7.4 VECTEURS PROPRES

Cours 23

Au dernier cours, nous avons vu

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Les cisaillements.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Les cisaillements.
- ✓ Les projections orthogonales.

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Les cisaillements.
- ✓ Les projections orthogonales.
- ✓ Les projections obliques.

Aujourd’hui, nous allons voir

Aujourd'hui, nous allons voir

✓ La façon de décomposer une transformation linéaire.

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ La façon de décomposer une transformation linéaire.
- ✓ Les vecteurs propres et les valeurs propres.

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:

$T(\vec{u}) = k\vec{u}$

$T(\vec{v}) = k\vec{v}$

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{v}) = k\vec{v}$
Étirement:		

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{v}) = k\vec{v}$
Étirement:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{v}) = k\vec{v}$
Étirement:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$
Rotation:		

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{v}) = k\vec{v}$
Étirement:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$
Rotation:	$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$	$T(\vec{\jmath}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{v}) = k\vec{v}$
Étirement:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$
Rotation:	$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$	$T(\vec{\jmath}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$
Réflexion:		

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{v}) = k\vec{v}$
Étirement:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$
Rotation:	$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$	$T(\vec{\jmath}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$
Réflexion:	$T(\vec{\imath}) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$	$T(\vec{\jmath}) = (\sin(2\theta), -\cos(2\theta))$

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{v}) = k\vec{v}$
Étirement:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$
Rotation:	$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$	$T(\vec{\jmath}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$
Réflexion:	$T(\vec{\imath}) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$	$T(\vec{\jmath}) = (\sin(2\theta), -\cos(2\theta))$
Cisaillement:		

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{v}) = k\vec{v}$
Étirement:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$
Rotation:	$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$	$T(\vec{\jmath}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$
Réflexion:	$T(\vec{\imath}) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$	$T(\vec{\jmath}) = (\sin(2\theta), -\cos(2\theta))$
Cisaillement:	$T(\vec{u}) = \vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp + k\vec{u}$

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{v}) = k\vec{v}$
Étirement:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$
Rotation:	$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$	$T(\vec{\jmath}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$
Réflexion:	$T(\vec{\imath}) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$	$T(\vec{\jmath}) = (\sin(2\theta), -\cos(2\theta))$
Cisaillement:	$T(\vec{u}) = \vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp + k\vec{u}$
Projection:		

Les transformations linéaires qu'on a vues sont:

Homothétie:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{v}) = k\vec{v}$
Étirement:	$T(\vec{u}) = k\vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$
Rotation:	$T(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta)$	$T(\vec{\jmath}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$
Réflexion:	$T(\vec{\imath}) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$	$T(\vec{\jmath}) = (\sin(2\theta), -\cos(2\theta))$
Cisaillement:	$T(\vec{u}) = \vec{u}$	$T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp + k\vec{u}$
Projection:	$T(\vec{u}) = \vec{u}$	$T(\vec{v}) = \vec{0}$

En principe, on est capable de trouver la matrice correspondant à chacune de ces transformations.

En principe, on est capable de trouver la matrice correspondant à chacune de ces transformations.

Faire truc

En principe, on est capable de trouver la matrice correspondant à chacune de ces transformations.

Faire truc $\longrightarrow$

En principe, on est capable de trouver la matrice correspondant à chacune de ces transformations.

Faire truc $\longrightarrow$ Matrice

En principe, on est capable de trouver la matrice correspondant à chacune de ces transformations.

$$\text{Faire truc} \quad \underset{?}{\rightleftarrows} \quad \text{Matrice}$$

En principe, on est capable de trouver la matrice correspondant à chacune de ces transformations.

$$\begin{tikzcd} \text{Faire truc} \arrow[r, shift left] & \text{Matrice} \arrow[l, shift left, "?"] \end{tikzcd}$$

La première idée pourrait être de caractériser les formes des transformations linéaires qu'on connaît.

En principe, on est capable de trouver la matrice correspondant à chacune de ces transformations.

$$\text{Faire truc} \quad \underset{?}{\rightleftarrows} \quad \text{Matrice}$$

La première idée pourrait être de caractériser les formes des transformations linéaires qu'on connaît.

Ensuite, on essaie de trouver si notre matrice a une de ces formes.

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si $\mathbf{A}$

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si $\mathbf{A} \longrightarrow$

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si $\mathbf{A} \longrightarrow$ rotation

Le hic avec ça, c’est que notre matrice peut représenter
la composition de plus d’une de ces transformations!

Par exemple, si $\mathbf{A} \longrightarrow$ rotation

$\mathbf{B}$

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si

$\mathbf{A} \longrightarrow$ rotation

$\mathbf{B} \longrightarrow$

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si

$\mathbf{A} \longrightarrow$ rotation

$\mathbf{B} \longrightarrow$ cisaillement

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si

$$\mathbf{A} \longrightarrow \text{rotation}$$

$$\mathbf{B} \longrightarrow \text{cisaillement}$$

$$\mathbf{C}$$

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si

$$\mathbf{A} \longrightarrow \text{rotation}$$

$$\mathbf{B} \longrightarrow \text{cisaillement}$$

$$\mathbf{C} \longrightarrow$$

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si

$\mathbf{A} \longrightarrow$ rotation

$\mathbf{B} \longrightarrow$ cisaillement

$\mathbf{C} \longrightarrow$ homothétie

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si

$$\mathbf{A} \longrightarrow \text{rotation}$$

$$\mathbf{B} \longrightarrow \text{cisaillement}$$

$$\mathbf{C} \longrightarrow \text{homothétie}$$

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{D}$$

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si

$$\mathbf{A} \longrightarrow \text{rotation}$$

$$\mathbf{B} \longrightarrow \text{cisaillement}$$

$$\mathbf{C} \longrightarrow \text{homothétie}$$

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{D} \longrightarrow$$

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si

$$\mathbf{A} \longrightarrow \text{rotation}$$

$$\mathbf{B} \longrightarrow \text{cisaillement}$$

$$\mathbf{C} \longrightarrow \text{homothétie}$$

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{D} \longrightarrow \text{aucune des transformations connues}$$

Le hic avec ça, c'est que notre matrice peut représenter la composition de plus d'une de ces transformations!

Par exemple, si

$$\mathbf{A} \longrightarrow \text{rotation}$$

$$\mathbf{B} \longrightarrow \text{cisaillement}$$

$$\mathbf{C} \longrightarrow \text{homothétie}$$

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{D} \longrightarrow \text{aucune des transformations connues}$$

Donc, comment faire?

La première étape serait de décomposer notre matrice en un produit de matrice relativement simple.

La première étape serait de décomposer notre matrice en un produit de matrice relativement simple.

Mais...

La première étape serait de décomposer notre matrice en un produit de matrice relativement simple.

Mais…

On sait faire ça!

La première étape serait de décomposer notre matrice en un produit de matrice relativement simple.

Mais...

On sait faire ça!

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n$$

La première étape serait de décomposer notre matrice en un produit de matrice relativement simple.

Mais...

On sait faire ça!

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n$$

Les fameuses matrices élémentaires!

La première étape serait de décomposer notre matrice en un produit de matrice relativement simple.

Mais...

On sait faire ça!

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n$$

Les fameuses matrices élémentaires!

Ici, pour une matrice 2x2, peut-on avoir n'importe quel *n*?

La première étape serait de décomposer notre matrice en un produit de matrice relativement simple.

Mais...

On sait faire ça!

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n$$

Les fameuses matrices élémentaires!

Ici, pour une matrice 2x2, peut-on avoir n'importe quel n?

En fait oui...

La première étape serait de décomposer notre matrice en un produit de matrice relativement simple.

Mais...

On sait faire ça!

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_n$$

Les fameuses matrices élémentaires!

Ici, pour une matrice 2x2, peut-on avoir n'importe quel *n*?

En fait oui...

mais on peut s'arranger pour que *n* soit au pire 4.

Reste à voir ce que font les matrices élémentaires.

Reste à voir ce que font les matrices élémentaires.

Type $\quad L_i \leftrightarrow L_j$

Reste à voir ce que font les matrices élémentaires.

Type $L_i \leftrightarrow L_j$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Reste à voir ce que font les matrices élémentaires.

Type $L_i \leftrightarrow L_j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

Reste à voir ce que font les matrices élémentaires.

Type $L_i \leftrightarrow L_j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\frac{\pi}{4}) & \sin(2\frac{\pi}{4}) \\ \sin(2\frac{\pi}{4}) & -\cos(2\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Reste à voir ce que font les matrices élémentaires.

Type $\quad L_i \leftrightarrow L_j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\frac{\pi}{4}) & \sin(2\frac{\pi}{4}) \\ \sin(2\frac{\pi}{4}) & -\cos(2\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Une réflexion par rapport à la droite $x = y$

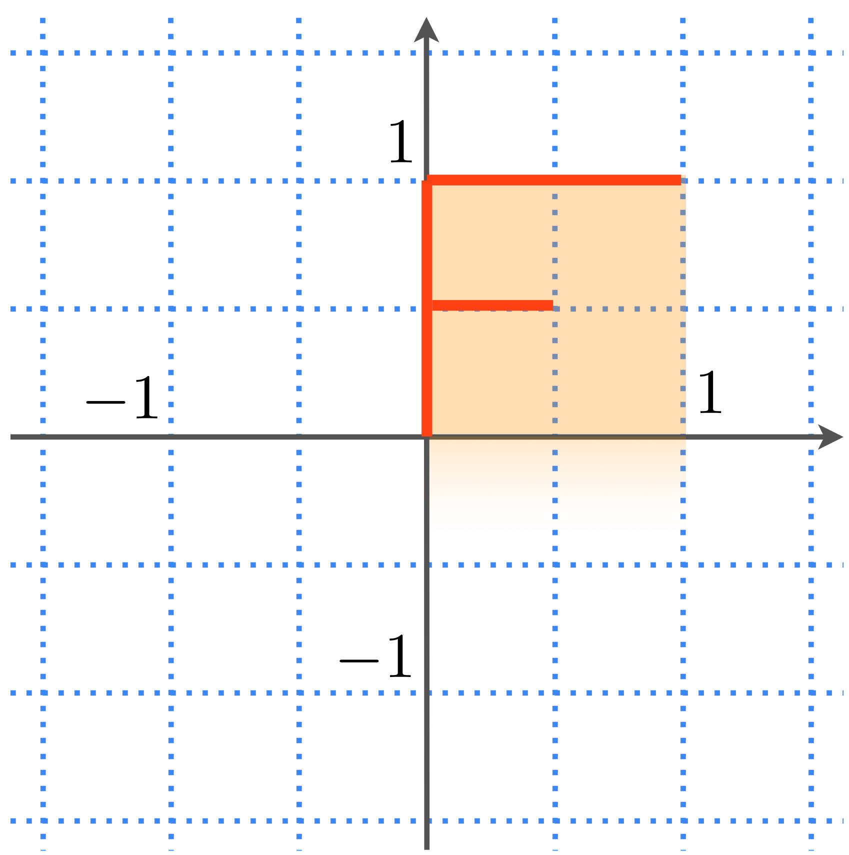
Reste à voir ce que font les matrices élémentaires.

Type $\quad L_i \leftrightarrow L_j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\frac{\pi}{4}) & \sin(2\frac{\pi}{4}) \\ \sin(2\frac{\pi}{4}) & -\cos(2\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Une réflexion par rapport à la droite $x = y$



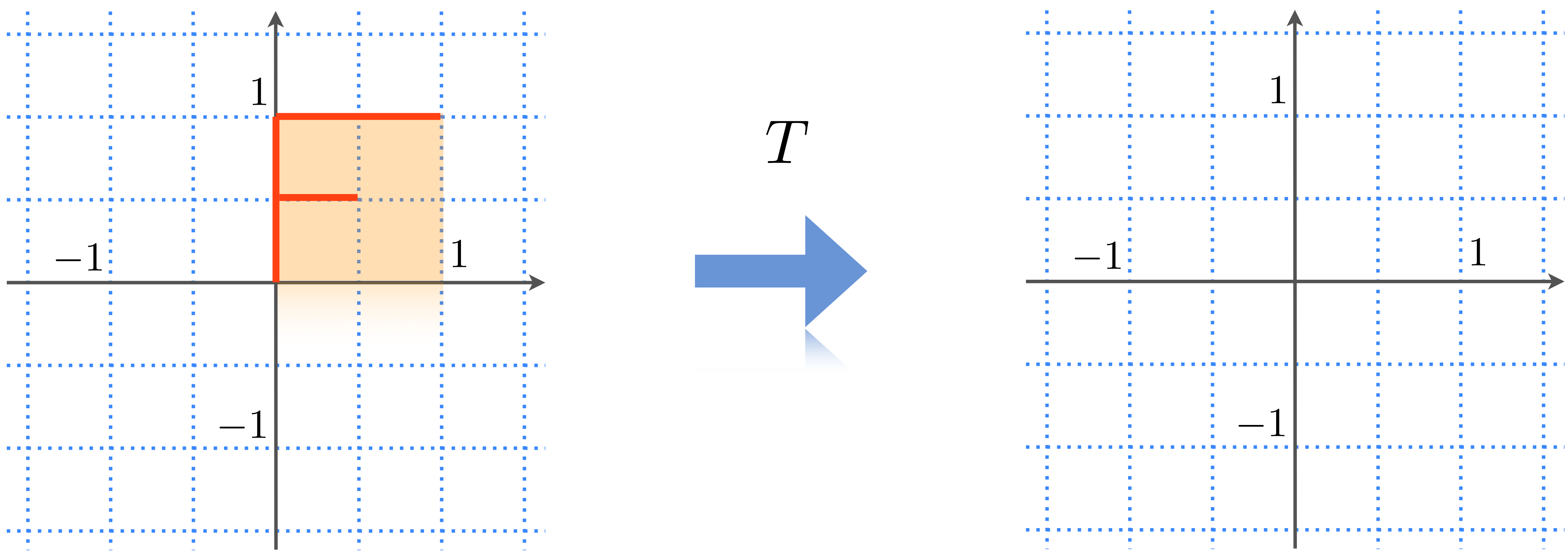
Reste à voir ce que font les matrices élémentaires.

Type $\quad L_i \leftrightarrow L_j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\frac{\pi}{4}) & \sin(2\frac{\pi}{4}) \\ \sin(2\frac{\pi}{4}) & -\cos(2\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Une réflexion par rapport à la droite $x = y$



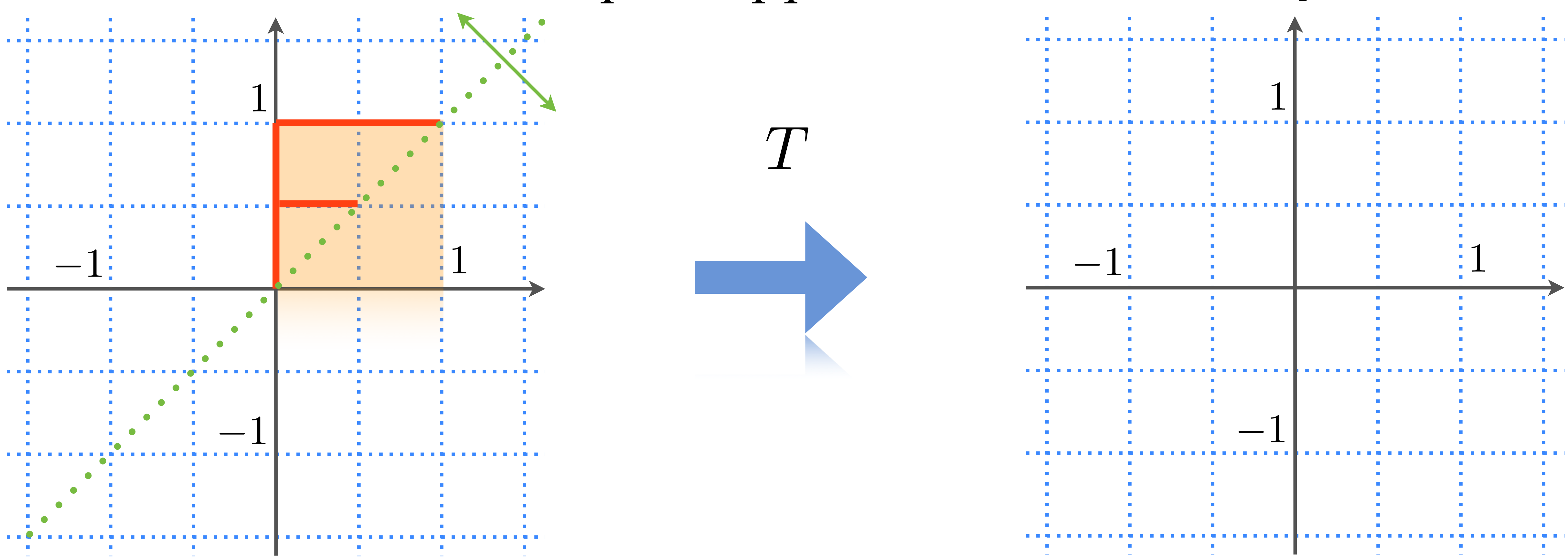
Reste à voir ce que font les matrices élémentaires.

Type $\quad L_i \leftrightarrow L_j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\frac{\pi}{4}) & \sin(2\frac{\pi}{4}) \\ \sin(2\frac{\pi}{4}) & -\cos(2\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Une réflexion par rapport à la droite $x = y$



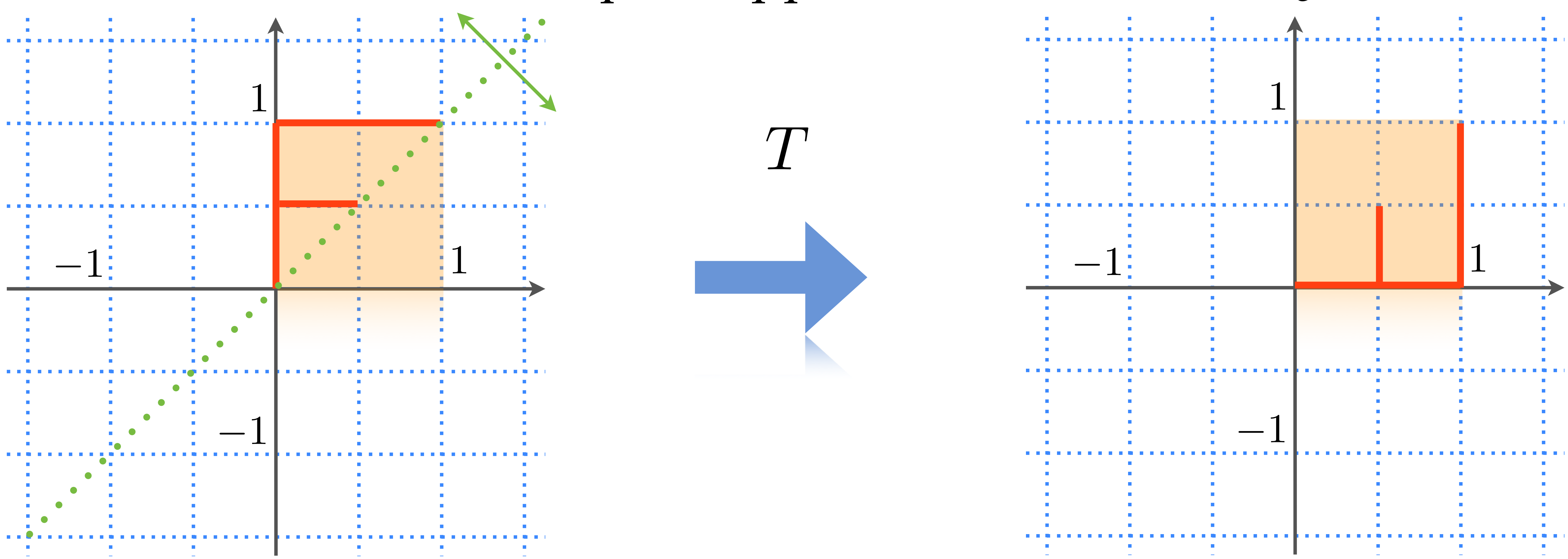
Reste à voir ce que font les matrices élémentaires.

Type $\quad L_i \leftrightarrow L_j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\frac{\pi}{4}) & \sin(2\frac{\pi}{4}) \\ \sin(2\frac{\pi}{4}) & -\cos(2\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Une réflexion par rapport à la droite $x = y$



Type $L_i \to kL_i$

Type $L_i \longrightarrow kL_i$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Type $L_i \longrightarrow kL_i$

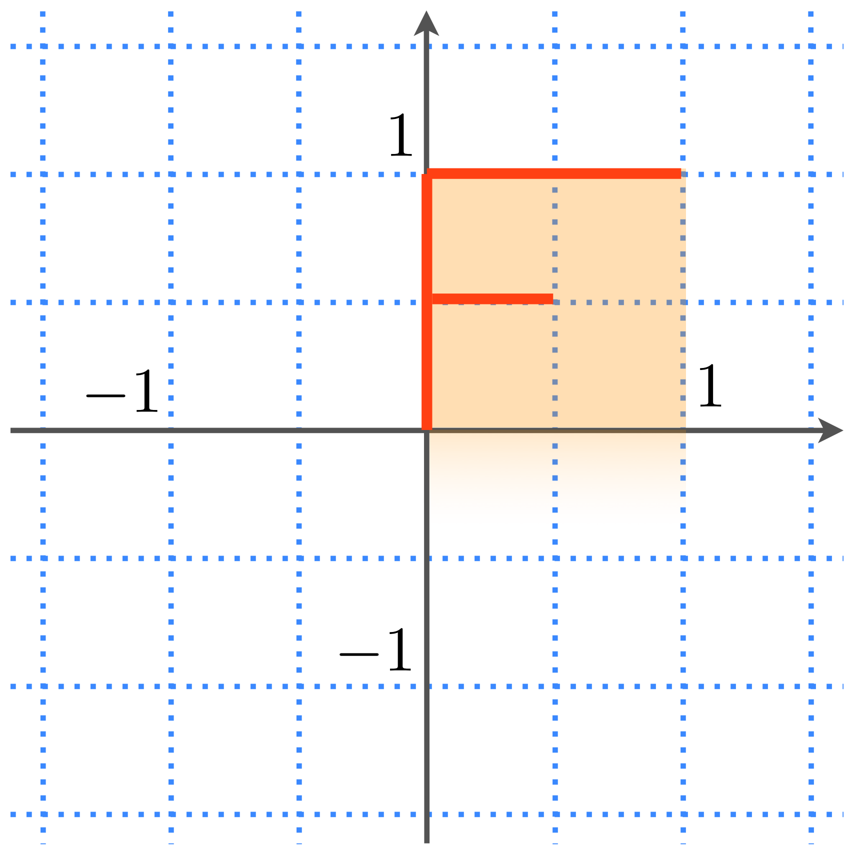
$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$

Type $L_i \longrightarrow kL_i$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

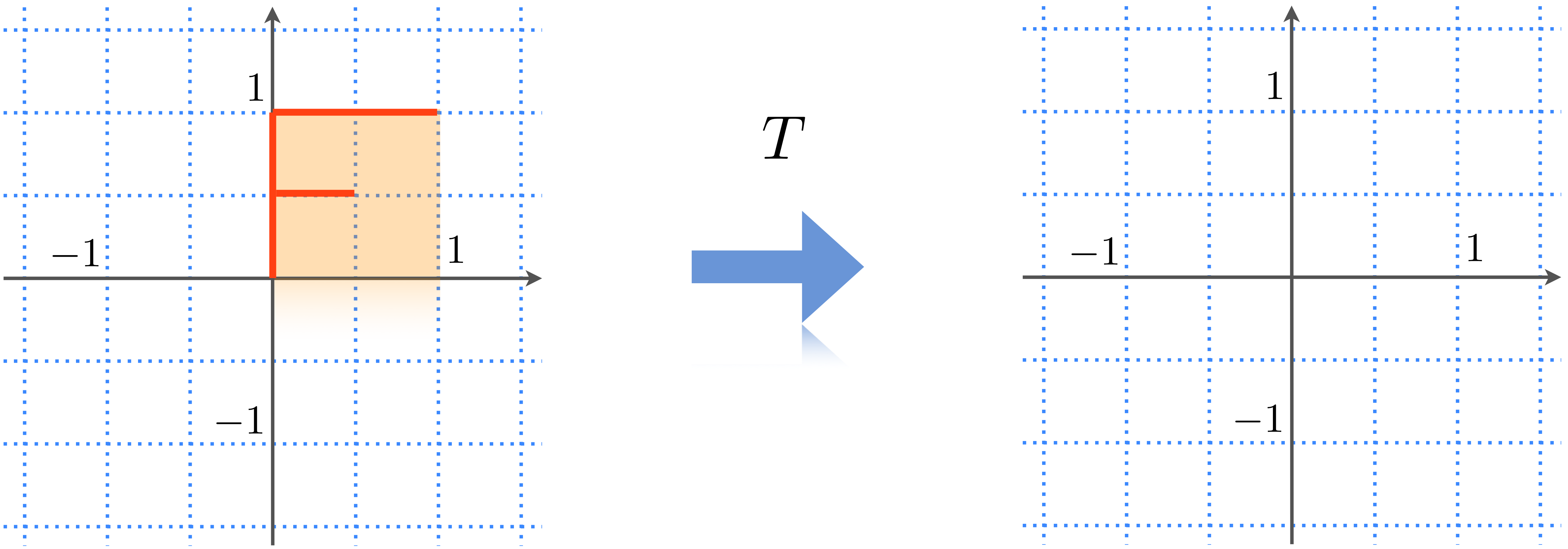
Étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$



Type $L_i \to kL_i$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

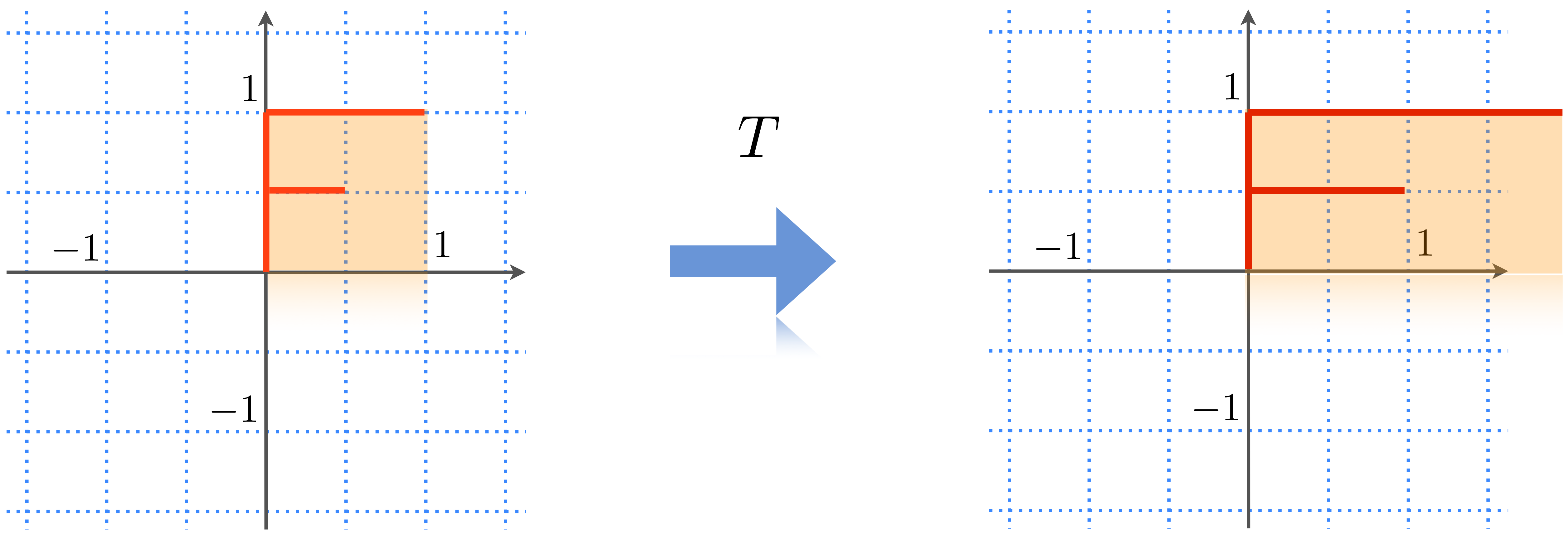
Étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$



Type $L_i \to kL_i$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{i}$

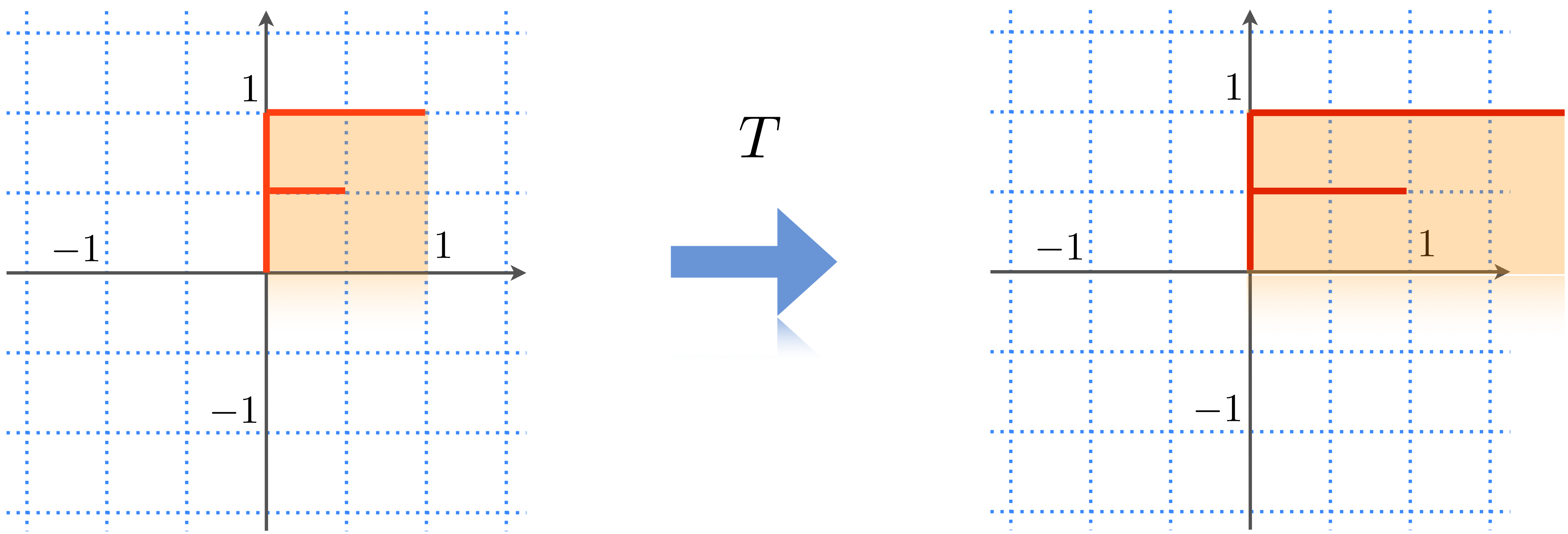


Type $L_i \to kL_i$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$

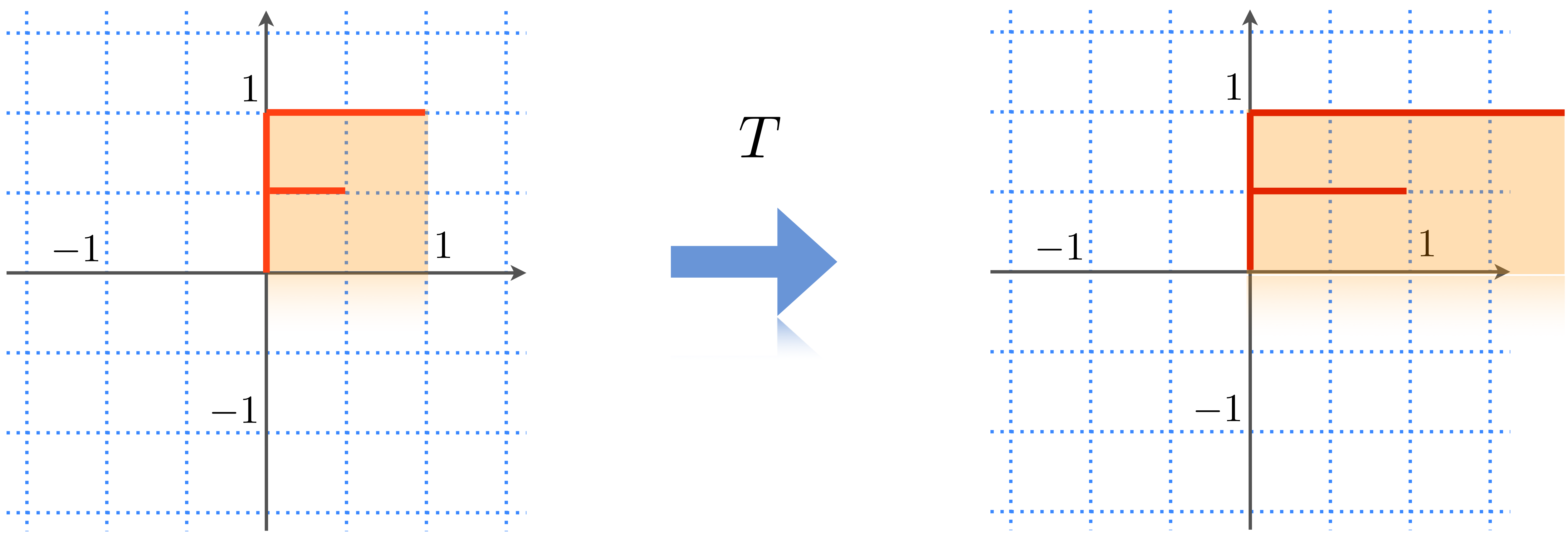
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$



Type $L_i \to kL_i$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$

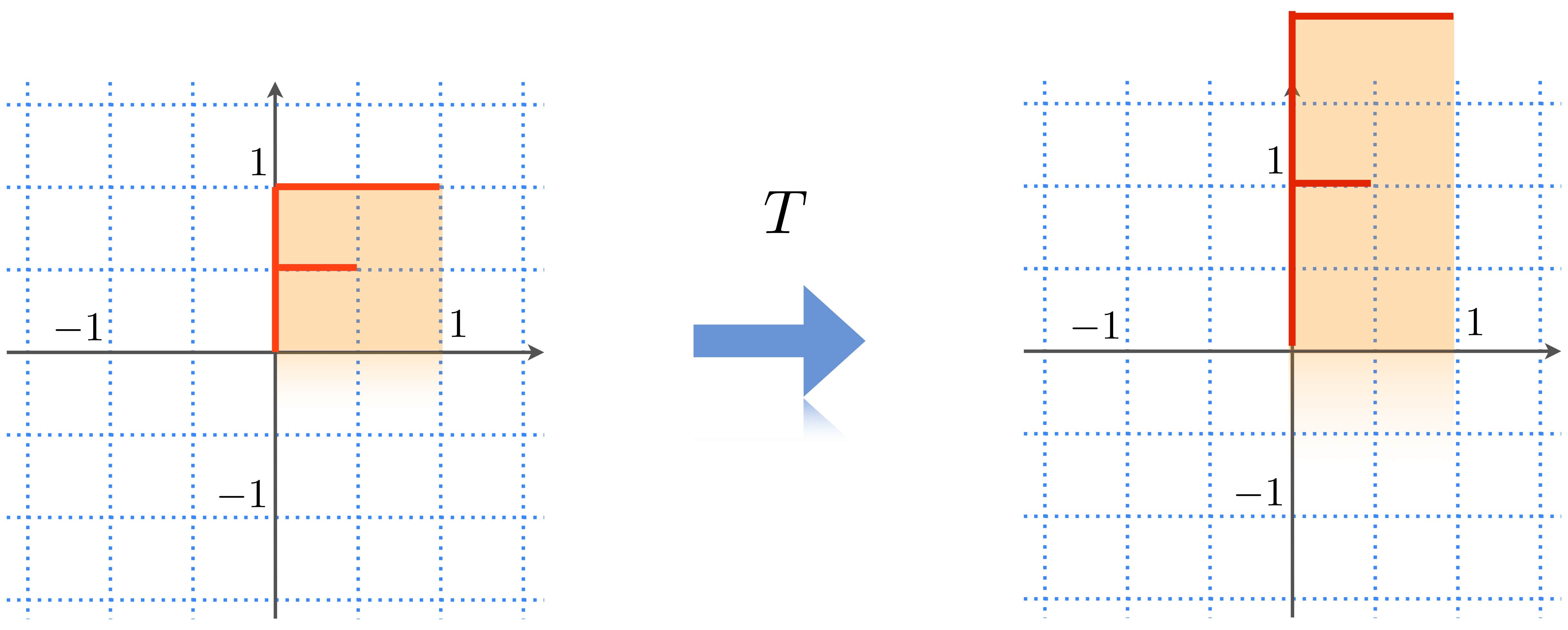
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$ Étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{\jmath}$



Type $L_i \to kL_i$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$ Étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{\jmath}$



Type $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$

Type $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

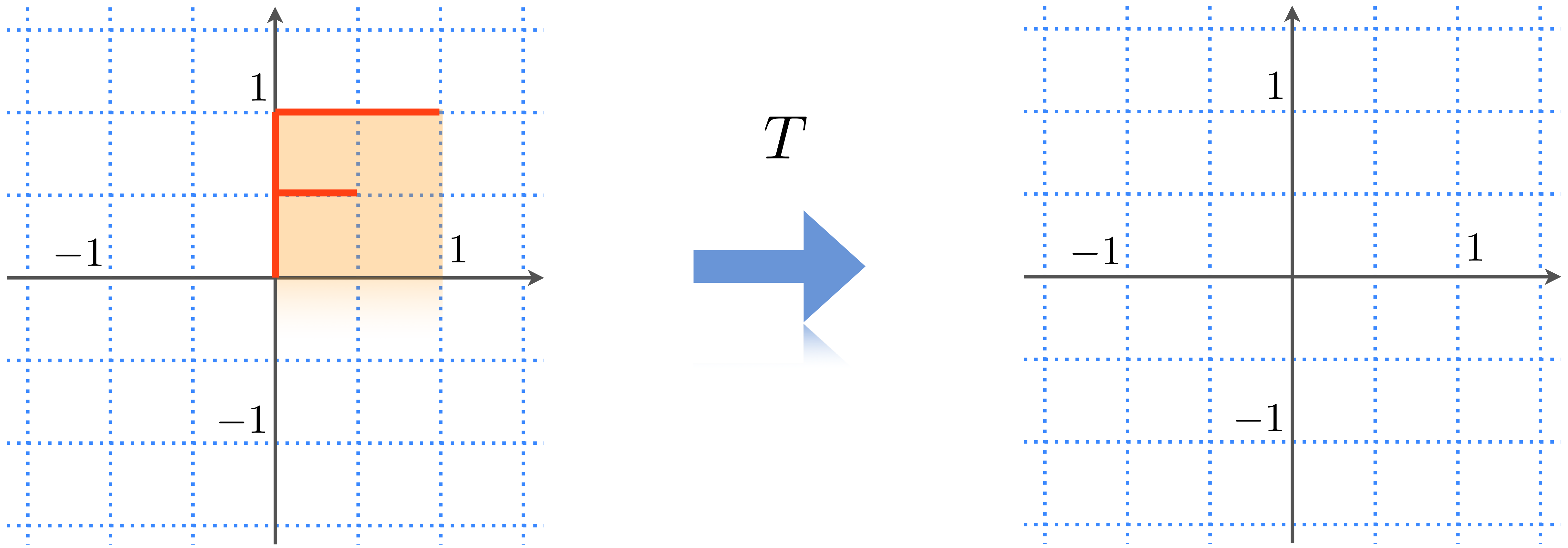
Type $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cisaillement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$

Type $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$

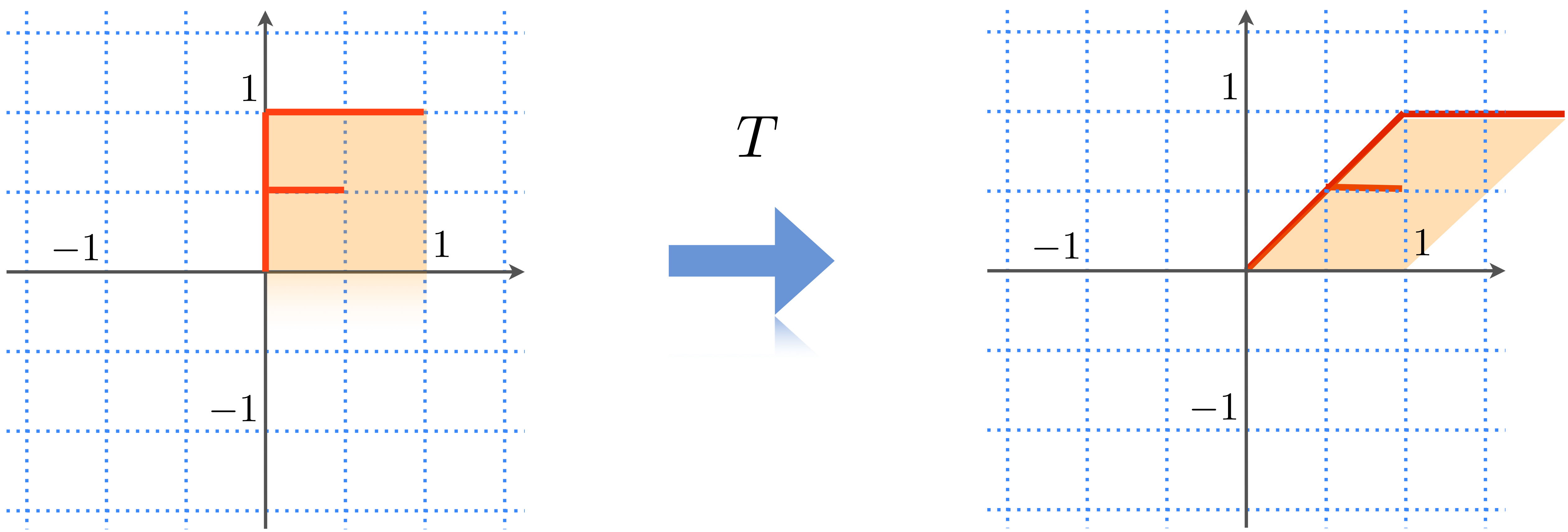
$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Cisaillement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$



Type $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cisaillement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$

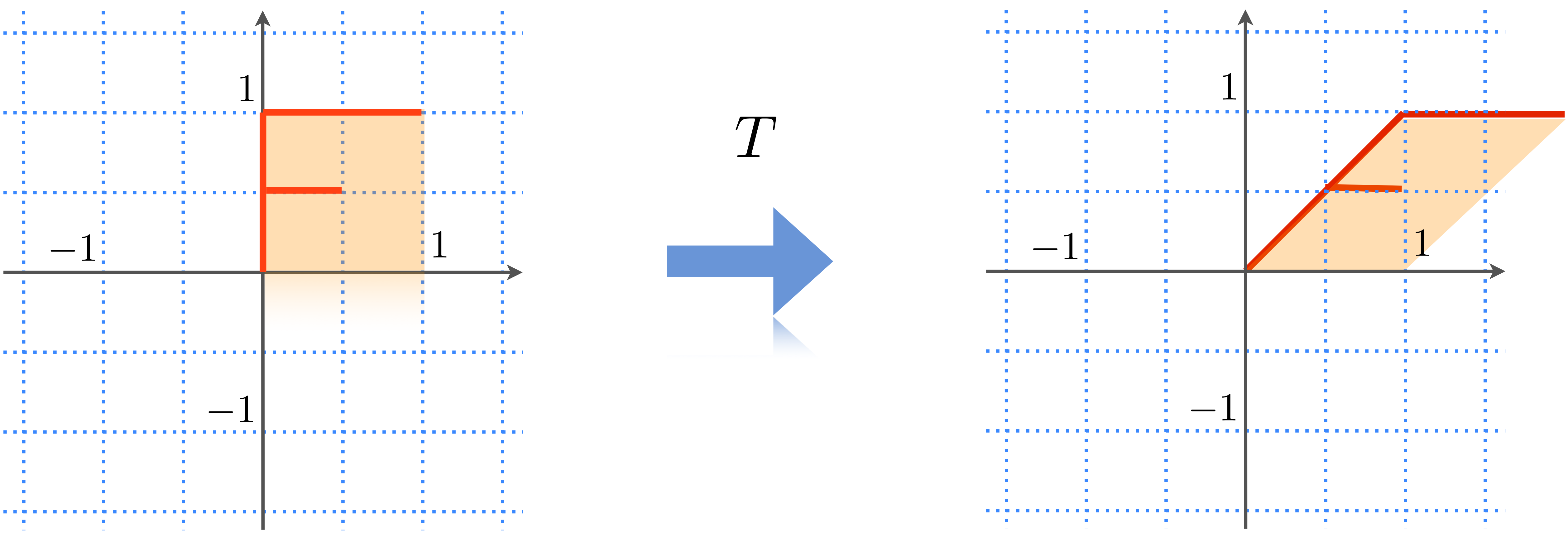


Type $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cisaillement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$

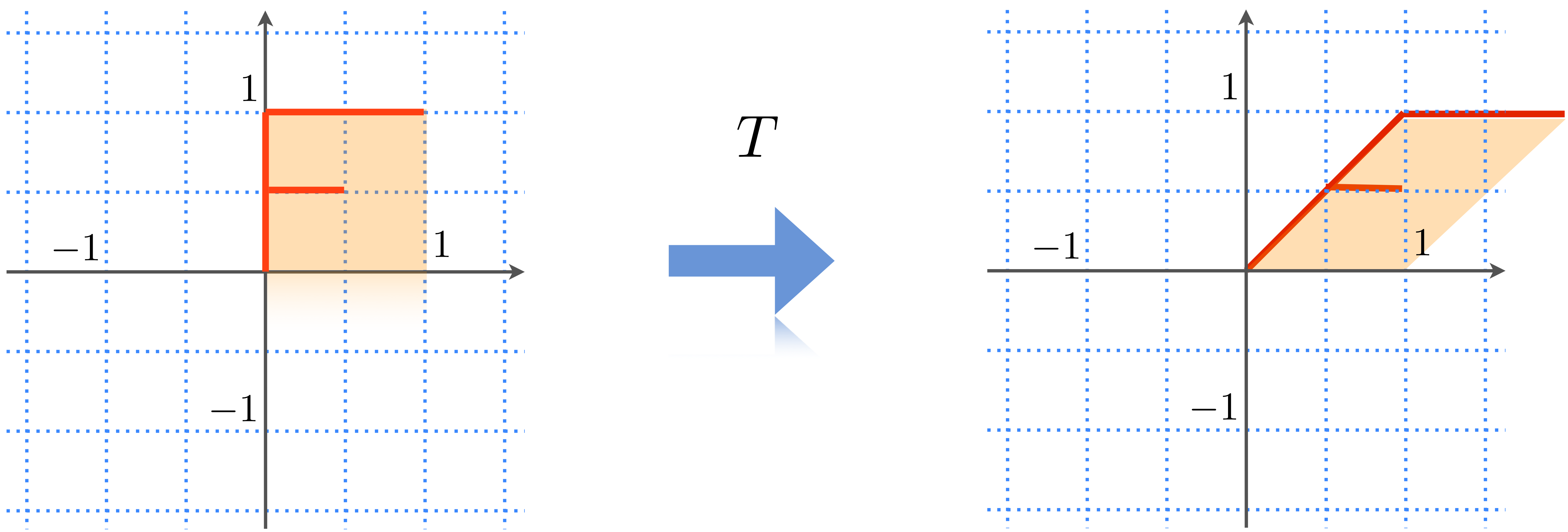
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$



Type $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$

$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Cisaillement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$

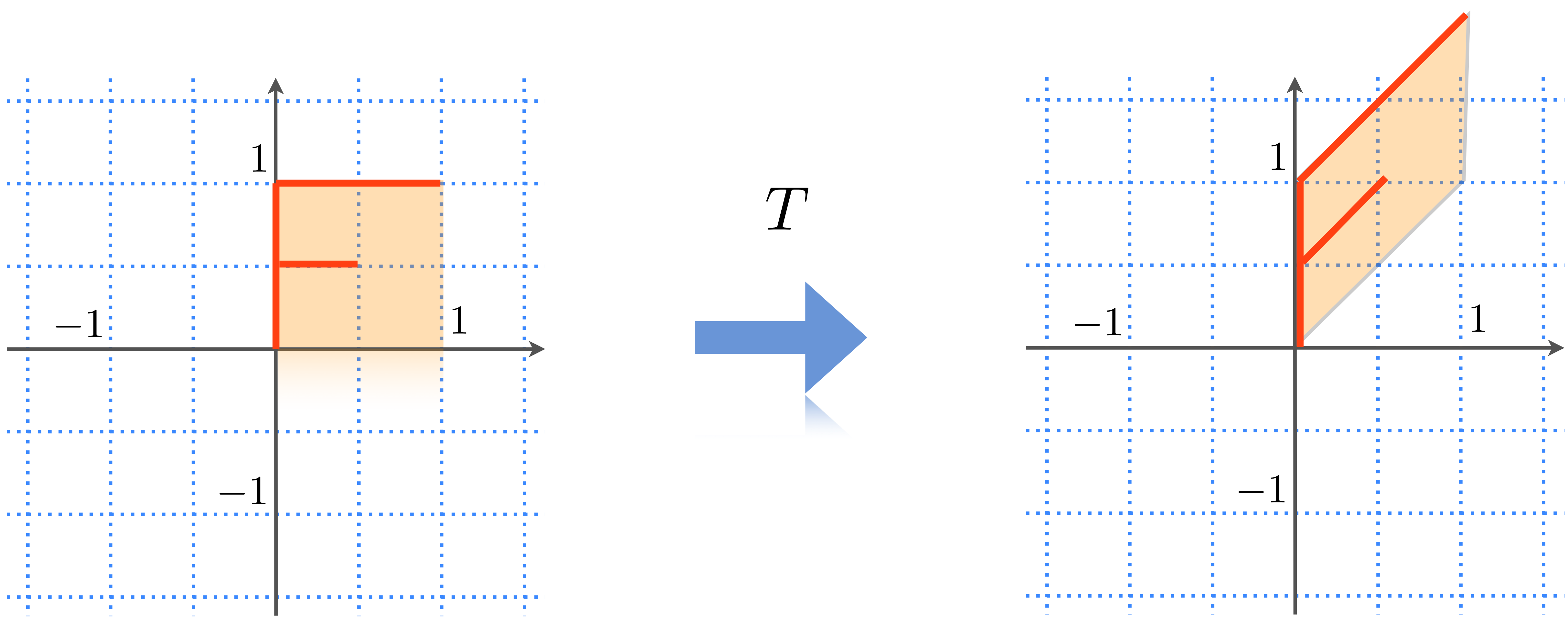
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ Cisaillement d'un facteur $-k$ dans la direction $\vec{\jmath}$



Type $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$

$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Cisaillement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ Cisaillement d'un facteur $-k$ dans la direction $\vec{\jmath}$



Donc en résumant, on peut voir toute matrice comme une composition d’au plus quatre transformations linéaires qui sont

Donc en résumant, on peut voir toute matrice comme une composition d'au plus quatre transformations linéaires qui sont

soit une réflexion par rapport à la droite $x = y$

Donc en résumant, on peut voir toute matrice comme une composition d'au plus quatre transformations linéaires qui sont

soit une réflexion par rapport à la droite $x = y$

soit un étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$ ou $\vec{\jmath}$

Donc en résumant, on peut voir toute matrice comme une composition d'au plus quatre transformations linéaires qui sont

soit une réflexion par rapport à la droite $x = y$

soit un étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$ ou $\vec{\jmath}$

soit un cisaillement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$ ou $\vec{\jmath}$

Donc en résumant, on peut voir toute matrice comme une composition d'au plus quatre transformations linéaires qui sont

soit une réflexion par rapport à la droite $x = y$

soit un étirement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$ ou $\vec{\jmath}$

soit un cisaillement d'un facteur k dans la direction $\vec{\imath}$ ou $\vec{\jmath}$

Hum... presque!

Lorsque j'ai écrit

Lorsque j'ai écrit $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4$

Lorsque j'ai écrit $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4$

il aurait mieux valu d'écrire

Lorsque j'ai écrit $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4$

il aurait mieux valu d'écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4\mathbf{I}$

Lorsque j'ai écrit $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4$

il aurait mieux valu d'écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4\mathbf{I}$

Mais ça présuppose que $\mathbf{A}$ était inversible!

Lorsque j'ai écrit $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4$

il aurait mieux valu d'écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4\mathbf{I}$

Mais ça présuppose que $\mathbf{A}$ était inversible!

Sans cette supposition, $\mathbf{A}$ s'écrit plutôt comme

Lorsque j'ai écrit $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4$

il aurait mieux valu d'écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4\mathbf{I}$

Mais ça présuppose que $\mathbf{A}$ était inversible!

Sans cette supposition, $\mathbf{A}$ s'écrit plutôt comme

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4\mathbf{R}$$

Lorsque j'ai écrit $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4$

il aurait mieux valu d'écrire $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4\mathbf{I}$

Mais ça présuppose que $\mathbf{A}$ était inversible!

Sans cette supposition, $\mathbf{A}$ s'écrit plutôt comme

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4\mathbf{R}$$

avec $\mathbf{R}$ une matrice ERL.

R est

$\mathbf{R}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{R}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit la transformation qui envoie tout sur } \vec{0}$$

$\mathbf{R}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ soit la transformation qui envoie tout sur $\vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{R}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit la transformation qui envoie tout sur } \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{R}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ soit la transformation qui envoie tout sur $\vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit une projection orthogonale sur $\vec{\jmath}$

$\mathbf{R}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ soit la transformation qui envoie tout sur $\vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit une projection orthogonale sur $\vec{\jmath}$

suivie d'une réflexion par rapport à la droite $x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ soit une projection sur $\vec{\imath}$ le long de $\vec{v} = (-k, 1)$

$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit une projection sur $\vec{\imath}$ le long de $\vec{v} = (-k, 1)$

car

$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit une projection sur $\vec{\imath}$ le long de $\vec{v} = (-k, 1)$

car $$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ soit une projection sur $\vec{\imath}$ le long de $\vec{v} = (-k, 1)$

car $$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit une projection sur $\vec{\imath}$ le long de $\vec{v} = (-k, 1)$

car $$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ soit une projection sur $\vec{\imath}$ le long de $\vec{v} = (-k, 1)$

car $$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ soit une projection sur $\vec{\imath}$ le long de $\vec{v} = (-k, 1)$

car $$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, en décomposant une matrice en un produit de matrices élémentaires et une matrice ERL, on obtient une suite de transformations linéaires déjà connues.

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ soit une projection sur $\vec{\imath}$ le long de $\vec{v} = (-k, 1)$

car $$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, en décomposant une matrice en un produit de matrices élémentaires et une matrice ERL, on obtient une suite de transformations linéaires déjà connues.

On les utilise toutes sauf une!

$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit une projection sur $\vec{\imath}$ le long de $\vec{v} = (-k, 1)$

car $$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, en décomposant une matrice en un produit de matrices élémentaires et une matrice ERL, on obtient une suite de transformations linéaires déjà connues.

On les utilise toutes sauf une!

Les rotations!?!

Faites les exercices suivants

p.278, # 6 à 8.

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2}$$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ $$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2}$$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où $\quad \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$

Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où $\quad \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_1^{-1}$$

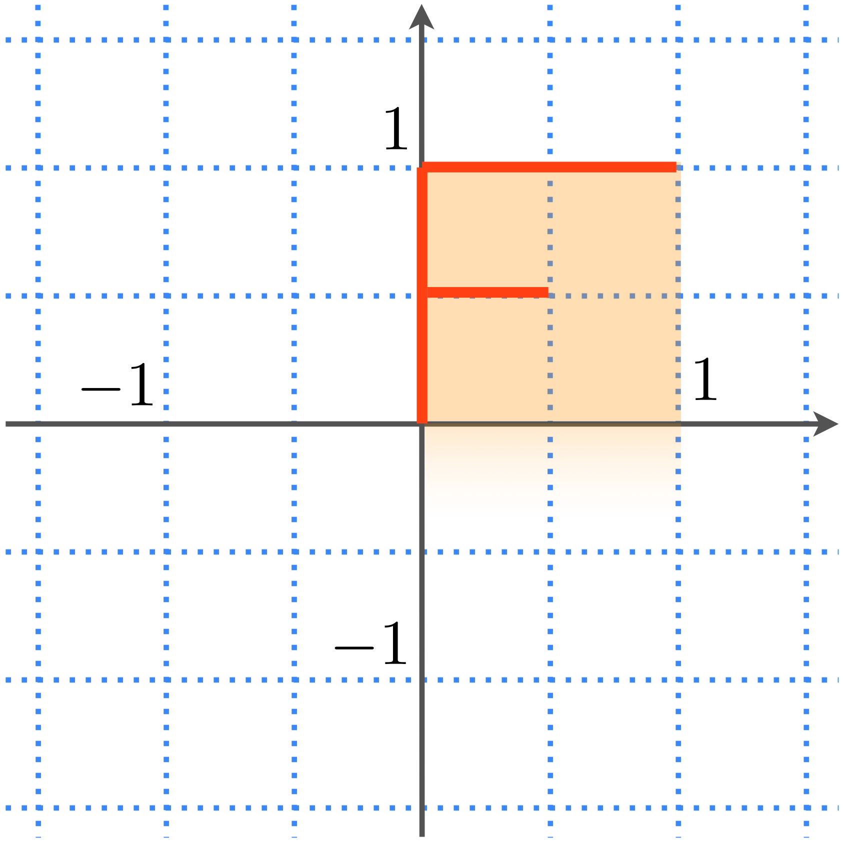
Regardons la rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

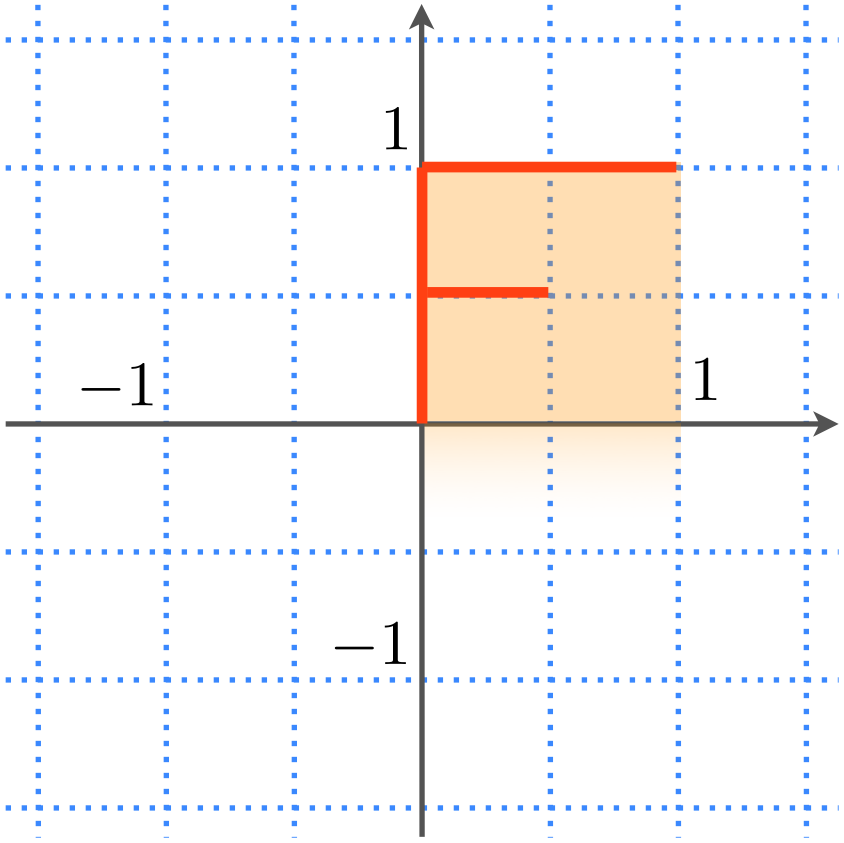
$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où $\quad \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

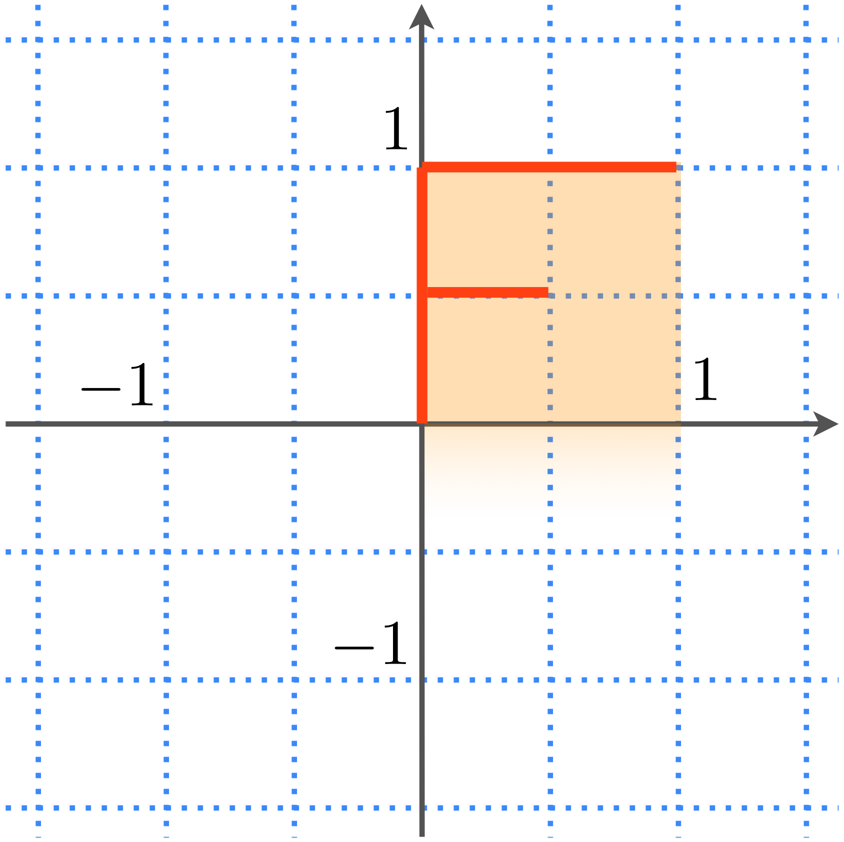


$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



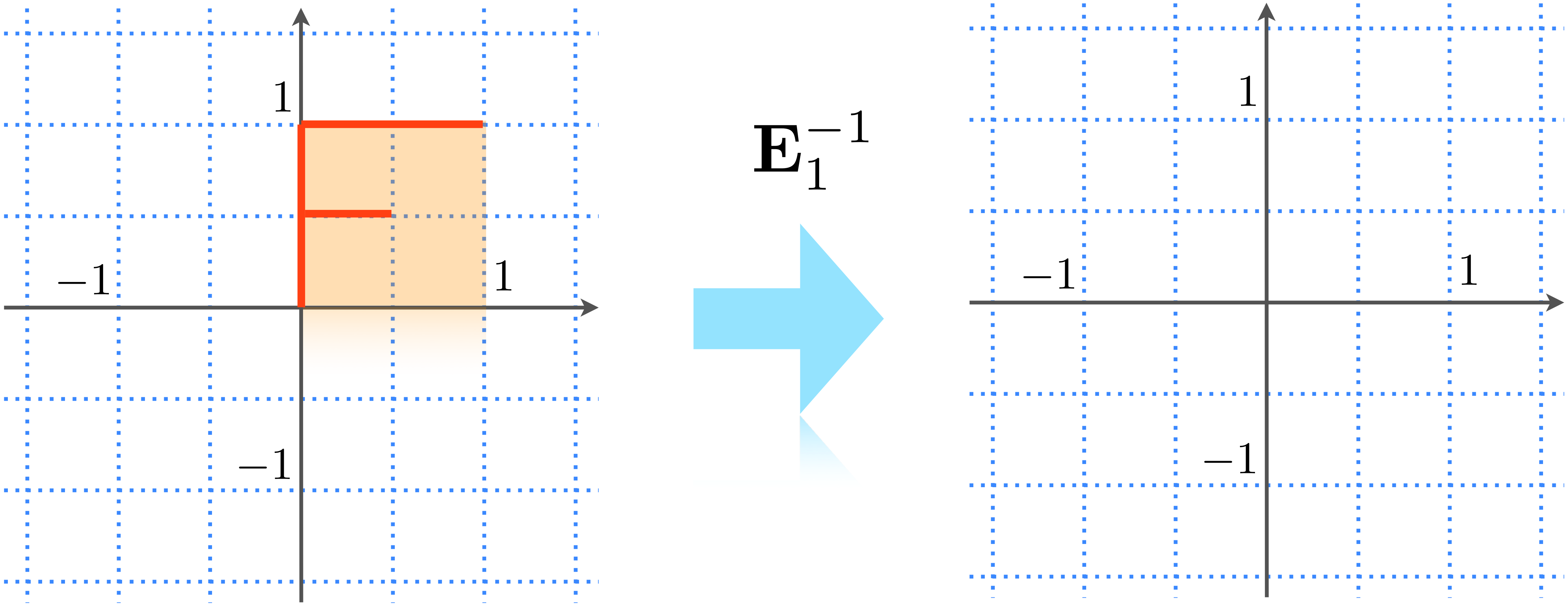
$\mathbf{E}_1^{-1}$

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

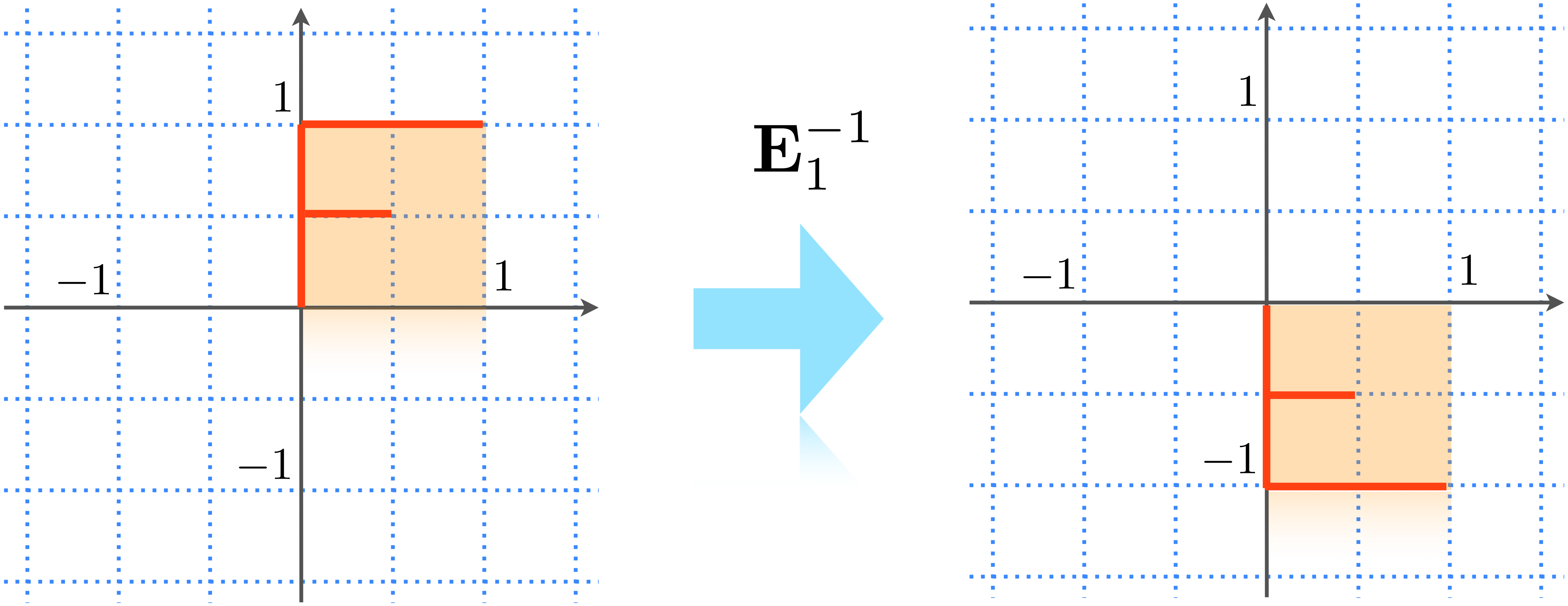


$\mathbf{E}_1^{-1}$

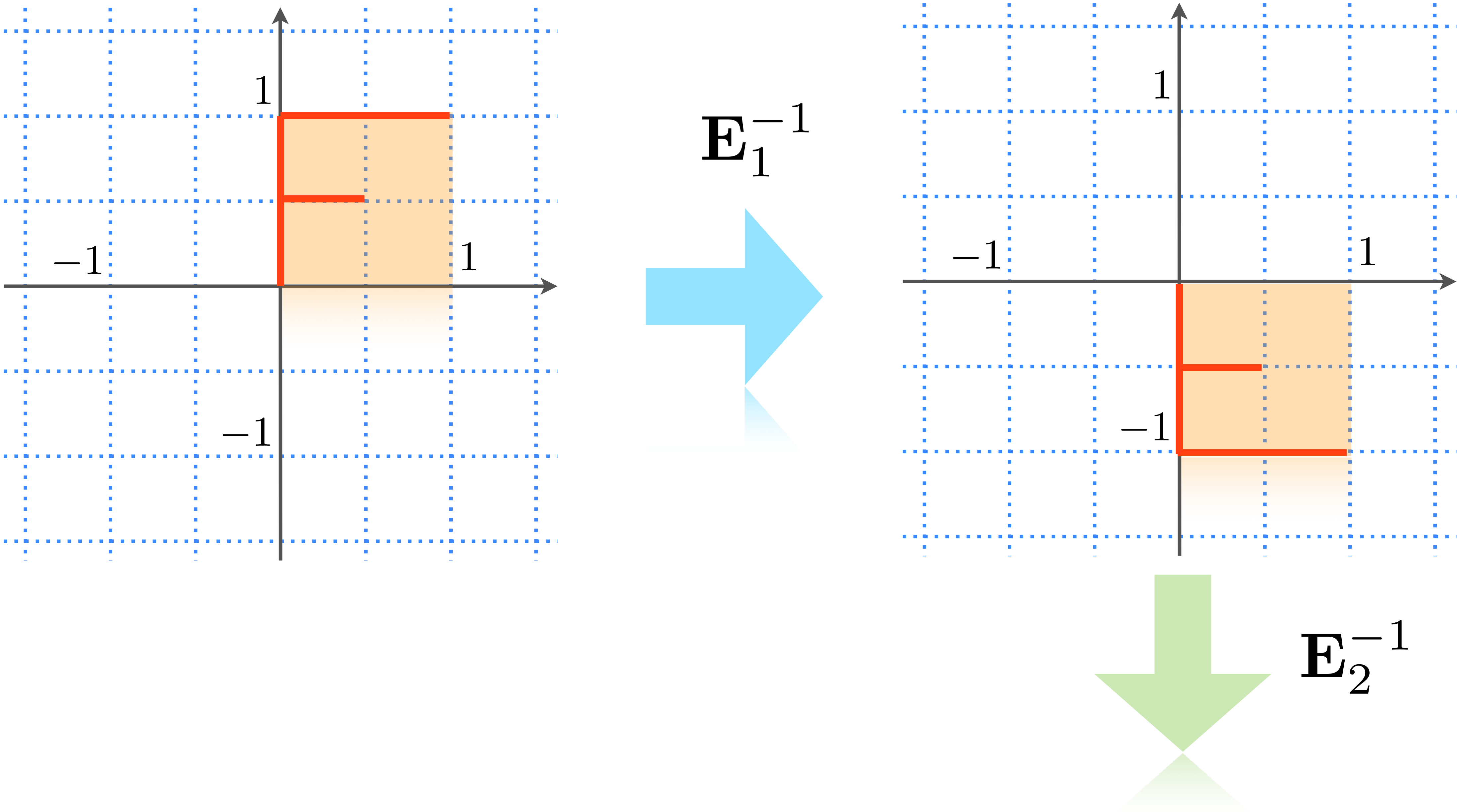
$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



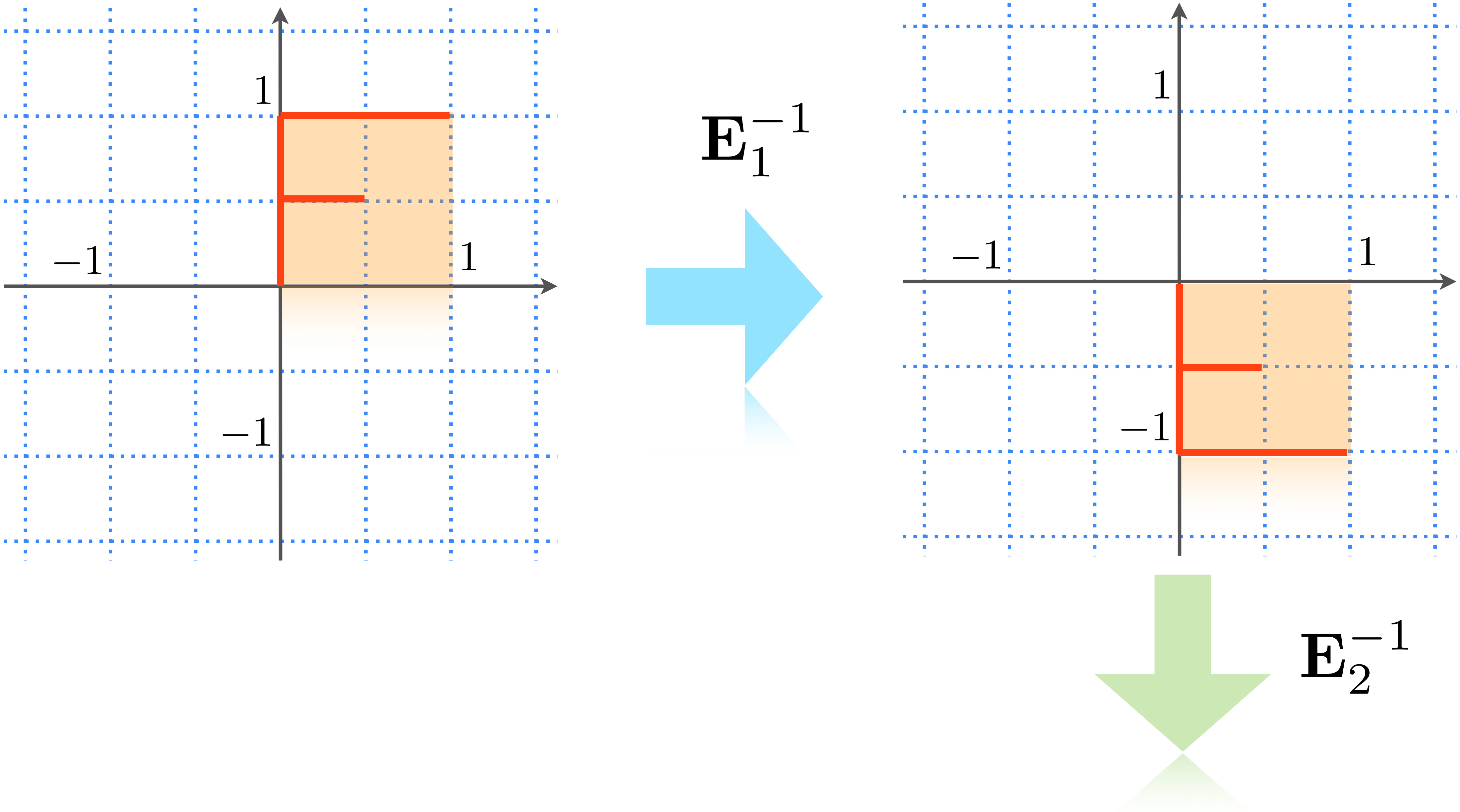
$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



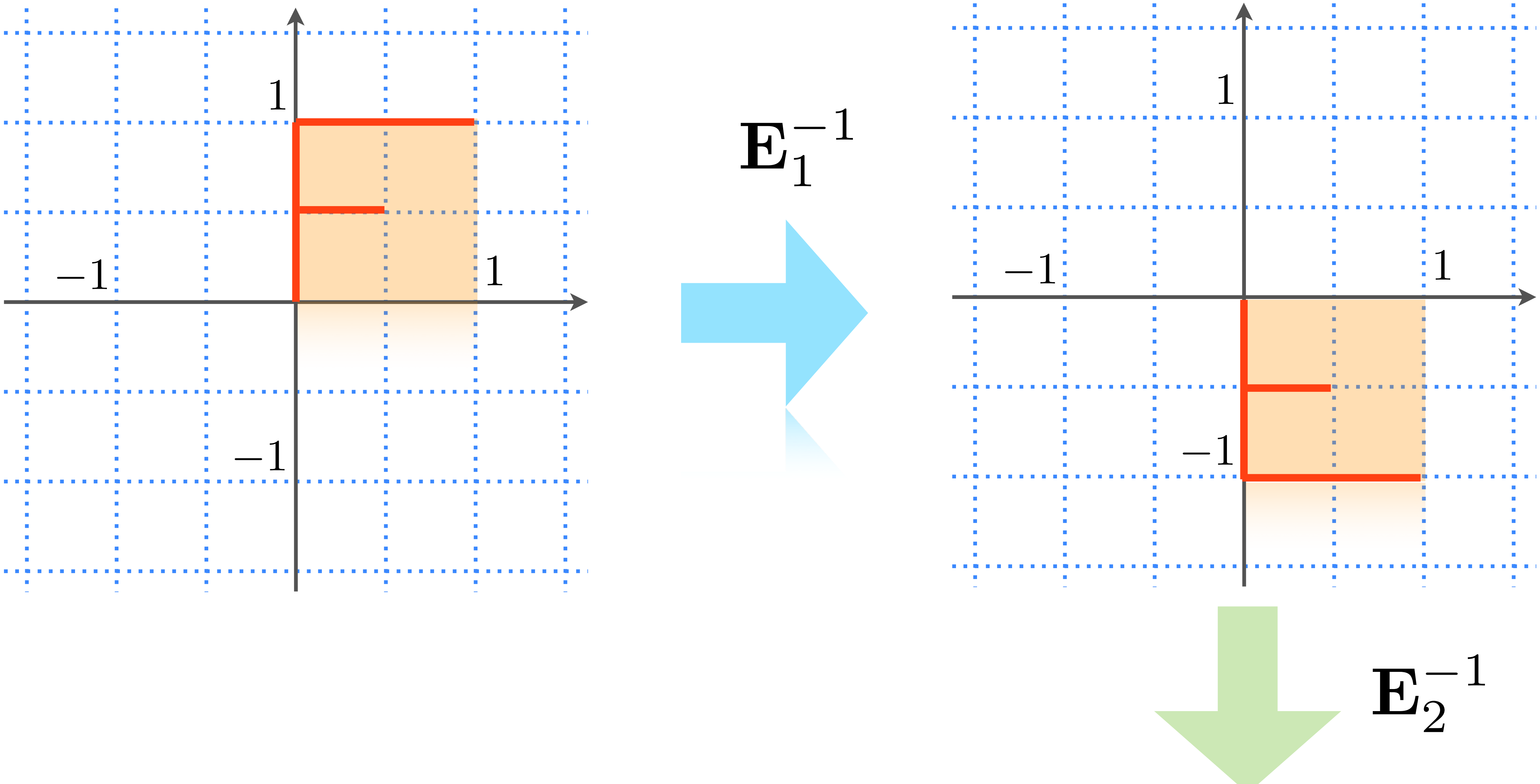
$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

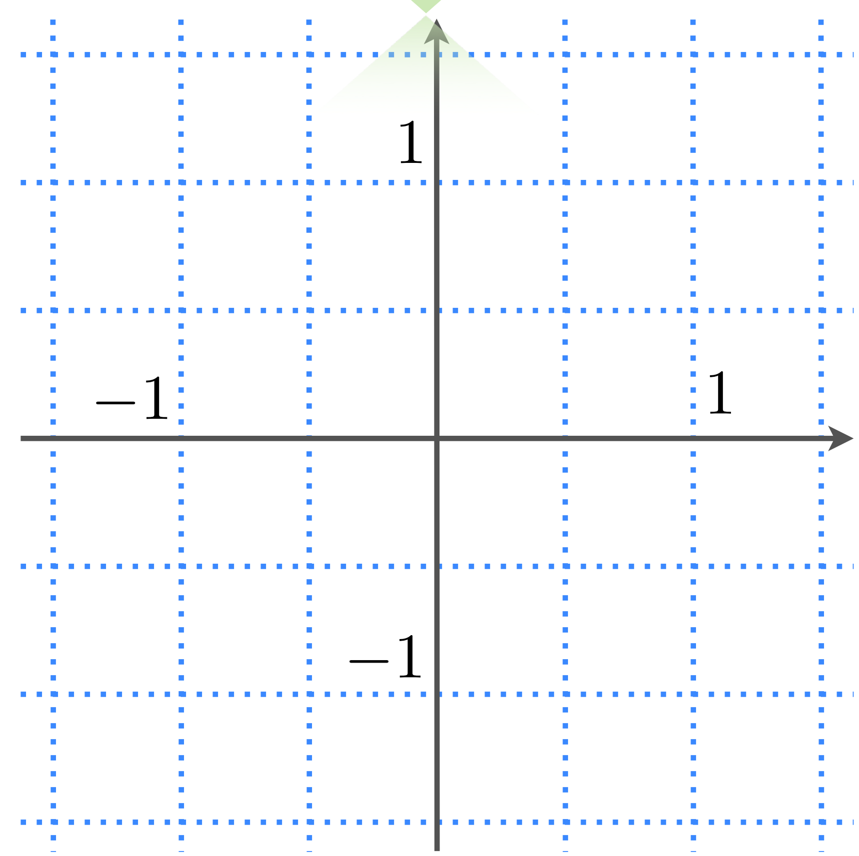


$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

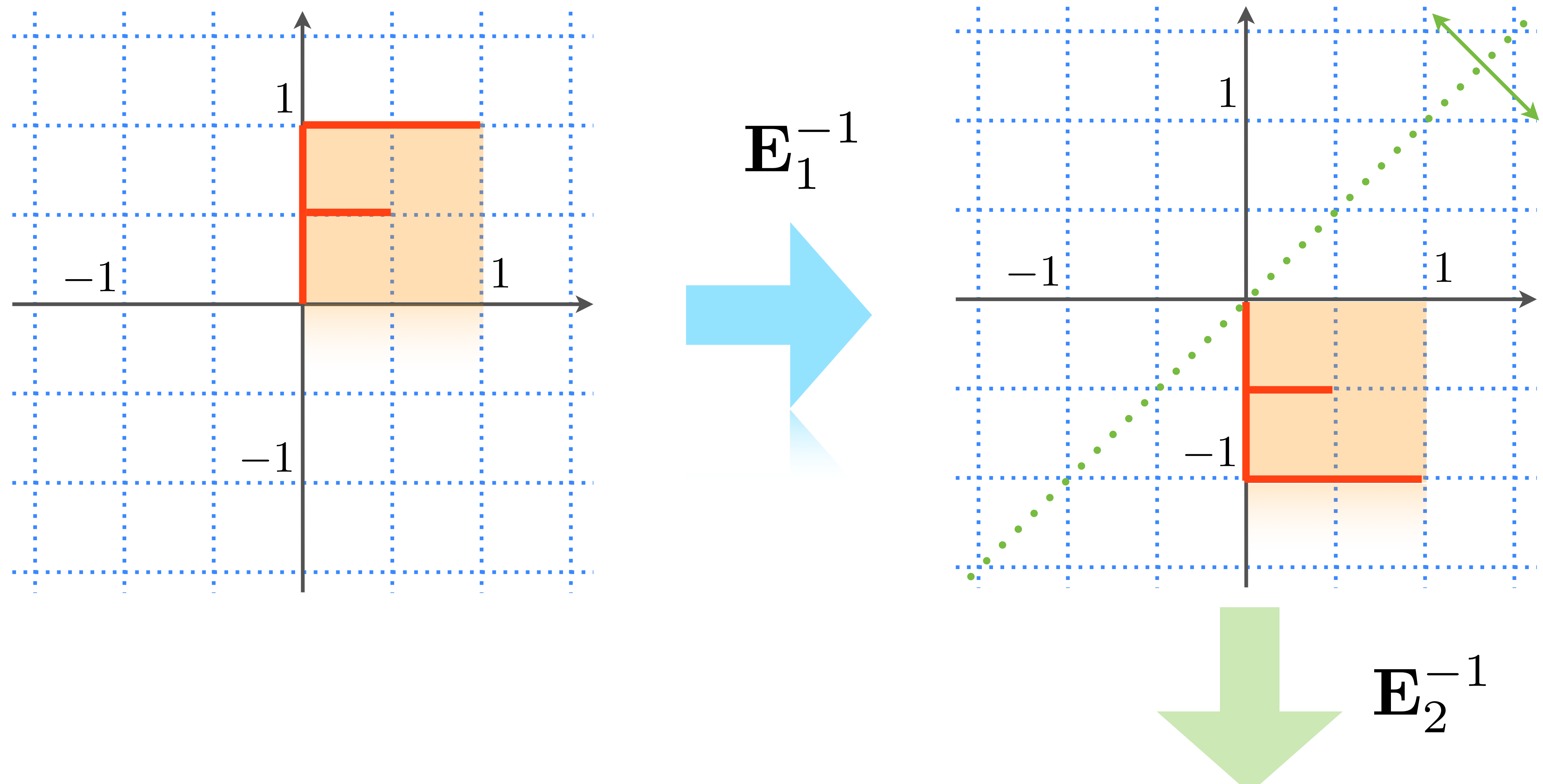


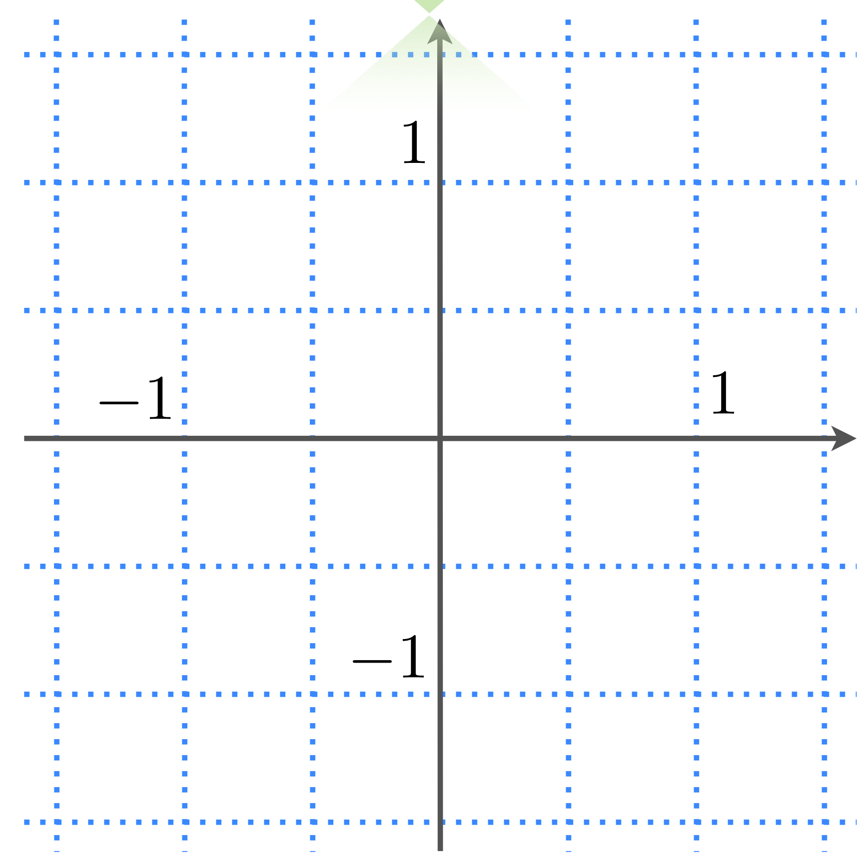
$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



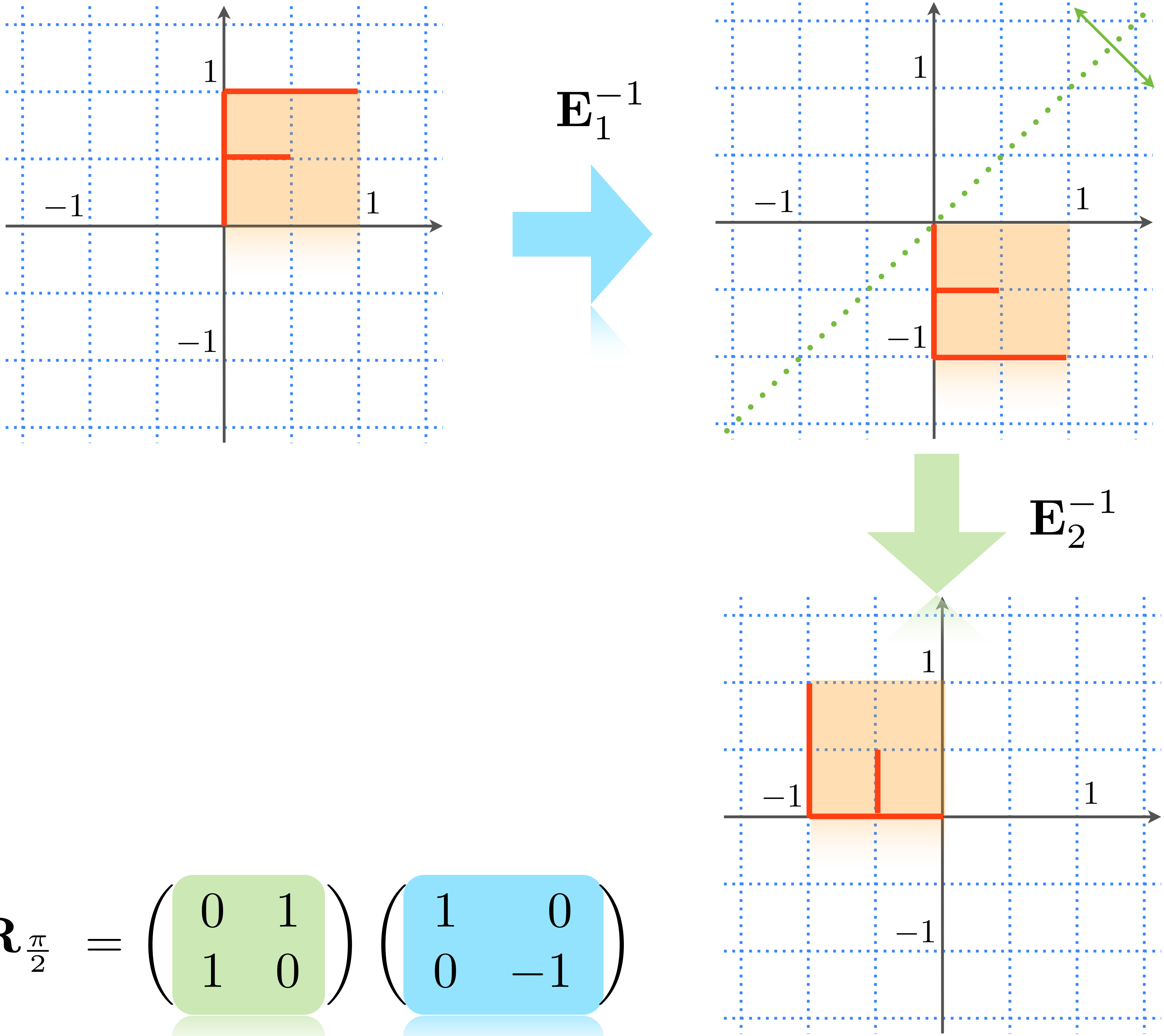


$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

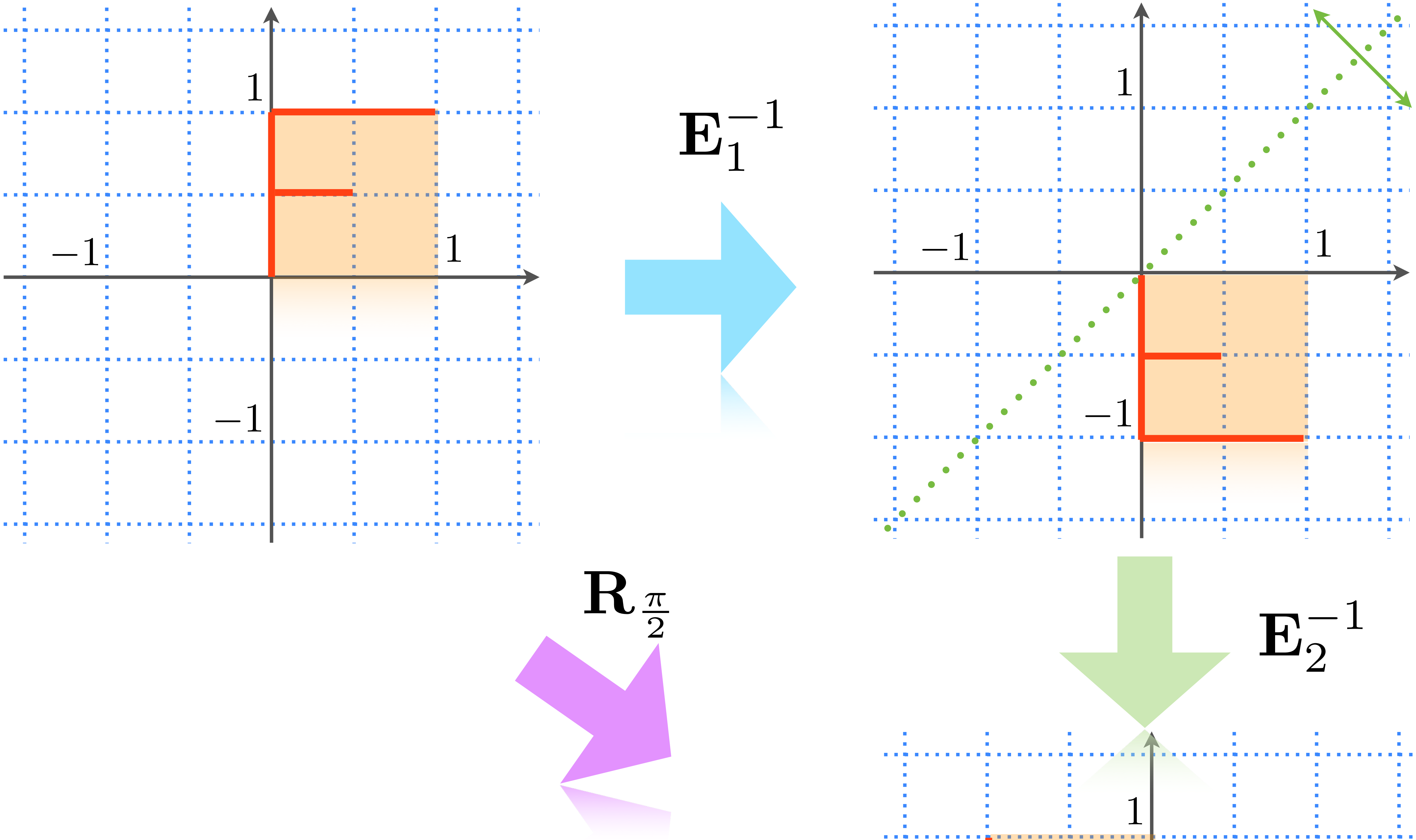


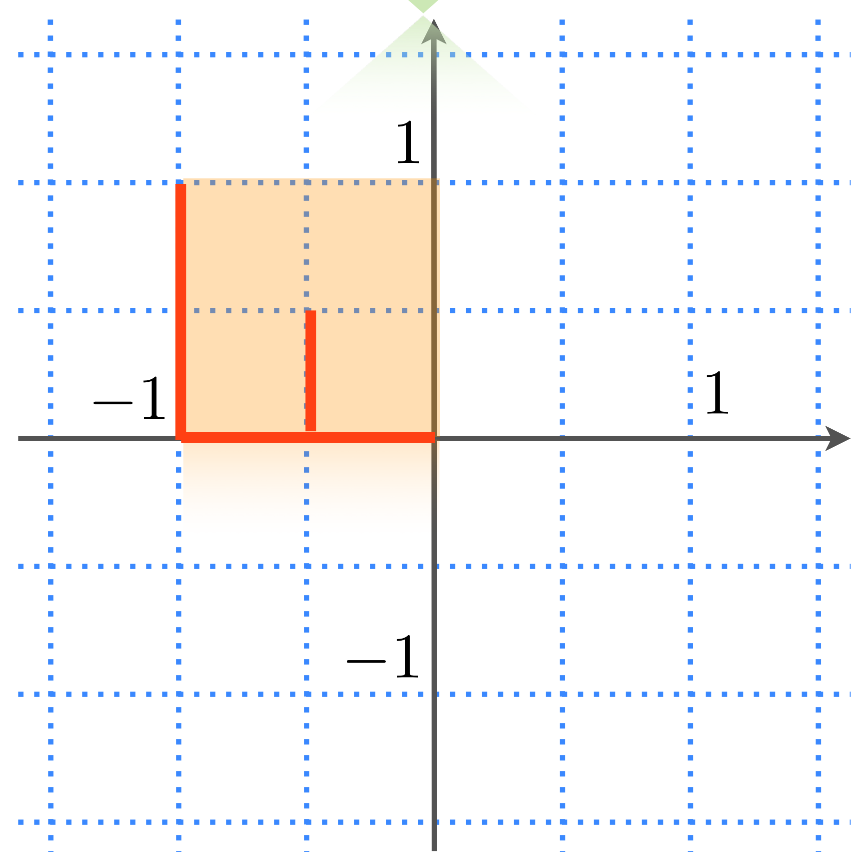


$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

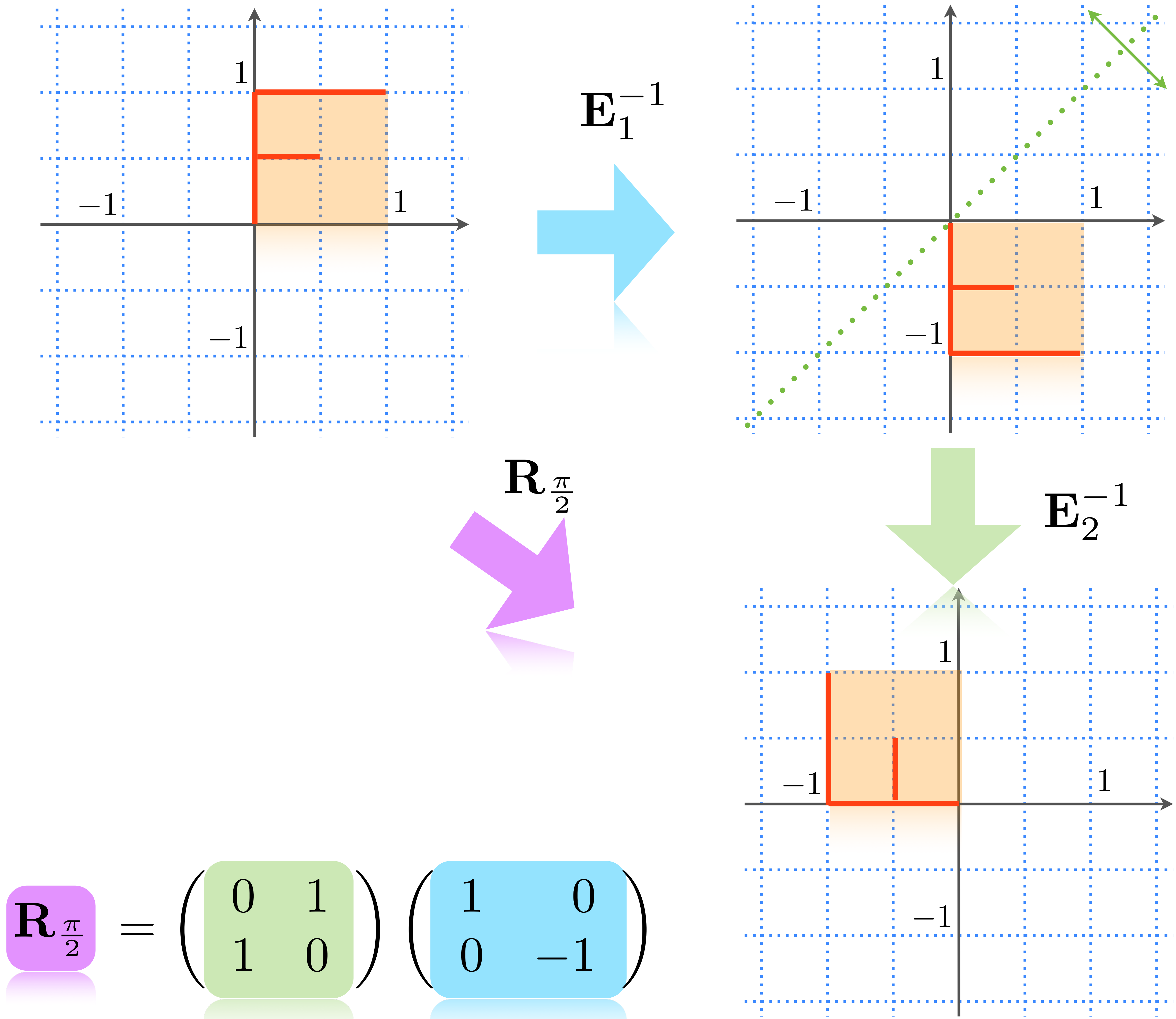


$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$





$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Étant donné une matrice $\mathbf{M}$, on peut la décomposer en matrice élémentaire et une matrice ERL pour comprendre la transformation linéaire modélisée.

Étant donné une matrice $\mathbf{M}$, on peut la décomposer en matrice élémentaire et une matrice ERL pour comprendre la transformation linéaire modélisée.

Bien qu'on comprenne chaque étape de la composition, la transformation résultante, elle, reste encore méconnue.

Étant donné une matrice $\mathbf{M}$, on peut la décomposer en matrice élémentaire et une matrice ERL pour comprendre la transformation linéaire modélisée.

Bien qu'on comprenne chaque étape de la composition, la transformation résultante, elle, reste encore méconnue.

Une façon de mieux la comprendre est d'essayer de trouver les vecteurs qu'elle ne change pas.

Toute transformation linéaire fixe au moins un vecteur, soit le vecteur nul.

Toute transformation linéaire fixe au moins un vecteur, soit le vecteur nul.

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Toute transformation linéaire fixe au moins un vecteur,
soit le vecteur nul.

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Si une transformation linéaire fixe deux vecteurs non parallèles

Toute transformation linéaire fixe au moins un vecteur, soit le vecteur nul.

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Si une transformation linéaire fixe deux vecteurs non parallèles

$$T(u_1, u_2) = (u_1, u_2)$$

Toute transformation linéaire fixe au moins un vecteur, soit le vecteur nul.

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Si une transformation linéaire fixe deux vecteurs non parallèles

$$T(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \qquad T(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$$

Toute transformation linéaire fixe au moins un vecteur,
soit le vecteur nul.

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Si une transformation linéaire fixe deux vecteurs non parallèles

$$T(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \qquad T(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Toute transformation linéaire fixe au moins un vecteur,
soit le vecteur nul.

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Si une transformation linéaire fixe deux vecteurs non parallèles

$$T(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \qquad T(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Toute transformation linéaire fixe au moins un vecteur,
soit le vecteur nul.

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Si une transformation linéaire fixe deux vecteurs non parallèles

$$T(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \qquad T(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Toute transformation linéaire fixe au moins un vecteur, soit le vecteur nul.

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Si une transformation linéaire fixe deux vecteurs non parallèles

$$T(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \qquad T(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Toute transformation linéaire fixe au moins un vecteur,
soit le vecteur nul.

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Si une transformation linéaire fixe deux vecteurs non parallèles

$$T(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \qquad T(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toute transformation linéaire fixe au moins un vecteur,
soit le vecteur nul.

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Si une transformation linéaire fixe deux vecteurs non parallèles

$$T(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \qquad T(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elle fixe donc tout le plan.

Si une transformation linéaire fixe un vecteur

Si une transformation linéaire fixe un vecteur

$$T(\vec{u}) = \vec{u}$$

Si une transformation linéaire fixe un vecteur

$$T(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u})$$

Si une transformation linéaire fixe un vecteur

$$T(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u})$$

Si une transformation linéaire fixe un vecteur

$$T(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}) = k\vec{u}$$

Si une transformation linéaire fixe un vecteur

$$\boxed{T(\vec{u})} = \boxed{\vec{u}}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}) = k\vec{u}$$

Si une transformation linéaire fixe un vecteur

$$T(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}) = k\vec{u}$$

Si une transformation linéaire fixe un vecteur

$$T(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}) = k\vec{u}$$

Si une transformation linéaire fixe un vecteur

$$T(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}) = k\vec{u}$$

alors, elle fixe tous ses multiples.

Si une transformation linéaire fixe un vecteur

$$T(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}) = k\vec{u}$$

alors, elle fixe tous ses multiples.

Si une transformation linéaire fixe un vecteur

$$T(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}) = k\vec{u}$$

alors, elle fixe tous ses multiples.

Donc, une transformation linéaire fixe soit un point, soit une droite, soit un plan.

Regardons ce qui se passe si la transformation ne fixe pas nécessairement un vecteur, mais qu'elle fixe sa direction.

Regardons ce qui se passe si la transformation ne fixe pas nécessairement un vecteur, mais qu'elle fixe sa direction.

$$T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$$

Regardons ce qui se passe si la transformation ne fixe pas nécessairement un vecteur, mais qu'elle fixe sa direction.

$$T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u})$$

Regardons ce qui se passe si la transformation ne fixe pas nécessairement un vecteur, mais qu'elle fixe sa direction.

$$T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}) = k\lambda\vec{u}$$

Regardons ce qui se passe si la transformation ne fixe pas nécessairement un vecteur, mais qu'elle fixe sa direction.

$$T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}) = k\lambda\vec{u} = \lambda(k\vec{u})$$

Regardons ce qui se passe si la transformation ne fixe pas nécessairement un vecteur, mais qu'elle fixe sa direction.

$$T(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}) = k\lambda\vec{u} = \lambda(k\vec{u})$$

Donc, la transformation linéaire agit comme multiplication par un scalaire sur la droite définie par ce vecteur.

Regardons ce qui se passe si la transformation ne fixe pas nécessairement un vecteur, mais qu'elle fixe sa direction.

$$T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$$

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}) = k\lambda\vec{u} = \lambda(k\vec{u})$$

Donc, la transformation linéaire agit comme multiplication par un scalaire sur la droite définie par ce vecteur.

Un tel vecteur est dit un **vecteur propre** pour la transformation de **valeur propre** λ.

Comment trouver les vecteurs propres d'une transformation linéaire?

Comment trouver les vecteurs propres d'une transformation linéaire?

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

Comment trouver les vecteurs propres d'une transformation linéaire?

$$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{Iu}$$

Comment trouver les vecteurs propres d'une transformation linéaire?

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Comment trouver les vecteurs propres d'une transformation linéaire?

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Comment trouver les vecteurs propres d'une transformation linéaire?

$$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{Iu}$$

$$\mathbf{Au} - \lambda\mathbf{Iu} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comment trouver les vecteurs propres d'une transformation linéaire?

$$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{Iu}$$

$$\mathbf{Au} - \lambda\mathbf{Iu} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc ce système d'équations linéaires homogènes à résoudre.

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc ce système d'équations linéaires homogènes à résoudre.

$$\left\{ \begin{array}{rr} (a-\lambda)x+ & by = 0 \\ cx+ & (d-\lambda)y = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc ce système d'équations linéaires homogènes à résoudre.

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + & by = 0 \\ cx + & (d-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Ce système a au moins une solution, soit $(x, y) = (0, 0)$.

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc ce système d'équations linéaires homogènes à résoudre.

$$\left\{ \begin{array}{rr} (a-\lambda)x+ & by = 0 \\ cx+ & (d-\lambda)y = 0 \end{array} \right.$$

Ce système a au moins une solution, soit $(x, y) = (0, 0)$.

Or, pour que ce système ait plus de solutions, il faut que la forme ERL de la matrice des coefficients ne soit pas l'identité.

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc ce système d'équations linéaires homogènes à résoudre.

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + & by = 0 \\ cx + & (d-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Ce système a au moins une solution, soit $(x, y) = (0, 0)$.

Or, pour que ce système ait plus de solutions, il faut que la forme ERL de la matrice des coefficients ne soit pas l'identité.

C'est-à-dire que son déterminant soit $= 0$.

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc ce système d'équations linéaires homogènes à résoudre.

$$\left\{ \begin{array}{rr} (a-\lambda)x+ & by = 0 \\ cx+ & (d-\lambda)y = 0 \end{array} \right.$$

Ce système a au moins une solution, soit $(x, y) = (0, 0)$.

Or, pour que ce système ait plus de solutions, il faut que la forme ERL de la matrice des coefficients ne soit pas l'identité.

C'est-à-dire que son déterminant soit $= 0$.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Exemple

Trouver les vecteurs propres
et les valeurs propres de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemple

Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3$$

Exemple

Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)-3 = \lambda^2-4$$

Exemple

Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

Exemple

Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Exemple

Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Pour $\lambda_1 = 2$

Exemple

Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Pour $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 3 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Pour $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 3 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Pour $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 3 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -x + y = 0$$

Exemple

Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Pour $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 3 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -x + y = 0 \qquad x = y$$

Exemple

Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)-3 = \lambda^2-4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

Pour $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 3 & -1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -x+y=0 \qquad x=y$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1,1)$.

Pour $\lambda_2 = -2$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$
$$y = -3x$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$
$$y = -3x$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$
$$y = -3x$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$
$$y = -3x$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$
$$y = -3x$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$
$$y = -3x$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$
$$y = -3x$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$
$$y = -3x$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ y &= -3x \end{aligned}$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ y &= -3x \end{aligned}$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$
$$y = -3x$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ y &= -3x \end{aligned}$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ y &= -3x \end{aligned}$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$
$$y = -3x$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{v}) = -2\vec{v}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ y &= -3x \end{aligned}$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{v}) = -2\vec{v}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$
$$y = -3x$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{v}) = -2\vec{v}$$

Pour $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ y &= -3x \end{aligned}$$

On peut prendre comme vecteur propre $(1, -3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{v}) = -2\vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = (1, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = (1, 1) \qquad \lambda_1 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1 = (1, 1) \qquad \lambda_1 = 2$

$\vec{u}_2 = (1, -3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = (1, 1) \qquad \lambda_1 = 2$$

$$\vec{u}_2 = (1, -3) \quad \lambda_2 = -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = (1,1) \qquad \lambda_1 = 2$$

$$\vec{u}_2 = (1,-3) \quad \lambda_2 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = (1, 1) \qquad \lambda_1 = 2$$

$$\vec{u}_2 = (1, -3) \quad \lambda_2 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$= (2)(-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = (1, 1) \qquad \lambda_1 = 2$$

$$\vec{u}_2 = (1, -3) \quad \lambda_2 = -2$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} &= -4 \\ &= (2)(-2) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = (1, 1) \quad \lambda_1 = 2$$

$$\vec{u}_2 = (1, -3) \quad \lambda_2 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$= (2)(-2)$$

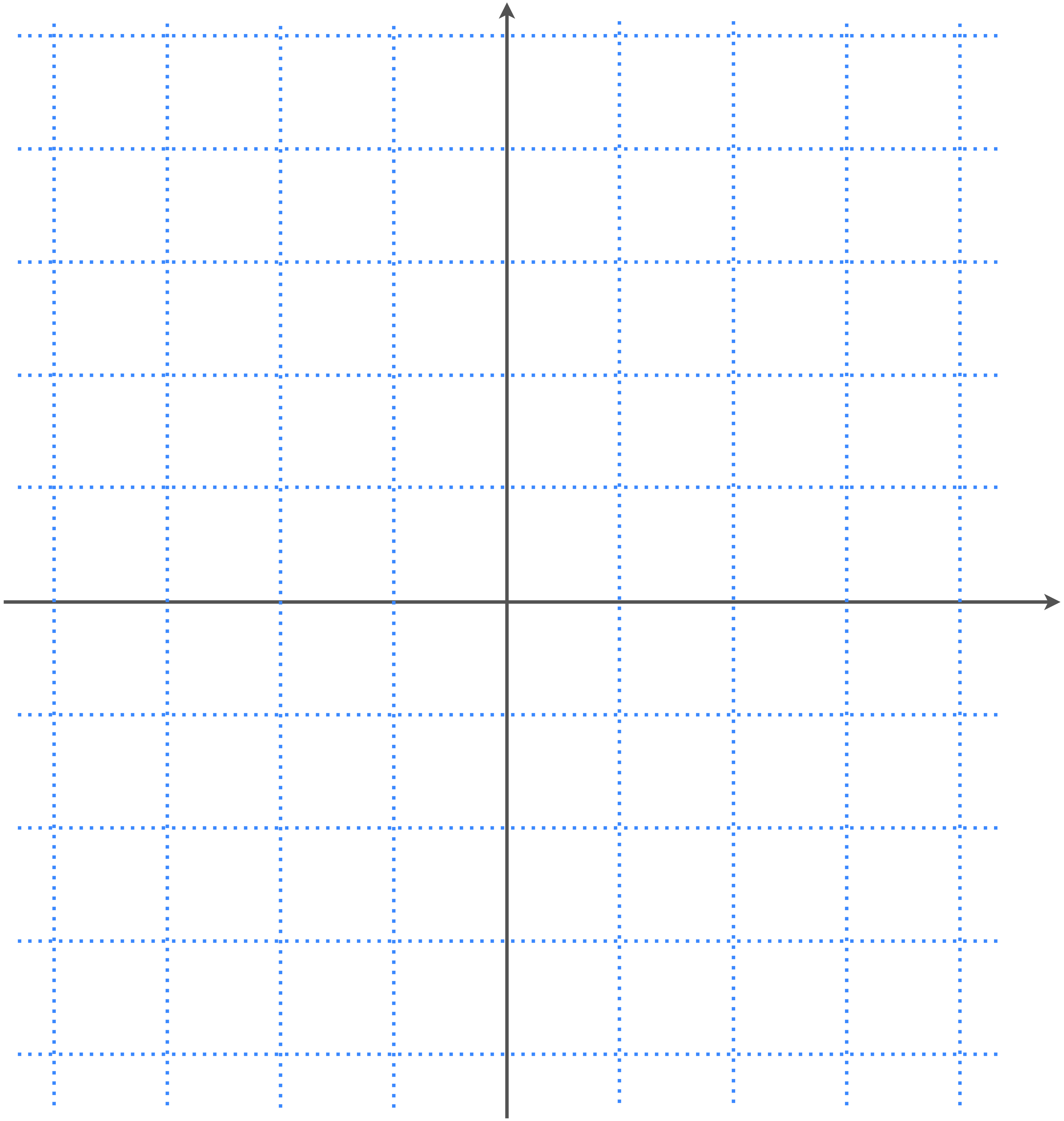
$$= \lambda_1 \lambda_2$$

Coïncidence??

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1 = (1, 1) \quad \lambda_1 = 2$

$\vec{u}_2 = (1, -3) \quad \lambda_2 = -2$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$= (2)(-2)$$

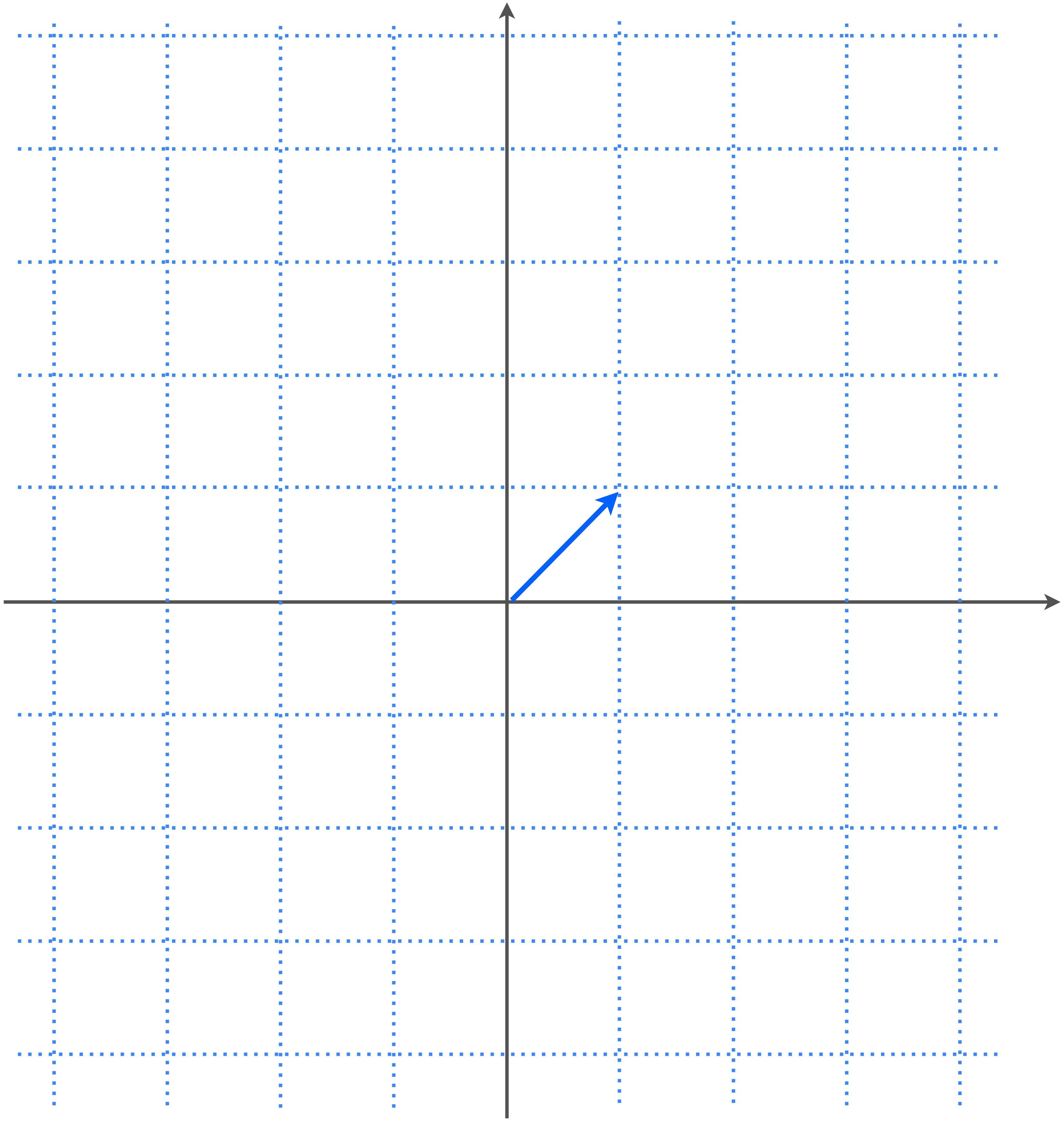
$$= \lambda_1 \lambda_2$$

Coïncidence??

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1 = (1, 1)$ $\lambda_1 = 2$

$\vec{u}_2 = (1, -3)$ $\lambda_2 = -2$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$= (2)(-2)$$

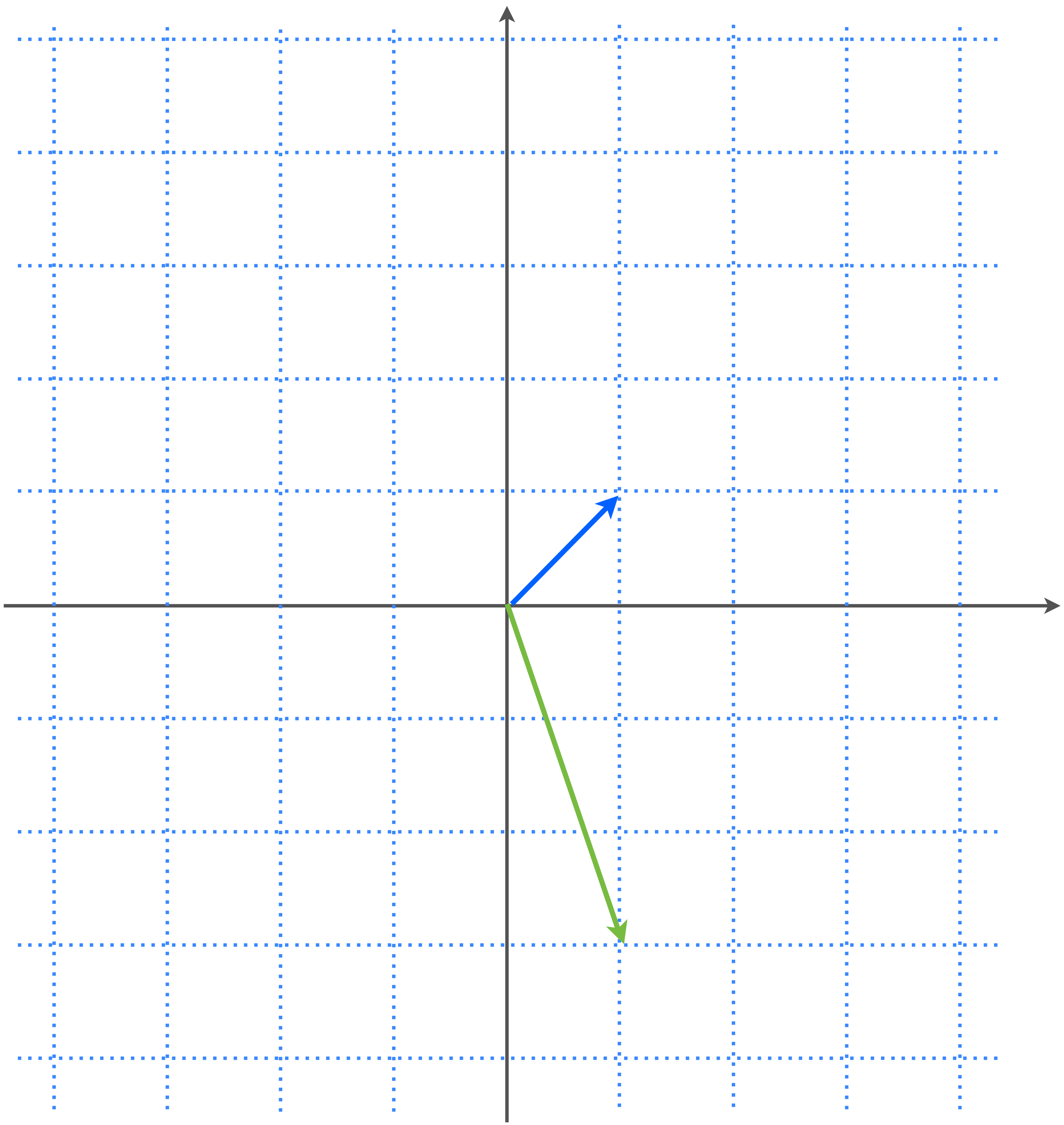
$$= \lambda_1 \lambda_2$$

Coïncidence??

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1 = (1, 1) \quad \lambda_1 = 2$

$\vec{u}_2 = (1, -3) \quad \lambda_2 = -2$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$= (2)(-2)$$

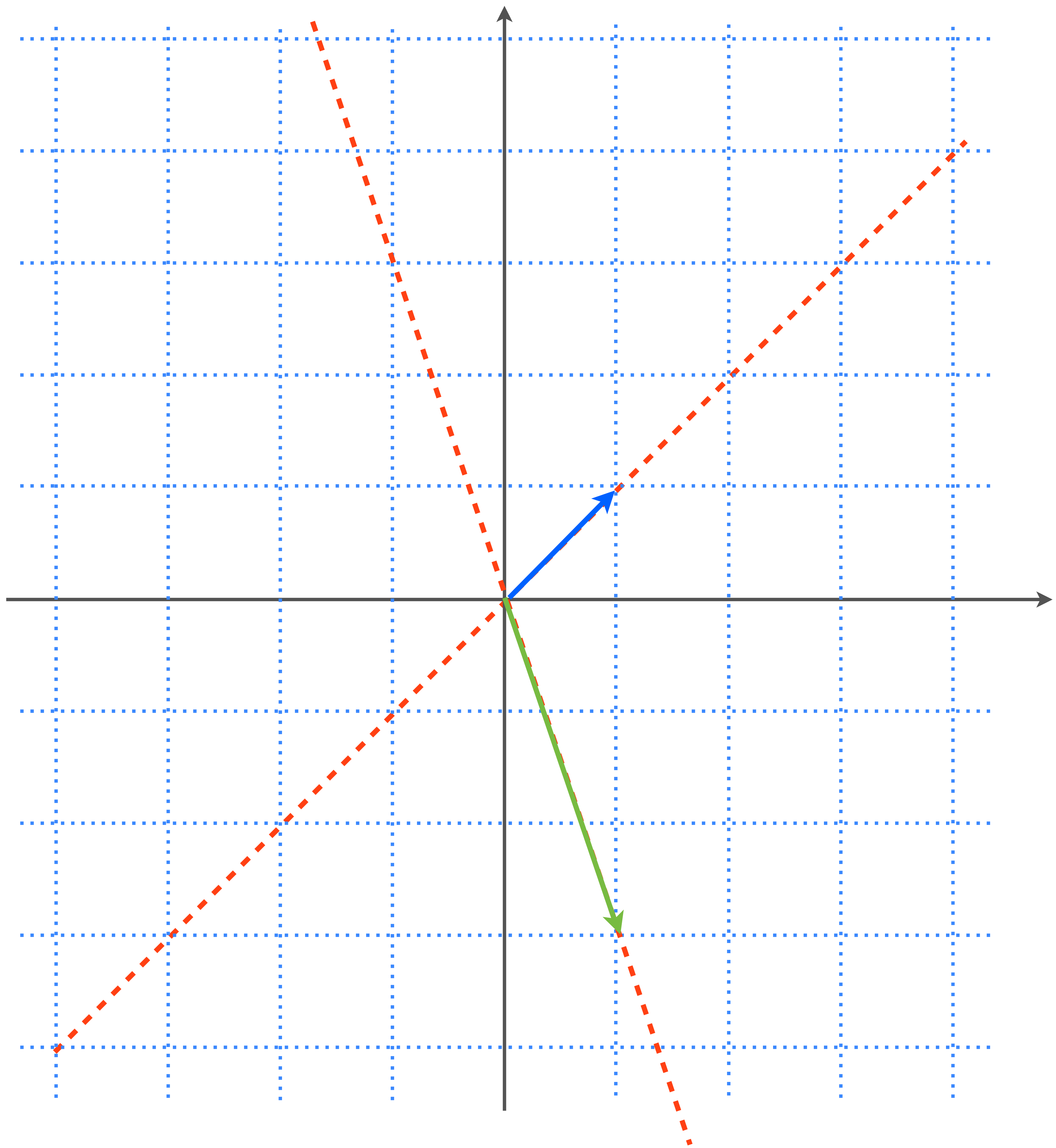
$$= \lambda_1 \lambda_2$$

Coïncidence??

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1 = (1, 1) \qquad \lambda_1 = 2$

$\vec{u}_2 = (1, -3) \qquad \lambda_2 = -2$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$= (2)(-2)$$

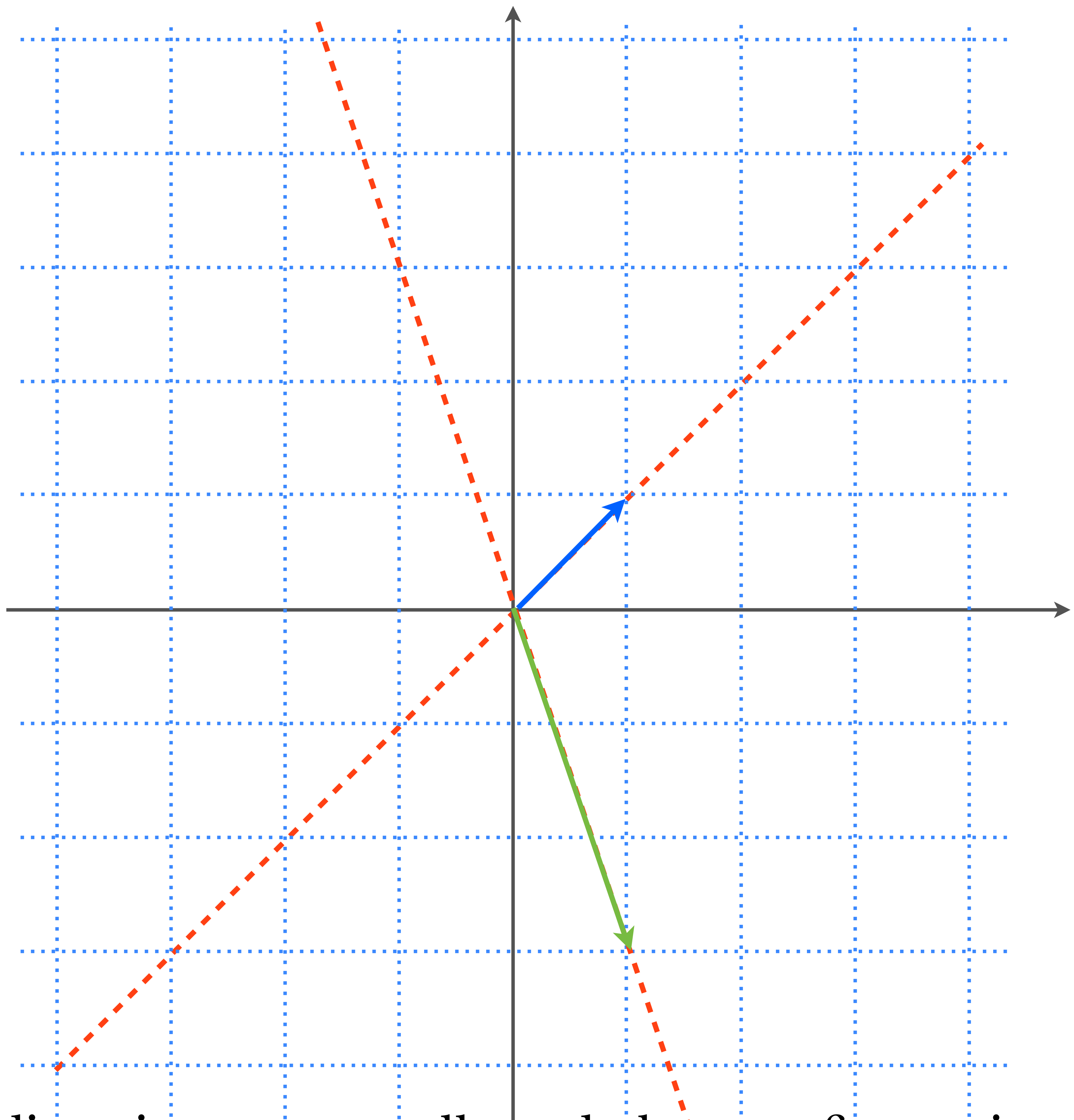
$$= \lambda_1 \lambda_2$$

Coïncidence??

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1 = (1, 1) \qquad \lambda_1 = 2$

$\vec{u}_2 = (1, -3) \qquad \lambda_2 = -2$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$
$$= (2)(-2)$$
$$= \lambda_1 \lambda_2$$

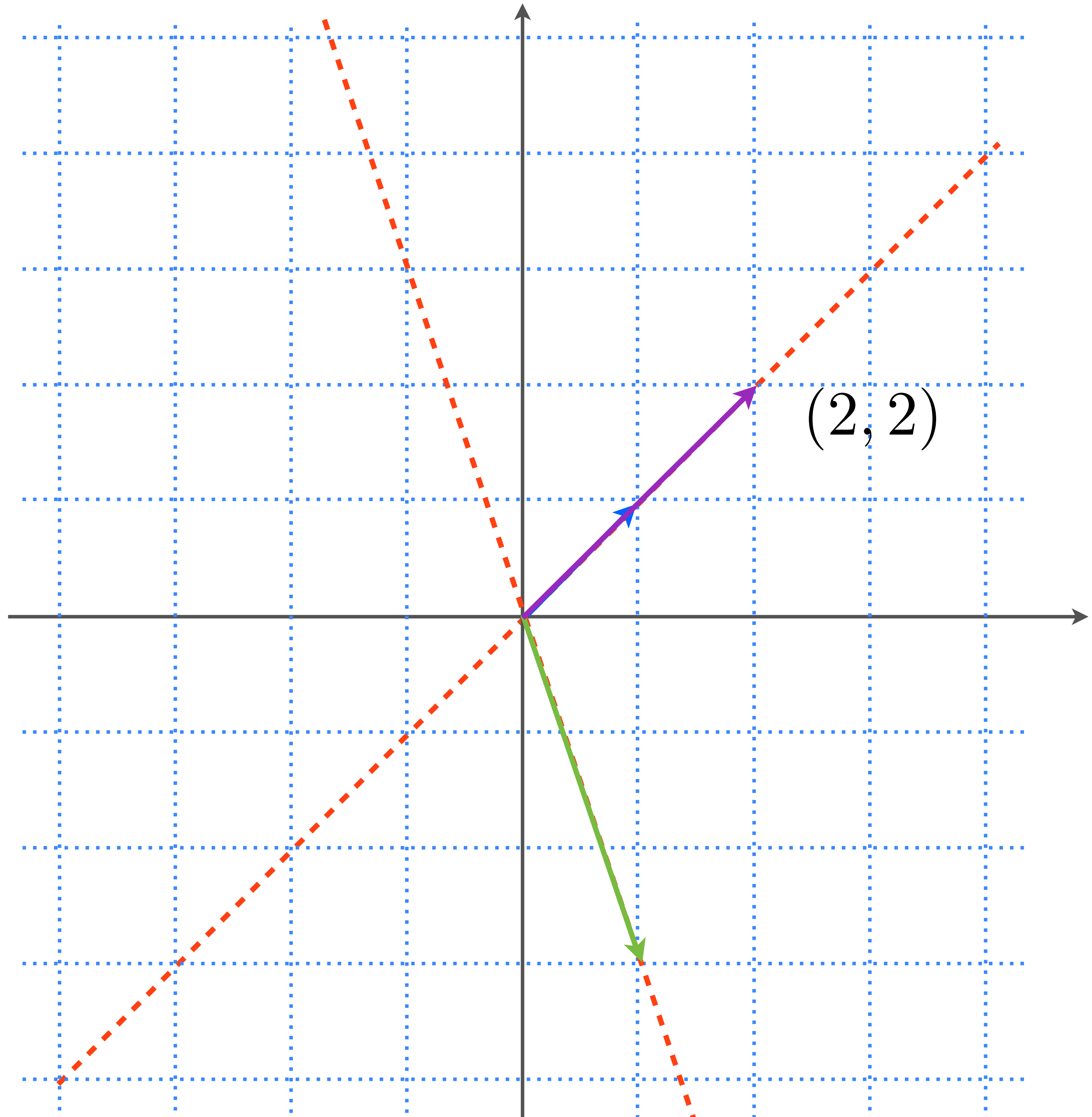
Coïncidence??

Les directions «naturelles» de la transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1 = (1, 1) \quad \lambda_1 = 2$

$\vec{u}_2 = (1, -3) \quad \lambda_2 = -2$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$
$$= (2)(-2)$$
$$= \lambda_1 \lambda_2$$

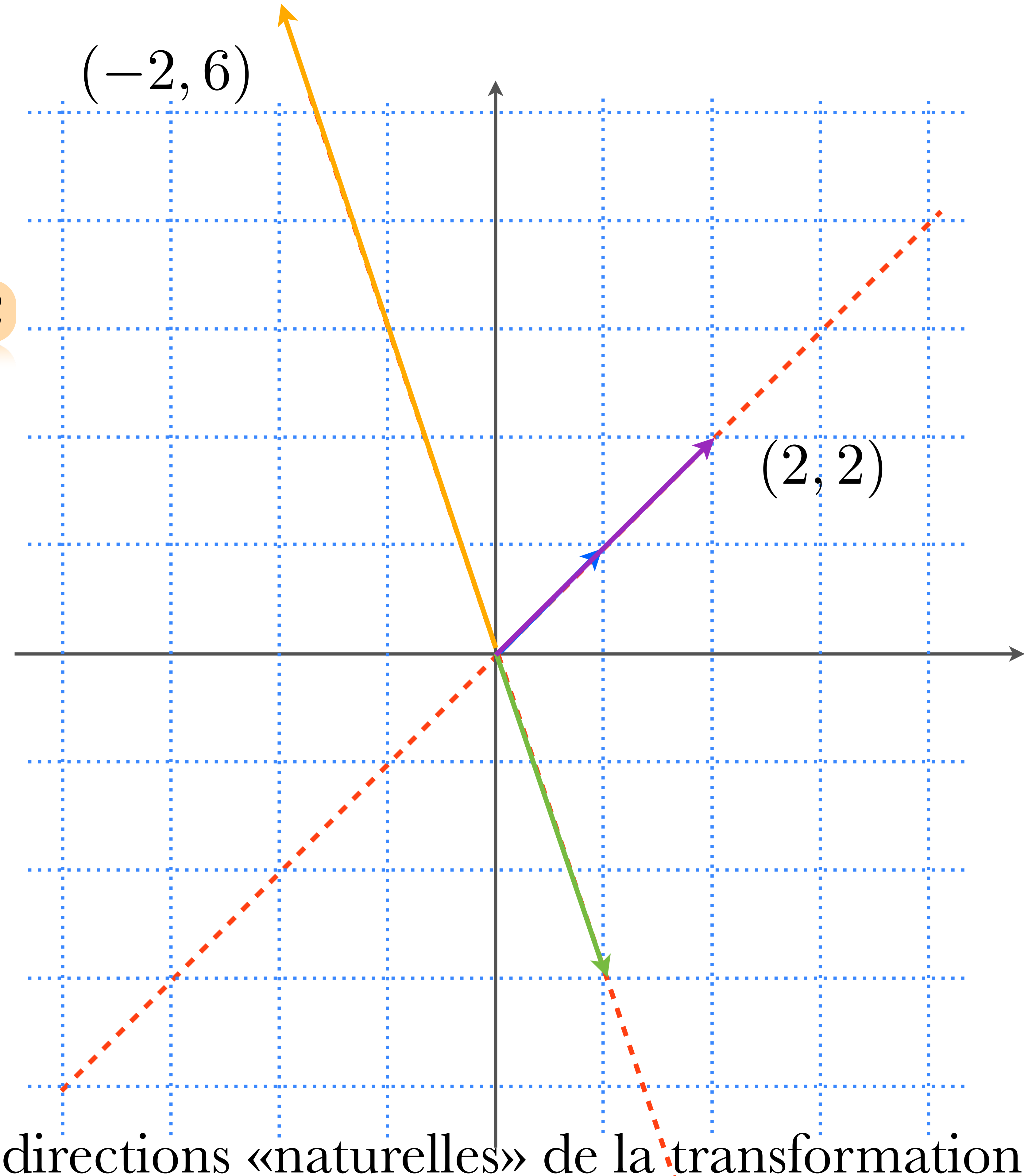
Coïncidence??

Les directions «naturelles» de la transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1 = (1, 1)$ $\lambda_1 = 2$

$\vec{u}_2 = (1, -3)$ $\lambda_2 = -2$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$
$$= (2)(-2)$$
$$= \lambda_1 \lambda_2$$

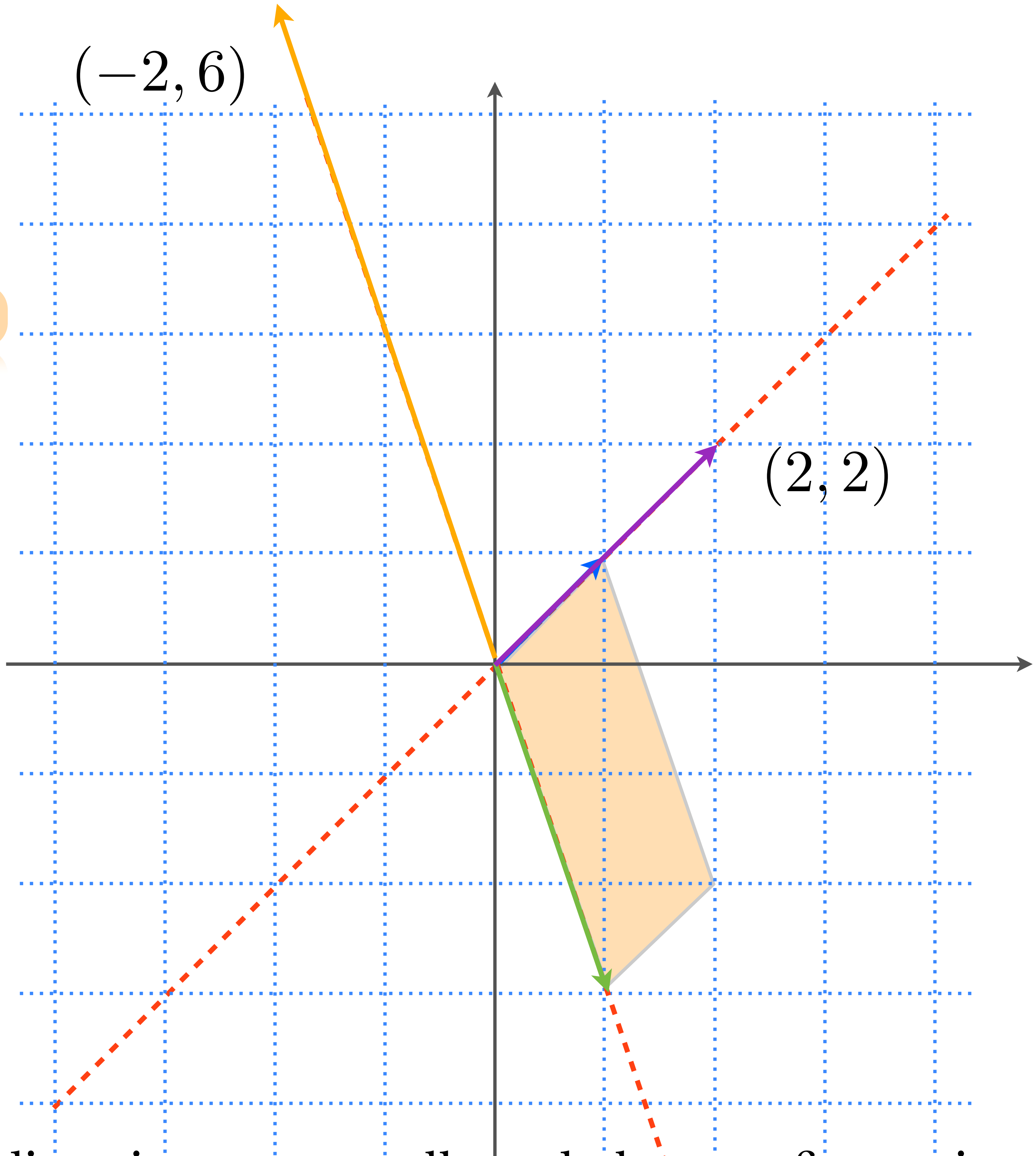
Coïncidence??

Les directions «naturelles» de la transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1 = (1, 1) \quad \lambda_1 = 2$

$\vec{u}_2 = (1, -3) \quad \lambda_2 = -2$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$
$$= (2)(-2)$$
$$= \lambda_1 \lambda_2$$

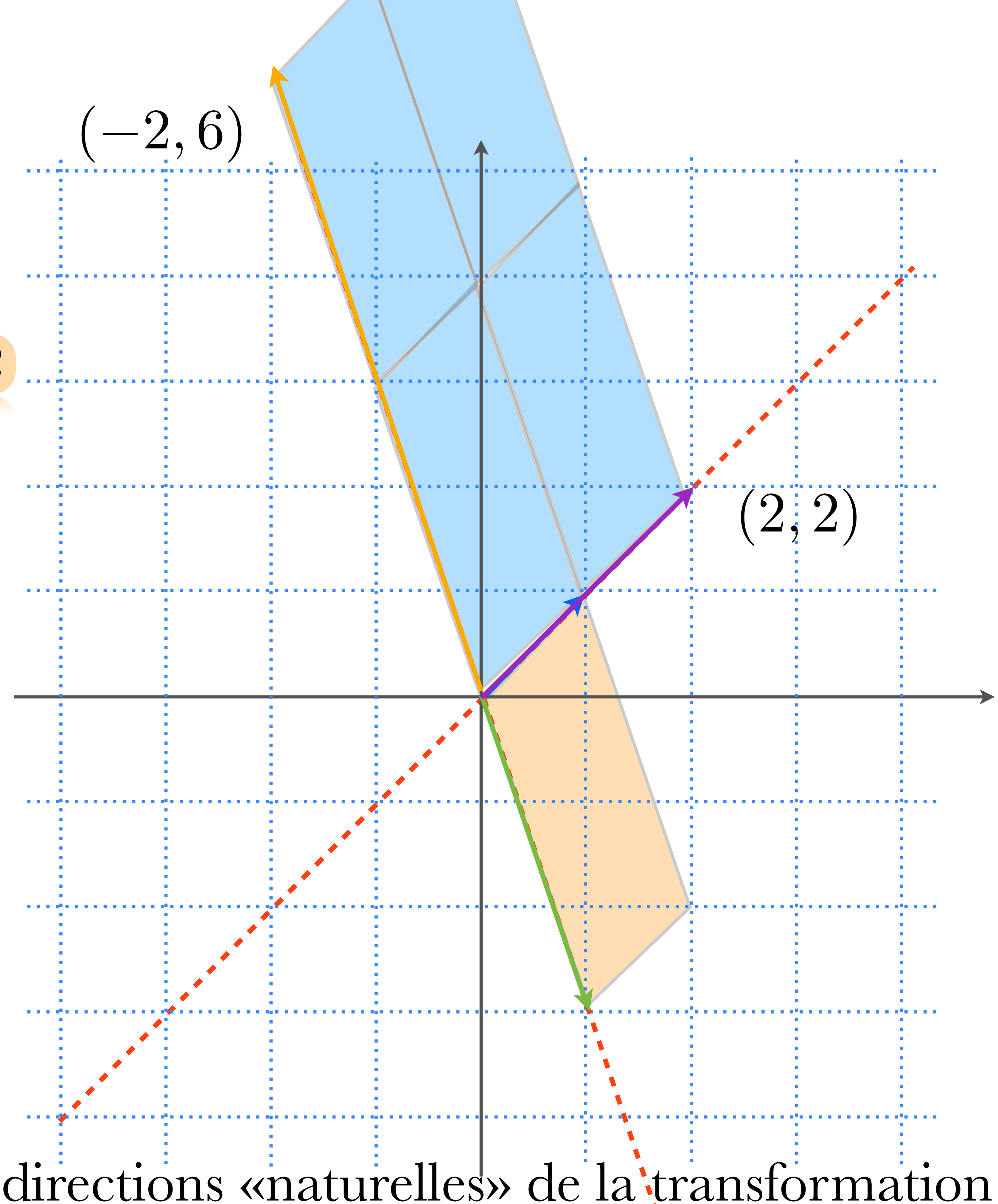
Coïncidence??

Les directions «naturelles» de la transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1 = (1, 1) \quad \lambda_1 = 2$

$\vec{u}_2 = (1, -3) \quad \lambda_2 = -2$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$
$$= (2)(-2)$$
$$= \lambda_1 \lambda_2$$

Coïncidence??

Les directions «naturelles» de la transformation

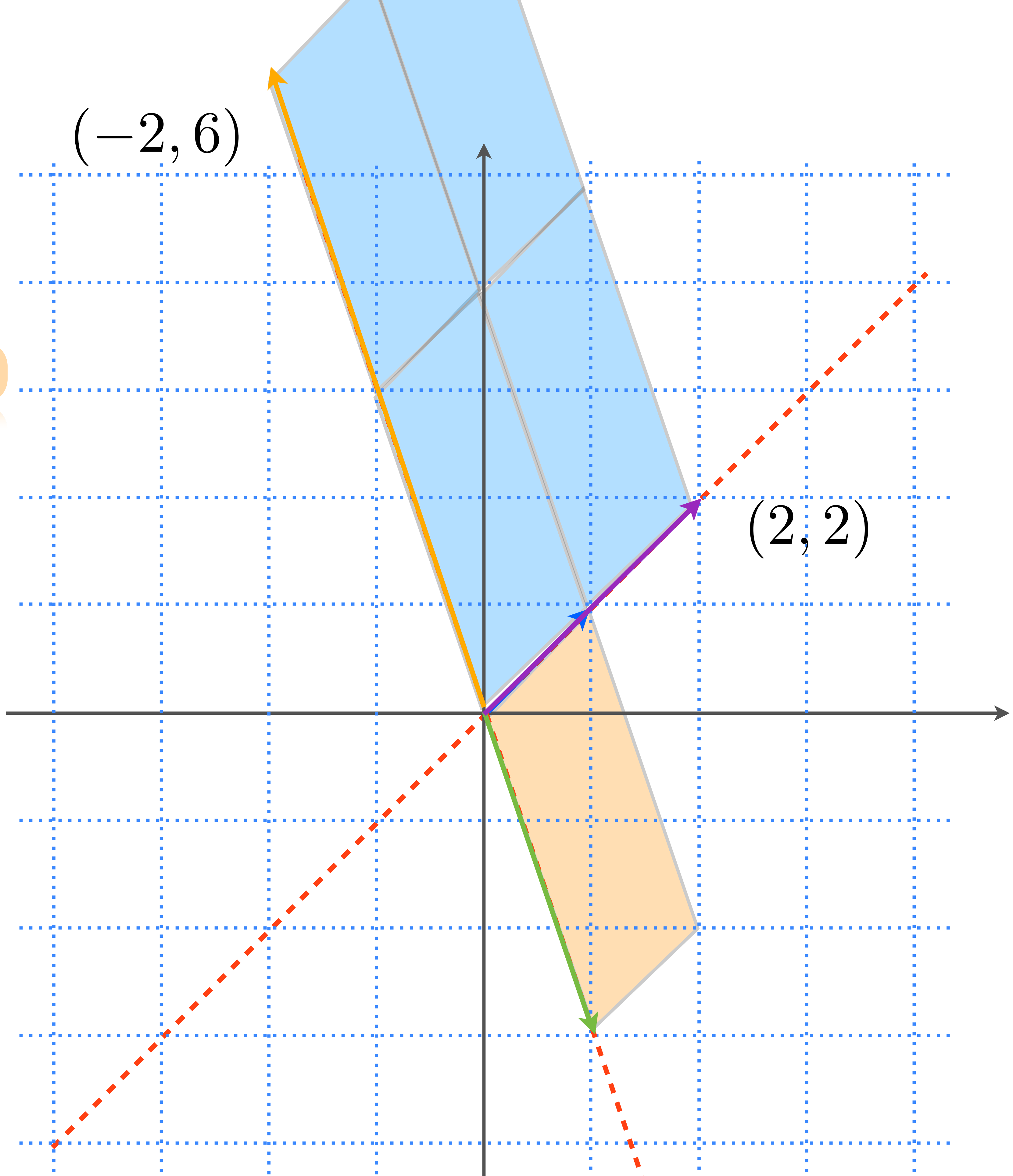
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1 = (1, 1)$ $\quad \lambda_1 = 2$

$\vec{u}_2 = (1, -3)$ $\quad \lambda_2 = -2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$
$$= (2)(-2)$$
$$= \lambda_1 \lambda_2$$

~~Coïncidence??~~



Les directions «naturelles» de la transformation

Explication algébrique

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on doit déterminer les valeurs de λ qui rendent le déterminant suivant nul pour trouver les valeurs propres.

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on doit déterminer les valeurs de λ qui rendent le déterminant suivant nul pour trouver les valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix}$$

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on doit déterminer les valeurs de λ qui rendent le déterminant suivant nul pour trouver les valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on doit déterminer les valeurs de λ qui rendent le déterminant suivant nul pour trouver les valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$$

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on doit déterminer les valeurs de λ qui rendent le déterminant suivant nul pour trouver les valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on doit déterminer les valeurs de λ qui rendent le déterminant suivant nul pour trouver les valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$$

Valeurs propres

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on doit déterminer les valeurs de λ qui rendent le déterminant suivant nul pour trouver les valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$$

Valeurs propres

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on doit déterminer les valeurs de λ qui rendent le déterminant suivant nul pour trouver les valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$$

Valeurs propres

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Le produit des valeurs propres = déterminant

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on doit déterminer les valeurs de λ qui rendent le déterminant suivant nul pour trouver les valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

Valeurs propres

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Le produit des valeurs propres = déterminant

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on doit déterminer les valeurs de λ qui rendent le déterminant suivant nul pour trouver les valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

Valeurs propres

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \boxed{\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2}$$

Le produit des valeurs propres = déterminant

Explication algébrique

Pour un transformation linéaire $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on doit déterminer les valeurs de λ qui rendent le déterminant suivant nul pour trouver les valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$$

Valeurs propres

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Le produit des valeurs propres = déterminant

est le polynôme caractéristique.

Remarque: Ce qui suit est l'illustration d'un théorème qui fait un lien inattendu entre une matrice et son polynôme caractéristique.

Remarque: Ce qui suit est l'illustration d'un théorème qui fait un lien inattendu entre une matrice et son polynôme caractéristique.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque: Ce qui suit est l'illustration d'un théorème qui fait un lien inattendu entre une matrice et son polynôme caractéristique.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Remarque: Ce qui suit est l'illustration d'un théorème qui fait un lien inattendu entre une matrice et son polynôme caractéristique.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

Remarque: Ce qui suit est l'illustration d'un théorème qui fait un lien inattendu entre une matrice et son polynôme caractéristique.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

$$\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I}$$

Remarque: Ce qui suit est l'illustration d'un théorème qui fait un lien inattendu entre une matrice et son polynôme caractéristique.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \boxed{\lambda^2 - 4}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I}}$$

Remarque: Ce qui suit est l'illustration d'un théorème qui fait un lien inattendu entre une matrice et son polynôme caractéristique.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \boxed{\lambda^2 - 4}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque: Ce qui suit est l'illustration d'un théorème qui fait un lien inattendu entre une matrice et son polynôme caractéristique.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \boxed{\lambda^2 - 4}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque: Ce qui suit est l'illustration d'un théorème qui fait un lien inattendu entre une matrice et son polynôme caractéristique.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \boxed{\lambda^2 - 4}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque: Ce qui suit est l'illustration d'un théorème qui fait un lien inattendu entre une matrice et son polynôme caractéristique.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

$$\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice **A** est un zéro de son polynôme caractéristique!?!

Faites les exercices suivants

p. 277, # 1 à 4.

Aujourd’hui, nous avons vu

Aujourd'hui, nous avons vu

✓ La façon de décomposer une transformation linéaire.

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ La façon de décomposer une transformation linéaire.
- ✓ Les vecteurs propres et les valeurs propres.

Devoir: p. 277, # 1 à 9.