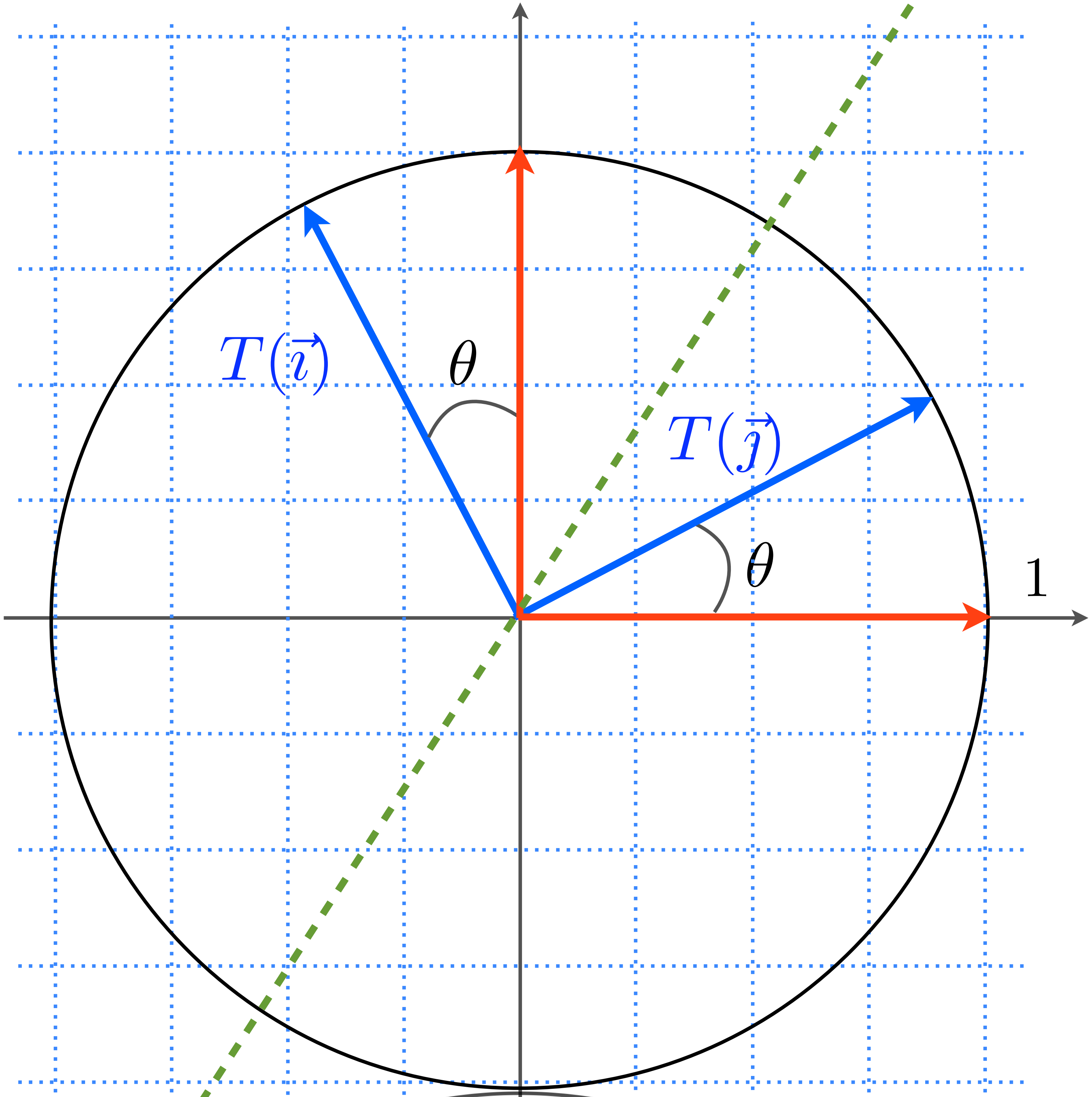
$T(\vec{\imath}) = (a, b)$ et $T(\vec{\jmath}) = (c, d)$ forment une base orthonormale.



Une rotation

Donc si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale, alors

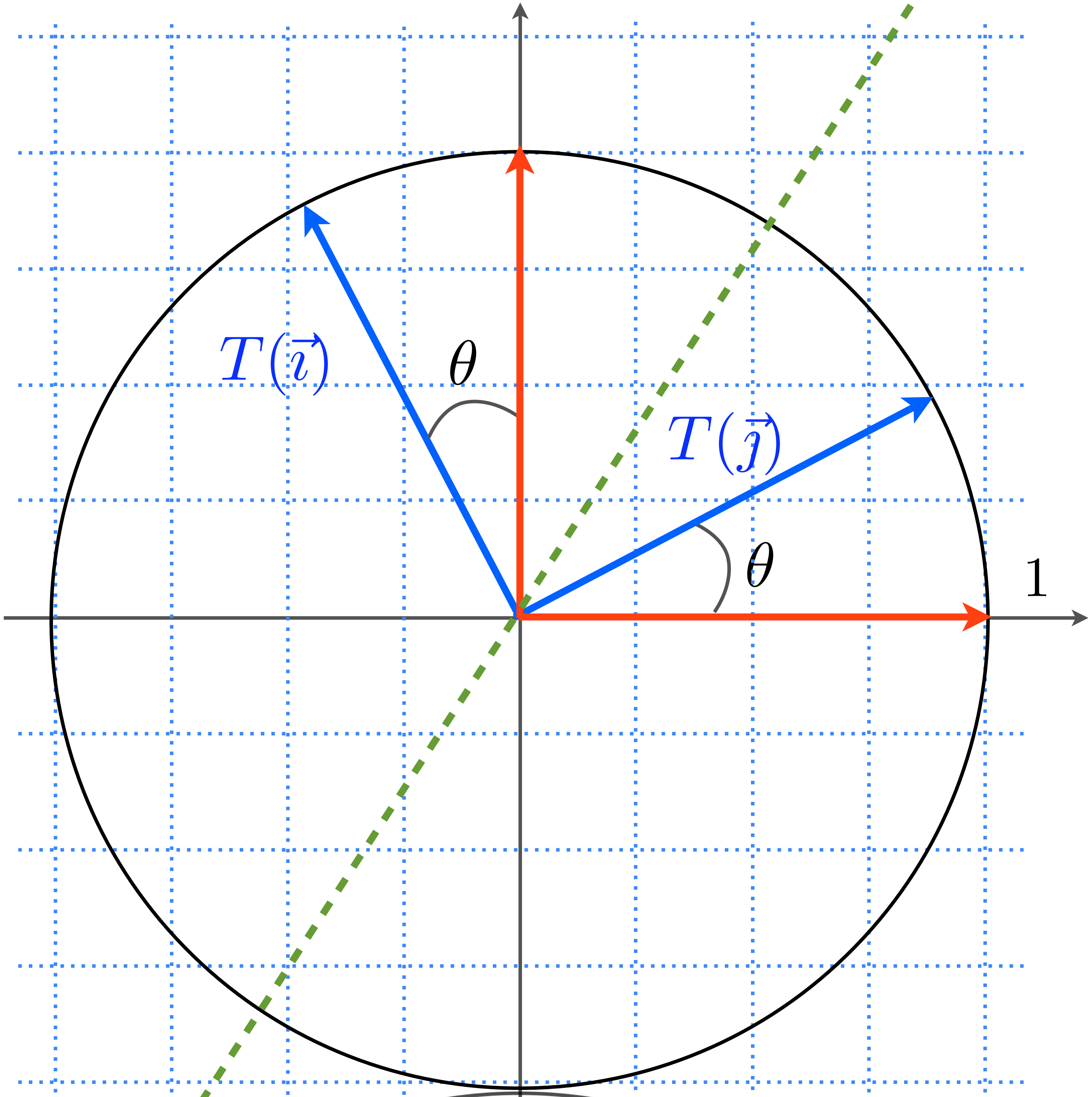
$T(\vec{\imath}) = (a, b)$ et $T(\vec{\jmath}) = (c, d)$ forment une base orthonormale.



Une rotation

Donc si $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale, alors

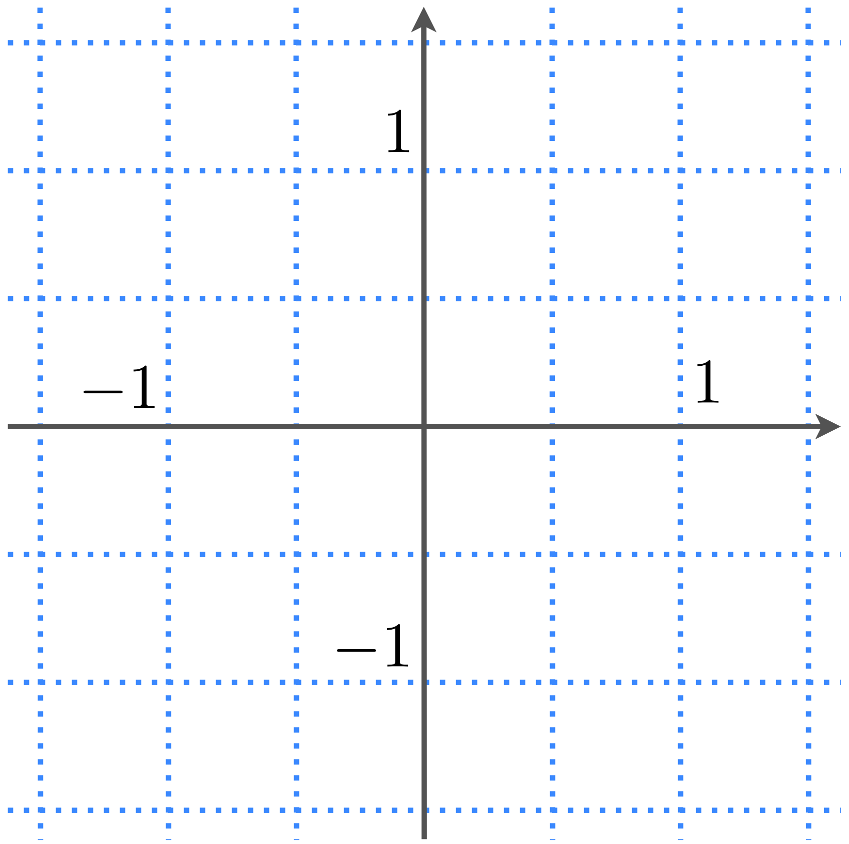
$T(\vec{\imath}) = (a, b)$ et $T(\vec{\jmath}) = (c, d)$ forment une base orthonormale.

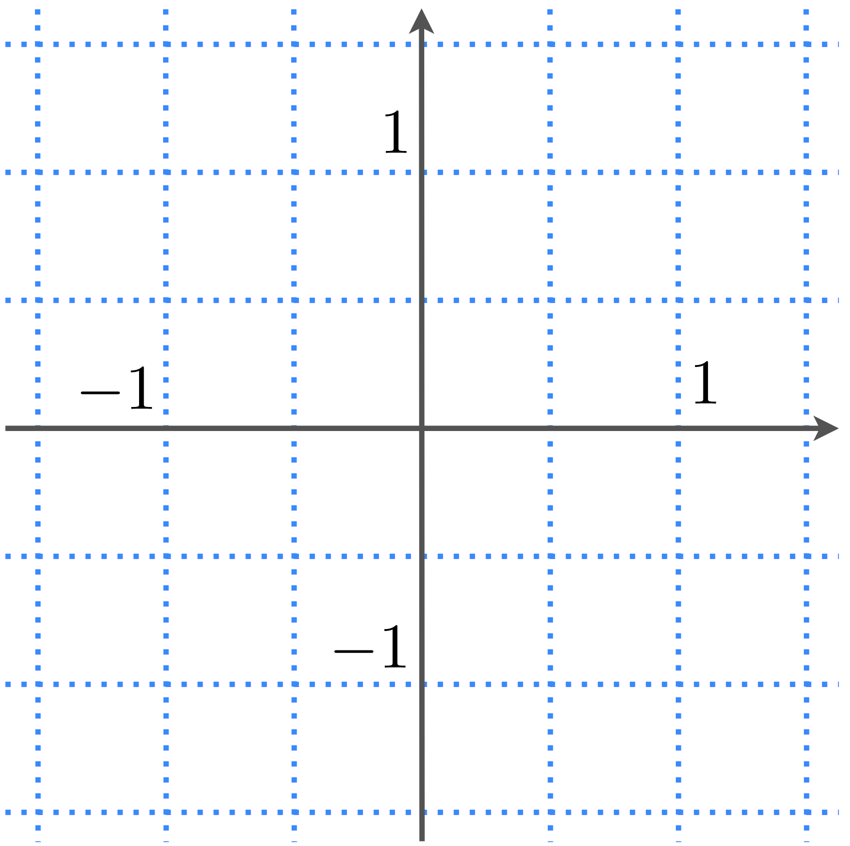


Une rotation

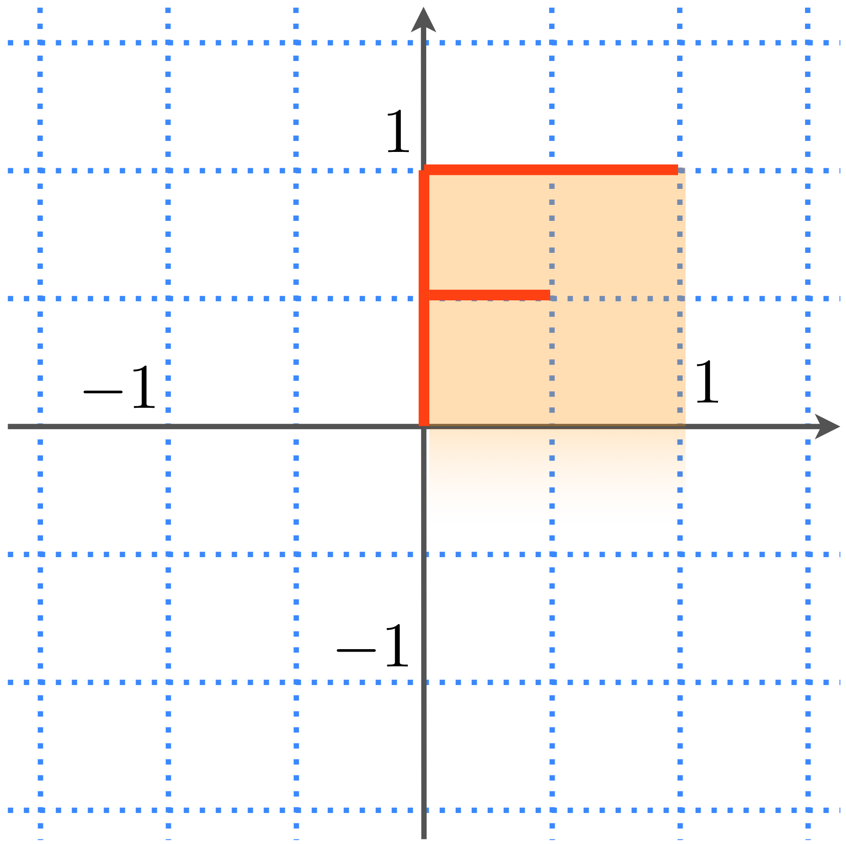
ou une réflexion

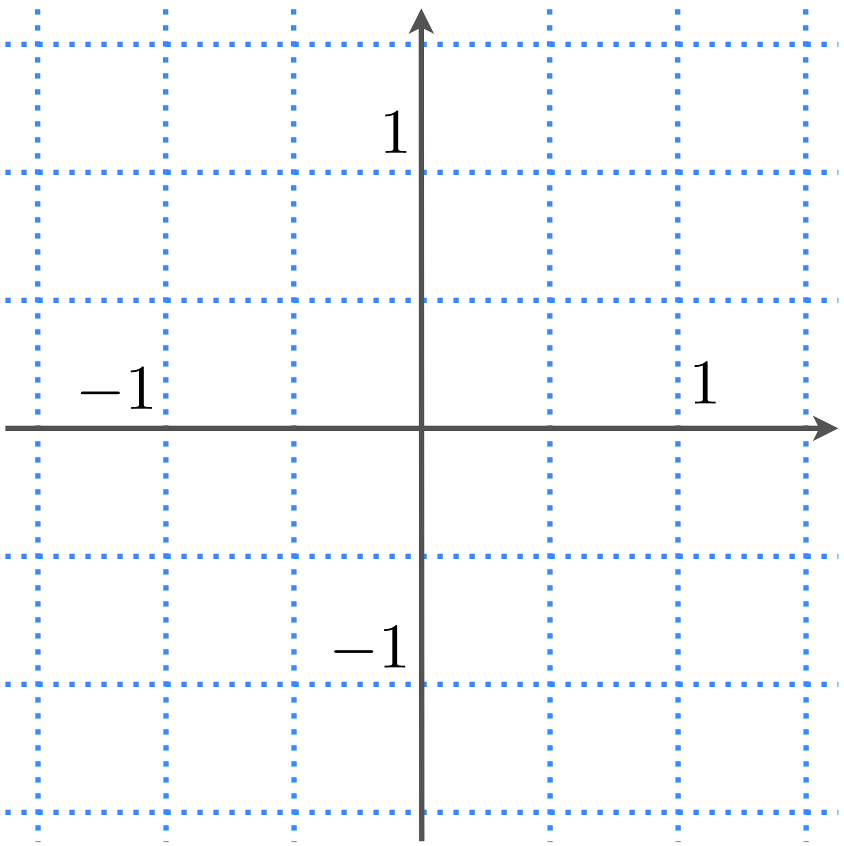
Facteur de dilatation de l'aire



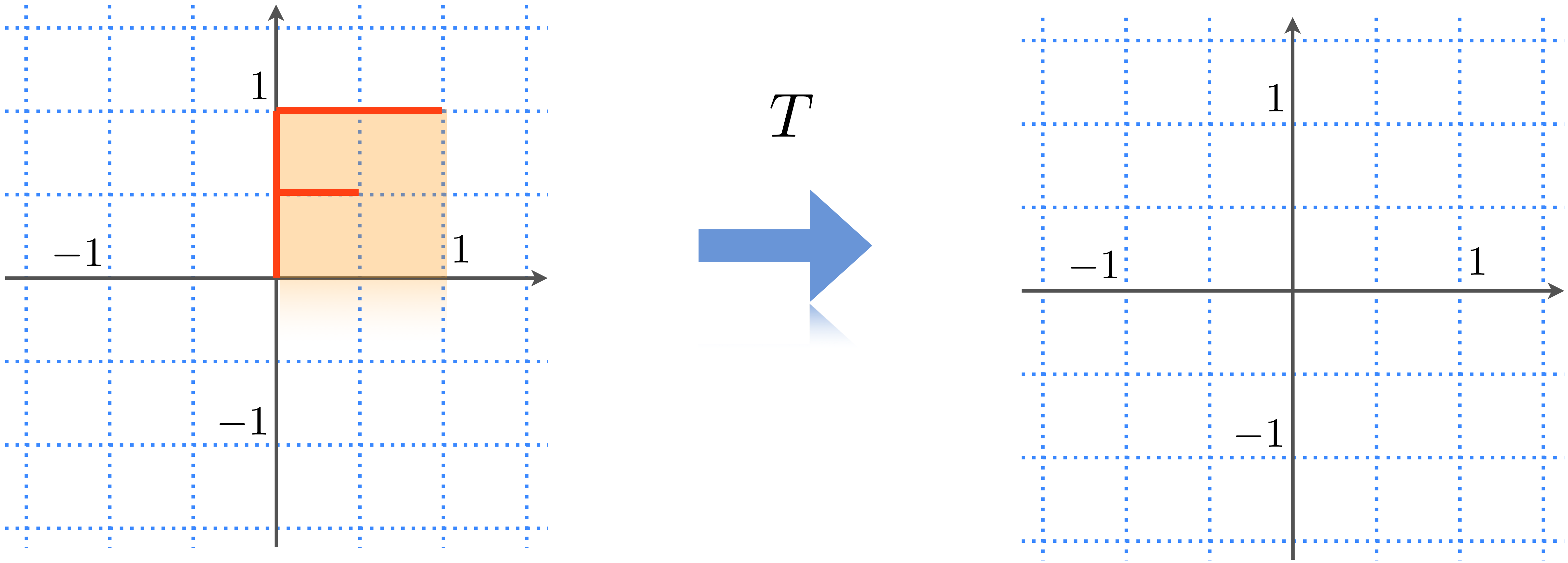


Facteur de dilatation de l'aire

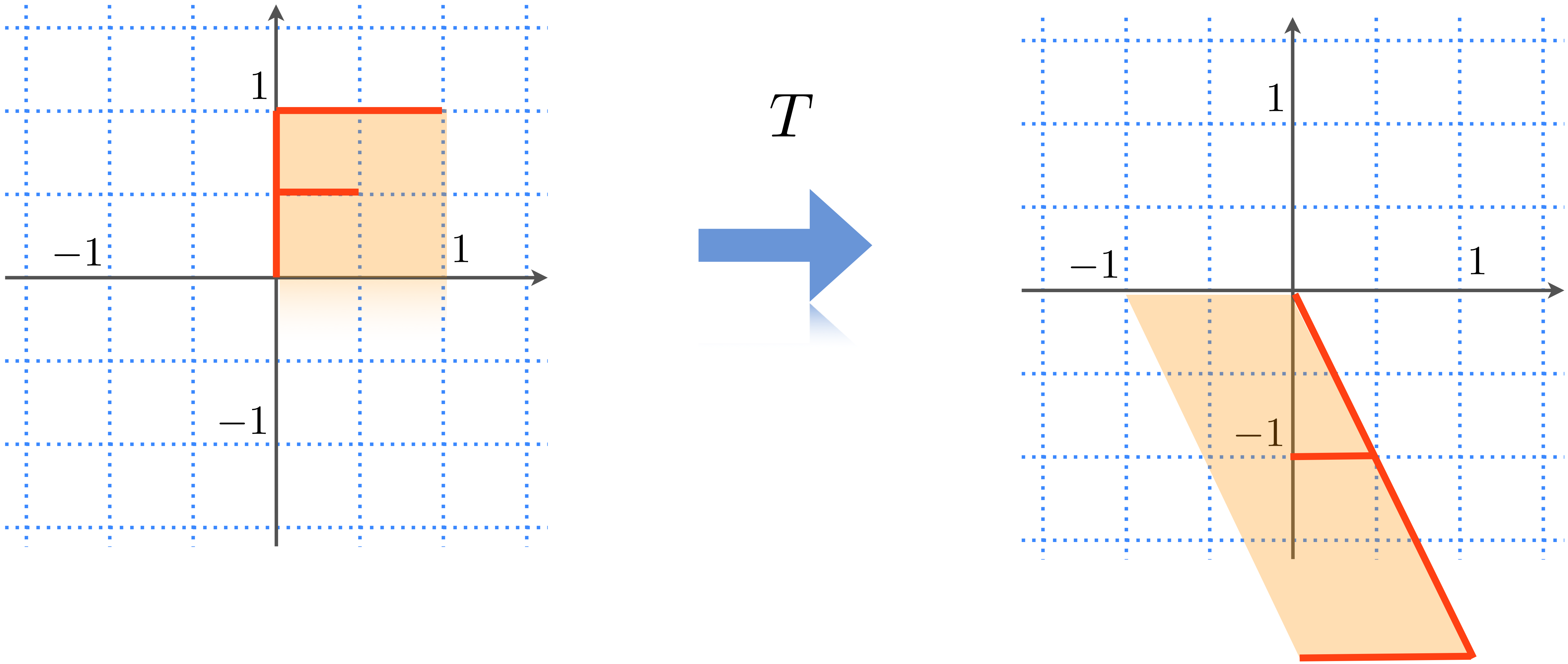




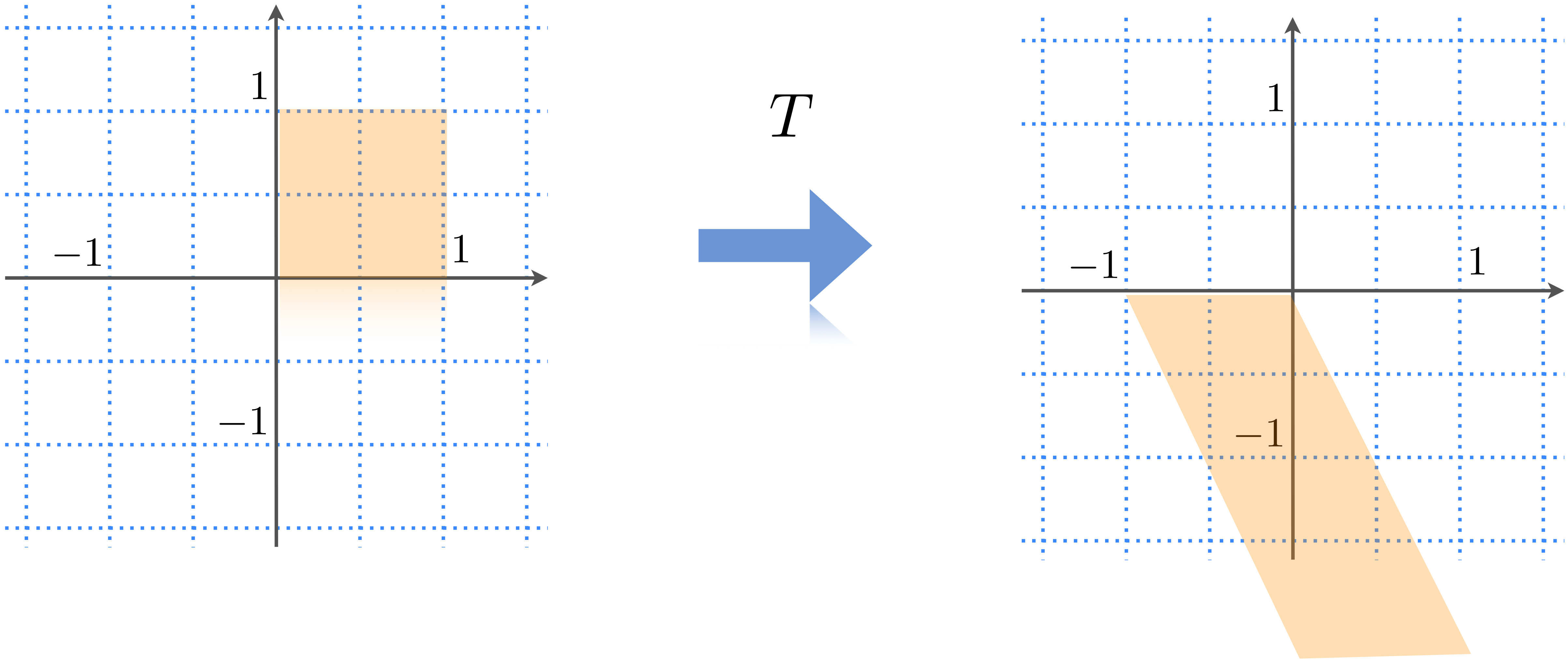
Facteur de dilatation de l'aire



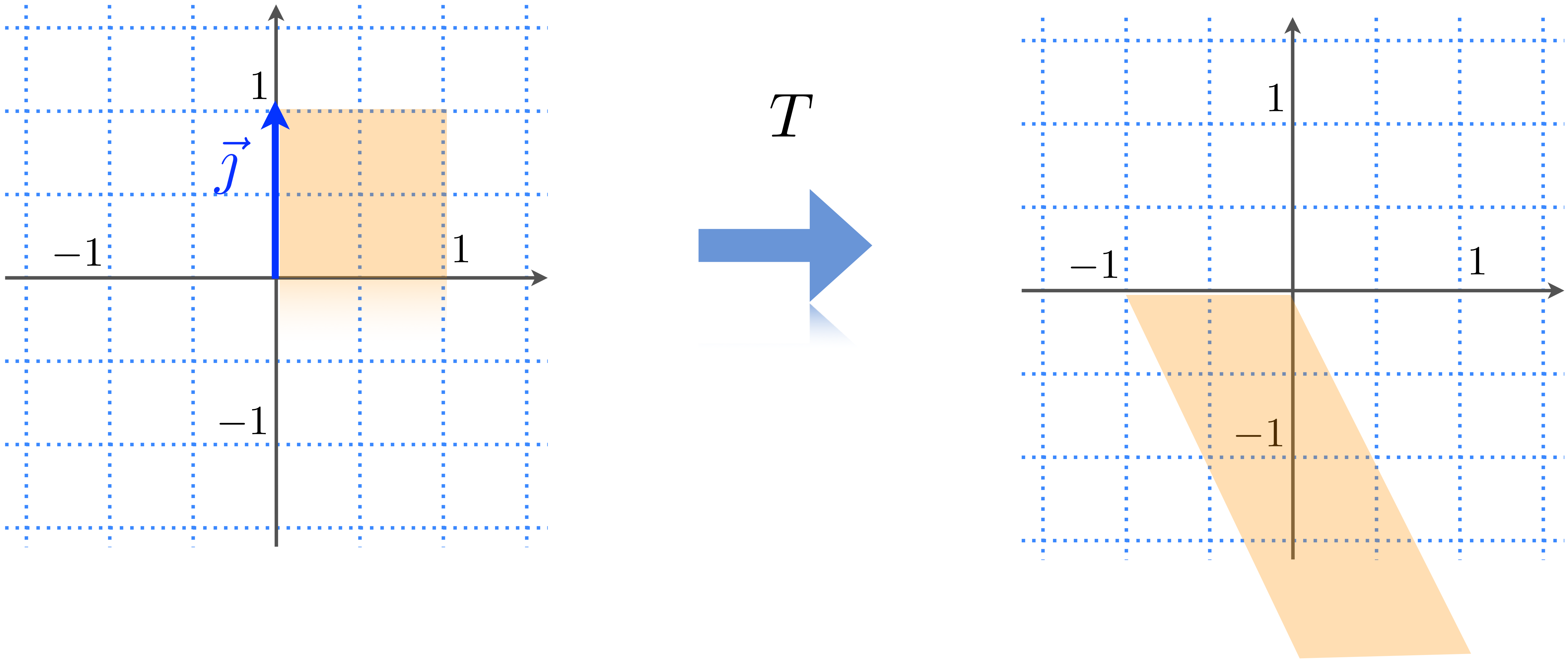
Facteur de dilatation de l’aire



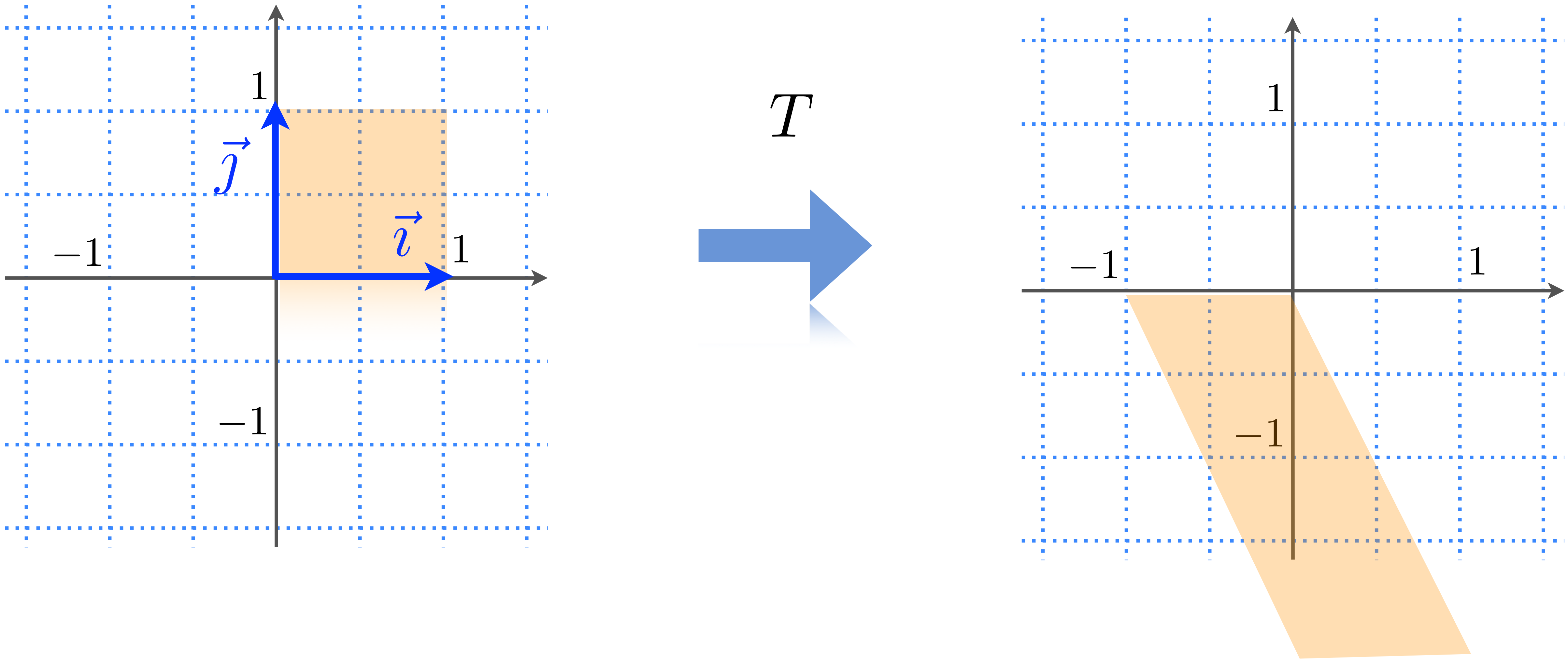
Facteur de dilatation de l'aire



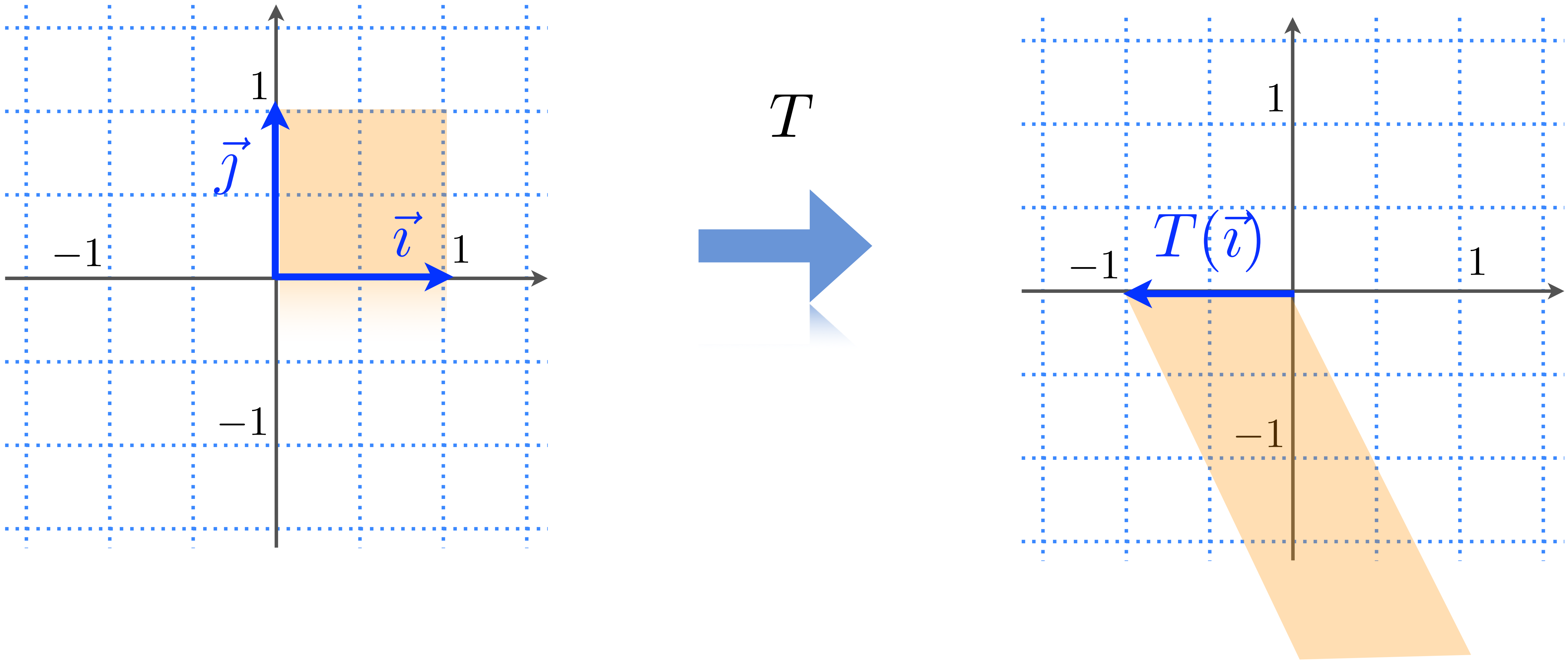
Facteur de dilatation de l'aire



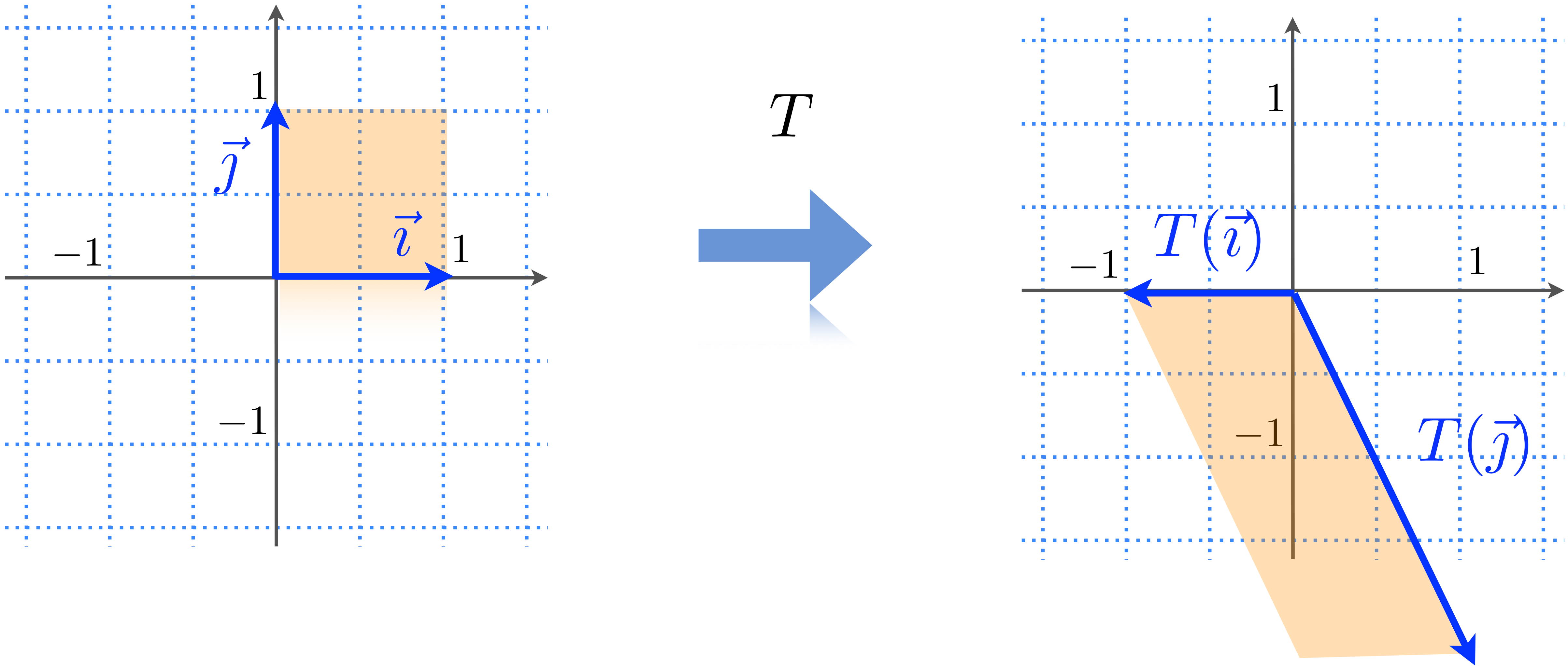
Facteur de dilatation de l'aire



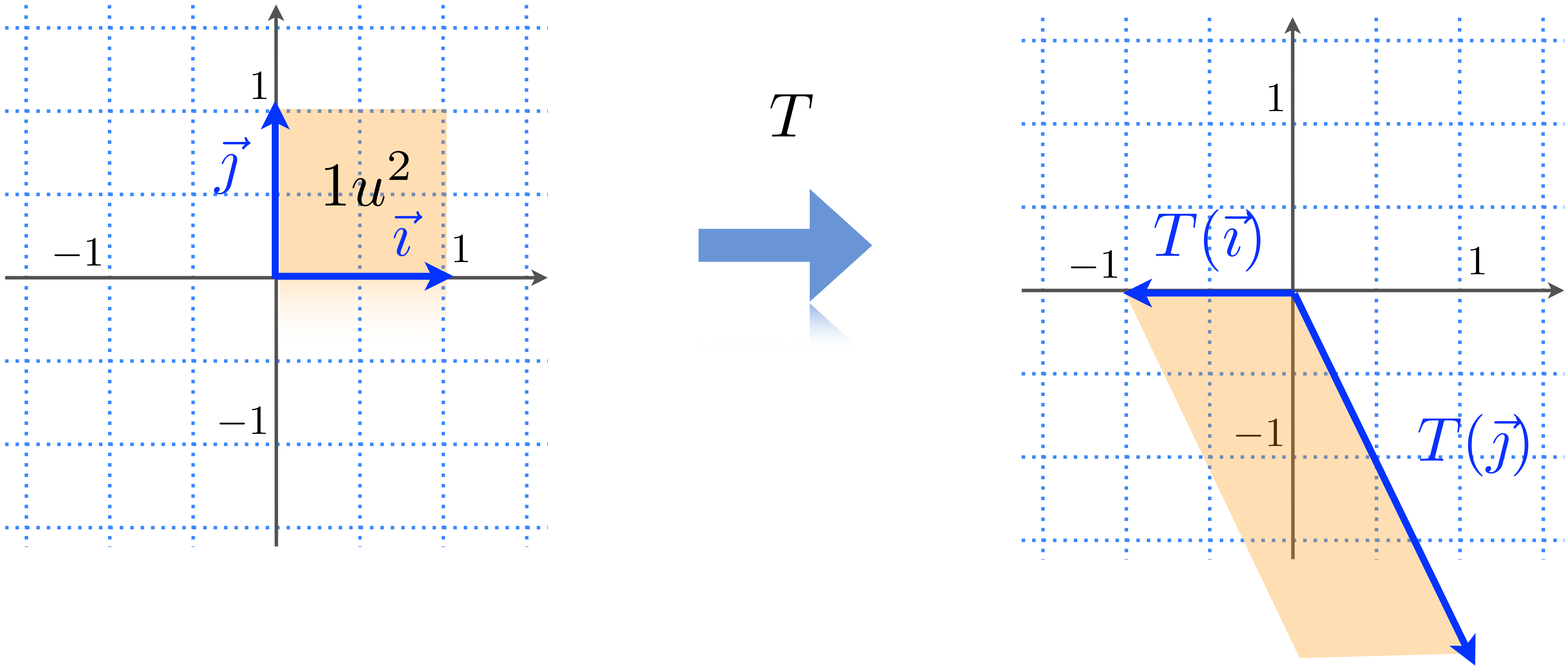
Facteur de dilatation de l'aire



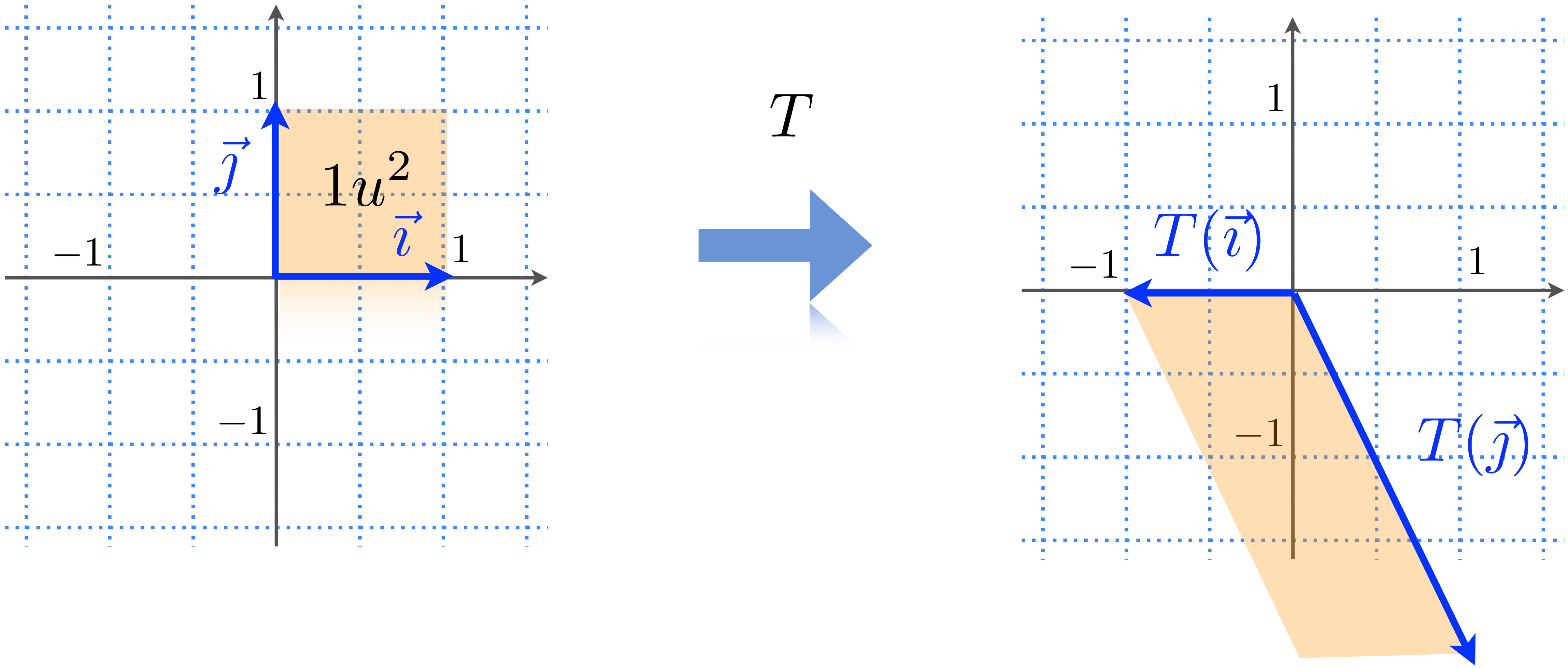
Facteur de dilatation de l'aire



Facteur de dilatation de l'aire

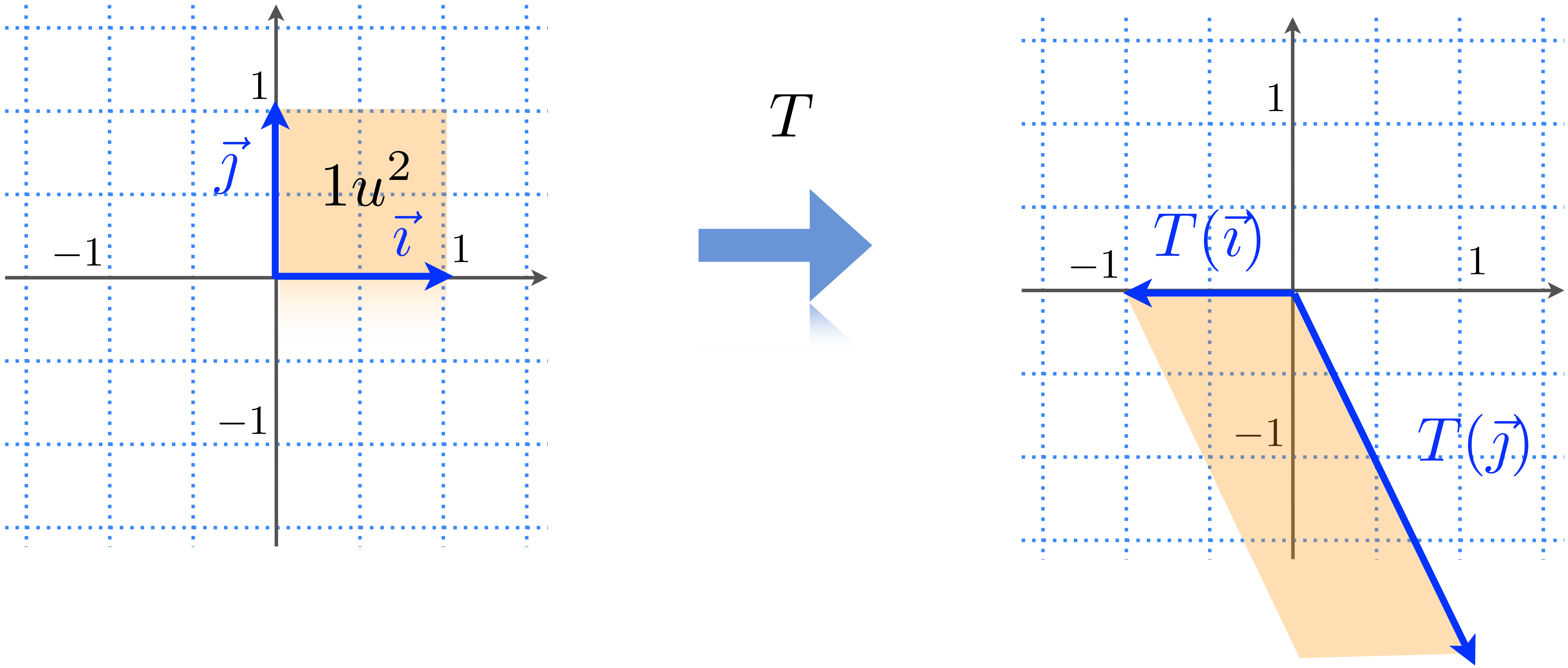


Facteur de dilatation de l'aire



$$T(\vec{\imath}) = (a, b)$$

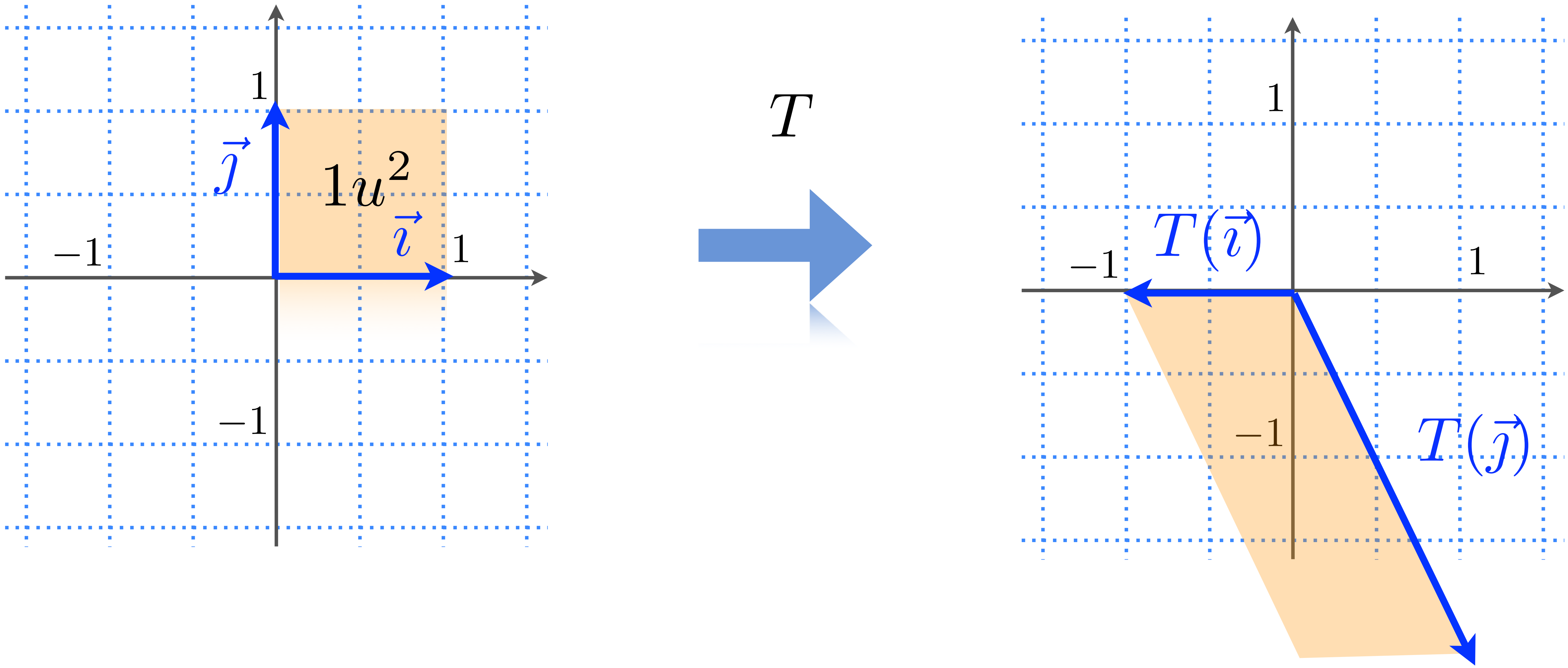
Facteur de dilatation de l'aire



$$T(\vec{i}) = (a, b)$$

$$T(\vec{j}) = (c, d)$$

Facteur de dilatation de l'aire

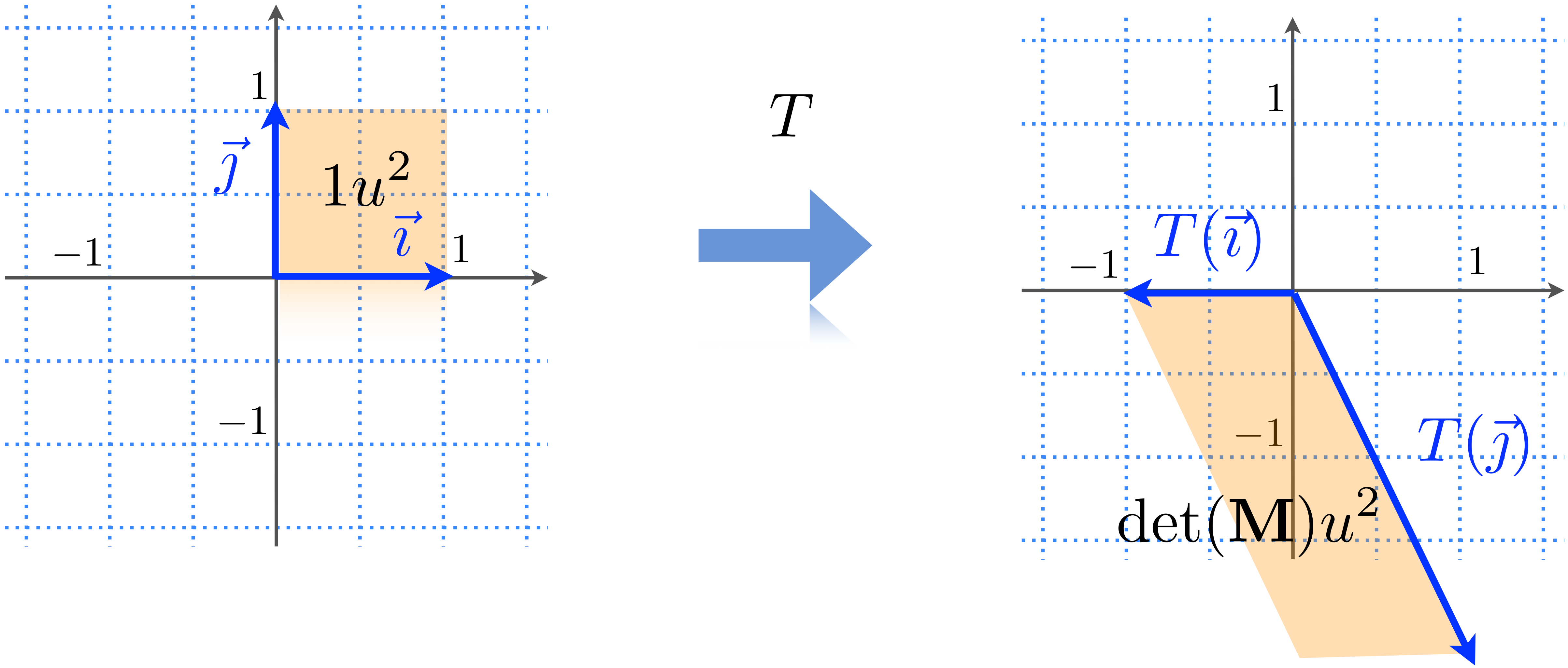


$$T(\vec{i}) = (a, b)$$

$$T(\vec{j}) = (c, d)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Facteur de dilatation de l'aire



$$T(\vec{\imath}) = (a, b)$$

$$T(\vec{j}) = (c, d)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Proposition

Soit F, une figure géométrique, et T, une transformation linéaire modélisée par la matrice $\mathbf{M}$.

Proposition Soit F, une figure géométrique, et T, une transformation linéaire modélisée par la matrice $\mathbf{M}$.

L'aire de l'image de F par T est donnée par:

Proposition Soit F, une figure géométrique, et T, une transformation linéaire modélisée par la matrice $\mathbf{M}$.

L'aire de l'image de F par T est donnée par:

$$\text{aire}(T(F)) = \det(\mathbf{M}) \times \text{aire}(F)$$

Avec cette dernière proposition en main, on est maintenant en mesure de distinguer les deux types de matrices orthogonales.

Avec cette dernière proposition en main, on est maintenant en mesure de distinguer les deux types de matrices orthogonales.

Propositio

Avec cette dernière proposition en main, on est maintenant en mesure de distinguer les deux types de matrices orthogonales.

Propositio

Soit $\mathbf{M}$ une matrice orthogonale, alors

Avec cette dernière proposition en main, on est maintenant en mesure de distinguer les deux types de matrices orthogonales.

Propositio

Soit $\mathbf{M}$ une matrice orthogonale, alors

Si $\det \mathbf{M} = 1$, alors $\mathbf{M}$ modélise une rotation.

Avec cette dernière proposition en main, on est maintenant en mesure de distinguer les deux types de matrices orthogonales.

Propositio

Soit $\mathbf{M}$ une matrice orthogonale, alors

Si $\det \mathbf{M} = 1$, alors $\mathbf{M}$ modélise une rotation.

Si $\det \mathbf{M} = -1$, alors $\mathbf{M}$ modélise une réflexion.

Faites les exercices suivants

p.266, # 9 et 10 et 17.

Aujourd'hui, nous avons vu

Aujourd’hui, nous avons vu

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Les homothéties.

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Les homothéties.
- ✓ Les étirements.

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Les homothéties.
- ✓ Les étirements.
- ✓ Les rotations.

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ Les homothéties.
- ✓ Les étirements.
- ✓ Les rotations.
- ✓ Les réflexions.

Devoir: p. 265, # 1 à 22.