7.3 AUTRES TRANSFORMATIONS

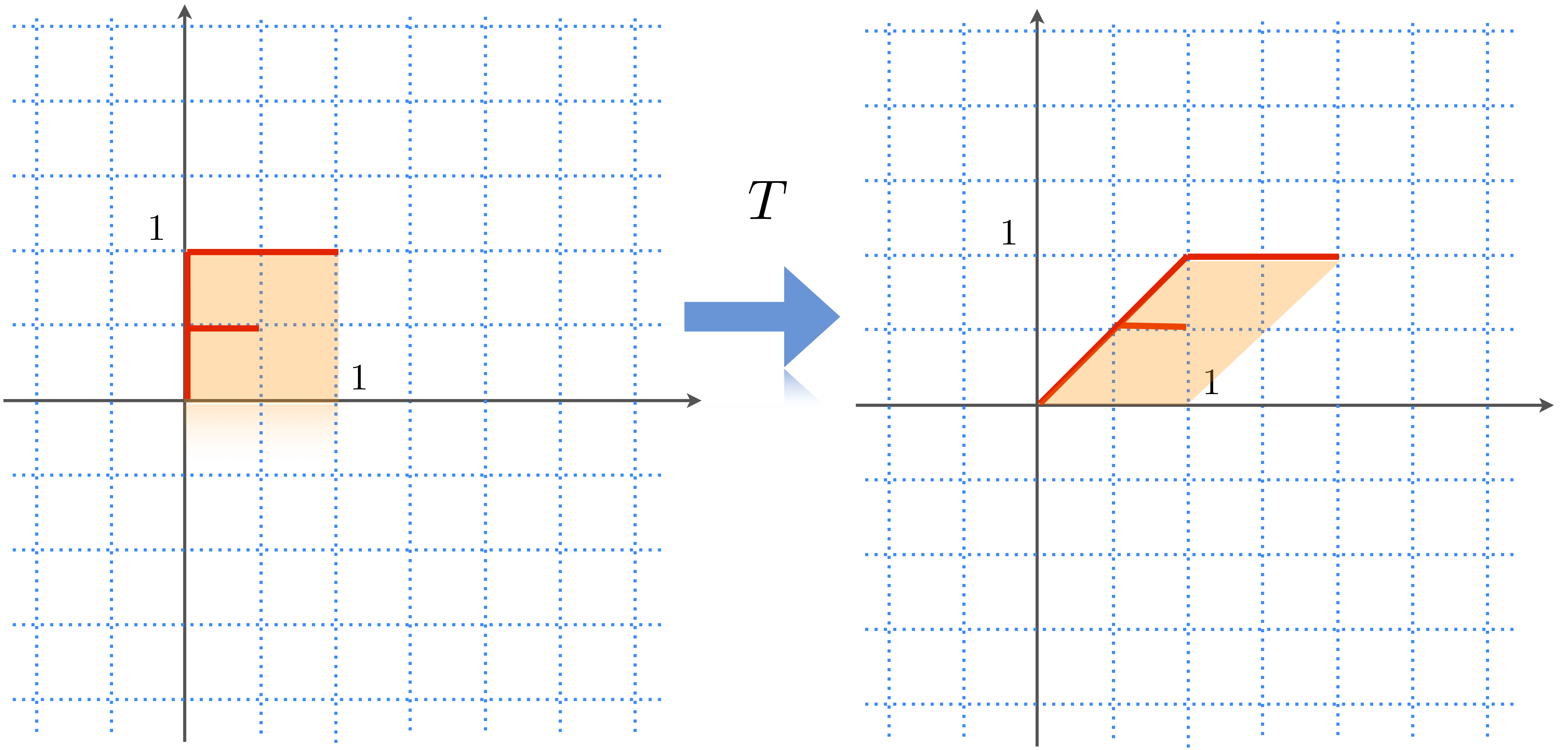
Cours 22

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Les homothéties.
- ✓ Les étirements.
- ✓ Les rotations.
- ✓ Les réflexions.

Aujourd’hui, nous allons voir

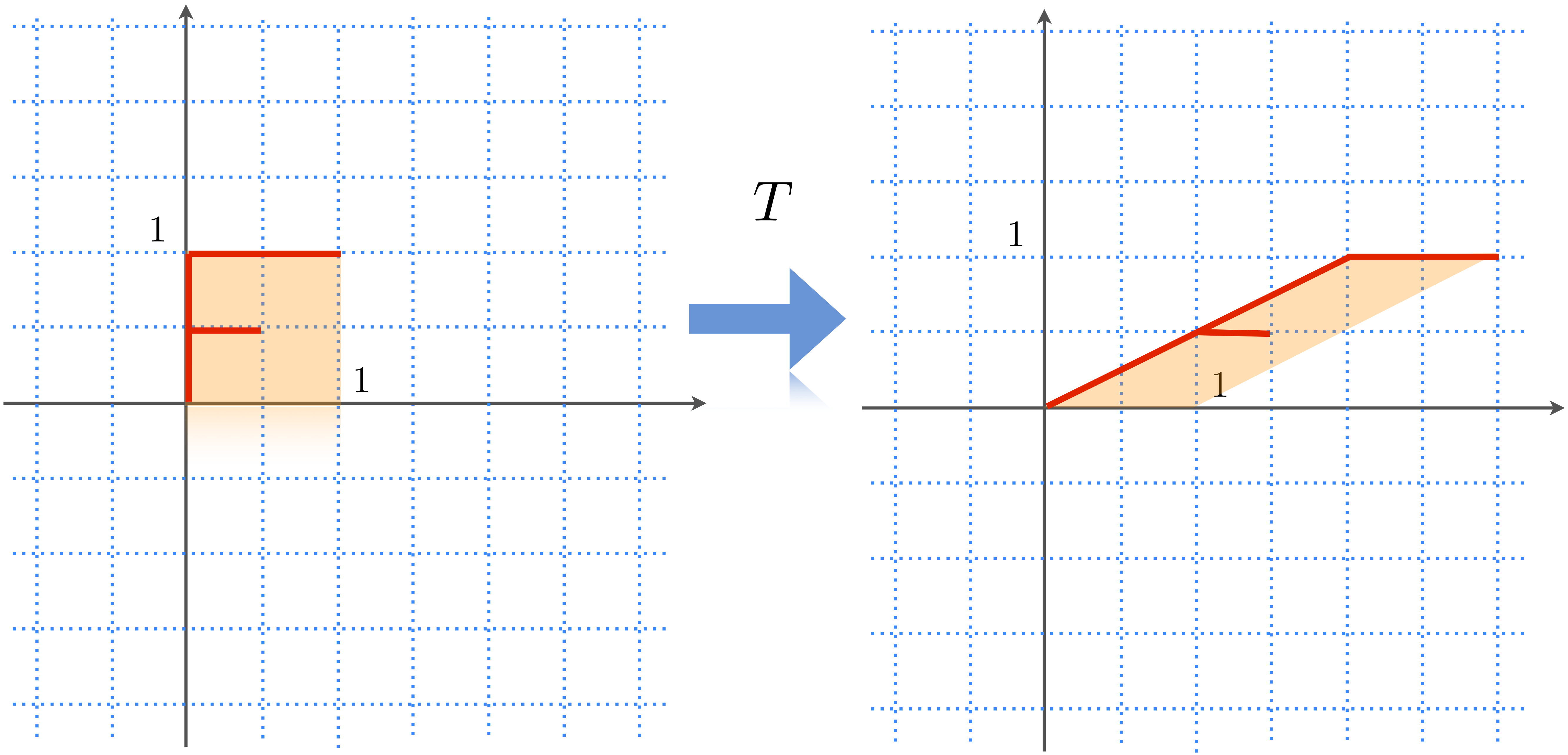
- ✓ Les cisaillements.
- ✓ Les projections orthogonales.
- ✓ Les projections obliques.



$$T(\vec{\imath}) = (1, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (1, 1)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$T(\vec{\imath}) = (1, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (2, 1)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition Le cisaillement d'un facteur k dans la direction $\vec{u}$ est une transformation linéaire telle que

$$T(\vec{u}) = \vec{u} \qquad\qquad T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp + k\vec{u}$$

Remarque: C'est surtout la direction du vecteur et le facteur qui définissent le cisaillement.

Si on a un cisaillement de facteur k dans la direction de $\vec{u}$, c.-à-d.

$$T(\vec{u}) = \vec{u} \qquad T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp + k\vec{u}$$

et un vecteur parallèle $\quad \vec{v} \parallel \vec{u} \qquad \vec{v} = r\vec{u} \implies \vec{v}_\perp = r\vec{u}_\perp$

alors

$$T(\vec{v}) = T(r\vec{u}) = rT(\vec{u}) = r\vec{u} = \vec{v}$$

$$T(\vec{v}_\perp) = T(r\vec{u}_\perp) = rT(\vec{u}_\perp) = r(\vec{u}_\perp + k\vec{u})$$

$$= r\vec{u}_\perp + kr\vec{u} = \vec{v}_\perp + k\vec{v}$$

Remarque: On peut se convaincre facilement qu'un cisaillement ne change pas l'aire.

$$\begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{u}_\perp \end{array} \qquad \begin{array}{cc} T(\vec{u}) & T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp + k\vec{u} \end{array}$$

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b+ka \\ b & a+kb \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & -b+ka \\ b & a+kb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\det \mathbf{M} = \frac{\begin{vmatrix} a & -b+ka \\ b & a+kb \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} + k\underbrace{\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}}_{0}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = 1$$

Faites les exercices suivants

p.272, # 1 à 4.

Les transformations qu'on a vues jusqu'à présent ont toutes la particularité d'être surjectives.

En d'autres termes, tout vecteurs de $\mathbb{R}^2$ peut être atteint par la transformation linéaire.

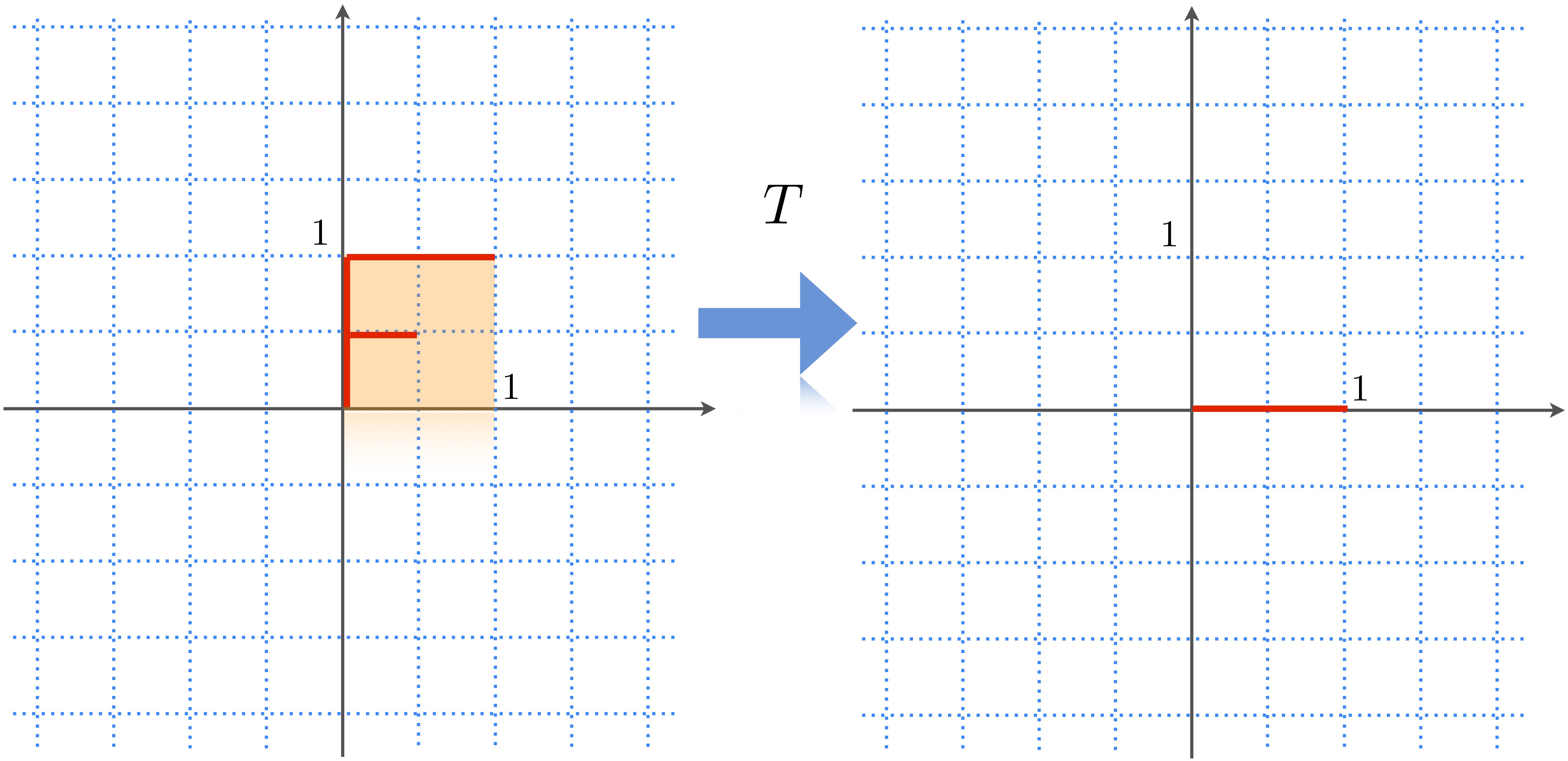
Ce qui n'est pas toujours le cas.

Prenons la transformation suivante:

$$T(\vec{u}) = \vec{0} \qquad\qquad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$$

On peut facilement vérifier que c'est une transformation linéaire mais qu'elle n'est pas surjective.

Projection orthogonale

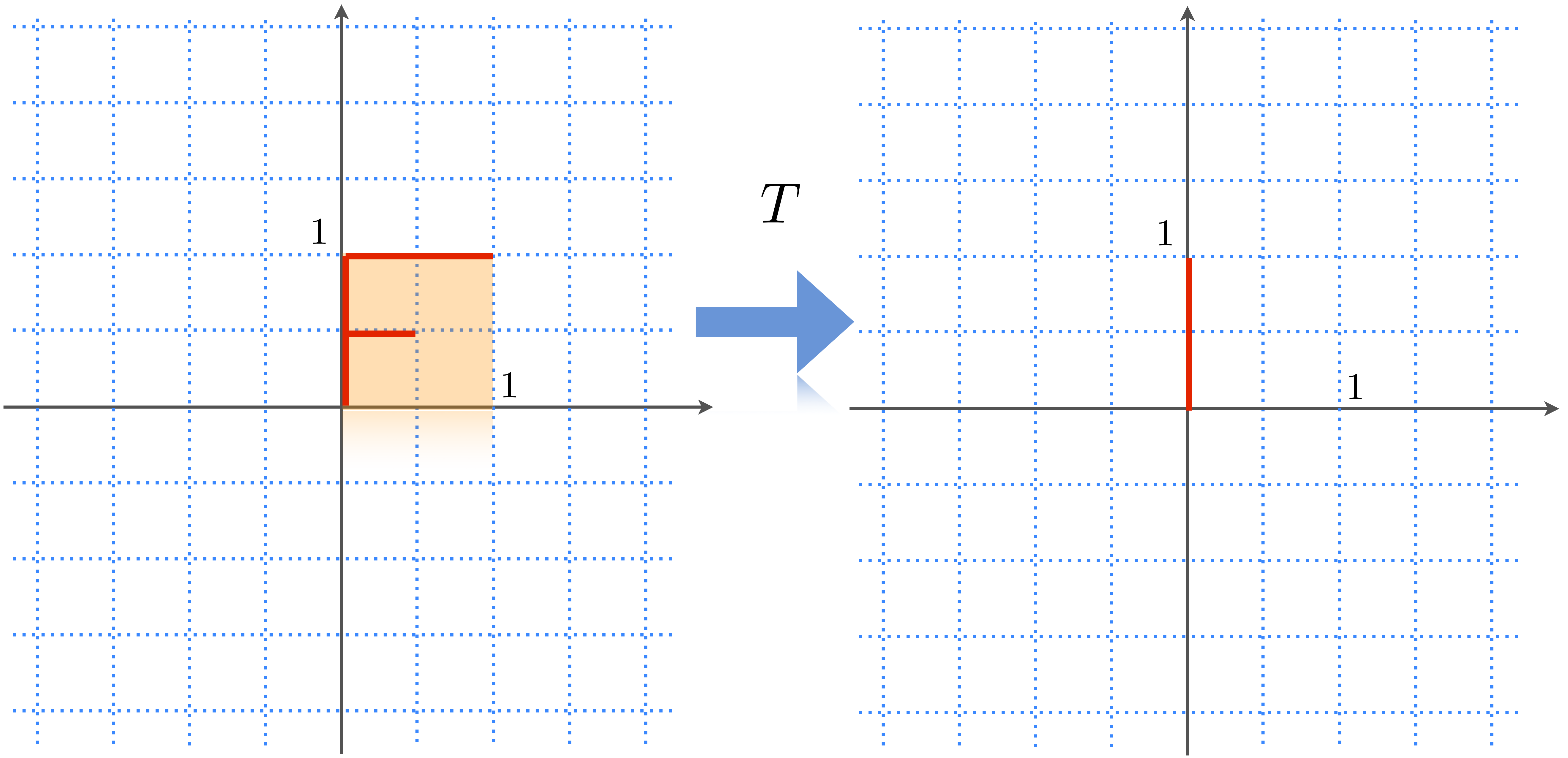


$$T(\vec{\imath}) = (1, 0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0, 0)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Projection orthogonale



$$T(\vec{\imath}) = (0,0)$$

$$T(\vec{\jmath}) = (0,1)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition

La projection orthogonale sur un vecteur $\vec{u}$ est la transformation linéaire telle que

$$T(\vec{u}) = \vec{u} \qquad T(\vec{u}_\perp) = \vec{0}$$

On peut s'amuser à vérifier que c'est cohérent avec la projection orthogonale qu'on a déjà vue.

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

Matrice de projection orthogonale sur $\vec{u} = (a, b)$

$$T(\vec{v}) = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Appliquer à un vecteur $\vec{v} = (c, d)$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2c + abd \\ abc + b^2d \end{pmatrix}$$

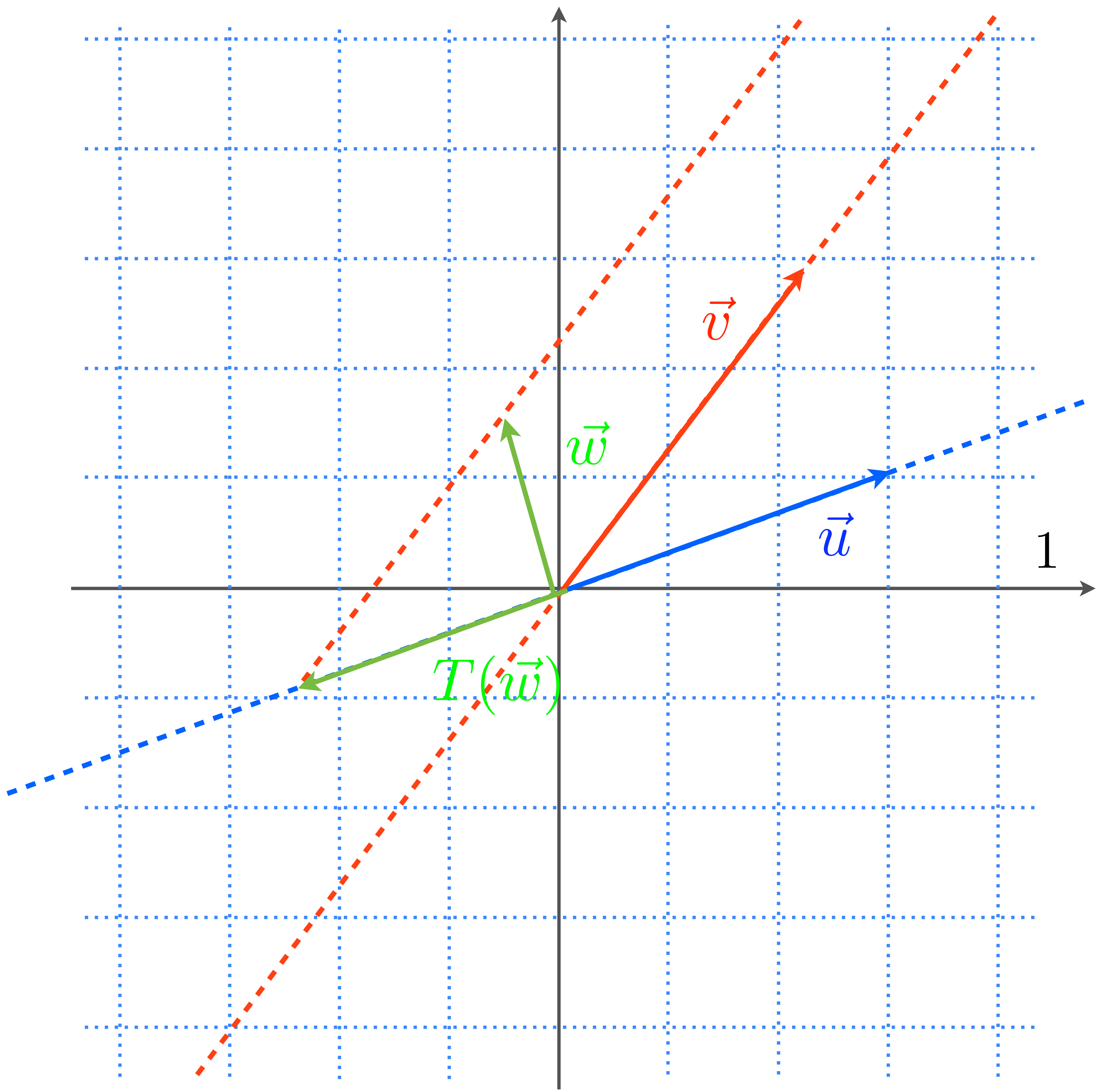
$$= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a(ac+bd) \\ b(ac+bd) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ac+bd}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u} = \vec{v}_{\vec{u}}$$

Définition La projection oblique sur un vecteur $\vec{u}$ le long du vecteur $\vec{v}$, si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \nparallel \vec{u}$, est la transformation linéaire telle que

$$T(\vec{u}) = \vec{u} \qquad T(\vec{v}) = \vec{0}$$



$\vec{v}$
$\vec{w}$
$\vec{u}$
1
$T(\vec{w})$

Faites les exercices suivants

p.273, # 8 à 11.

Aujourd’hui, nous avons vu

- ✓ Les cisaillements.
- ✓ Les projections orthogonales.
- ✓ Les projections obliques.

Devoir: p. 277, # 1 à 11